Introdução à Investigação Operacional

10ª aula T - Resumo

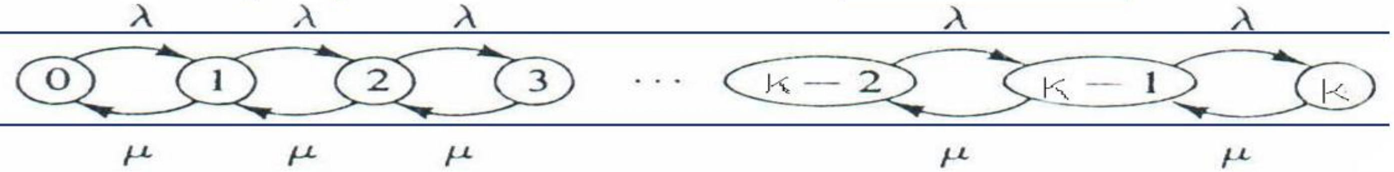
Ruy Costa

Resumo – IIO – T10

Modelos M/M/1ou s/K com pop. infinita e fila limitada, M/M/1 ou s/N com pop. finita e fila "ilimitada"

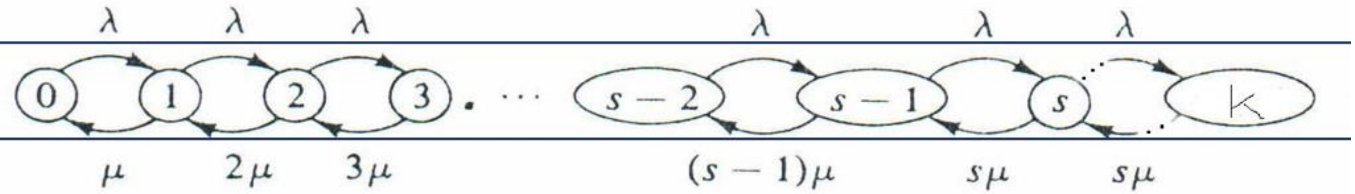
M/M/1/K com pop infinita e fila limitada

Estado



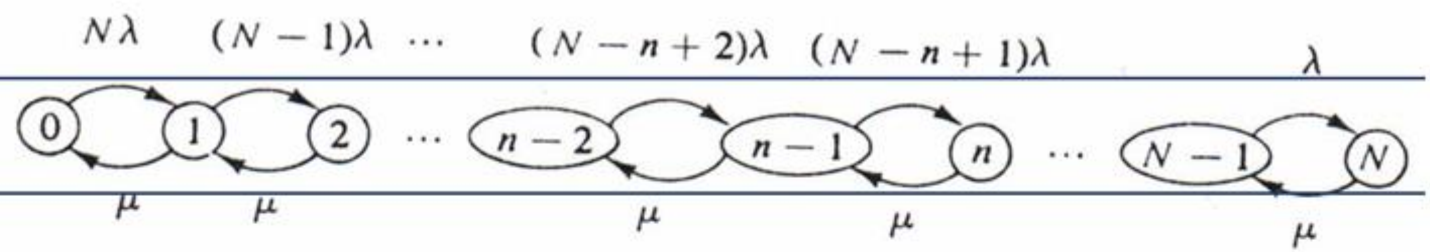
M/M/s/K com pop infinita e fila limitada

Estado



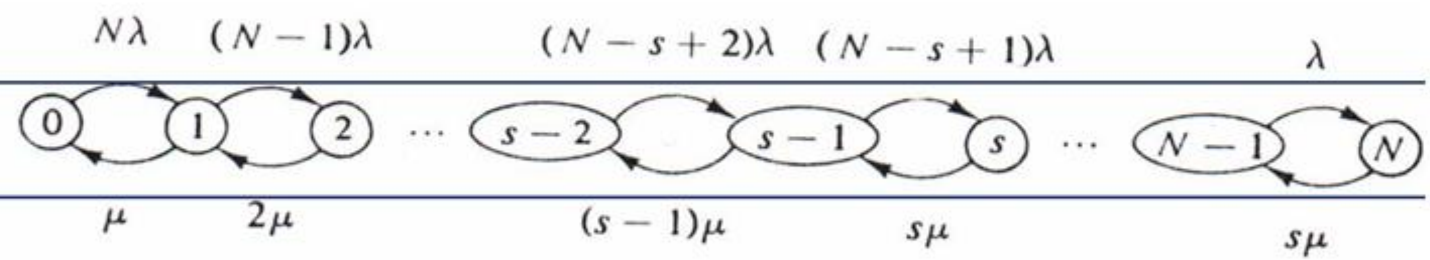
M/M/1/N

Estado



M/M/S/N

Estado



Resumo – IIO – T10

Modelos M/G/1, M/D/1 e M/E_k/1

Fórmula de Pollaczek-Khintchine:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\,(1-\rho)}$$

$\sigma^2 = 0$

M/D/1 **Grande Variabilidade!**

$$L_q = \frac{\rho^2}{2\,(1-\rho)}$$

$\sigma^2 = 1 / (k\,\mu^2)$

M/E_k/1

$$Lq = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Situação intermédia

$\sigma^2 = (1/\mu)^2$

M/M/1

$$L_q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Variabilidade Nula!

Resumo – IIO – T10

Modelos com Disciplina Prioritária

Consideremos um **sistema "M/M/s"**, com as seguintes caraterísticas:

- existem **N classes de prioridade** (a classe 1 com prioridade mais elevada e a classe N com mais baixa prioridade). Os clientes são atendidos por ordem das suas classes de prioridade e, dentro da cada classe, por ordem de chegada;

- o **processo de chegadas é Poissoniano**, permitindo-se que a taxa de chegadas de clientes das várias classes possa ser diferente;

- as **durações de atendimento são Exponenciais** para cada classe, assumindo-se, adicionalmente, que a duração média de atendimento é igual para todas as classes.

