Introdução à Investigação Operacional

4ª aula T - Resumo

Resumo – IIO – T4
Alg. Simplex – Multiplicidade de Soluções Ótimas

Maximizar $F = 3.X + 3.Y$

sujeito a:

$1.X + 3.Y \leq 12$
$1.X + 1.Y \leq 6$
$2.X + 1.Y \leq 10$

$X, Y \geq 0$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_1	1	3	1	0	0	12	12/1	
F_2	1	1	0	1	0	6	6/1	
F_3	2	1	0	0	1	10	10/2	←
F	- 3	-3	0	0	0	0	$\Delta = 5$	
	↑	↑						

Quadro Inicial

X = 0 ; Y = 0
F = 0

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_1	0	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)	
F_2	0	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)	←
X	1	1/2	0	0	1/2	5	5/(1/2)	
F	0	-3/2	0	0	3/2	15	$\Delta = 2$	
		↑						

1ª Iteração

X = 5; Y = 0
F = 15

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_1	0	0	1	-5	2	2	2 / 2	←
Y	0	1	0	2	-1	2	—	
X	1	0	0	-1	1	4	4 / 1	
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 1$	
					↑			

2ª Iteração

X* = 4 ; Y* = 2
F* = 18
Sol. óptima

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_3	0	0	1/2	-5/2	1	1	1/(1/2)	←
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	3/(1/2)	
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	—	
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 2$	
			↑					

3ª Iteração

X* = 3 ; Y* = 3
F* = 18
Sol. óptima

$$(X^* , Y^*) = \lambda . (4 , 2) + (1 - \lambda) . (3 , 3) \quad ; \lambda \in [0 , 1]$$

Resumo – IIO – T4
Alg. Simplex – casos particulares

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j
Y	0	1	-1/6	2/3	23/6	—
X	1	0	-1/3	1/3	5/3	—
F	0	0	- 7/6	8/3	89/6	Δ = ?

1ª Iteração

X= 5/3 ; Y = 23/6

F = 89/6

Sol. não óptima

Problema com espaço de soluções ilimitado e sem sol. ótima limitada!

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j
Y	0	1	-1/6	2/3	23/6	—
X	1	0	-1/3	1/3	5/3	—
F	0	0	0	2	12	Δ = ?

1ª Iteração

X*= 5/3 ; Y* = 23/6

F* = 12

Sol. óptima
não única !

(X* = 5/3; Y* = 23/6) é a única s.b.a que é ótima. Mas, há infinitas soluções ótimas <u>não</u> básicas ... (espaço de soluções ilimitado).

Resumo – IIO – T4

Formulação Matricial do Simplex

$$\begin{array}{ccc} \text{Var.s Básicas} & \text{Var.s Não Básicas} & \text{TI} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c:c|c} B & D & b \\ \hdashline -\,C_B & -\,C_D & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

X_B – variáveis básicas

$$\begin{array}{c:c|c} I & B^{-1} \times D & B^{-1} \times b \\ \hdashline 0 & -\,C_D + C_B \times B^{-1} \times D & (+\,C_B) \times B^{-1} \times b \end{array}$$

r - coeficientes de otimalidade

F – valor da f.o.

