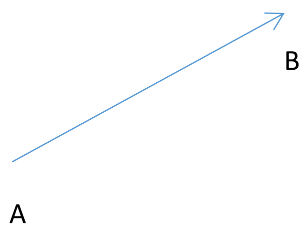
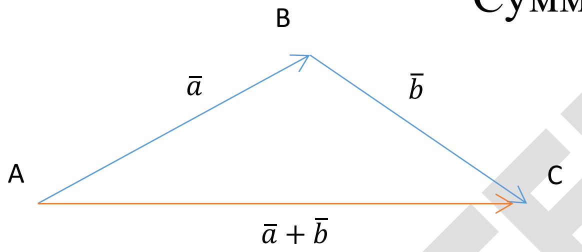
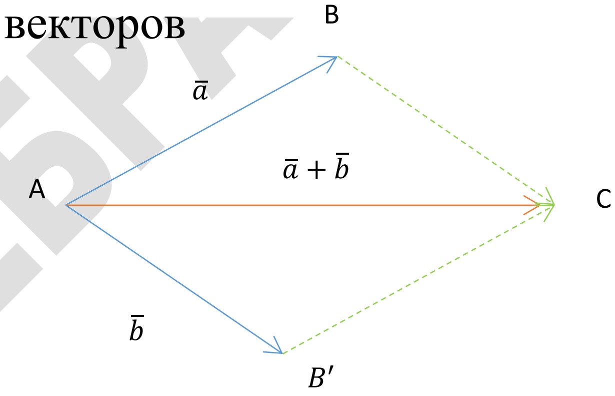
Векторы

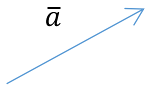
Сумма векторов







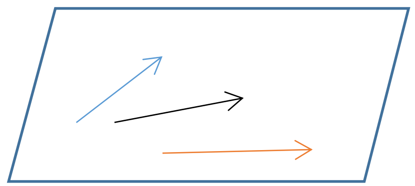
Коллинеарные векторы



сонаправленные

противоположно направлен-
ные

Компланарные векторы

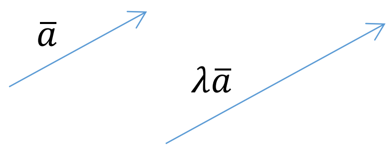


Линейная зависимость векторов. Базис

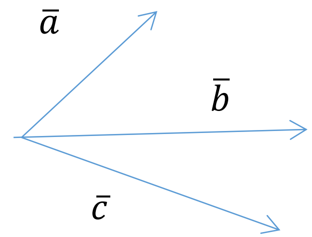
$\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}\}$ – линейно зависимы, если $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ не равные нулю одновременно, такие, что

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 + \cdots + \lambda_n \bar{e}_n = 0$$

В противном случае $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \dots, \overline{e_n}\}$– линейно независимые



$$-\lambda\bar{a} + \lambda\bar{a} = 0$$



Любая пара не коллинеарных векторов $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ на **плоскости** образует базис.

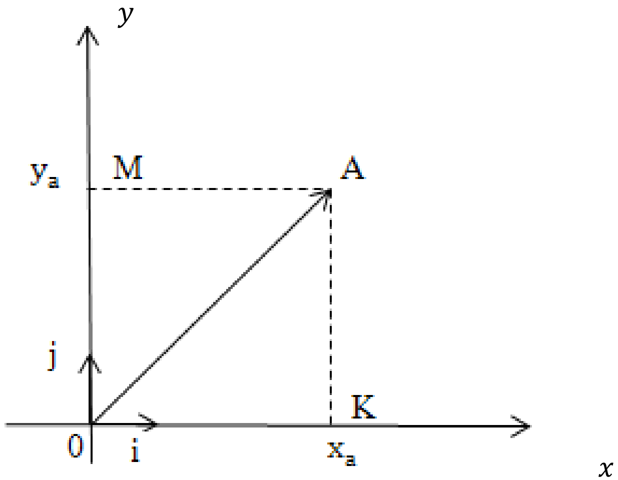
$$\bar{x} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2,\ \forall\bar{x}$$

Любая тройка не компланарных векторов $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ **пространстве** образует базис.

$$\bar{x} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3,\ \forall\bar{x}$$

Координаты векторов

V_2



Точка A $(x_a; y_a)$;

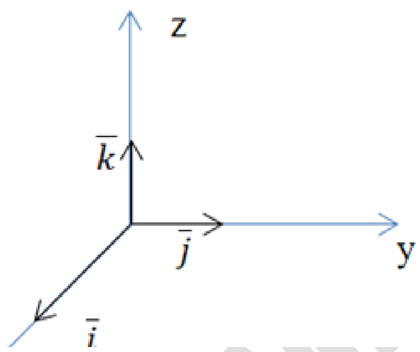
$\overline{OA} = (x_a - 0;\ y_a - 0)$

$\bar{a} = \{x_a; y_a\}$ или $\bar{a} = (x_a; y_a)$

$|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ – длина вектора $\bar{a}$

$\bar{a} = \overline{OK} + \overline{OM} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j}$ -разложение по базису

V_3



Точка A $(x_a; y_a; z_a)$;

$\overline{OA} = (x_a - 0;\ y_a - 0;\ z_a - 0)$

$\bar{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ или $\bar{a} = (x_a; y_a; z_a)$

$|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + {z_a}^2}$ – длина вектора $\bar{a}$

$\bar{a} = \overline{OK} + \overline{OM} + \overline{OF} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k}$ -разложение по базису

Действия с векторами

$$\left.\begin{array}{l}\overline{a} = (x_a;\ y_a;\ z_a)\\ \overline{b} = (x_b;\ y_b;\ z_b)\end{array}\right\} \qquad \overline{a} + \overline{b} = (x_a + x_b;\ y_a + y_b;\ z_a + z_b) \qquad \lambda\overline{a} = (\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a)$$

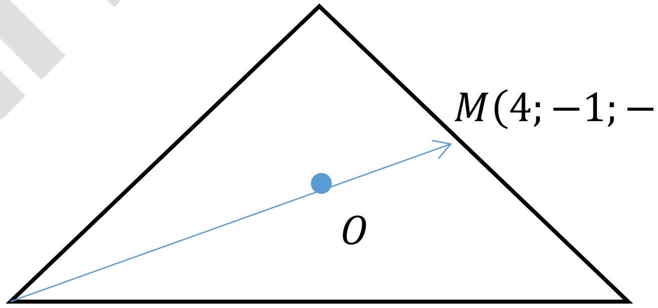
Деление отрезка в заданном отношении

$A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ $\quad$ $A\ (x;y;z)$ $\quad$ $A_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$

$$\overrightarrow{AA_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AA_2} \qquad \frac{AA_1}{AA_2} = \lambda \qquad \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \\ z_1 - z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

<u>Пример 1</u>. Вершины треугольника ABC имеют координаты A (0; 1; 6); B (6; 5; -3); C (2; -7; 1). Найдите длину медианы AM. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.



