

---

# **Introdução à Investigação Operacional**

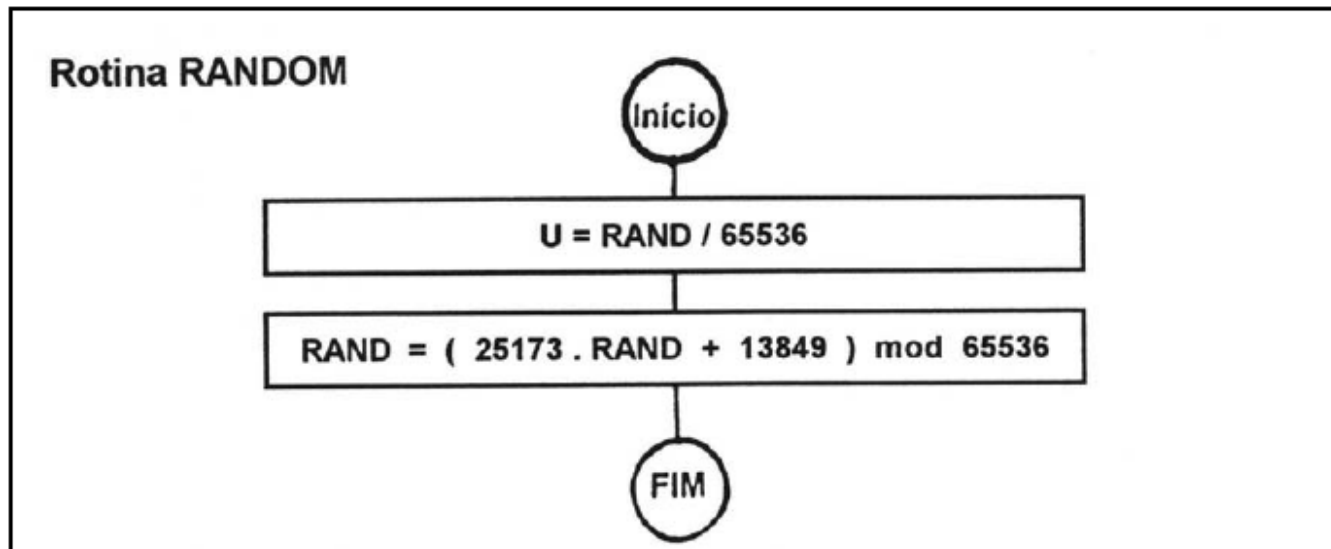
## **11<sup>a</sup> aula T - Resumo**

---

## Geração de NPA Uniforme[0;1]

## Método Congruencial Misto:

Fluxograma da rotina 'RANDOM':



0,1526 0,3063 0,4413 0,8898 0,0202 0,7723 0,1453 0,7020 0,4005 0,3174  
0,0730 0,0229 0,5279 0,8635 0,5836 0,3996 0,8867 0,5824 0,2867 0,6288  
0,2114 0,8961 0,0415 0,7574 0,4862 0,4763 0,9575 0,0823 0,9456 0,2451  
0,3940 0,1503 0,0740 0,3742 0,9603 0,7584 0,6057 0,2855 0,5159 0,9534  
0,5250 0,6509 0,1701 0,0322 0,0665 0,3923 0,2824 0,5417 0,7144 0,6815

Transformação dos NPA  $U[0;1]$  em NPA de outras distribuições:

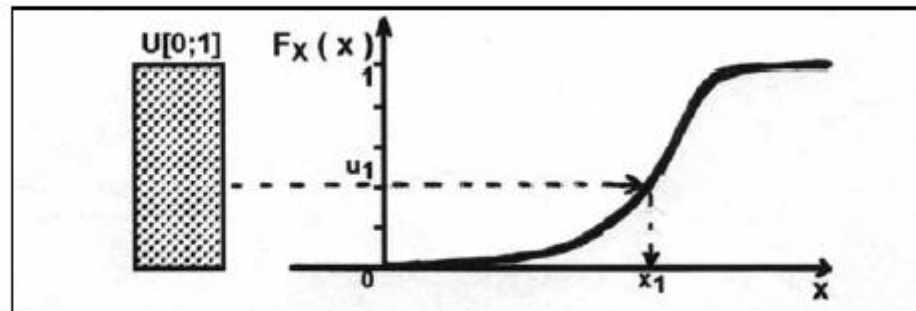
**Método da Inversão:**

$F_X(x)$  – f.d.a. : função monótona crescente, contínua à direita e que toma valores no intervalo  $[0; 1]$ .

