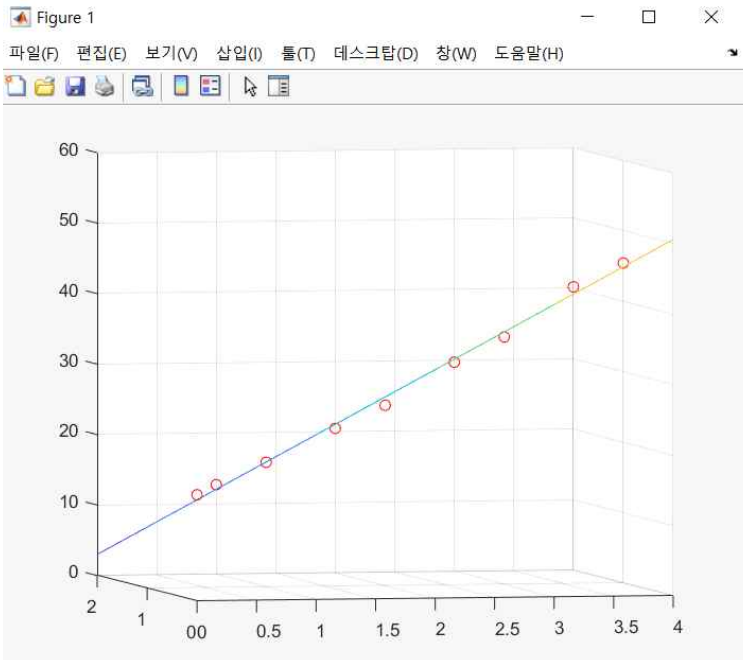
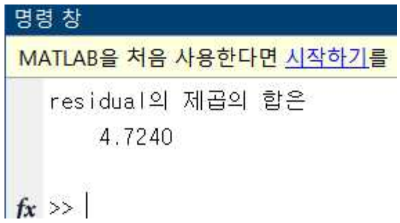
# 수치해석 HW3

201501489 최영진

1.

① 실행 결과




(y = a0 + a1*x1 + a2*x2의 꼴로 정리하면 ↓)

**z = 14.4 + 9.04*a -5.7*b**

② 토의 사항

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i}x_{2,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i}x_{2,i} & \sum x_{2,i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} y_i \end{Bmatrix}$$

위 그림에 해당하는 행렬들을 구하기 위해 for문을 돌면서 각 원소에 해당하는 값들을 구했고, 가운데 행렬(k)을 A\B를 이용하여 구했다. ①의 그래프는 주어진 표의 값들을 그대로 붉은 동그라미로 찍은 것과 fitting한 데이터를 mesh로 그린 것이다. (값의 차이가 근소함을 보여주기 위해 화면을 적당히 돌린 상태다.)

2.

1)

① 실행 결과

[1] $n=5$, $p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + a_3(x-1)(x-2)(x-3)$
$+ a_4(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$

(1) $p(x)$가 $(1, 4.75)$ 지날때 : $4.75 = a_0$ $\therefore a_0 = 4.75$

(2) 〃 $(2, 4)$ 〃 : $4 = a_0 + a_1 = 4.75 + a_1$ $\therefore a_1 = -0.75$

(3) 〃 $(3, 5.25)$ 〃 : $5.25 = a_0 + a_1 \times 2 + a_2 \times 2 = 4.75 - 1.5 + 2a_2$ $\therefore a_2 = 1$

(4) 〃 $(5, 19.75)$ 〃 : $19.75 = 4.75 - 0.75 \times 4 + 4 \times 3 + a_3 \times 4 \times 3 \times 2$
$= 4.75 - 3 + 12 + 24a_3 = 13.75 + 24a_3$ $\therefore a_3 = 0.25$

(5) 〃 $(6, 36)$ 〃 : $36 = 4.75 - 0.75 \times 5 + 5 \times 4 + 0.25 \times 5 \times 4 \times 3 + a_4 \times 5 \times 4 \times 3$
$= 1 + 20 + 15 + 60a_4 = 36 + 60a_4$ $\therefore a_4 = 0$

$p(x) = 4.75 - 0.75(x-1) + (x-1)(x-2) + 0.25(x-1)(x-2)(x-3)$

[2] $P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) +$
$\cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_n, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, \cdots, x_0]}{x_n - x_0}$$

[3] divided difference.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 1 | 4.75 | -0.75 | 1 | 0.25 | 0 |
| $x_1$ | 2 | 4 | 1.25 | 2 | 0.25 | |
| $x_2$ | 3 | 5.25 | 7.25 | 3 | | |
| $x_3$ | 5 | 19.75 | 16.25 | | | |
| $x_4$ | 6 | 36 | | | | |

