1. 수열의 극한

수열의 수렴

- 일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다.
- L을 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하며 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 또는 $n\to\infty$ 일 때 $a_n \to L$과 같이 나타낸다.

수열의 발산

- 일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 와 같이 나타낸다.
- 일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 $\{a_n\}$의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 와 같이 나타낸다.

⇨ 수렴: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (단, L은 실수)

⇨ 발산: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (양의 무한대로 발산)

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (음의 무한대로 발산)

수열의 극한의 성질

$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \lim_{n\to\infty} b_n = M (L, M\text{은 실수})$일 때,

1. $\lim_{n\to\infty} ca_n = cL$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M$
4. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = LM$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$ (단, $b_n \neq 0, M \neq 0$)

수열의 극한의 성질은 두 수열이 모두 수렴하는 경우에 성립한다.

기억하기

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (L은 실수), $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ 일 때,

$L < 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$

$L > 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ (L, M은 실수)일 때, 모든 자연수 n에 대하여
  1. $a_n \le b_n$ 이면 $L \le M$
  2. $a_n \le c_n \le b_n$ 이고 $L = M$이면, $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

1. $r > 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (양의 무한대로 발산)
2. $r = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴)
3. $-1 < r < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴)
4. $r \le -1$일 때, 수열 r^n은 진동한다. (발산)

급수

수열 a_n의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

을 급수라고 하며 이것을 Σ를 사용하여 기호로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다.

부분합

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제 n항까지의 부분합이라고 한다.

급수의 합

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열

$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \ldots$ 이 일정한 값 S에 수렴할 때,

즉, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$일 때, 이 급수는 S에 수렴한다고 한다.

이때 S를 급수의 합이라고 하며 이것을

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 와 같이 나타낸다.

수열과 급수의 관계

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 할 때,

1. 수열 S_n이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.
2. 수열 S_n이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 $\lim_{n \to \infty} a_n$의 관계

1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.
2. $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

등비급수