3-复变函数的积分

复变函数的积分

定义与计算

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

若 C 为闭曲线，记为 $\oint_C f(z)dz$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)\cdot d(x+iy) = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdy$$

一个特殊的积分

$$I = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$I = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

柯西定理

若 $f(z)$ 在单连通区域解析，则 $\oint_C f(z)dz = 0$

柯西定理的推广

复合闭路定理

柯西积分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

柯西求导公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$