Introdução à Investigação Operacional

8ª aula T - Resumo

TEORIA
DAS
FILAS DE ESPERA

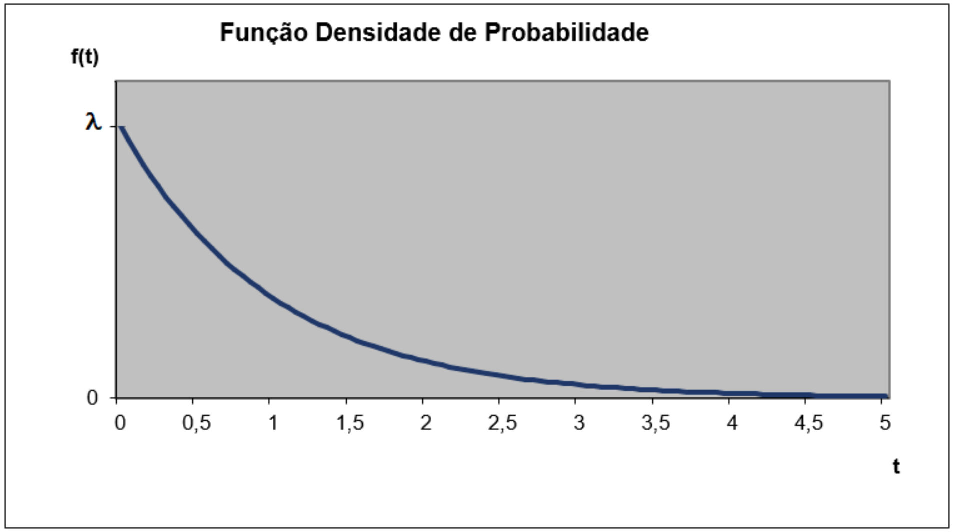
Ruy Costa

Resumo – IIO – T8

A distribuição Exponencial

Básico: Exponencial é contínua e Poisson é discreta!!!

$$T \sim \text{Exp}(\lambda)$$



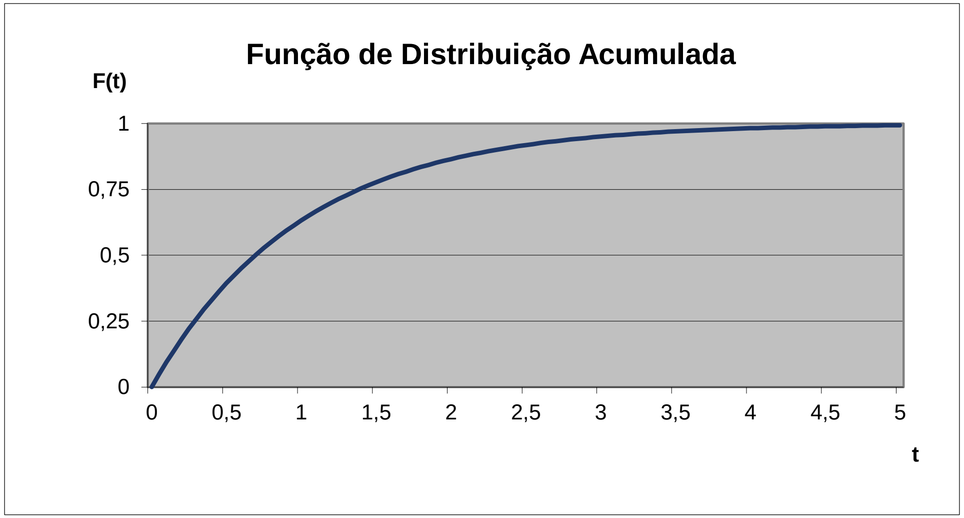
μ = Valor Médio = $1 / \lambda$;

σ = Desvio Padrão = $1 / \lambda$;

(ou seja, $\mu = \sigma = 1 / \lambda$)

γ_1 = Coef. Assim. = +2

γ_2 = Coef. Kurtosis = 9



Resumo – IIO – T8

A distr. Exponencial – propriedades:

Propriedade 1: A **função densidade** de probabilidade da distribuição Exponencial é estritamente **decrescente** (para $t \geq 0$).

Propriedade 2: A distribuição Exponencial **não tem memória**.

Propriedade 3: O <u>*mínimo*</u> de várias variáveis aleatórias independentes com distribuição Exponencial é uma variável aleatória com distribuição Exponencial.

Propriedade 4: A distribuição Exponencial está relacionada com a distribuição de Poisson. Se o intervalo de tempo entre chegadas consecutivas tiver distribuição Exponencial, com parâmetro λ, então **o número de chegadas por unidade de tempo t tem uma distribuição de Poisson**, com parâmetro $\mathbf{m = \lambda\, t}$.

