Introdução à Investigação Operacional

8ª aula T - Resumo

TEORIA
DAS
FILAS DE ESPERA

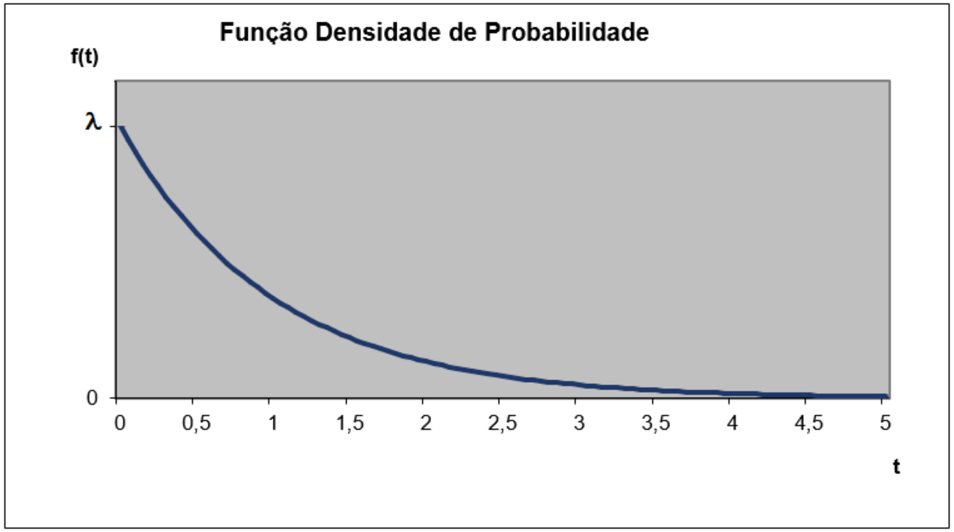
Ruy Costa

Resumo – IIO – T8

A distribuição Exponencial

Básico: Exponencial é contínua e Poisson é discreta!!!

$$T \sim \text{Exp}(\lambda)$$



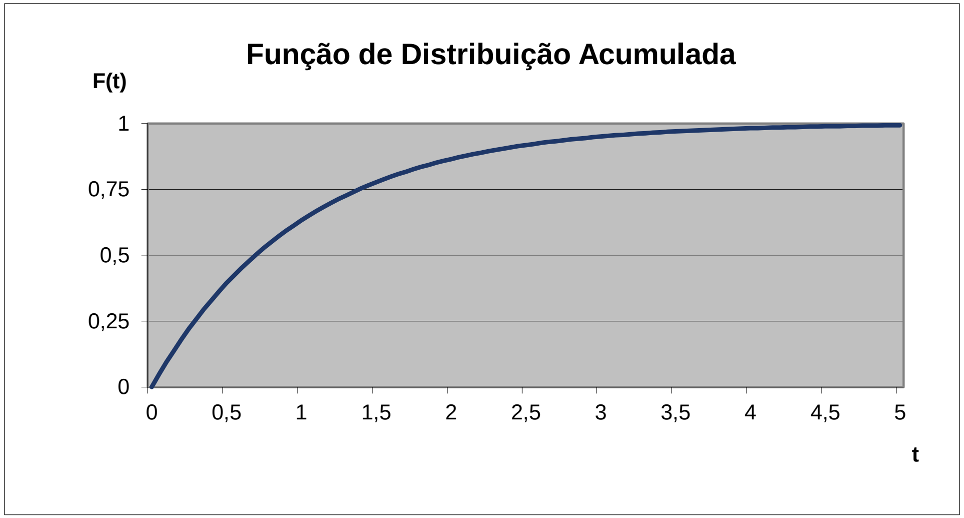
μ = Valor Médio = $1 / \lambda$;

σ = Desvio Padrão = $1 / \lambda$;

(ou seja, $\mu = \sigma = 1 / \lambda$)

γ_1 = Coef. Assim. = +2

γ_2 = Coef. Kurtosis = 9



Resumo – IIO – T8

A distr. Exponencial – propriedades:

Propriedade 1: A **função densidade** de probabilidade da distribuição Exponencial é estritamente **decrescente** (para $t \geq 0$).

Propriedade 2: A distribuição Exponencial **não tem memória**.

Propriedade 3: O *mínimo* de várias variáveis aleatórias independentes com distribuição Exponencial é uma variável aleatória com distribuição Exponencial.

Propriedade 4: A distribuição Exponencial está relacionada com a distribuição de Poisson. Se o intervalo de tempo entre chegadas consecutivas tiver distribuição Exponencial, com parâmetro λ, então **o número de chegadas por unidade de tempo t tem uma distribuição de Poisson**, com parâmetro $\mathbf{m = \lambda\, t}$.

Propriedade 5: Na distribuição Exponencial(λ), para todos os valores positivos de t, verifica-se que $\mathbf{P\,(\,T \leq t + \Delta t \mid T > t\,) \approx \lambda\, \Delta t}$, para pequenos Δt.