Resumo – IIO – T10

Modelos com Disciplina Prioritária

Assumamos que as **prioridades são "não absolutas"** (*nonpreemptive priorities*), i.e., um cliente que está a ser atendido, não vê o seu atendimento interrompido pela chegada de um cliente com mais elevada prioridade.

O **tempo de espera médio para um cliente da classe de prioridade k W_k**, (incluindo a duração do atendimento) será dado por:

$$W_k = \frac{1}{A.B_{k-1}.B_k} + \frac{1}{\mu} \quad , \text{ para } k = 1, 2, \ldots, N$$

Folha de Cálculo Excel!

Resumo – IIO – T10

Modelos com Disciplina Prioritária - Exercício FE12

Prioridades "absolutas" M/M/1 :

Tempo de espera médio *total* para um cliente da classe de prioridade k, W_k :

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1}.B_k} \quad , \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N$$

Número médio de clientes da classe de prioridade k no sistema, L_k :

$$L_k = \lambda_k \, . \, W_k \quad , \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots N.$$

Para mais de um servidor... Procedimento iterativo!

Resumo – IIO – T10
Modelos com Disciplina Prioritária - Exercício FE12

Prioridades "absolutas" ***M/M/s*** **:**

- **Começar com os clientes de classe 1:**

  M/M/s com taxas $\lambda = \lambda_1$ e μ

  Determinar W_1, L_1, ...

- **Passar aos clientes das classes 1 + 2:**

  M/M/s com taxas $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ e μ

  Determinar $W \rightarrow \overline{W}_{1-2}$

$$\overline{W}_{1-2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.W_2 \quad \rightarrow W_2 \rightarrow L_2, \ldots$$

- **Passar aos clientes das classes 1 + 2 + 3** ...

Resumo – IIO – T8
Filas Ilimitadas em Série

O importantíssimo **Teorema de Jackson**, garante-nos que:

Se

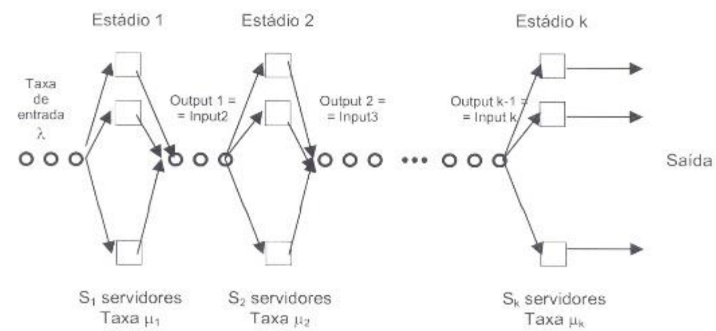
1) o **processo de chegadas** dos clientes a um sistema de espera for **Poissoniano com taxa** λ,

2) as **durações dos atendimentos** dos servidores em cada estádio forem **exponenciais, com parâmetro** μ_i,

e

3) **cada estádio** permitir a formação de uma fila ilimitada (**modelo M/M/s**), com $s.\mu > \lambda$,

então o **processo de saídas** dos clientes de cada estádio do sistema de espera é **Poissoniano com taxa** λ.



A possibilidade de se utilizar um modelo M/M/S para cada estádio, independentemente dos outros, é uma enorme simplificação.

Passa a ser válida a chamada **forma de produto** (*product form*):

$$\boxed{P(N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge \ldots \wedge N_k = n_k) = P_{n1} \,.\, P_{n2} \,.\, \ldots \,.\, P_{nk}}$$

Os sistemas com filas com capacidade limitada **<u>não</u>** apresentam soluções na forma de produto!

Resumo – IIO – T8
Redes de Jackson

Uma Rede de Jackson é um sistema de k estádios onde o estádio i (i = 1, 2, …, k) tem:

1) uma fila ilimitada;

2) os clientes chegam do exterior do sistema de acordo com um processo Poissoniano com parâmetro $\mathbf{a_i}$ e

3) $\boldsymbol{s_i}$ servidores, que asseguram uma distribuição de atendimento exponencial, com parâmetro μ_i.

Um cliente que deixe o estádio i segue para outro estádio j (j = 1, 2, …, k e j $\neq$ i) com probabilidade p_{ij}, ou partirá do sistema com probabilidade $q_i = 1 - \sum_{j=1\ j\neq i}^{k} p_{ij}$.

Em **situação de equilíbrio**, cada estádio j de uma Rede de Jackson (j = 1, 2, …, k) comporta-se como se fosse um **sistema M/M/S independente**, com taxa de chegadas $\boldsymbol{\lambda_i}$:

$$\lambda_j = a_j + \sum_{j=1\ j\neq i}^{k} \lambda_i . p_{ij} , \qquad \text{com } s_j . \mu_i > \lambda_j$$

♦ Número esperado de clientes na RJ : $\mathbf{L} = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$

♦ $\mathbf{P\,(N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge \ldots \wedge N_k = n_k\,) = P_{n1} \,.\, P_{n2} \,.\, \ldots \,.\, P_{nk}}$

♦ Como nem todos os clientes são obrigados a ir a todos os estádios, poderemos recorrer à Fórmula de Little, $\mathbf{W = L / \lambda}$ **MAS** com $\lambda = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Resumo – IIO – T8

Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Teoria das Filas de Espera – ficheiro pdf pp. 208 a 219.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!