Решение.

1. $x_M = \frac{2+6}{2} = 4; y_M = \frac{-7+5}{2} = -1; z_M = \frac{1-3}{2} = -1$

$$\overline{AM} = (4-0; -1-1; -1-6) = (4; -2; -7)$$

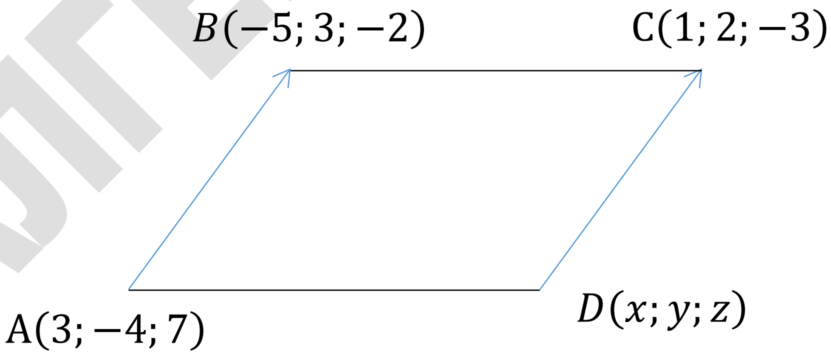
$$|\overline{AM}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{69}$$

2. т.O –точка пересечения медиан

$$x_O = \frac{0+2+6}{3} = \frac{8}{3}; y_O = \frac{1-7+5}{3} = -\frac{1}{3}; z_O = \frac{6+1-3}{3} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $|\overline{AM}| = \sqrt{69}$; т.O $\left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$

<u>Пример 2.</u> Даны координаты трех вершин параллелограмма ABCD: A (3; -4; 7); B (-5; 3; -2); C (1; 2; -3). Найдите координаты вершины D (противоположной к вершине B).



Решение.

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

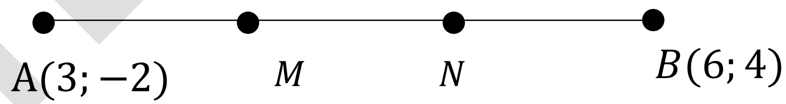
$$\overline{AB} = (-8;7;-9), \overline{DC} = (1-x;2-y;-3-z)$$

$$\begin{cases} 1-x=-8 \\ 2-y=7 \\ -3-z=-9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=9 \\ y=-5 \\ z=6 \end{cases}$$

Ответ: т. D(9;-5;6)

<u>Пример 3</u>. Отрезок с концами в точках A(3;-2) и B(6;4) разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.

Решение.



$$AM:MB = 1:2, \lambda = \frac{1}{2}$$

$$x_M = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = 4; \quad y_M = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 0$$

$$AN:NB = 2:1, \lambda = 2$$

$$x_N = \frac{3 + 2\cdot 6}{1 + 2} = 5; \quad y_N = \frac{-2 + 2\cdot 4}{1 + 2} = 2$$

Ответ: $M(4;0), N(5;2)$

Пример 4. Даны векторы $\bar{a} = (1; 1; -2)$, $\bar{b}$ = (1;-3;0), $\bar{c}$ = (-4;2;1). Доказать, что они образуют базис в V_3. Разложить вектор $\bar{d}$ = (-11;11;-1) по этому базису.

Решение.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\11\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&-4\\1&-3&2\\-2&0&1\end{vmatrix}=16\neq 0$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-11&1&-4\\11&-3&2\\-1&0&1\end{vmatrix}=32\Rightarrow\alpha=\frac{32}{16}=2$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-11&-4\\1&11&2\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-16\Rightarrow\beta=\frac{-16}{16}=-1$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&-11\\1&-3&11\\-2&0&-1\end{vmatrix}=48\Rightarrow\gamma=\frac{48}{16}=3$$

Проверка:

$$2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\11\\1\end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$

Скалярное произведение векторов

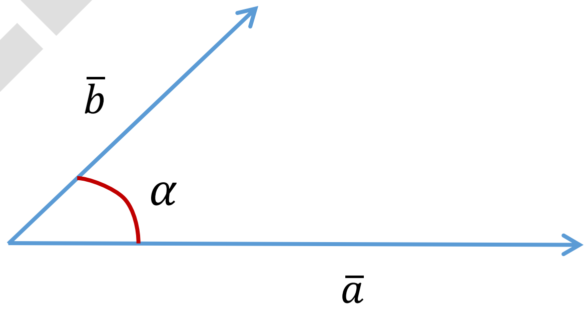
$$(\bar{a};\ \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos\angle(\bar{a}, \bar{b})$$

Свойства:

1) $(\bar{a};\ \bar{b}) = (\bar{b};\ \bar{a})$ (коммутативность)

2) $(\overline{\lambda a};\ \bar{b}) = \lambda(\bar{a};\ \bar{b})$

3) $(\bar{a} + \bar{c};\ \bar{b}) = (\bar{a};\ \bar{b}) + (\bar{c};\ \bar{b})$



Координатная форма:

$(\bar{a};\ \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2;$

$(\bar{a};\ \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

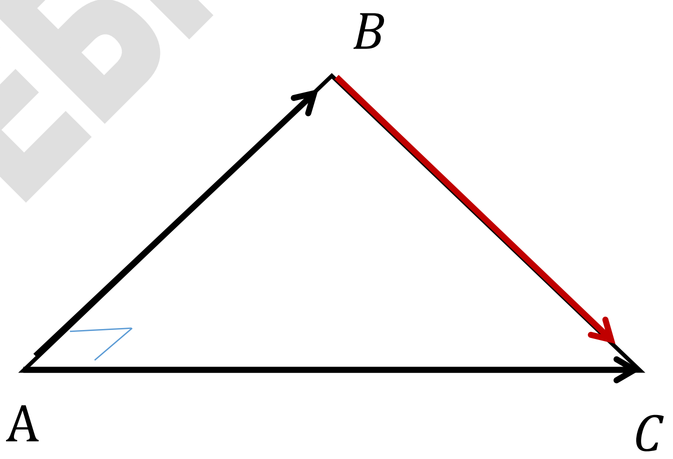
Геометрические свойства:

1) $cos\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{(\bar{a};\ \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$

2) $(\bar{a};\ \bar{a}) = |\bar{a}|^2 \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a};\ \bar{a})} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

3) $(\bar{a};\ \bar{b}) = 0$ (при $\bar{a} \neq 0$ и $\bar{b} \neq 0$) $\Rightarrow cos\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

Пример 5. Известно, что $\overline{AB} = 2\bar{\imath} - 6\bar{\jmath}, \overline{AC} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath}$. Найдите углы треугольника АВС.