$f[x_0, x_1] = \frac{4 - 4.75}{2 - 1} = -0.75$

$f[x_1, x_2] = \frac{5.25 - 4}{3 - 2} = 1.25$

$f[x_2, x_3] = \frac{19.75 - 5.25}{2} = 7.25$

$f[x_3, x_4] = 36 - 19.75 = 16.25$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1.25 + 0.75}{2} = 1$

$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{7.25 - 1.25}{3} = 2$

$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{16.25 - 7.25}{3} = 3$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{1}{4} = 0.25$

$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{1}{4}$

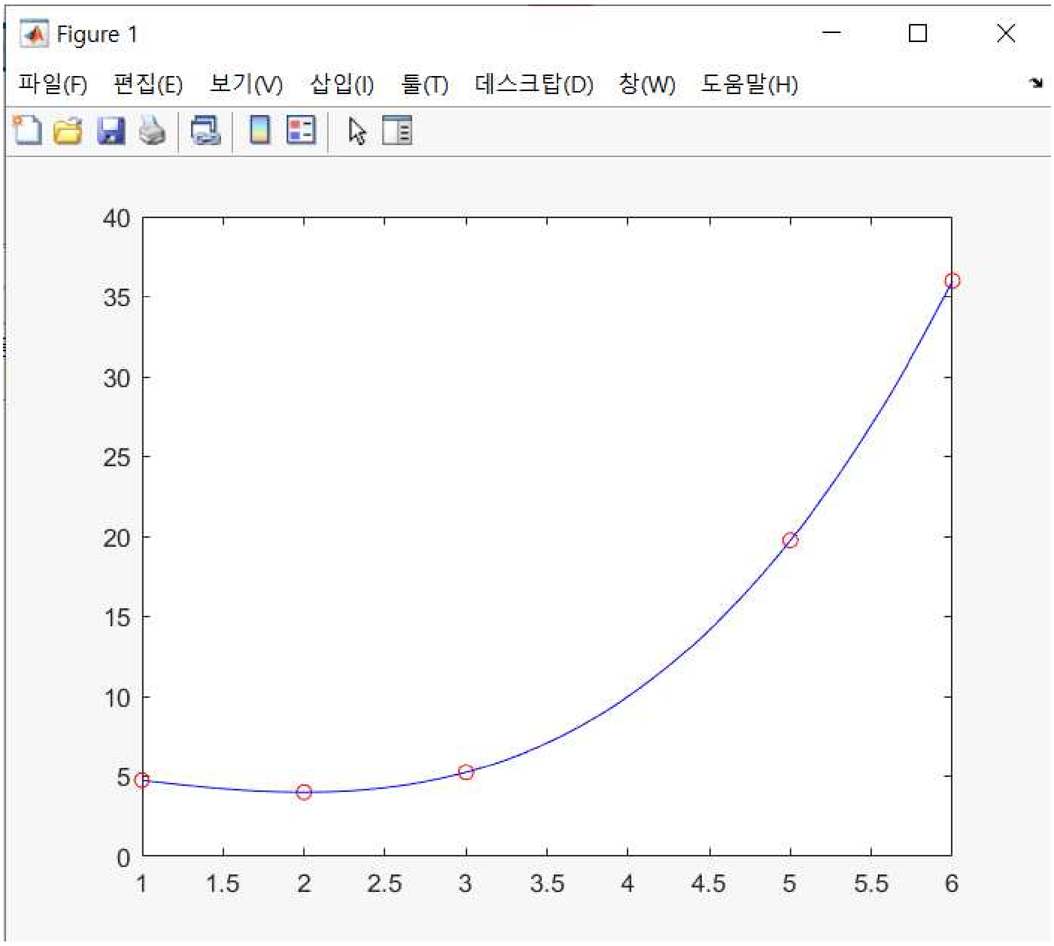
$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = 0$

② 토의 사항

분할 차분표를 제대로 계산하고 있는지 확인하기 위해 a0~a4까지 미리 구해놓고 값을 비교했다.

2)