Se a função  $F_X(x)$  for representada por uma expressão analítica e se essa expressão for invertível, poderemos escrever:

$$u = F_X(x) \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(u)$$

Na figura seguinte esquematiza-se a aplicação do Método da Inversão:



Ao primeiro NPA  $U[0;1]$ ,  $u_1$ , corresponderá o primeiro NPA  $X$ ,  $x_1$ .

## Método da Inversão – um exemplo

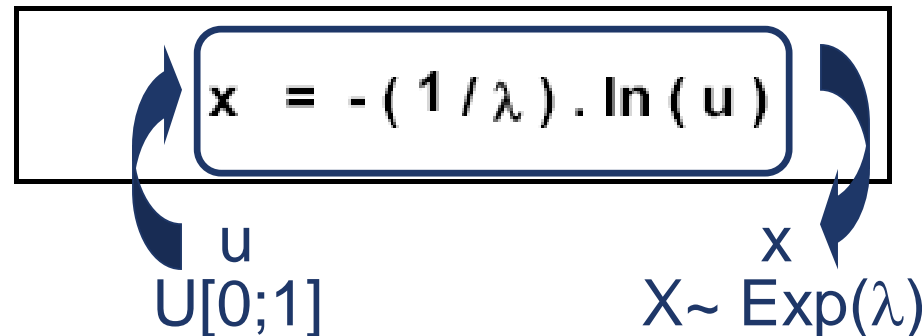
Exemplo:  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$  com  $\lambda > 0$  :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

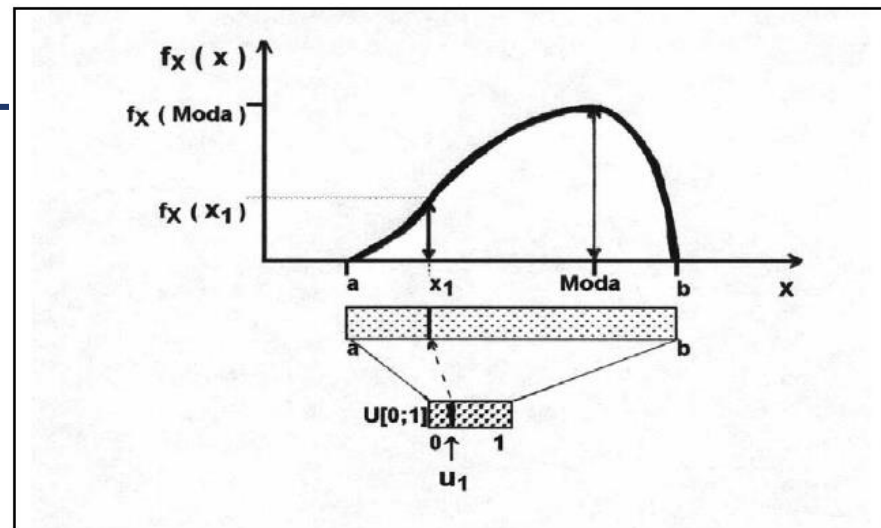
$$u = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \Leftrightarrow x = -(1/\lambda) \cdot \ln(1-u)$$

Como  $U \sim 1 - U \dots$



# Resumo – IIO – T11

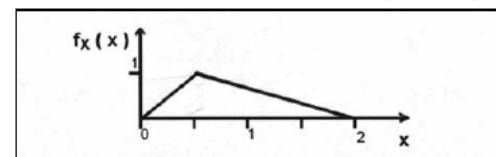
## Método da Rejeição



- 1 - geração de um NPA  $U[0;1]$ ,  $u_1$ ,
- 2 -  $x_1 = a + (b - a) \cdot u_1$  , (  $a$  e  $b$  representam, respectivamente, os limites inferior e superior do domínio de variação de  $X$  )
- 3 -  $P_a = f_X(x_1) / f_X(\text{moda})$
- 4 - geração de um NPA  $U[0;1]$ ,  $u_2$ ,
- 5 - se  $P_a < u_2$ , rejeita-se  $x_1$  e retorna-se a 1;  
caso contrário, assume-se  $x_1$  como um NPA  $X$

## Método da Rejeição – um exemplo

- Exemplo 1: Seja  $X$  a **variável aleatória contínua**, com função de densidade de probabilidade,  $f_X(x)$ , que se esboça na figura seguinte:



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0; 2] \\ 2 \cdot x & ; x \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x) / 3 & ; x \in [0,5; 2] \end{cases}$$

1 - geração de um NPA  $U[0;1]$ ,  $u_1$ ,

2 -  $x_1 = 2 \cdot u_1$ ,

$$3 - P_a = \begin{cases} 2 \cdot x_1 & ; x_1 \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x_1) / 3 & ; x_1 \in [0,5; 2] \end{cases}$$