Решение.

$\overline{AB} = (2; -6), \overline{AC} = (3; 1)$

$$cos\angle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{(\overline{AB};\ \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{6-6}{\sqrt{4+36} \cdot \sqrt{9+1}} = 0$$

$$\angle A = 90^0$$

$$\Delta ABC - \text{прямоугольный}$$

$|\overline{AC}| = 2\sqrt{10};\ |\overline{AB}| = \sqrt{10};\ |BC| = \sqrt{50}$

$$cos\angle B = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}}, cos\angle C = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $\angle A = 90^0$, $\angle \text{B} = arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\angle C = arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$

Пример 6. Даны векторы $\overline{a} = (3; -5; 2)$ и $\overline{b} = (2; -3; 4)$. Найти $(2\overline{a} - 3\overline{b};\ \overline{a} + 2\overline{b})$.

Решение.

$$\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\overline{d} = \overline{a} + 2\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{c}; \overline{d}) = 0 \cdot 7 + (-1) \cdot (-11) + (-8) \cdot 10 = -69$$

Ответ: -69

Пример 7. Известно, $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $(\bar{a} - \bar{b})^2 + (\bar{a} + 2\bar{b})^2 = 20$. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение.

$(\bar{a} - \bar{b}; \bar{a} - \bar{b}) + (\bar{a} + 2\bar{b}; \bar{a} + 2\bar{b}) = 20$

$(\bar{a}; \bar{a}) - (\bar{a}; \bar{b}) - (\bar{b}; \bar{a}) + (\bar{b}; \bar{b}) + (\bar{a}; \bar{a}) + 2(\bar{a}; \bar{b}) + 2(\bar{b}; \bar{a}) + 4(\bar{b}; \bar{b}) = 20$

$|a^2| - 2(\bar{a}; \bar{b}) + |b^2| + |\bar{a}|^2 + 4(a;b) + 4|b^2| = 20$

$2 \cdot 1 + 2(\bar{a}; \bar{b}) + 5 \cdot 4 = 20$

$(\bar{a}; \bar{b}) = -1$

$$cos\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{(\bar{a}; \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

$$cos\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}; \ \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{2\pi}{3}$$

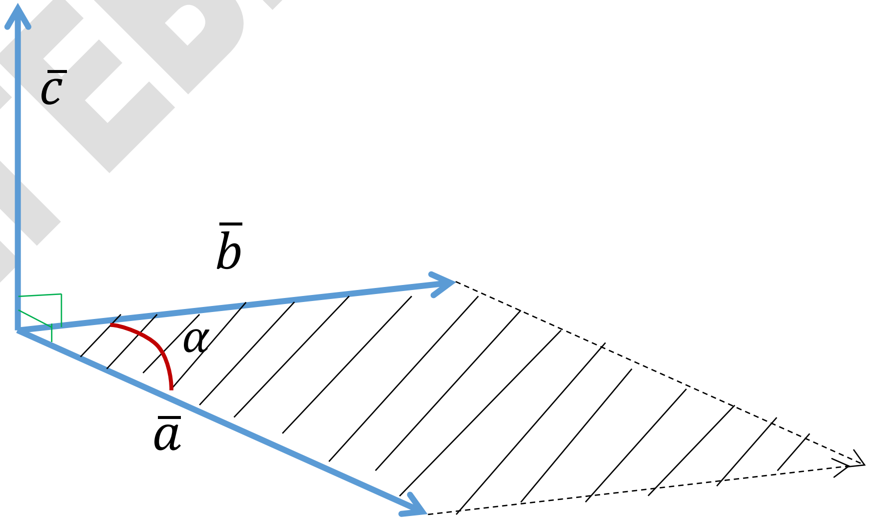
Ответ: $\frac{2\pi}{3}$

Векторное произведение

$[\bar{a};\ \bar{b}] = \bar{c}$

$|\bar{c}| = |[\bar{a};\ \bar{b}]| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\alpha$

$\bar{c} \perp \bar{a};\ \bar{c} \perp \bar{b};$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка



Свойства:

1) $[\bar{a};\ \bar{b}] = -[\bar{b};\ a]$ антикоммутативность

2) $[\lambda\bar{a};\ \bar{b}] = \lambda[\bar{a};\ \bar{b}]$

3) $[\bar{a} + \bar{c};\ \bar{b}] = [\bar{a};\bar{b}] + [\bar{c};\ \bar{b}]$

Координатная форма:

$$[\bar{a};\ \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Геометрические свойства:

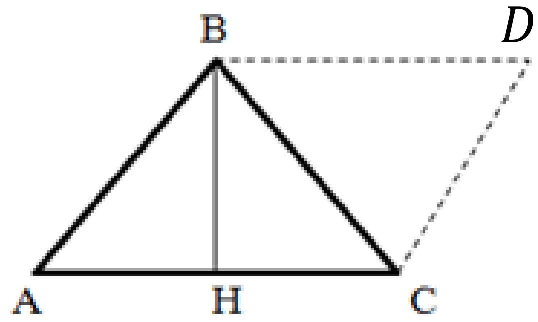
1) $\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow [\bar{a};\ \bar{b}] = \bar{0}$

2) $|[\bar{a};\ \bar{b}]| = S$

Пример 8. Заданы три точки: A (1; -1; 2), B (5; -6; 2), C (1; 3; -1). Найдите расстояние от точки B до прямой AC.

