4-级数展开

级数展开

幂级数

幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$

幂级数收敛的必要条件:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Abel 定理

- 若幂级数在 $z = z_0(z_0 \neq 0)$ 处收敛，则它在 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛
- 若幂级数在 $z = z_0(z_0 \neq 0)$ 处发散，则它在 $|z| > |z_0|$ 内发散

收敛半径

幂级数收敛情况分为 3 种:

- 只在原点 $z = 0$ 处收敛，除原点外，处处发散
- 在全平面上处处绝对收敛
- 在收敛半径 R 内收敛，在 R 外发散

收敛半径求法：若有下列条件之一

- $l = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}|$
- $l = \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{|c_n|}|$

则收敛半径 $R = \frac{1}{l}$

泰勒展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad n=+-1,+-2$$

孤立奇点与分类

孤立奇点的定义：函数 $f(z)$ 在奇点 $z=z_0$ 的某去心领域内解析

可去奇点

极点

前置：零点

本性奇点

函数在无穷远的性态

取倒数即可，注意“非孤立”的情况，此种情况不在我们通常的考虑范围之内