8-多元函数微分学-1

n 维点集

邻域

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\}$$

去心邻域

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\}$$

内点、外点和边界点

- 若存在 δ ，使得 $U(P_0,\delta)\subset E$,则 P_0 为 E 的内点
- 若存在 δ ，使得 $U(P_0,\delta)\cap E=\emptyset$,则 P_0 为 E 的外点
- 若对于任意 δ ，都有 $U(P_0,\delta)$ 既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则 P_0 为 E 的边界点

> 特殊情况的边界点
> 有理数集 Q ，所有点均为边界，并且无理数点也是其边界

开集和闭集
若 E 中每个点都是其内点，称 E 为开集

区域
若 E 中任意两点都能用内部的折线连接起来，则称 E 为连通的
连通的开集称为开区域，简称区域
区域连同其边界称为闭区域

> $\{(x,y)|xy>0\}$ 不是连通的
> $\{(x,y)|xy\geq 0\}$ 是连通的

多元函数的定义

比较简单，先不写了

多元函数的极限与连续性

任意 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得对于 $0<|x-x_0|<\delta$，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

与一元函数不同的地方在于，极限的逼近过程可以选取不同的路径

> 例子
>
> $$\frac{xy}{x^2+y^2}$$
>
> 从 x 轴或者 y 轴趋近得到极限为 0，但是选取路径 y=x，得到极限为 1/2
> 令 y=kx，原式=$\frac{k}{1+k^2}$ ，会随着 k 变化

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

累次极限

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] \quad or \quad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]$$

定义在有界闭区域上的二元连续函数

有界性定理
最值定理
零点存在定理
介值定理

构造折线，降维，应用零点存在定理