Propriedade 5: Na distribuição Exponencial(λ), para <u>todos</u> os valores positivos de t, verifica-se que $\mathbf{P\,(\,T \leq t + \Delta t \mid T > t\,) \approx \lambda\, \Delta t}$, para pequenos Δt.

Propriedade 6: A distribuição Exponencial <u>não é</u> afetada pela agregação, ou desagregação.

A distr. Exponencial – propriedades:

Soma de Exponenciais:

A **soma de k variáveis** aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Exponencial (λ), é uma variável aleatória **Erlang-K** (Gama).

Se X_i v.a. i.i.d, $X_i \sim$ Exponencial (λ),

então $T \sim (X_1 + X_2 + \ldots + X_k) \sim$ Erlang-k (λ).

Como $E[X] = 1/\lambda$ e $Var[X] = 1/\lambda^2$, é fácil constatar que $E[T] = k/\lambda$ e $Var[T] = k/\lambda^2$.

Pelo Teorema do Limite Central, se k for muito elevado, a distribuição Erlang-k tenderá para a distribuição Normal, tendo-se

$$T \sim (X_1 + X_2 + \ldots + X_k) \sim \text{Normal}(\mu = k/\lambda\ ;\ \sigma^2 = k/\lambda^2).$$

Resumo – IIO – T8
A distribuição de Poisson

$X \sim \text{Poisson}(m)$

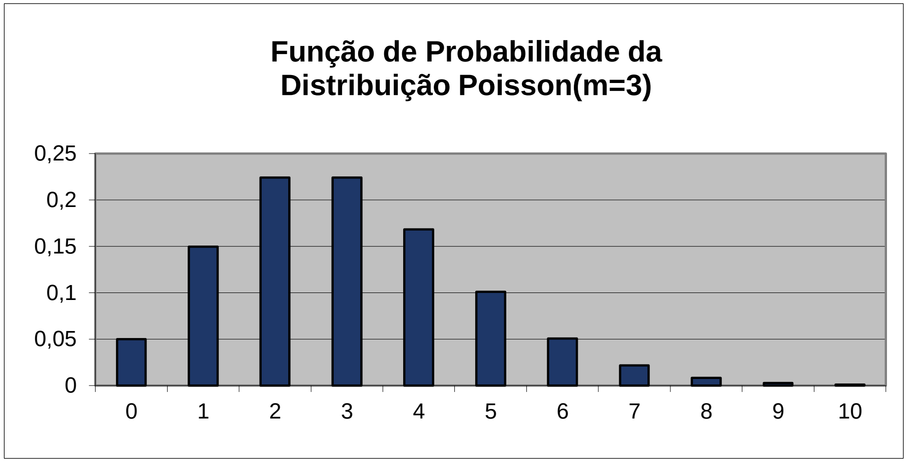
Função de distribuição de probabilidade:

$P_X(k) = P(X = k) = e^{-m} \cdot m^k / k!\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

μ = Valor Médio = m ;

σ^2 = Variância = m ;

(ou seja, $\mu = \sigma^2 = m$).



A distribuição de Poisson é uma das (poucas) distribuições estatísticas que goza da **aditividade**, isto é, a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson é ainda uma variável aleatória de Poisson (com parâmetro igual à soma dos parâmetros das variáveis que foram somadas).

Pelo T.L.C., quando m é elevado poderemos aproximar a Distribuição de Poisson (m) da Distribuição Normal (com valor médio e variância iguais a m).
... Atenção à **correção de continuidade**!

Resumo – IIO – T8

Hipóteses-base Proc. Nascimento e Morte

- **Hip.1:** Dado N(t) = n, a distribuição de probabilidade do tempo *restante* até ao próximo **nascimento** (chegada) é *Exponencial* com parâmetro λ_n (n = 0, 1, 2, …).

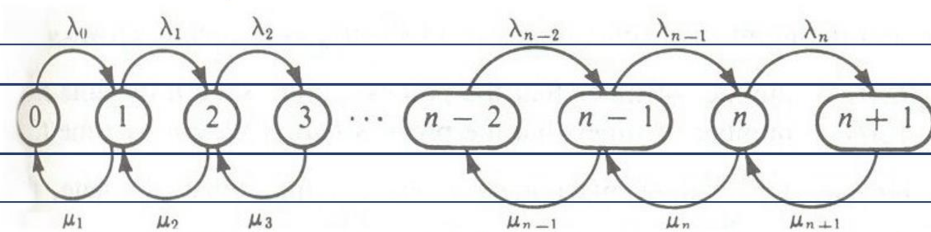
- **Hip.2:** Dado N(t) = n, a distribuição de probabilidade do tempo *restante* até à próxima **morte** (final de atendimento) é *Exponencial* com parâmetro μ_n (n = 0, 1, 2, …).