Propriedade 6: A distribuição Exponencial não é afetada pela agregação, ou desagregação.

Resumo – IIO – T8

A distr. Exponencial – propriedades:

Soma de Exponenciais:

A **soma de k variáveis** aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Exponencial (λ), é uma variável aleatória **Erlang-K** (Gama).

Se X_i v.a. i.i.d, $X_i \sim$ Exponencial (λ),

então $T \sim (X_1 + X_2 + \ldots + X_k) \sim$ Erlang-k (λ).

Como $E[X] = 1/\lambda$ e $Var[X] = 1/\lambda^2$, é fácil constatar que $E[T] = k/\lambda$ e $Var[T] = k/\lambda^2$.

Pelo Teorema do Limite Central, se k for muito elevado, a distribuição Erlang-k tenderá para a distribuição Normal, tendo-se

$$T \sim (X_1 + X_2 + \ldots + X_k) \sim \text{Normal}(\mu = k/\lambda\ ;\ \sigma^2 = k/\lambda^2).$$

Resumo – IIO – T8
A distribuição de Poisson

$$X \sim \text{Poisson}(m)$$

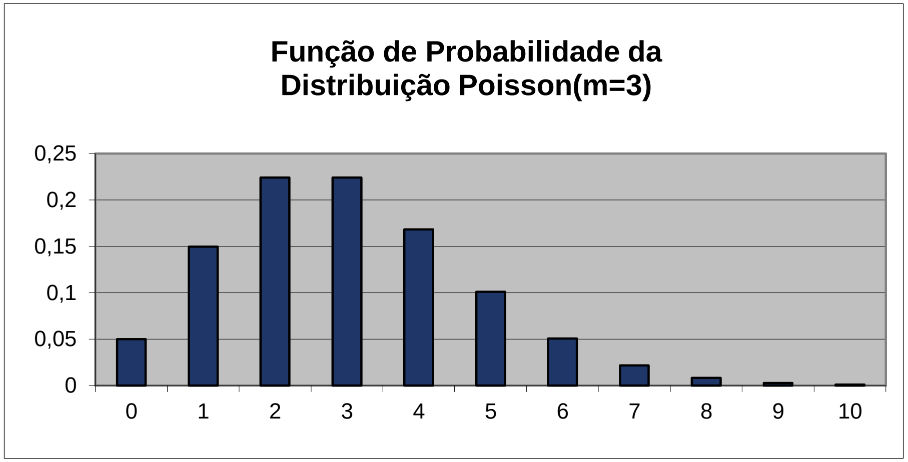
Função de distribuição de probabilidade:

$$P_X(k) = P(X = k) = e^{-m} \cdot m^k / k!\,,\quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

μ = Valor Médio = m ;

σ^2 = Variância = m ;

(ou seja, $\mu = \sigma^2 = m$).



A distribuição de Poisson é uma das (poucas) distribuições estatísticas que goza da **aditividade**, isto é, a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson é ainda uma variável aleatória de Poisson (com parâmetro igual à soma dos parâmetros das variáveis que foram somadas).

Pelo T.L.C., quando m é elevado poderemos aproximar a Distribuição de Poisson (m) da Distribuição Normal (com valor médio e variância iguais a m).
... Atenção à **correção de continuidade**!

Resumo – IIO – T8

Hipóteses-base Proc. Nascimento e Morte

- **Hip.1:** Dado N(t) = n, a distribuição de probabilidade do tempo *restante* até ao próximo **nascimento** (chegada) é *Exponencial* com parâmetro λ_n (n = 0, 1, 2, …).

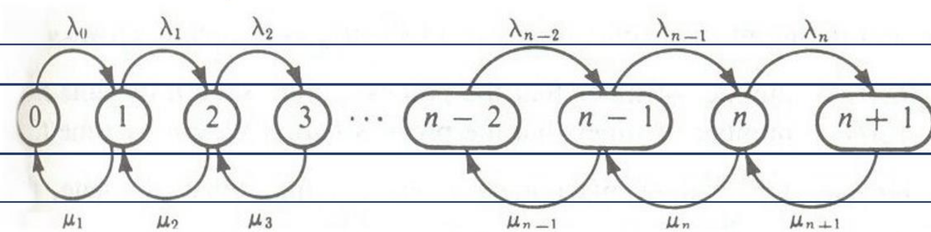
- **Hip.2:** Dado N(t) = n, a distribuição de probabilidade do tempo *restante* até à próxima **morte** (final de atendimento) é *Exponencial* com parâmetro μ_n (n = 0, 1, 2, …).

- **Hip.3:** Em cada instante só pode ocorrer ou um nascimento, ou uma morte.

Diagrama de transição correspondente ao processo de nascimento e morte:

Taxas de Chegada — λ_k: taxa média de chegadas (nº esperado de chegadas por unidade de tempo) de novos clientes quando **k** clientes estão no sistema.