① 실행 결과



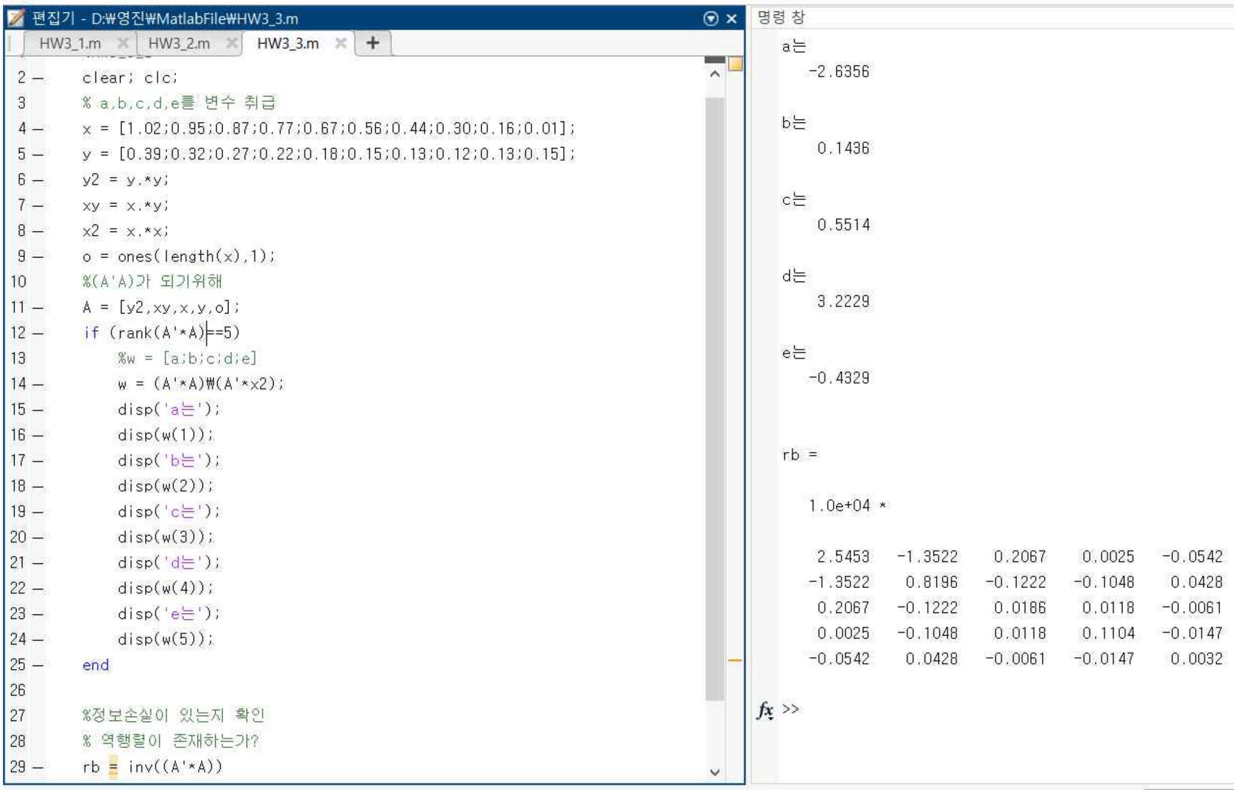

② 토의 사항

범위는 주어진 x값을 확인하기 쉬운 1~6까지로 정해 plot을 구했다. (1)에서 구한 3차함수의 그래프 일부분을 파란색 선으로 확인할 수 있다. 이산 데이터의 값은 붉은 동그라미 마커로 그렸다.

3.

1)

① 실행 결과




```
clear; clc;
% a,b,c,d,e를 변수 취급
x = [1.02;0.95;0.87;0.77;0.67;0.56;0.44;0.30;0.16;0.01];
y = [0.39;0.32;0.27;0.22;0.18;0.15;0.13;0.12;0.13;0.15];
y2 = y.*y;
xy = x.*y;
x2 = x.*x;
o = ones(length(x),1);
%(A'A)가 되기위해
A = [y2,xy,x,y,o];
if (rank(A'*A)==5)
    %w = [a;b;c;d;e]
    w = (A'*A)₩(A'*x2);
    disp('a는');
    disp(w(1));
    disp('b는');
    disp(w(2));
    disp('c는');
    disp(w(3));
    disp('d는');
    disp(w(4));
    disp('e는');
    disp(w(5));
end

%정보손실이 있는지 확인
% 역행렬이 존재하는가?
rb = inv((A'*A))
```

```
a는
  -2.6356

b는
   0.1436

c는
   0.5514

d는
   3.2229

e는
  -0.4329


rb =

   1.0e+04 *

    2.5453   -1.3522    0.2067    0.0025   -0.0542
   -1.3522    0.8196   -0.1222   -0.1048    0.0428
    0.2067   -0.1222    0.0186    0.0118   -0.0061
    0.0025   -0.1048    0.0118    0.1104   -0.0147
   -0.0542    0.0428   -0.0061   -0.0147    0.0032

fx >>
```

② 토의 사항

residual의 2-norm의 제곱을 최소로 만들게 하는 값을 찾기 위해 우선 (x,y)데이터들을 주어진 식에 모두 대입하여 Ax=b 꼴로 만들었다. 여기서 구해야 할 미지수 행렬 x는 a,b,c,d,e이다. 각 미지수앞에 들어갈 계수를 미리 위 코드처럼 행렬 곱으로 만들어두었다.

overdetermined 시스템 Ax=b에 대하여 A(m×n)의 rank 는 n이므로 normal equation을 이용하여 푼다. $A^TAx = A^Tb$를 만족하는 근사값 x를 찾기 위해 $(A^TA)\backslash(A^Tb)$를 이용하였다.