- **Hip.3:** Em cada instante <u>só</u> pode ocorrer ou <u>um nascimento</u>, ou <u>uma morte</u>.

Diagrama de transição correspondente ao processo de nascimento e morte:

Taxas de Chegada — λ_k: taxa média de chegadas (nº esperado de chegadas por unidade de tempo) de novos clientes quando **k** clientes estão no sistema.

Estado



Taxas de Serviço — μ_K: taxa média de serviço *global* * (nº esperado de atendimentos completados por unidade de tempo) quando **K** clientes estão no sistema.

[* *global* ⇔ taxa combinada relativa aos servidores ocupados]

Há um **princípio fundamental: "taxa de entrada = taxa de saída"** que estipula que, **para qualquer estado do sistema (n = 0, 1, 2, …), a taxa média de entradas é igual à taxa média de saídas**.

Resumo – IIO – T8

O Processo de Nascimento e Morte

Probabilidades $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$

Para simplificar a notação, designemos por

$$P_n = \frac{\lambda_0.\lambda_1.\lambda_2.\ldots.\lambda_{n-1}}{\mu_1.\mu_2.\mu_3.\ldots.\mu_n}.P_0$$

Assim, as probabilidades de equilíbrio são dadas por:

$$P_n = C_n\, P_0\,, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Como o somatório das probabilidades tem que igualar 1, obtém-se:

$$P_0 = 1 \;/\; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right)$$

Resultados Gerais:

- **número médio de clientes no sistema**

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \,.\, P_n$$

Se tivermos um sistema com *s* servidores, poderá haver *s* clientes que estarão a se atendidos, pelo que o

- **número médio de clientes a aguardar atendimento na fila (comprimento médio da fila de espera):**

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) \,.\, P_n$$

- **tempo médio no sistema, por cliente** (incluindo a duração do atendimento) :

$$W = L \;/\; \bar{\lambda} \qquad \textbf{Fórmula de Little}$$

$\bar{\lambda}$ **designa a taxa média de chegadas, a longo prazo,**

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \,.\, P_n$$

- **tempo médio a aguardar atendimento, por cliente** (na fila de espera, exclui a duração do atendimento) :

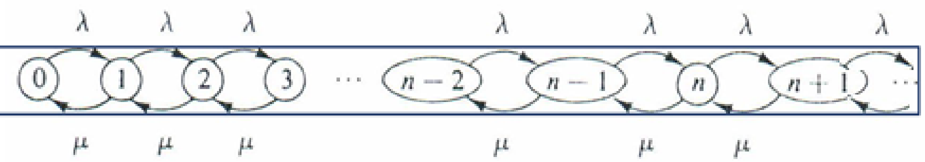
$$W_q = L_q \;/\; \bar{\lambda}$$

Resumo – IIO – T8

O Modelo M/M/1 - Revisão

Diagrama de transição:

Estado



Fator de utilização (ou **intensidade de tráfego**) :

$$\rho = \lambda / \mu$$

Fórmulas de Little $L = \lambda W$; $L_q = \lambda W_q$

Taxa de desocupação do sistema, P_0: $P_0 = 1 - \rho$

Probabilidade de estarem exatamente n pessoas no sistema P_n

$$P_n = \rho^n \,.\, P_0 = \rho^n \,.\, (1 - \rho)$$

Probabilidade de estarem mais do que K pessoas no sistema: $P(n > K) = \rho^{K+1}$

Número médio de clientes no sistema:

$L = \rho / (1 - \rho)$, ou equivalentemente, $L = \lambda / (\mu - \lambda)$.

Resumo – IIO – T8

O Modelo M/M/1 - Revisão

Tempo médio, por cliente, de permanência no sistema: $\boxed{W = 1 / (\mu - \lambda)}$.

Relação entre o **tempo médio de permanência de um cliente no sistema** (W) e o **tempo médio de espera na fila a aguardar o atendimento** (W_q): $\boxed{W = W_q + 1/\mu}$

Nota: $1/\mu$ = tempo médio gasto no serviço

Relação entre o **número médio de clientes no sistema** (L), o **comprimento médio da fila** (L_q):

$$\boxed{L = L_q + \lambda / \mu = L_q + \rho}$$

Atenção: L_q não é igual a $L - 1$, mas sim a $L - \rho$!