Решение. Расстояние от точки B до прямой AC – высота BH треугольника ABC.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot \mathrm{AC},\ BH = \frac{2S_{ABC}}{\mathrm{AC}} = \frac{S_{ABDC}}{AC} = \frac{|[\overline{AB},\overline{AC}]|}{|\overline{AC}|}$$



$$\overline{AB} = (4; -5; 0), \overline{AC} = (0; 4; -3), |\overline{AC}| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$[\overline{\mathrm{AB}};\ \overline{\mathrm{AC}}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \bar{\imath} \cdot 15 + \bar{\jmath} \cdot 12 + \bar{k} \cdot 16,$$

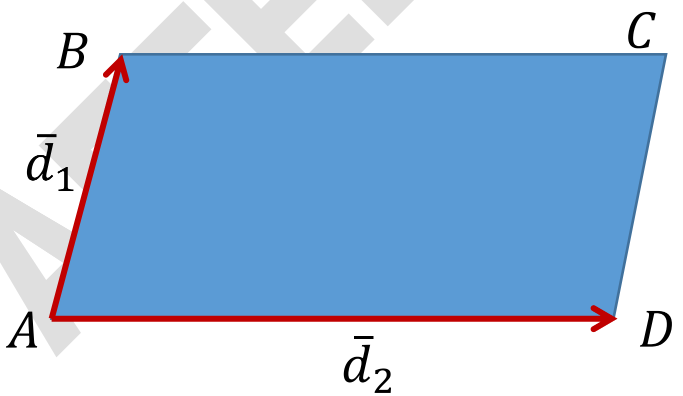
$$\left|[\overline{\mathrm{AB}};\ \overline{\mathrm{AC}}]\right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25,$$

$$BH = \frac{25}{5} = 5$$

Ответ: 5

<u>Пример 9.</u> Даны векторы $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = \frac{\pi}{6}$.

На векторах $\bar{d}_1 = 2\bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d}_2 = 4\bar{a} - 5\bar{b}$ построен параллелограмм. Найдите площадь этого параллелограмма.



Решение.

$$S_{ABCD} = |[\bar{d}_1, \bar{d}_2]|$$

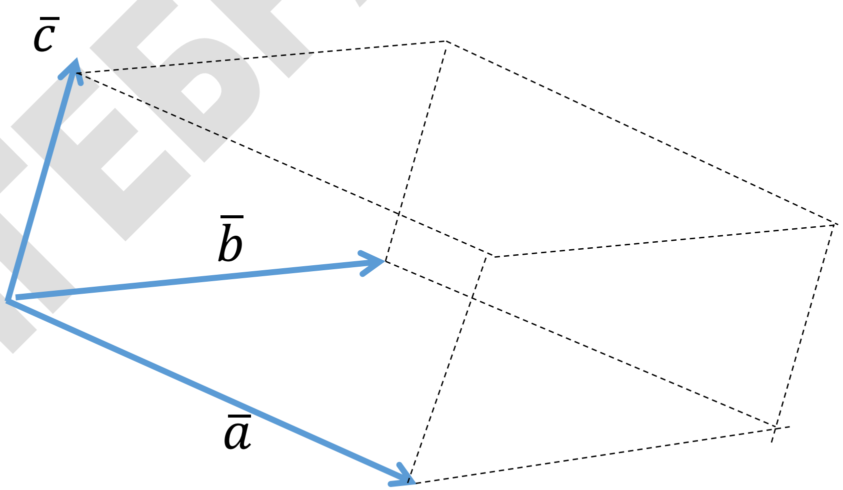
$$[\bar{d}_1, \bar{d}_2] = [2\bar{a} - \bar{b};\ 4\bar{a} - 5\bar{b}] = 8\,[\bar{a};\ \bar{a}] - 10\,[\bar{a};\ \bar{b}] - 4[\bar{b};\ \bar{a}] + 5[\bar{b};\ \bar{b}] = -6\,[\bar{a};\ \bar{b}],$$

$$|[\bar{d}_1, \bar{d}_2]| = \left|-6 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\frac{\pi}{6}\right| = 3$$

Ответ: 3

Смешанное произведение

$$\langle \bar{a};\ \bar{b};\bar{c}\rangle = ([\bar{a};\ \bar{b}],\bar{c})$$



Свойства:

1) $\langle \bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle = \langle \bar{b};\ \bar{c};\ \bar{a}\rangle = \langle \bar{c};\ a;\ \bar{b}\rangle = -\langle \bar{b};\ a;\ \bar{c}\rangle \ldots$

2) $\langle \lambda\bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle = \langle \bar{a};\lambda\bar{b};\ \bar{c}\rangle = \langle \bar{a};\ \bar{b};\lambda\bar{c}\rangle = \lambda\langle \bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle$

3) $\langle \bar{a}+\bar{d};\ \bar{b};\bar{c}\rangle = \langle \bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle + \langle \bar{d};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle$

Координатная форма:

$$\langle \bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

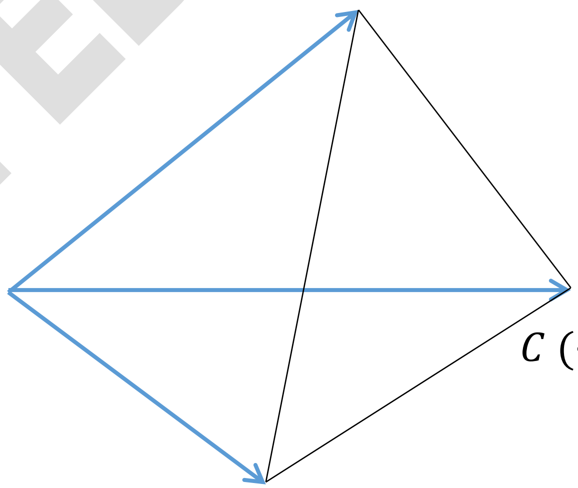
$$\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

Геометрические свойства:

1) $\bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}$– компланарные $\Rightarrow \langle \bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle = 0$

2) $|\langle \bar{a};\ \bar{b};\ \bar{c}\rangle| = V$, V- объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

Пример 10. Найдите объём пирамиды вершинами которой являются точки A (2; -5; 3) B (0; 2; 1), C (-2; -2; 3), D (3; 2; 4).



Решение.

$\overline{AB} = (-2; 7; -2)$

$\overline{AC} = (-4; 3; 0)$

$\overline{AD} = (1; 7; 1)$

$$\langle \overline{AB}; \overline{AC}; \overline{AD} \rangle = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 84$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\langle \overline{AB}; \overline{AC}; \overline{AD} \rangle\right| = \frac{84}{6} = 14$$

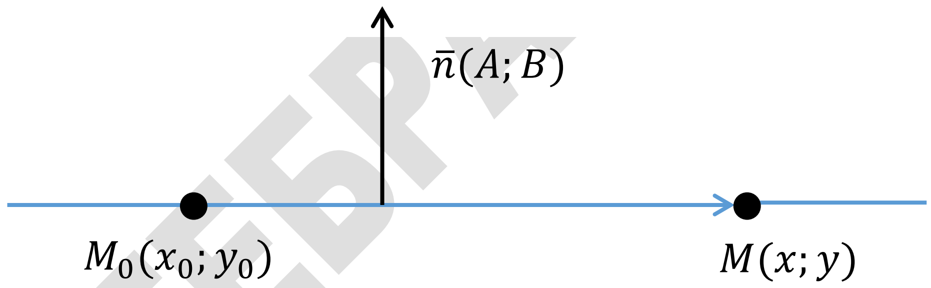
Ответ: 14.

Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$Ax + By + D = 0$$



$\bar{n} \perp \overline{M_0M} \qquad (\bar{n};\ \overline{M_0M}) = 0$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$$

$\overline{M_0M} \parallel \bar{q}$

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda p \end{cases}$$

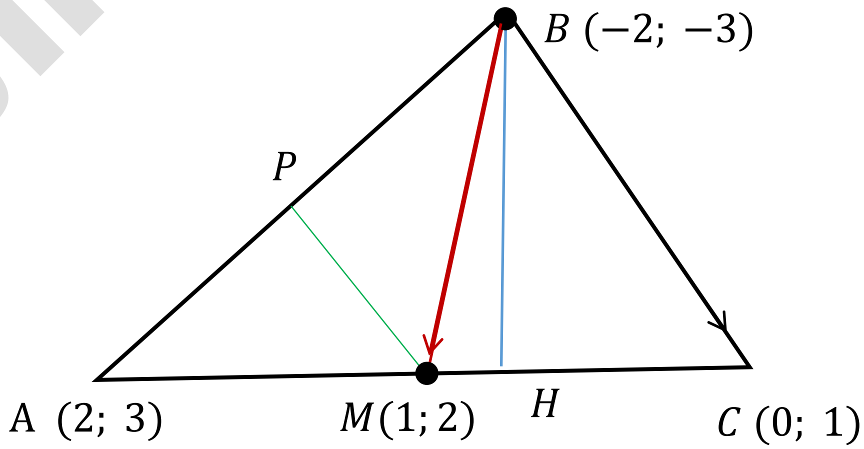
Пример 11. Треугольник ABC задан координатами вершин. $A(2;3), B(-2;-3), C(0;1)$.

1) Напишите общее уравнение высоты BH.

2) Напишите каноническое уравнение медианы BM.

3) Напишите параметрическое средней линии треугольника, параллельной стороне BC.

Решение.



1) $BH \perp AC$; $\bar{n} = \overline{AC} = (-2;-2)$, т. $B\,(-2;\ -3)$

$$-2(x+2) - 2(y+3) = 0$$

$$-2x - 2y - 10 = 0,\ x + y + 5 = 0$$

2) $x_M = \frac{2+0}{2} = 1,\ y_M = \frac{3+1}{2} = 2,$

$\bar{q} = \overline{BM} = (3;5)$ и т. $B(-2;-3)$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{5}$$

3) $\bar{q} = \overline{BC} = (2;4), M(1;2)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$$

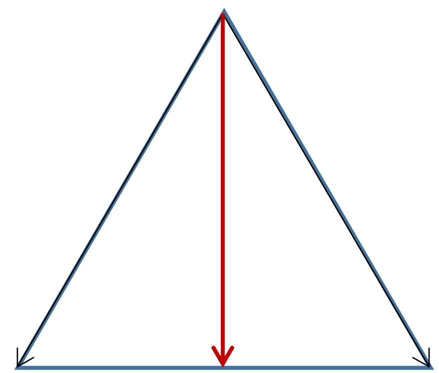
Ответ: $BH: x + y + 5 = 0$

$$BM: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{5}$$

$$MP: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$$

<u>Пример 12</u>. Определите при каких значениях параметров a и b прямая заданная уравнением $\frac{x-2a}{2}=\frac{y+a+2}{b}$ является биссектрисой угла B треугольника ABC, где A(1;1), B(6;4), C(9;-1).

Решение.



$\overline{\mathrm{BA}}=(-5;\ -3)$, $\overline{\mathrm{BC}}=(3;-5)$, $|\overline{\mathrm{AB}}|=|\overline{\mathrm{BC}}|=\sqrt{34}$,

$\measuredangle\mathrm{ABC}$ – равнобедренный

BM-медиана, биссектриса и высота

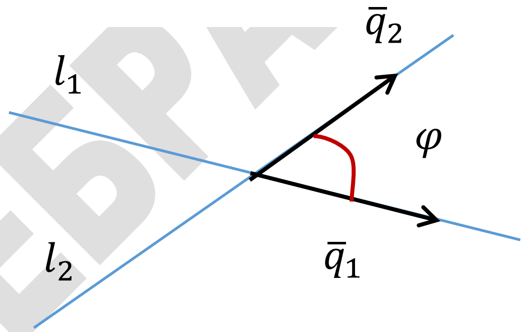
т. $\mathrm{M}\left(\frac{1+9}{2};\frac{1-1}{2}\right)$, т. $\mathrm{M}(5;0)$, $\overline{\mathrm{BM}}=(-1;-4)$, т. $\mathrm{B}(6;4)$

$$\mathrm{BM}:\ \frac{x-6}{-1}=\frac{y-4}{-4}$$

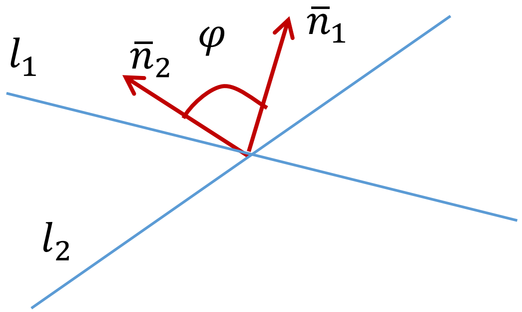
1) Точка $(2a;-a-2)$ принадлежит BM, $\frac{2\mathrm{a}-6}{1}=\frac{-\mathrm{a}-2-4}{4}$, $8\mathrm{a}-24=-\mathrm{a}-6$, $\mathrm{a}=2$
2) Вектор $(2;b)$ коллинеарный $\overline{\mathrm{BM}}=(-1;-4)$. $b=8$

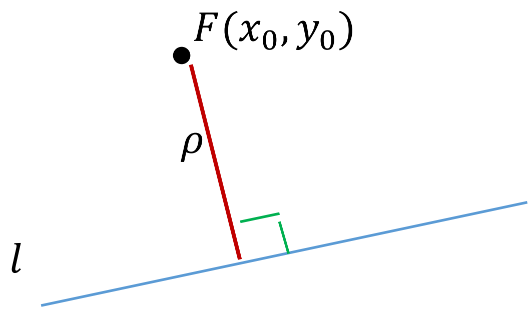
Ответ: $\mathrm{a}=2, b=8$

Угол между прямыми l_1 и l_2



$$cos\varphi = \frac{|(\overline{q_1}, \overline{q_2})|}{|\overline{q_1}| \cdot |\overline{q_2}|} = \frac{|(\overline{n_1}, \overline{n_2})|}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$$





Расстояние от точки F до прямой l

$$\rho(\text{т}.F; l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример 13. Найдите угол между прямыми l_1 и l_2, где

$$l_1: 3x - 4y + 7 = 0 \text{ и } l_2: \frac{x}{12} = \frac{(y-1)}{-5}$$

Решение.

