# 10-分离变量法

# 分离变量

就算已经是使用了分离变量的方法了，这一章的计算量还是巨 tm 大

# 1、一维波动方程

## 第一类齐次边界条件

弦两端固定。

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,0<x<l,t>0 \\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\phi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

齐次方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$

齐次边界条件 $0<x<l,t>0$

### 想法

$$u(t,x)=\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(t)\cos\omega_n x+b_n(t)\sin\omega_n x]$$

### 分离变量法

假设 $u(t,x)=X(x)T(t)$

$$XT''-a^2X''T=0$$

$$X(0)T(t)=0,X(l)T(t)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

$$X''+\lambda X=0$$

$$X(0)=0,X(l)=0$$

### 求解特征值

两端 $\mathcal{L}$

$$\widetilde{X}=\mathcal{L}[X]$$

$$p^2\widetilde{X}-pX(0)-X'(0)+\lambda\widetilde{X}=0$$

$$\widetilde{X}=\frac{X'(0)}{p^2+\lambda}$$

两端 $\mathcal{L}^{-1}$

这里要根据 $\lambda$ 分类讨论，且只在 $\lambda$ 取某些值的时候成立

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$$

## 第二类齐次边界条件

弦的左端固定，右端滑动

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

弦的右端固定，左端滑动

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

弦的两端均自由

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

这里要注意，n 可以取 0，会多一个线性项

## 固有值、固有函数与边界条件的关系

| 序号 | 边界条件 | 固有值 | 固有函数 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | $X(0) = X(l) = 0$ | $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, n = 1, 2, \dots$ | $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$ |
| 2 | $X(0) = X'(l) = 0$ | $\lambda_n = [\frac{(2n-1)\pi}{2l}]^2, n = 1, 2, \dots$ | $X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x$ |
| 3 | $X'(0) = X(l) = 0$ | $\lambda_n = [\frac{(2n-1)\pi}{2l}]^2, n = 1, 2, \dots$ | $X_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x$ |
| 4 | $X'(0) = X'(l) = 0$ | $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, n = 0, 1, \dots$ | $X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x$ |

注：$X(x)$ 是选取 $\cos$ 还是 $\sin$ 的形式，只需要根据边界条件即可确定

# 2、一维热传导方程

## 第一类齐次边界条件

杆的侧面绝热，假设热经过杆的两端流到外介质或流入杆内。若还假设杆子的两端温度保持为 0，初始温度分布为 $\phi(x)$

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$$

固有函数

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$T_n(t) = D_n e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t}$$

$$u_n(t, x) = X_n(x) T_n(t)$$

$$u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

杆子的左端温度保持为 0，右端与外界绝热

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

## 第三类齐次边界条件（似乎不考，就暂且掠过）

杆子的左端温度保持为 0，右端热量自由发散到周围的温度为 0 的介质中

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, (u_x + hu)|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

其中 $h$ 为表面传热系数

$$\lambda_n = (\frac{z_n}{l})^2$$

固有函数

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{z_n}{l} x$$

# 3、二维拉普拉斯方程

## 矩形域内的椭圆方程

二维拉普拉斯方程的第一边值问题（Dirichlet 问题）

长为 a 宽为 b 的矩形薄板，x=0,x=a,y=0 三边温度为 0，y=b 上温度分布为 $\phi(x)$，且满足 $\phi(0) = \phi(a) = 0$，求薄板内部达到稳定状态时的温度分布。

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = 0, u|_{x=b} = \phi(x) \end{cases}$$

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi y}{a})sin\frac{n\pi}{a}x$$

注：这里用双曲函数计算起来会比指数函数方便

## 拓展 + 技巧

非齐次边界条件

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<a, 0<y<b \\ u|_{x=0}=\psi_1(y), u|_{x=a}=\psi_2(y) \\ u|_{y=0}=\phi_1(x), u|_{x=b}=\phi_2(x) \end{cases}$$

