2-解析函数

解析函数

复变函数的极限与连续

要求：当 z 以任意路径趋近于 z_0 ，极限均存在

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

复变函数的导数和微分

定义

柯西黎曼条件（可导的必要条件）

Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

可导的充要条件

可微且满足 C-R 条件

调和函数

定义

若函数 u 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

则称其为调和函数。

解析函数与调和函数的关系

若 $f(z) = u + iv$ 为解析函数，则 u、v 均为调和函数

若 u、v 均为调和函数，且满足 C-R 条件，则称 v 为 u 的共轭调和函数

这里要注意，共轭调和函数并不是相互的，而是有顺序的。

若 u 为调和函数，则必然存在其共轭调和函数 v，使得 $f(z) = u + iv$ 为解析函数

构造调和函数的方法

已知 $u(x,y)=x^2-x-y^2$ 求 $f(z)$

偏积分

$$v_y=u_x=2x-1$$

$$v_x=-u_y=2y$$

$$v=\int v_y dy=\int(2x-1)dy=(2x-1)y+\phi(x)$$

$$v_x=2y+\phi'(x)=2y$$

$$v=(2x-1)y+C=2xy-y+C$$

曲线积分

调和函数，积分结果与路径无关

$$(0,0)\to(x,y)$$

$$\begin{aligned}v&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}v_xdx+v_ydy+C\\&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-u_ydx+u_xdy+C\\&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2ydx+(2x-1)dy+C\end{aligned}$$

选取路径

$$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$$

$$\begin{aligned}v&=\int_{(0,0)}^{(x,0)}2ydx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2x-1)dy+C\\&=0+\int_0^y(2x-1)dy+C\\&=2xy-y+C\end{aligned}$$

凑全微分

调和函数，可以写成某个函数的全微分

$$\begin{aligned}dv&=v_xdx+v_ydy\\&=-u_ydx+u_xdy\\&=2ydx+(2x-1)dy\\&=d(2xy-y)\end{aligned}$$

初等解析函数

指数

对数

三角

双曲