$l_1: 3x - 4y + 7 = 0$ и $\overline{n_1} = (3; -4)$

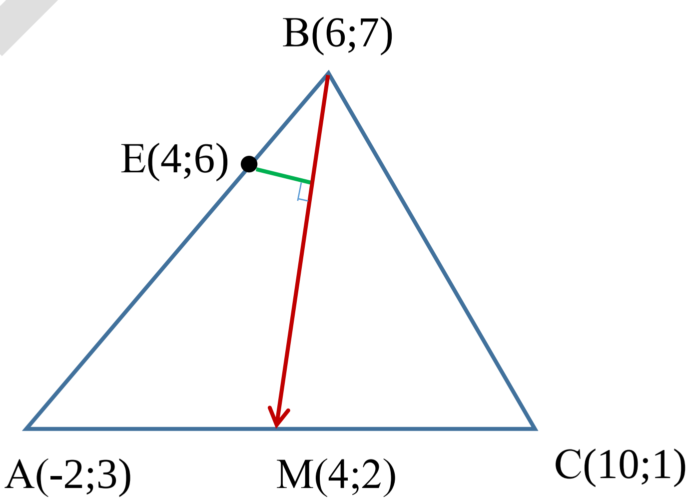
$l_2: \frac{x}{12} = \frac{(y-1)}{-5}$ и $\overline{q_2} = (12; -5)$, тогда $\overline{n_2} = (5; 12)$,

$$cos\varphi = \frac{|(\overline{n_1}, \overline{n_2})|}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{|15 - 48|}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{25+144}} = \frac{33}{5 \cdot 13} = \frac{33}{65}$$

Ответ: $arccos\frac{33}{65}$

Пример 14. Точка E делит сторону AB треугольника ABC в отношение 3:1 считая от вершины A. Найдите расстояние от точки E до прямой BM, являющейся медианой. Координаты вершин $A(-2;3), B(6;7), C(10;1)$.

Решение



1) $AE: EB = 3:1$

$$x_E = \frac{-2+3\cdot 6}{1+3} = 4; \quad y_E = \frac{3+3\cdot 7}{1+3} = 6; \ E(4;6)$$

2) $\overline{BM} = (-2;-5)$ и т.B $(6;7)$ $\quad \frac{x-6}{-2} = \frac{y-7}{-5}$

$$-5x + 30 = -2y + 14$$

$$-5x + 2y + 16 = 0$$

3) $$\rho(\text{т.}\, E; BM) = \frac{|-5x_E+2y_E+16|}{\sqrt{(-5)^2+2^2}} = \frac{|-5\cdot 4+2\cdot 6+16|}{\sqrt{29}} = \frac{8}{\sqrt{29}}$$