叠加

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<a, 0<y<b \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=a}=0 \\ u|_{y=0}=\phi_1(x), u|_{x=b}=\phi_2(x) \end{cases}$$

$$+$$

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0, \quad 0<x<a, 0<y<b \\ v|_{x=0}=\psi_1(y), v|_{x=a}=\psi_2(y) \\ v|_{y=0}=0, v|_{x=b}=0 \end{cases}$$

于是 $w=u+v$ 即为原方程的解

## 圆域内的椭圆方程 (貌似不考，笑嘻了)

# 4、非齐次方程 + 齐次边界条件

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t,x), \quad 0<x<l, t>0 \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\phi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

## 固有函数法

由于固有函数 $\sin{\frac{n\pi}{l}x} $ 一定满足齐次方程 + 边界条件，于是假设方程的形式

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

接下来找 $U_n(t)$ ，为了使形式一致，需要将 $f,\phi,\psi$ 展开为傅里叶级数

然后带入方程与初始条件，待定系数求解即可。

$$U_n''(t)+(\frac{an\pi}{l})^2U(t)=f_n(t)$$

## 特殊函数法/特解法

目标：找到函数 $g(t,x)$ ，使其满足

$$\left\{\begin{array}{l} g_{tt}-a^2 g_{xx}=f(t,x), 0<x<l, t>0 \\ g|_{x=0}=0, g|_{x=l}=0 \end{array}\right.$$

则函数 $v=u-g$ 满足齐次方程

$$\left\{\begin{array}{l} v_{tt}-a^2 v_{xx}=0, \quad 0<x<l, t>0 \\ v|_{x=0}=0, v|_{x=l}=0 \\ v|_{t=0}=\phi(x), v_t|_{t=0}=\psi(x) \end{array}\right.$$

一般，如果 $f(t,x)=kx^m t^n$ 这样的形式，只要取 $g(t,x)=Ax^m t^n+C$ 或者 $g(t,x)=Ax^m+Bt^n+C$ 即可，取得好可以简化计算

如果 $f$ 比较复杂，有时候只能待定系数
例如：$f(t,x)=\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{2a\pi t}{l}$
设：$g(t,x)=U(t)\sin\frac{2\pi x}{l}$
为什么呢？因为 $g(t,x)$ 满足方程：$g_{tt}-a^2 g_{xx}=f(t,x)$
可见设成这样的形式，其实是非常合理的

## 齐次化原理 (yxf 似乎不想说，书上的我也看不太懂)

# 5、非齐次边界条件的处理

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt}-a^2 u_{xx}=f(t,x), \quad 0<x<l, t>0 \\ u|_{x=0}=\mu_1(t), u|_{x=l}=\mu_2(t) \\ u|_{t=0}=\phi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{array}\right.$$

## 第一类边界条件

$$u|_{x=0}=\mu_1(t), u|_{x=l}=\mu_2(t)$$

$$h(t,x)=A(t)x+B(t)$$

## 第二类边界条件

$$u_x|_{x=0}=\mu_1(t), u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$$

$$h(t,x)=A(t)x^2+B(t)x$$

## 第三类或混合边界条件

$$(u_x+\sigma u)|_{x=0}=\mu_1(t), u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$$

$$h(t,x)=A(t)x+B(t)$$

## 注解

如果遇到方程非齐次 + 边界非齐次，则可以试试先让边界齐次化，再让方程齐次化的想法（这一步直接傅里叶级数展开也 ok），反正就是首先要让边界齐次化。

# 边界条件的疑惑

混合边界条件是什么?
这里好像术语都比较专业，目前考试也用不太到。

# 第一类（Dirichlet）边界条件

# 第二类（Neumann）边界条件

# 第三类（Robin）边界条件

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ (u_x - \sigma_1 u)|_{x=0} = 0, (u_x + \sigma_2 u)|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$