4 - geração de um NPA  $U[0;1]$ ,  $u_2$ ,

5 - se  $P_a < u_2$ , rejeita-se  $x_1$  e retorna-se a 1;  
caso contrário, assume-se  $x_1$  como um NPA  $X$

$$a = 0 ; b = 2$$

$$\text{moda} = \frac{1}{2} ; f(\text{moda}) = 1$$

Qual é

Opinião?

a sua

## Método da Inversão / Rejeição

Considere a distribuição Normal( $\mu; \sigma$ ) com a f. densidade probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

**Complete adequadamente... Podemos gerar um N.P.A. Normal...**

- ✗ **A** – ... recorrendo ao Método da Inversão.
- ✗ **B** – ... recorrendo ao Método da Rejeição.
- ✓ **C** – ... recorrendo ao Método da Rejeição, mas só se se truncar o domínio – p.ex. em  $\mu \pm 3\sigma$ .
- ✓ **D** – ... recorrendo ao Método da Inversão e ao Excel.
- ✓ **E** – ... gerando muitos N.P.A.'s Uniforme[0; 1] e somando-os.

# Resumo – IIO – T11      O Teorema do Limite Central

## para a geração de NPA com distribuição Normal

Dado que conseguimos gerar com facilidade NPA com distribuição **Uniforme [ 0 ; 1 ]**, é natural que invoquemos o **Teorema do Limite Central** utilizando essa distribuição como distribuição 'base':

Sejam  $U_1, U_2, \dots, U_n$  v.a. independentes com distribuição Uniforme [ 0 ; 1 ], isto é,  $E[U_i] = 1/2$  e  $Var[U_i] = 1/12$ ,

$$S_n \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n \sim \text{Normal} ( n/2 ; n/12 )$$

Sejam  $U_1, U_2, \dots, U_{12}$  v.a. independentes com distribuição Uniforme [ 0 ; 1 ] .

$$S_{12} \sim U_1 + U_2 + \dots + U_{12} \sim \text{Normal} ( \mu = 6 ; \sigma = 1 )$$

$$(S_{12} - 6) / 1 \sim (X - \mu_X) / \sigma_X \quad \Leftrightarrow \quad X \sim \mu_X + (S_{12} - 6) \cdot \sigma_X$$



### **Leituras de apoio:**

**Elementos de apoio às aulas de IIO – Simulação – ficheiro pdf pp. 220 a 253.**

**Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!**

---

# **Introdução à Investigação Operacional**

## **12ª aula T - Resumo**

---

**A 12ª aula T foi um resumo dos pontos importantes da 11ª aula T, seguida da “Última Aula”.**

Qual é

Opinião?

a sua

## Método da Inversão / Rejeição

Considere a distribuição Normal( $\mu; \sigma$ ) com a f. densidade probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

**Complete adequadamente... Podemos gerar um N.P.A. Normal...**

- ✗ **A** – ... recorrendo ao Método da Inversão.
- ✗ **B** – ... recorrendo ao Método da Rejeição.
- ✓ **C** – ... recorrendo ao Método da Rejeição, mas só se se truncar o domínio – p.ex. em  $\mu \pm 3\sigma$ .
- ✓ **D** – ... recorrendo ao Método da Inversão e ao Excel.
- ✓ **E** – ... gerando muitos N.P.A.'s Uniforme[0; 1] e somando-os.

# Resumo – IIO – T12      O Teorema do Limite Central

## para a geração de NPA com distribuição Normal

Dado que conseguimos gerar com facilidade NPA com distribuição **Uniforme [ 0 ; 1 ]**, é natural que invoquemos o **Teorema do Limite Central** utilizando essa distribuição como distribuição 'base':

Sejam  $U_1, U_2, \dots, U_n$  v.a. independentes com distribuição Uniforme [ 0 ; 1 ], isto é,  $E[U_i] = 1/2$  e  $Var[U_i] = 1/12$ ,

$$S_n \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n \sim \text{Normal} ( n/2 ; n/12 )$$

Sejam  $U_1, U_2, \dots, U_{12}$  v.a. independentes com distribuição Uniforme [ 0 ; 1 ] .

$$S_{12} \sim U_1 + U_2 + \dots + U_{12} \sim \text{Normal} ( \mu = 6 ; \sigma = 1 )$$

$$(S_{12} - 6) / 1 \sim (X - \mu_X) / \sigma_X \quad \Leftrightarrow \quad X \sim \mu_X + (S_{12} - 6) \cdot \sigma_X$$

### **Leituras de apoio:**

**Elementos de apoio às aulas de IIO – Simulação – ficheiro pdf pp. 220 a 253.**

**Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!**