Seja $\mathcal{W}$ a variável aleatória que denota o **tempo de permanência de um cliente no sistema, incluindo o atendimento**

Não confundir $\mathcal{W}$ com **W** !!!

$\mathcal{W}$ **~ Exponencial (μ . (1 - ρ))**

Probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo no sistema (incluindo o atendimento): $\boxed{P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu \cdot (1-\rho) \cdot t}, \text{ para } t \geq 0}$.

Probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo na fila de espera a aguardar o início do atendimento $\boxed{P(\mathcal{W}_q > t) = \rho \cdot e^{-\mu \cdot (1-\rho) \cdot t}, \text{ para } t \geq 0}$.

$\boxed{\textbf{Taxa de desocupação} = P_0 = 1 - \rho = P(\mathcal{W}_q = 0)}$.

Resumo – IIO – T8
TPC, Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Teoria das Filas de Espera – ficheiro pdf pp. 177 a 194.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!

Introdução à Investigação Operacional

9ª aula T - Resumo

Ruy Costa

Resumo – IIO – T9

Qual é a sua Opinião?

As distribs Exponencial e de Poisson

Considere as v.a. independentes X1 ~ X2 ~ ... ~ Xn ~ Exponencial(λ = 0,1) e Y1 ~ Y2 ~ ... ~ Yn ~ Poisson(m = 2,3).

Escolha a(s) opção(ões) adequada(s).

A - X1 + X2 + X3 ~ Exponencial(λ = 0,3))

✓B - Mínimo(X1; X2; X3) ~ Exponencial(λ = 0,3)

✓C - X1 + X2 + X3 ~ Gama.

D - X1 + X2 + X3 ~ Normal.

✓E - X1 + X2 + ... + X30 ~ Normal.

✓F - Y1 + Y2 ~ Poisson(m=4,6).

✓G - Y1 + Y2 + ... + Y20 ~ Poisson(m = 46).

✓H - Y1 + Y2 + ... + Y20 ~ Normal.

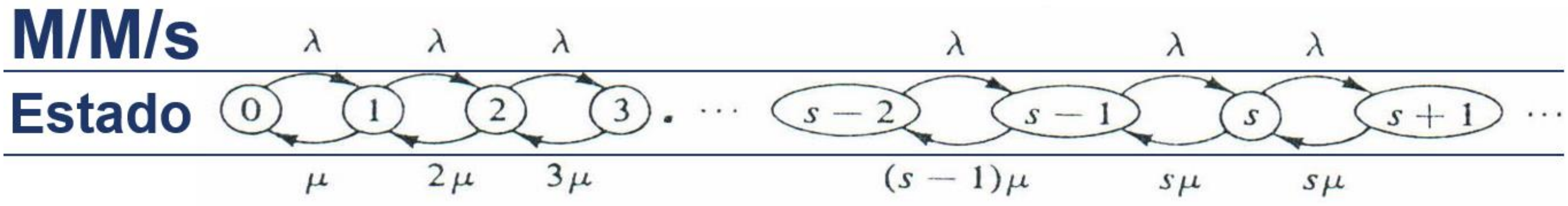
Compare com a(s) sua(s) opinião(ões)!

Resumo – IIO – T9

Modelos M/M/*s*, M/M/1/K com pop. infinita e fila limitada, M/M/*s*/K com pop. infinita e fila limitada

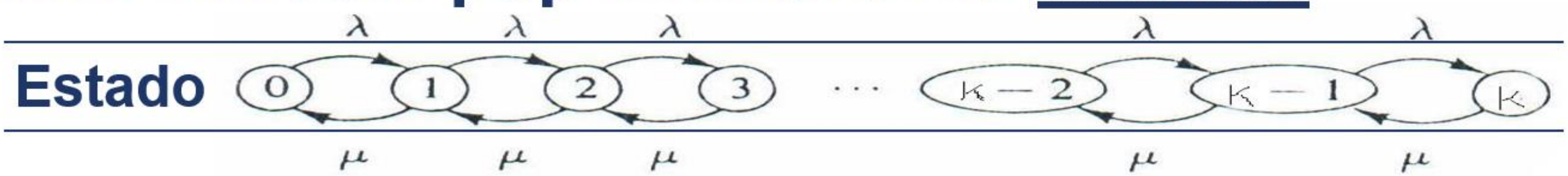
Diagramas de transição:

M/M/s

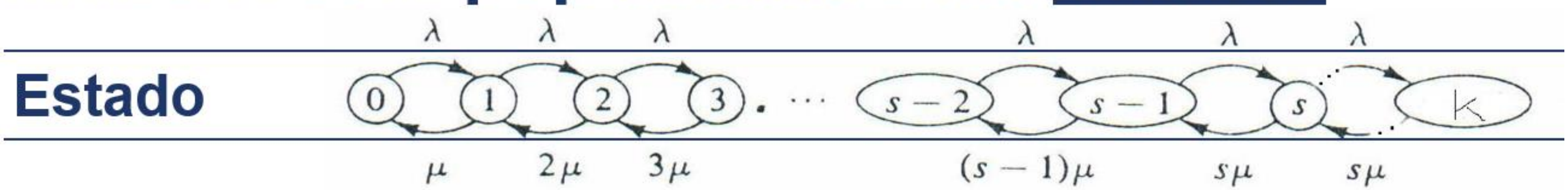


$$\mu_n = \begin{cases} n.\mu & ;n=1,2,\ldots,s \\ s.\mu & ;n \geq s+1 \end{cases}$$

M/M/1/K com pop infinita e fila limitada



M/M/s/K com pop infinita e fila limitada



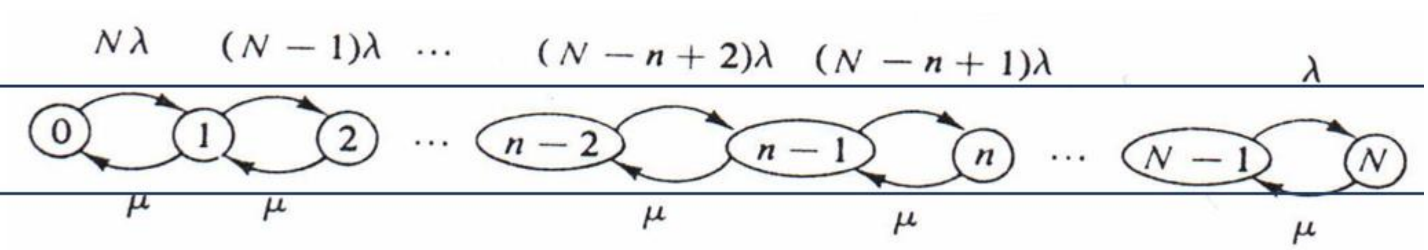
Resumo – IIO – T9 3

Modelos M/M/1/N, M/M/*s*/N com pop. finita e fila "ilimitada"

Diagramas de transição:

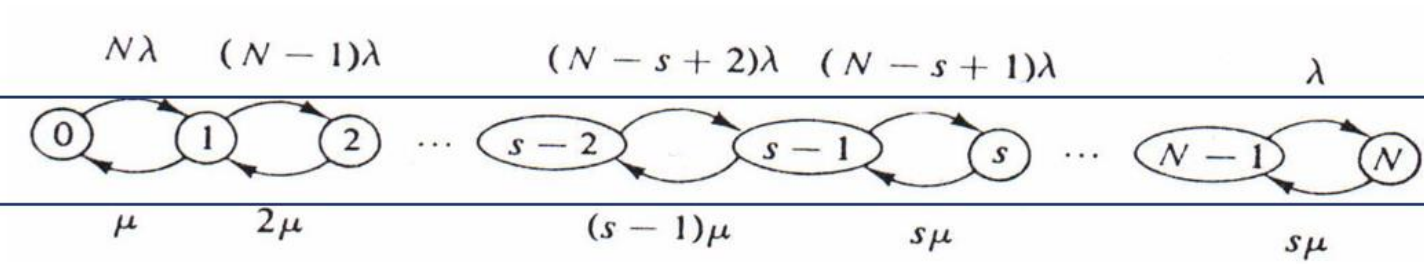
M/M/1/N

Estado



M/M/S/N

Estado



Resumo – IIO – T9

Folha de Cálculo Hillier e Lieberman para vários Modelos

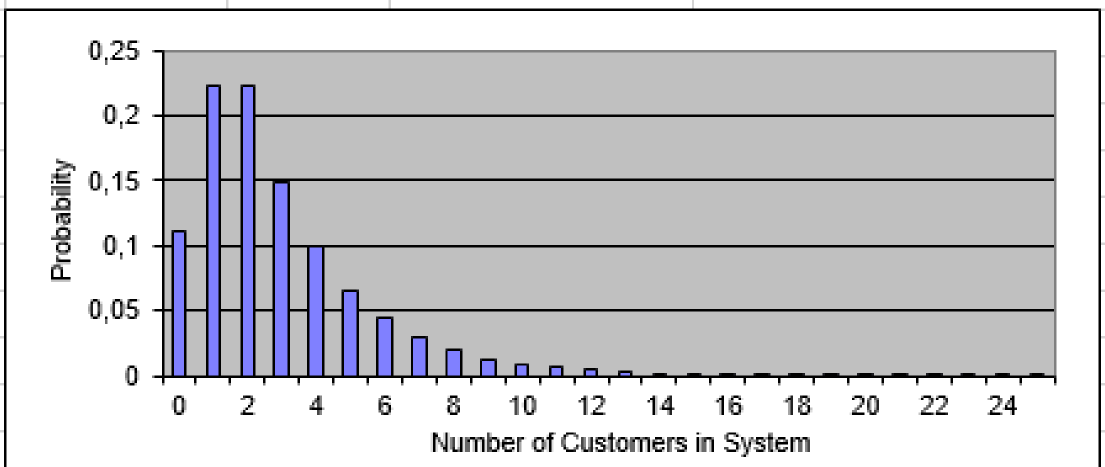
Template for M/M/s Queueing Model

Data

λ =	60	(mean arrival rate)
μ =	30	(mean service rate)
s =	3	(# servers)

Pr($\mathcal{W}$ > t) =	1,34E-12
when t =	1

Prob($\mathcal{W}_q$ > t) =	4,16E-14
when t =	1



Results

L =	2,888888889
L_q =	0,888888889
W =	0,048148148
W_q =	0,014814815
ρ =	0,666666667
P_0 =	0,111111111
P_1 =	0,222222222
P_2 =	0,222222222
P_3 =	0,148148148
P_4 =	0,098765432
P_5 =	0,065843621
P_6 =	0,043895748
P_7 =	0,029263832
P_8 =	0,019509221
P_9 =	0,013006147
P_{10} =	0,008670765
P_{11} =	0,00578051
P_{12} =	0,003853673
P_{13} =	0,002569116

Resumo – IIO – T9

Modelo com tx de chegada e/ou tx de serviço dependente do estado

Assumamos, então, que ***S* = 1** e que

$$\mu_n = n^c \cdot \mu_1 , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = (n+1)^{-b} \cdot \lambda_0 , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$C_n = \frac{(\lambda_0/\mu_1)^n}{(n!)^{b+c}} \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n = C_n P_0 , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_0 = 1/(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n . P_n \qquad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n . P_n$$

Resumo – IIO – T9

Modelo M/G/1 (Cadeias de Markov encaixadas)

Se **$\rho = \lambda / \mu < 1$** um tal sistema poderá eventualmente atingir o estado de equilíbrio, sendo então válidos os seguintes resultados:

$$P_0 = 1 - \rho$$

Fórmula de Pollaczek-Khintchine:

$$\boxed{L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\,(1-\rho)}}$$

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$W = W_q + 1/\mu$$

Resumo – IIO – T9

TPC, Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Teoria das Filas de Espera (Modelos baseados na distr. Exponencial e Modelos envolvendo distr.s não exponenciais)- ficheiro pdf pp. 190 a 211.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!

Introdução à Investigação Operacional

10ª aula T - Resumo

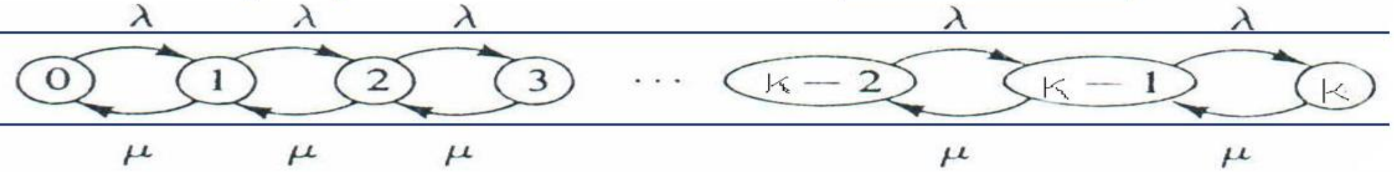
Ruy Costa

Resumo – IIO – T10

Modelos M/M/1ou s/K com pop. infinita e fila limitada, M/M/1 ou s/N com pop. finita e fila "ilimitada"

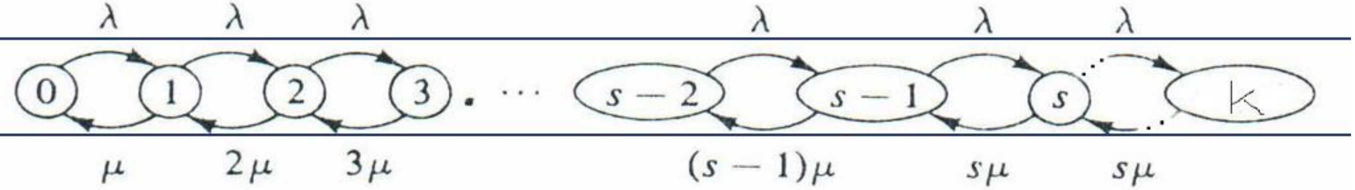
M/M/1/K com pop infinita e fila limitada