Estado



Taxas de Serviço — μ_K: taxa média de serviço *global* * (nº esperado de atendimentos completados por unidade de tempo) quando **K** clientes estão no sistema.

[* *global* ⇔ taxa combinada relativa aos servidores ocupados]

Há um **princípio fundamental: "taxa de entrada = taxa de saída"** que estipula que, **para qualquer estado do sistema (n = 0, 1, 2, …), a taxa média de entradas é igual à taxa média de saídas**.

Resumo – IIO – T8

O Processo de Nascimento e Morte

Probabilidades $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$

Para simplificar a notação, designemos por

$$P_n = \frac{\lambda_0.\lambda_1.\lambda_2.\ldots.\lambda_{n-1}}{\mu_1.\mu_2.\mu_3.\ldots.\mu_n}.P_0$$

Assim, as probabilidades de equilíbrio são dadas por:

$$P_n = C_n P_0, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Como o somatório das probabilidades tem que igualar 1, obtém-se:

$$P_0 = 1 \;/\; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right)$$

Resultados Gerais:

♦ **número médio de clientes no sistema**

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\,.\,P_n$$

Se tivermos um sistema com *s* servidores, poderá haver *s* clientes que estarão a se atendidos, pelo que o

♦ **número médio de clientes a aguardar atendimento na fila (comprimento médio da fila de espera):**

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s)\,.\,P_n$$

♦ **tempo médio no sistema, por cliente** (incluindo a duração do atendimento) :

$$W = L \;/\; \bar{\lambda} \qquad \textbf{Fórmula de Little}$$

$\bar{\lambda}$ **designa a taxa média de chegadas, a longo prazo,**

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,.\,P_n$$

♦ **tempo médio a aguardar atendimento, por cliente** (na fila de espera, exclui a duração do atendimento) :

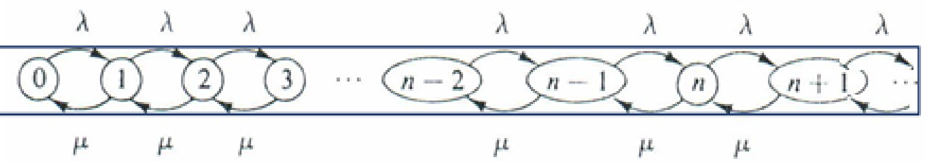
$$W_q = L_q \;/\; \bar{\lambda}$$

Resumo – IIO – T8

O Modelo M/M/1 - Revisão

Diagrama de transição:

Estado



Fator de utilização (ou **intensidade de tráfego**) :

$$\rho = \lambda / \mu$$

Fórmulas de Little $L = \lambda W \quad ; \quad L_q = \lambda W_q$

Taxa de desocupação do sistema, P_0: $P_0 = 1 - \rho$

Probabilidade de estarem exatamente n pessoas no sistema P_n

$$P_n = \rho^n \, . \, P_0 = \rho^n \, . \, (1 - \rho)$$

Probabilidade de estarem mais do que K pessoas no sistema:

$$P(n > K) = \rho^{K+1}$$

Número médio de clientes no sistema:

$L = \rho / (1 - \rho)$, ou equivalentemente, $L = \lambda / (\mu - \lambda)$.

Resumo – IIO – T8

O Modelo M/M/1 - Revisão

Tempo médio, por cliente, de permanência no sistema: $\boxed{W = 1 / (\mu - \lambda)}$.

Relação entre o **tempo médio de permanência de um cliente no sistema** (W) e o **tempo médio de espera na fila a aguardar o atendimento** (W_q): $\boxed{W = W_q + 1 / \mu}$

Nota: $1/\mu$ = tempo médio gasto no serviço

Relação entre o **número médio de clientes no sistema** (L), o **comprimento médio da fila** (L_q):

$$\boxed{L = L_q + \lambda / \mu = L_q + \rho}$$

Atenção: L_q não é igual a $L - 1$, mas sim a $L - \rho$!

Seja $\mathcal{W}$ a variável aleatória que denota o **tempo de permanência de um cliente no sistema, incluindo o atendimento**

Não confundir $\mathcal{W}$ com **W** !!!

$\mathcal{W}$ **~ Exponencial (μ . (1 - ρ))**

Probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo no sistema (incluindo o atendimento): $\boxed{P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu \cdot (1-\rho) \cdot t}, \text{ para } t \geq 0}$.

Probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo na fila de espera a aguardar o início do atendimento $\boxed{P(\mathcal{W}_q > t) = \rho \cdot e^{-\mu \cdot (1-\rho) \cdot t}, \text{ para } t \geq 0}$.

$\boxed{\textbf{Taxa de desocupação} = \boldsymbol{P_0} = 1 - \rho = P(\mathcal{W}_q = 0)}$.

Resumo – IIO – T8

TPC, Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Teoria das Filas de Espera – ficheiro pdf pp. 177 a 194.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!