8-拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

数理方法复习用。

拉普拉斯变换

定义

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

以下部分，简单列举一些拉普拉斯变换的性质和常用拉普拉斯变换，顺便附上证明（如果来得及的话）。

性质

平移性

$$\mathcal{L}[e^{p_0 t}f(t)] = F(p - p_0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p - p_0)] = e^{p_0 t}\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = e^{p_0 t}f(t)$$

▶ 推导

微分性

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$$

$$F'(p) = \mathcal{L}[-tf(t)]$$

//这里还有一些二级结论

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

特殊情况

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p)$$

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]$$

▶ 推导

积分性

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(s)ds] = \frac{F(p)}{p}$$

若 $\int_p^\infty F(s)ds$ 收敛，则

$$\int_p^\infty F(s)ds = \mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]$$

▶ 推导

延迟性

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-pt_0}F(p)$$

▶ 推导

卷积性

$$\mathcal{L}[f*g(t)] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$$

▶ 推导

常用拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}$$

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{p^2+k^2}$$

$$\mathcal{L}[coskt] = \frac{p}{p^2+k^2}$$

$$\mathcal{L}[f(t)\sin at] = \frac{1}{2i}[F(p-ia)-F(p+ia)]$$

$$\mathcal{L}[f(t)\cos at] = \frac{1}{2}[F(p-ia)+F(p+ia)]$$

伽马函数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(m+1) = m!$$

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}}$$

$$\mathcal{L}[t^{-\frac{1}{2}}] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$$

拉普拉斯逆变换

$$\mathcal{L}^{-1}[f(t)]$$

复反演积分公式

这里还要再补充一点

▶ 推导

用留数计算

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[f(t)]=\sum_{k=1}^{n}Res[F(p)e^{pt},p_k]$$

拉普拉斯变换的应用 (求广义积分)

类型 1

$$\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt$$

类型 2

$$\int_0^{\infty}t^nf(t)dt$$