11.5-附录与补充

一阶线性非齐次微分方程求解公式

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

我们希望把左边凑成全微分

于是，可以两边同乘 $e^{\int Pdx}$

$$Q(x)e^{\int Pdx} = y'e^{\int Pdx} + Pye^{\int Pdx} = (ye^{\int Pdx})'$$

$$ye^{\int Pdx} = \int Q(x)e^{\int Pdx}dx + C$$

$$y = e^{-\int Pdx}(\int Q(x)e^{\int Pdx}dx + C)$$

常用泰勒展开公式

泰勒展开：

$$P(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + ...$$

麦克劳林展开：

$$P(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)x^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + ...$$

常见函数的泰勒展开 (麦克劳林展开)：

指数函数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$a^x = e^x \ln a = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + ... + \frac{(x\ln a)^n}{n!} + ...$$

三角函数与反三角函数

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + ...$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - ... + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + ...$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + ...$$

$$\arcsin(x)=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{x^7}{7}+...+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

$$\arctan(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-...+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+...$$

双曲三角

$$\sinh(x)=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+...+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+...$$

$$\cosh(x)=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+...+\frac{1}{2n!}x^{2n}+...$$

$$\tanh(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+...$$

有理函数/根式函数

其实就是等比数列求和:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^n+\dots(-1<x<1)$$

后面两个通项都不太好写:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\cdots$$

对数函数

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+...(-1<x\le1)$$

$$\ln(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n+...(0<x\le2)$$

$$\ln(\frac{1+x}{1-x})=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^n}{n}+...)(-1<x<1)$$

Wallis 公式与双阶乘相关公式

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

$$I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n=2k\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n=2k-1\end{cases}$$

由单调性:

$$I_{2k+1}<I_{2k}<I_{2k-1}$$

可推出一些结论：

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{2k+1} \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1} < \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2k}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Stirling 公式（斯特林公式）

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$