Resumo – IIO – T4

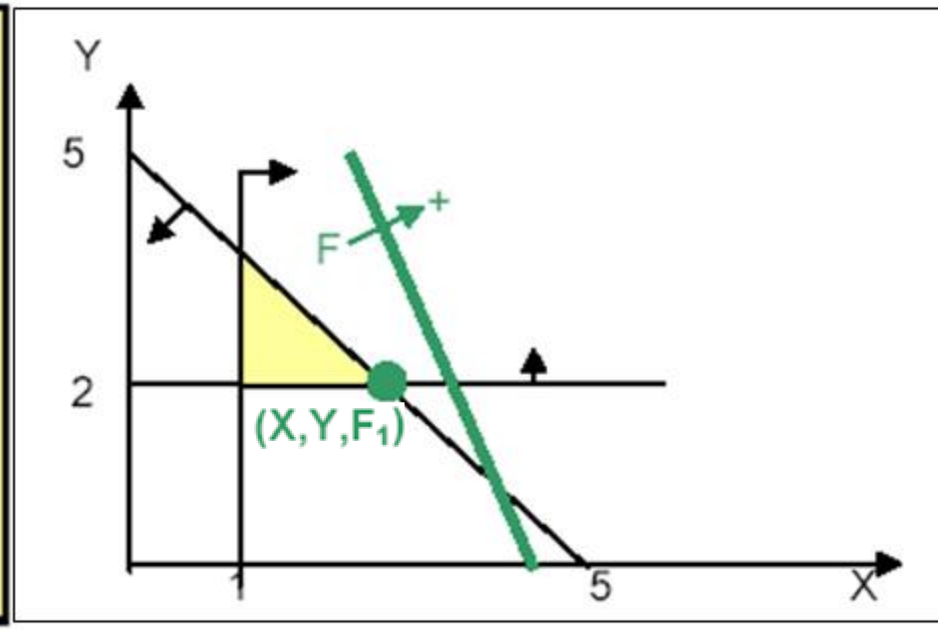
Formulação Matricial do Simplex

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:

Maximizar $F = 3 . X + Y$

sujeito a:

$$
\begin{aligned}
X \quad\quad &\geq 1 \\
Y &\geq 2 \\
X + Y &\leq 5 \\
X \, , \, Y &\geq 0
\end{aligned}
$$



Var.s Básicas: (X ; Y ; F_1) **Var.s Não Básicas: (F_2 ; F_3)**

Representação Inicial do Problema:

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|cc} X & Y & F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right]
\end{array}
\qquad
b = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right]
$$

$$
C = \left[\begin{array}{ccc|cc} +3 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
$$

Formulação Matricial do Simplex

Var.s Básicas: (X ; Y ; F_1)   Var.s Não Básicas: (F_2 ; F_3)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{I} & B^{-1} \times D & B^{-1} \times b \\ \hline 0 & -C_D + C_B \times B^{-1} \times D & (+C_B) \times B^{-1} \times b \end{array}\right]$$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	TI
X	1	0	0	1	1	3
Y	0	1	0	-1	0	2
F_1	0	0	1	1	1	2
F	0	0	0	+ 2	+ 3	11

Resumo – IIO – T4
Algoritmo Simplex Revisto

B	D	b
$-C_B$	$-C_D$	0

1 – Critério de Otimalidade: Analisar $\mathbf{r = - C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D}$

Se existir algum coeficiente $\mathbf{r_k < 0}$, a solução não é ótima e entra na base a variável correspondente ao coeficiente $\mathbf{r_k}$ com o valor mais negativo.

2 – Determinação das variáveis que pertencem à Nova Base:

Se quisermos fazer **entrar para a base a k-ésima variável**, deveremos começar por calcular o vetor $\mathbf{v_k = B^{-1} \cdot a_k}$ onde $\mathbf{a_k}$ representa a k-ésima coluna da matriz A.

Em seguida, calculamos, para cada restrição, os quocientes

$$\Delta_i = (B^{-1} \cdot b)_i \ / \ (v_k)_i \ , \quad \text{para } (v_k)_i > 0$$

Por fim, calculamos, $\mathbf{\Delta = \min (\Delta_i)}$ com i = 1, 2, ..., m. Se $\mathbf{\Delta = \Delta_S}$ **a s-ésima variável da base deverá deixar a base**.

3 – Mudança de Base: Escrever as matrizes **B**, **D**, $\mathbf{C_B}$ e $\mathbf{C_D}$ correspondentes à nova base.

Ruy Costa

TPC, Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Caps VII e VIII – Formulação Matricial do Simplex; Alg. Simplex Revisto – ficheiro pdf pp. 67 a 81.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!