11-级数

数项级数的概念和基本性质

级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

正项级数及其敛散性的判别法

收敛原理

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列有上界。

p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛} & p > 1 \\ \text{发散} & p \le 1 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

比较判别法

本身比较简单。

极限形式：若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ ，则

- $0 < l < +\infty$ 时，相同敛散性
- $l = 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 ~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $l = +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 ~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

比值判别法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

积分判别法

若：

- 非负函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty]$ 单调递减
- $a_n = f(n)$
  则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 有相同的敛散性。

任意项级数及其敛散性的判别法

交错级数敛散性的判别法

形如：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad (a_n > 0)$ 的级数，称为交错级数。

Leibniz 判别法

若交错级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \quad (a_n > 0)$ 满足：

- $0 < a_{n+1} \le a_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  则该级数收敛，且其余项级数满足 $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\right| \le a_{n+1}$

Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

讨论形如：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}a_nb_n$ 的级数的敛散性。

Abel 引理

设 a_n 为单调数列，$B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$，且 $|B_k| \le M(k=1,2,\cdots)$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right| \le M(|a_1| + 2|a_n|).$$

Abel 判别法

数列 a_n 单调且有界，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛

Dirichlet 判别法

数列 a_n 单调且趋于 0，数列 b_n 的部分和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 有界

函数项级数及其敛散性

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Abel 定理

- 若幂级数于 x_0 处收敛，则当 $|x| < |x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 绝对收敛
- 若幂级数于 x_0 处发散，则当 $|x| > |x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 发散

证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \tag{1}$$

$$|a_n x_0^n| \le M \tag{2}$$

$$|a_n x^n| < |a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}| \tag{3}$$

$$\le M|\frac{x^n}{x_0^n}| \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

$$|a_n x_0^n| \le M$$

$$|a_n x^n| < |a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}| \le M|\frac{x^n}{x_0^n}|$$

收敛半径

系数模比值法

对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$，则

$$R = \begin{cases} 0 & \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho} & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \end{cases}$$

系数根比值法

对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$，则

$$R = \begin{cases} 0 & \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho} & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \end{cases}$$