Estado



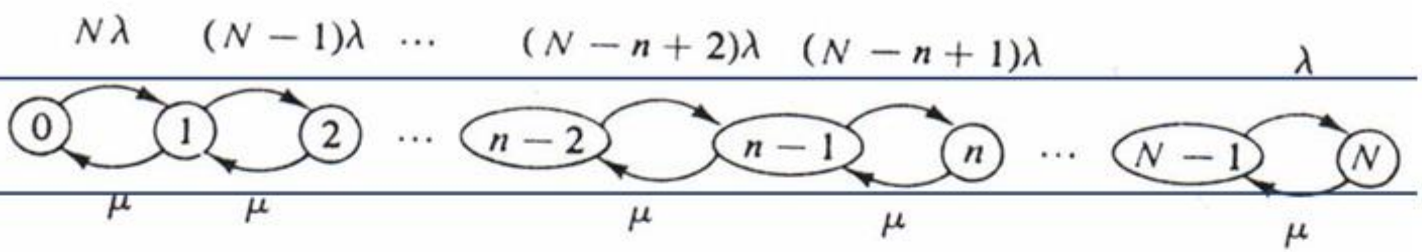
M/M/s/K com pop infinita e fila limitada

Estado



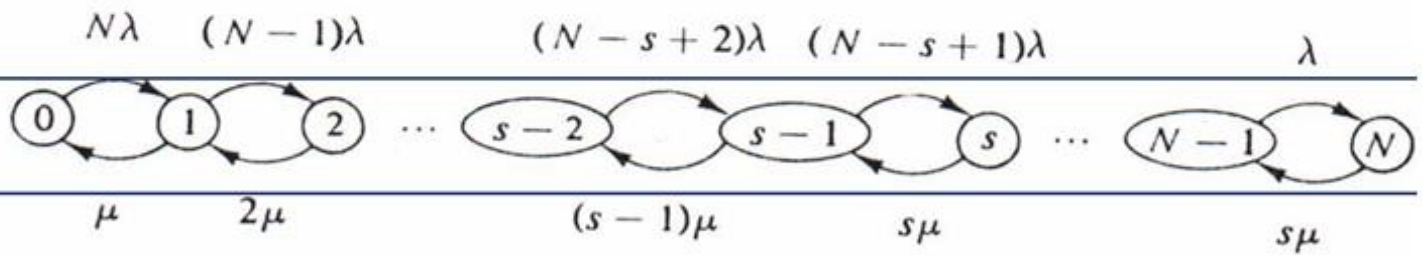
M/M/1/N

Estado



M/M/S/N

Estado



Resumo – IIO – T10
Modelos M/G/1, M/D/1 e $M/E_k/1$

Fórmula de Pollaczek-Khintchine:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\,(1-\rho)}$$

$\sigma^2 = 0$

M/D/1

Grande Variabilidade!

$$L_q = \frac{\rho^2}{2\,(1-\rho)}$$

$\sigma^2 = 1 / (k\,\mu^2)$

$M/E_k/1$

$$Lq = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Situação intermédia

$\sigma^2 = (1/\mu)^2$

M/M/1

$$L_q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Variabilidade Nula!

Resumo – IIO – T10

Modelos com Disciplina Prioritária

Consideremos um **sistema "M/M/s"**, com as seguintes caraterísticas:

- existem **N classes de prioridade** (a classe 1 com prioridade mais elevada e a classe N com mais baixa prioridade). Os clientes são atendidos por ordem das suas classes de prioridade e, dentro da cada classe, por ordem de chegada;

- o **processo de chegadas é Poissoniano**, permitindo-se que a taxa de chegadas de clientes das várias classes possa ser diferente;

- as **durações de atendimento são Exponenciais** para cada classe, assumindo-se, adicionalmente, que a duração média de atendimento é igual para todas as classes.

Resumo – IIO – T10
Modelos com Disciplina Prioritária

Assumamos que as **prioridades são "não absolutas"** (*nonpreemptive priorities*), i.e., um cliente que está a ser atendido, não vê o seu atendimento interrompido pela chegada de um cliente com mais elevada prioridade.

O **tempo de espera médio para um cliente da classe de prioridade k W_k** , (incluindo a duração do atendimento) será dado por:

$$W_k = \frac{1}{A.B_{k-1}.B_k} + \frac{1}{\mu} \quad , \text{ para } k = 1, 2, \ldots, N$$

Folha de Cálculo Excel!

