5-留数及其应用

留数及其应用

留数的定义

$$C:|z-z_0|$$

$$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

留数与洛朗展开

将 $f(z)$ 在孤立奇点处洛朗展开，根据定义逐项积分即可（只需利用到之前的那个特殊的积分）

- $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点

$$Res[f(z),z_0]=c_{-1}$$

- $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点

$$Res[f(z),\infty]=-c_{-1}$$

因为无穷远处的留数是围道是负向的，所以要加个负号

留数的计算

$$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

注：一阶极点有时可以使用洛必达法则，方便计算

无穷远处的留数

- 设 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则

$$Res[f(z),\infty]=-Res[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$$

可以将 $\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ 的操作理解为凑出系数 c_{-1}

- 设 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，若 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=A$，则

$$Res[f(z),\infty]=-A$$

$\lim_{z\to\infty}zf(z)=A$ 等价于 $c_{-1}=A$

留数定理

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k]$$

第二留数定理

若函数 $f(z)$ 在扩充复平面上，除了有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \infty$ 外，是解析的，则：

$$\sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k] + Res[f(z), \infty] = 0$$

留数定理的应用

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 的积分

令 $z = e^{i\theta}$ ，使用三角代换即可：

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz} dz = de^{i\theta} = ie^{i\theta}d\theta \to d\theta = \frac{dz}{iz}$$

当遇到积分区间不是 $[0, 2\pi]$ 的情况时，灵活使用周期性、奇偶性即可

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 的积分

思路：构造上半平面内的半圆周与实轴 (即积分区间) 连起来，使得积分路径变为闭合曲线，从而可以使用留数定理

引理

如果：

- 设 C 为圆周 $|z| = R$ 的上半圆周
- 函数 $f(z)$ 在 C 上连续
- $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$

则：

$$\lim_{|z|=R\to\infty} \int_C f(z)dz = 0$$

定理

如果：

- 设 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 为多项式，$f(z) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $Q(x) = 0$ 无实数根 (保证孤立奇点不在实轴上，即围道的边界)
- $Q(x)$ 的次数比 $P(x)$ 至少高**两次** (保证乘上 z 后还满足引理的条件)

则积分可由**上半平面**的留数定理来计算：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k]$$

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$ 的积分

思路与上一个形式的积分大致相同

约当 (Jordan) 引理

如果:

- 设 C 为圆周 $|z| = R$ 的上半圆周
- 函数 $f(z)$ 在 C 上连续
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$

则:

$$\lim_{|z|=R\to\infty} \int_C f(z)e^{i\lambda x}dz = 0 \quad (\lambda > 0)$$

定理

如果:

- 设 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 为多项式，$f(z) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $Q(x) = 0$ 无实数根 (保证孤立奇点不在实轴上，即围道的边界)
- $Q(x)$ 的次数比 $P(x)$ 至少高**一次** (保证满足引理的条件)

则积分可由**上半平面**的留数定理来计算:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z)e^{i\lambda z}, z_k]$$

推论

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos\lambda x dx = Re(2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z)e^{i\lambda z}, z_k])$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin\lambda x dx = Im(2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z)e^{i\lambda z}, z_k])$$

这两个推论对计算傅里叶变换有帮助。