10-曲线积分和曲面积分

第一类曲线积分

概念

曲线积分

$$\int_C f(x,y)ds$$

环路积分

$$\oint_C f(x,y)ds$$

计算

第一类曲面积分

概念

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$$

计算

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

第二类曲线积分

概念

$$\int_C \mathbf{F}(x,y) \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

计算

第二类曲面积分

概念

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS$$

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_{\Sigma^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

计算

可以化为第一类曲面积分：

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 dS$$

由第一类曲面积分可得：

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma^+} \frac{PA + QB + RC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} dS = \iint_{\Sigma^+} (PA + QB + RC) dudv$$

当曲面可以写成 $z(x, y)$ 的形式时，可视为特殊情况：

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma^+} (Pz_x + Qz_y - R) dxdy$$

Green 公式及其应用

Green 公式

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

$$\oint_C Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

$$\oint_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

路径无关/解析函数

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$

全微分求积与全微分方程

积分因子：

$$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{xy} \quad \frac{1}{x^2+y^2} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Gauss 公式

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Stokes 公式

疑似不考