Modelos com Disciplina Prioritária - Exercício FE12

Prioridades "absolutas" M/M/1 :

Tempo de espera médio *total* para um cliente da classe de prioridade k, W_k :

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1}.B_k} \quad , \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N$$

Número médio de clientes da classe de prioridade k no sistema, L_k :

$$L_k = \lambda_k \, . \, W_k \quad , \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots N.$$

Para mais de um servidor... Procedimento iterativo!

Resumo – IIO – T10

Modelos com Disciplina Prioritária - Exercício FE12

Prioridades "absolutas" **M/M/*s*** :

- **Começar com os clientes de classe 1**:

M/M/s com taxas $\lambda = \lambda_1$ e μ

Determinar W_1, L_1, ...

- **Passar aos clientes das classes 1 + 2**:

M/M/s com taxas $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ e μ

Determinar $W \rightarrow \overline{W}_{1-2}$

$$\overline{W}_{1-2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} . W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} . W_2 \quad \rightarrow W_2 \rightarrow L_2, \ldots$$

- **Passar aos clientes das classes 1 + 2 + 3** ...

Resumo – IIO – T8
Filas Ilimitadas em Série

O importantíssimo **Teorema de Jackson**, garante-nos que:

Se

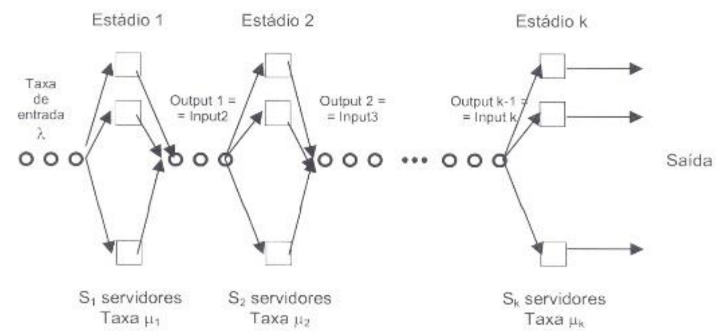
1) o **processo de chegadas** dos clientes a um sistema de espera for **Poissoniano com taxa** λ,

2) as **durações dos atendimentos** dos servidores em cada estádio forem **exponenciais, com parâmetro** μ_i,

e

3) **cada estádio** permitir a formação de uma fila ilimitada (**modelo M/M/s**), com $s.\mu > \lambda$,

então o **processo de saídas** dos clientes de cada estádio do sistema de espera é **Poissoniano com taxa** λ.



A possibilidade de se utilizar um modelo M/M/S para cada estádio, independentemente dos outros, é uma enorme simplificação.

Passa a ser válida a chamada **forma de produto** (*product form*):

$$\boxed{P(N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge \ldots \wedge N_k = n_k) = P_{n1} \,.\, P_{n2} \,.\, \ldots \,.\, P_{nk}}$$

Os sistemas com filas com capacidade limitada **<u>não</u>** apresentam soluções na forma de produto!

Resumo – IIO – T8
Redes de Jackson

Uma Rede de Jackson é um sistema de k estádios onde o estádio i (i = 1, 2, …, k) tem:

1) uma fila ilimitada;

2) os clientes chegam do exterior do sistema de acordo com um processo Poissoniano com parâmetro $\mathbf{a_i}$ e

3) s_i servidores, que asseguram uma distribuição de atendimento exponencial, com parâmetro μ_i.

Um cliente que deixe o estádio i segue para outro estádio j (j = 1, 2, …, k e j ≠ i) com probabilidade p_{ij}, ou partirá do sistema com probabilidade $q_i = 1 - \sum_{j=1\ j\neq i}^{k} p_{ij}$.

Em **situação de equilíbrio**, cada estádio j de uma Rede de Jackson (j = 1, 2, …, k) comporta-se como se fosse um **sistema M/M/S independente**, com taxa de chegadas λ_i :

$$\lambda_j = a_j + \sum_{j=1\ j\neq i}^{k} \lambda_i . p_{ij}, \qquad \text{com } s_j.\mu_i > \lambda_j$$

♦ Número esperado de clientes na RJ : $\mathbf{L} = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$

♦ $\mathbf{P(N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge \ldots \wedge N_k = n_k) = P_{n1} . P_{n2} . \ldots . P_{nk}}$

♦ Como nem todos os clientes são obrigados a ir a todos os estádios, poderemos recorrer à Fórmula de Little, $\mathbf{W = L / \lambda}$ **MAS** com $\lambda = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Resumo – IIO – T8

Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Teoria das Filas de Espera – ficheiro pdf pp. 208 a 219.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!