a는 −2.6356, b는 0.1436, c는 0.5514, d는 3.2229, e는 −0.4329

2)

① 실행 결과 : Information lost (X), Potential conditioning problem(O)

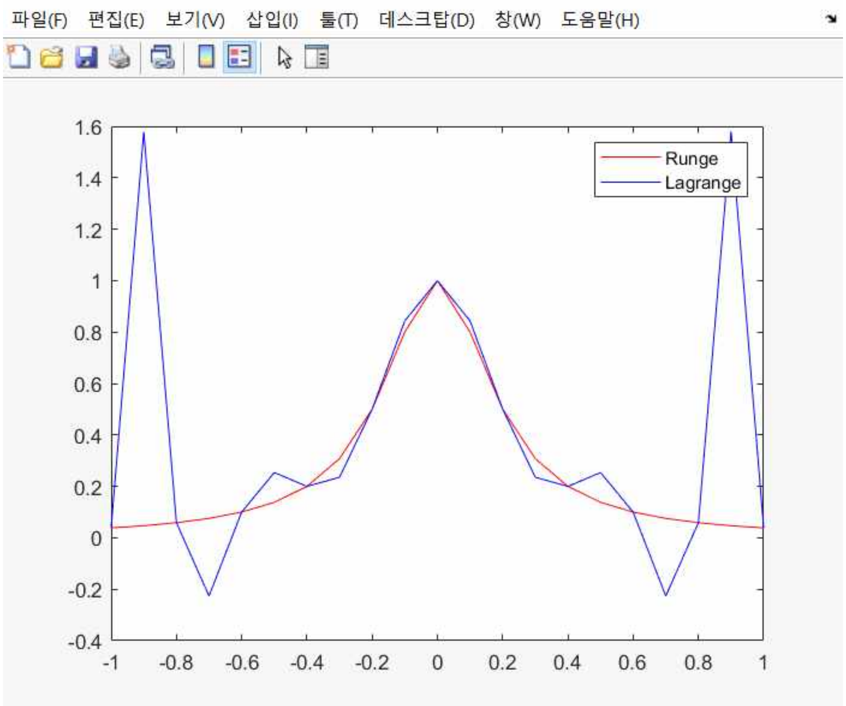
② 토의 사항

첫 번째 문제인 정보손실로 인하여 해가 유일해지지 않는 것의 확인은 간단하게 역행렬의 존재여부를 출력하는 것으로 알 수 있다. 역행렬 rb가 존재하므로 첫 번째 문제는 해당되지 않는다.

두 번째인 조건 상수값이 커지고 안정성이 낮아지는 문제는 해당이 된다. 조건 상수의 식 자체가 $cons(A^TA) = [cond(A)^2]$이므로 값이 커질 수밖에 없다.

4.

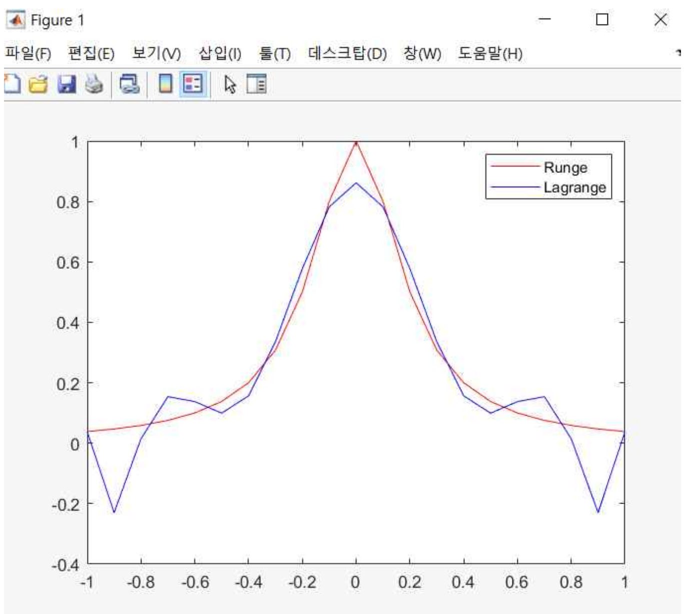
① 실행 결과




<n+1(=11)개 데이터 사용>

② 토의 사항

양 끝쪽에 ocsillation이 목격된다. 진동은 데이터 수가 더 많아질수록 더 심해진다고 배웠는데 실제로 데이터 개수를 한 개 줄여, 10개였을 때의 모습을 출력해보고 아래 그림과 같이 진동이 비교적 줄어듦을 확인할 수 있었다. 진동이 크지 않게 출력될 최적의 데이터 수를 구하는 방법에 대해 알아보고싶다.




<데이터 수 = 10>