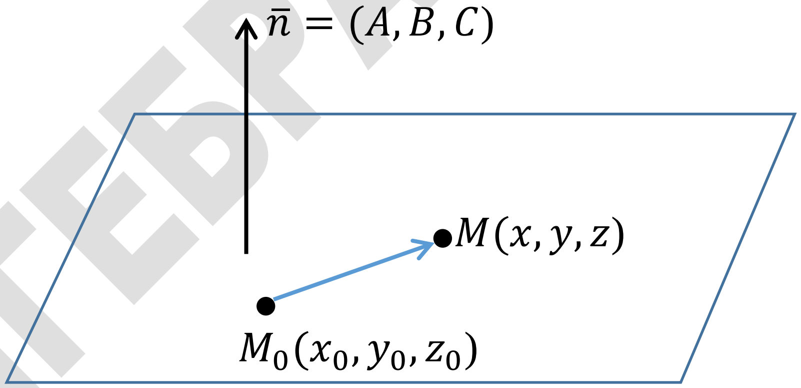
Ответ: $\frac{8}{\sqrt{29}}$

Плоскость в пространстве

Общее уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

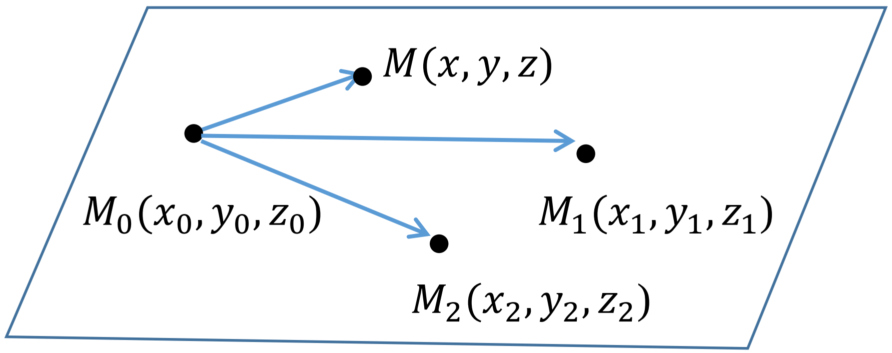
$$Ax + By + Cz + D = 0$$



$$(\bar{n}; \overline{M_0 M}) = 0$$

Уравнение плоскости проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

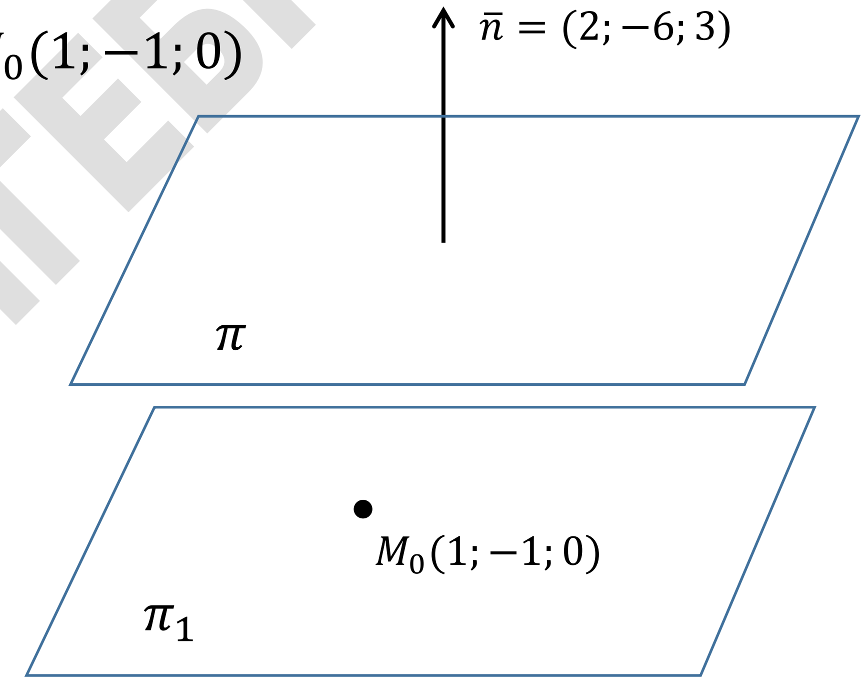


$$\langle \overline{M_0 M}; \overline{M_0 M_1}; \overline{M_0 M_2} \rangle = 0$$

либо

$\bar{n} = [\overline{M_0 M_1}; \overline{M_0 M_2}]$ и $(\bar{n}; \overline{M_0 M}) = 0$

Пример 14. Напишите уравнение плоскости параллельной плоскости $\pi: 2x - 6y + 3z + 5 = 0$ и проходящей через точку $M_0(1; -1; 0)$



Решение.

$\bar{n} = (2; -6; 3)$, $M_0(1; -1; 0)$

$\pi_1: 2(x-1) - 6(y+1) + 3(z-0) = 0$

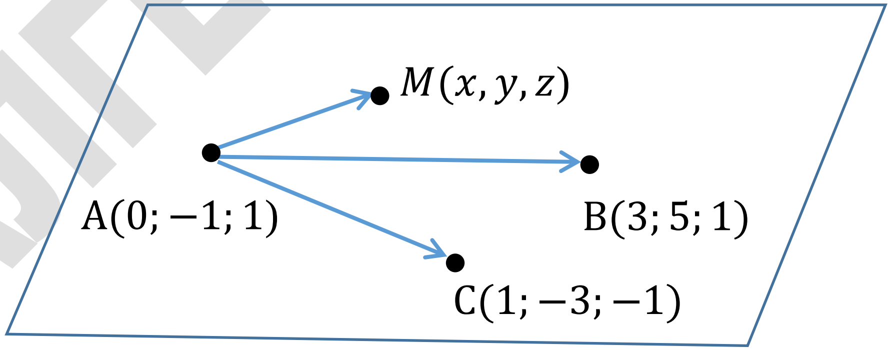
$$2x - 6y + 3z - 8 = 0$$

Ответ:

$$2x - 6y + 3z - 8 = 0$$

Пример 15. Напишите уравнение плоскости проходящей через точки $A(0;-1;1)$, $B(3;5;1)$, $C(1;-3;-1)$.

Решение.



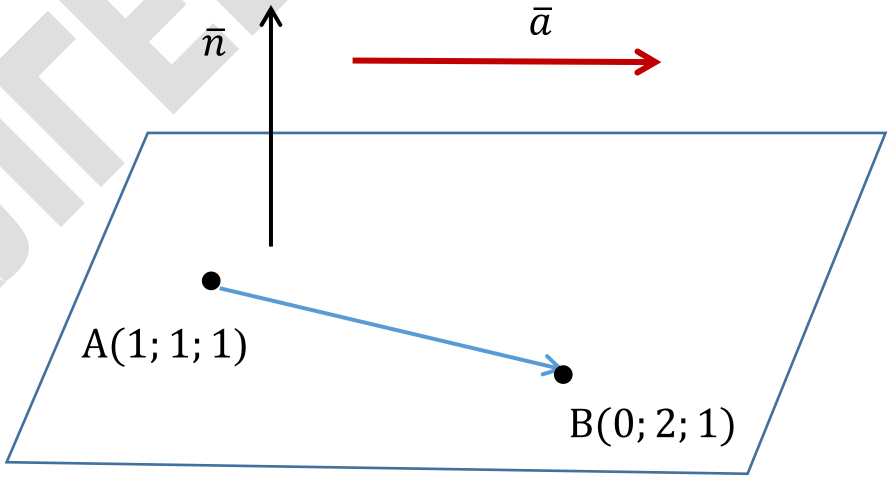
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -12x-(y+1)\cdot(-6)+(z-1)\cdot(-12) = -12x+6y-12z+18=0$$

Ответ:

$$2x-y+2z-3=0$$

Пример 16. Напишите уравнение плоскости проходящей через точки A(1; 1; 1), B(0; 2; 1) и параллельной вектору $\bar{a} = (2; 0; 1)$



Решение.

$\overline{AB} = (-1; 1; 0)$

$$\bar{n} = [\overline{AB}; \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k}$$

$\bar{n} = (1; 1; -2)$ и т. A $(1; 1; 1)$

$(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0$

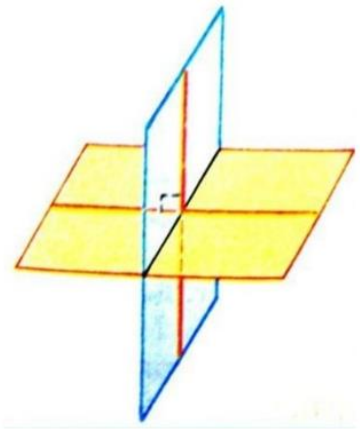
$x + y - 2z - 4 = 0$

Ответ: $x + y - 2z - 4 = 0$

Прямая в пространстве

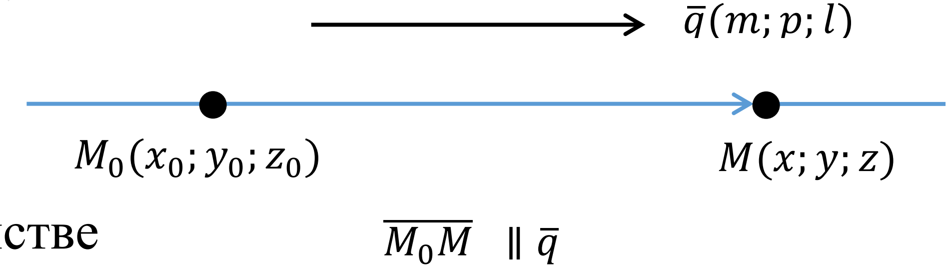
Общее уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



Каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{l}$$



Параметрическое уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda p \\ z = z_0 + \lambda l \end{cases}$$

Пример 17. Напишите каноническое и параметрическое уравнения прямой, заданной как пересечение плоскостей. $l: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Решение. *Способ 1.*

$\pi_1: 2x - y + 2z - 3 = 0, \qquad \overline{n_1} = (2; -1; 2)$

$\pi_2: x + 2y - z - 1 = 0, \qquad \overline{n_2} = (1; 2; -1)$

$$\bar{q} = [\overline{n_1}; \overline{n_2}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\,\bar{k},\ \bar{q} = (-3; 4; 5)$$

т.$\mathrm{M}_0(x; y; 0) \in l$. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x = 7 \\ 2y = 1 - x \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$ $\mathrm{M}_0\left(\frac{7}{5}; -\frac{1}{5}; 0\right)$

$$l: \frac{x - \frac{7}{5}}{-3} = \frac{y + \frac{1}{5}}{4} = \frac{z}{5}; \quad \begin{cases} x = \frac{7}{5} - 3\lambda \\ y = -\frac{1}{5} + 4\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

Способ 2. $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ *Метод Гаусса*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$ x, y — базисные, z — свободная, $z = c$

$-5y + 4c = 1$ $\qquad$ $x + 2\left(\frac{4c-1}{5}\right) - c = 1$

$y = \frac{1-4c}{-5} = \frac{4c-1}{5}$ $\qquad$ $x = -\frac{3}{5}c + \frac{7}{5}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}c + \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5}c - \frac{1}{5} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}c \\ \frac{4}{5}c \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Частное решение

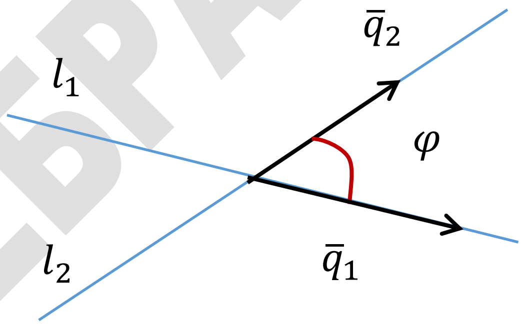
Общее однородное решение

$\bar{q} = (-3; 4; 5)$ $\qquad$ $\mathrm{M}_0\left(\frac{7}{5}; -\frac{1}{5}; 0\right)$

Ответ l: $\frac{x-\frac{7}{5}}{-3} = \frac{y+\frac{1}{5}}{4} = \frac{z}{5}$; $\begin{cases} x = \frac{7}{5} - 3\lambda \\ y = -\frac{1}{5} + 4\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$

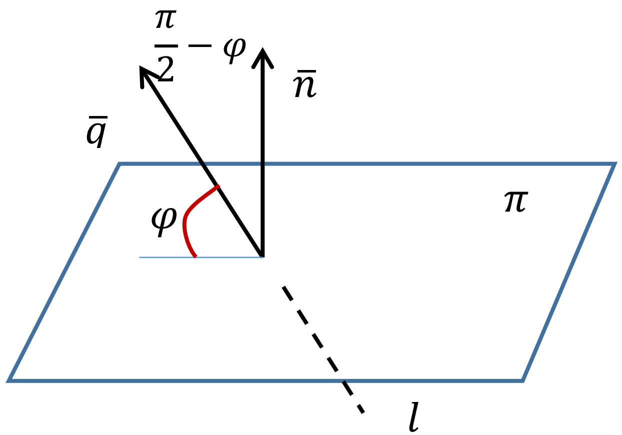
Угол между прямыми l_1 и l_2

$$cos\varphi = \frac{|(\overline{q_1}, \overline{q_2})|}{|\overline{q_1}| \cdot |\overline{q_2}|}$$



Угол между плоскостями π_1 и π_2

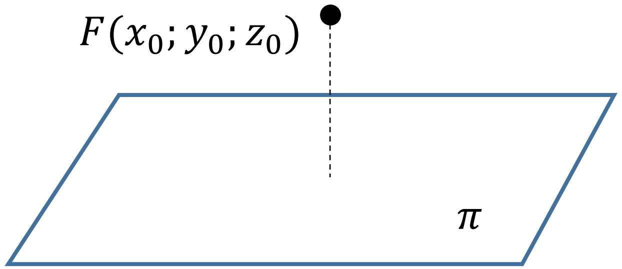
$$cos\varphi = \frac{|(\overline{n_1}, \overline{n_2})|}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$$



Угол между прямой l и плоскостью π

$$sin\varphi = \frac{|(\bar{q}, \bar{n})|}{|\bar{q}| \cdot |\bar{n}|}$$

Расстояние от точки F до плоскости π



$$\rho(\text{т}. F; \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

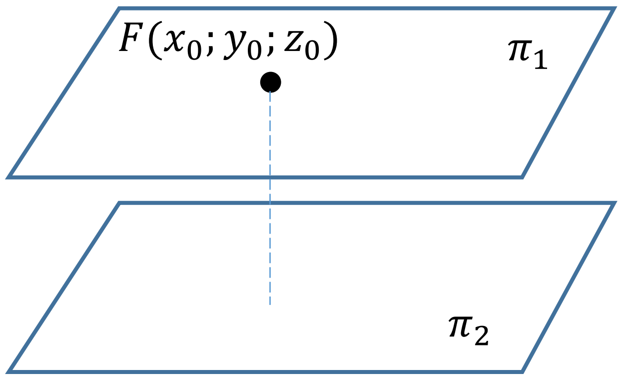
Пример 18. Определить взаимное расположение плоскостей. $\pi_1: 2x + y - z - 1 = 0$ $\pi_2: -4x - 2y + 2z - 1 = 0$. Если плоскости пресекаются, найти угол между плоскостями; если они параллельны, найти расстояние между ними.

Решение.

$\pi_1: 2x + y - z - 1 = 0, \overline{n_1} = (2; 1; -1)$

$\pi_2: -4x - 2y + 2z - 1 = 0, \overline{n_2} = (-4; -2; 2)$

$\frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$, $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$, $\overline{\pi_1} \parallel \overline{\pi_2}$



т. $F(x_0; y_0; z_0) \epsilon \pi_1$ например, т. $A(0; 0; -1)$

Расстояние от точки А до плоскости π_2

$$\rho(\text{т.} F; \pi_2) = \frac{|-4x_0 - 2y_0 + 2z_0 - 1|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{24}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Пример 19. Симметричность