7-傅里叶变换

傅里叶变换

数理方法复习用。

引入 + 定义 + 条件

傅里叶级数

以下部分，简单列举一些傅里叶变换的性质和常用傅里叶变换，顺便附上证明（如果来得及的话）。

傅里叶级数

狄利克雷 (Dirichlet) 条件

- f(t) 连续或仅有有限个第一类间断点
- f(t) 仅有有限个极值点

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

傅里叶积分公式

周期函数的傅里叶积分公式

?

非周期函数的傅里叶积分公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau]e^{i\omega t}d\omega$$

条件：在任意有限区间上满足狄利克雷条件，且在实数域上绝对可积

傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

性质

平移性

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)] = F(\omega-\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0}F(\omega)$$

▶ 推导

微分性

- 原像函数的微分性

若 $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$，则有

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$$

- 像函数的微分性

$$F'(\omega) = -i\mathcal{F}[tf(t)]$$

▶ 推导

积分性

若 $\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(s)ds = 0$，则有

$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t} f(s)ds] = \frac{F(\omega)}{i\omega}$$

有个二级结论，可以解释一些事情

设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ，若 $\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(s)ds = F(0) \neq 0$ ，则

$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t} f(s)ds] = \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

▶ 推导（利用了后面的卷积性）

卷积性

$$\mathcal{F}[f*g(t)] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

▶ 推导

常用傅里叶变换

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2i}[F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)]$$

一个较常用的结论

$$e^{-b|t|} = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-b|t|}$$

广义傅里叶变换

冲激函数 $\delta(t)$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

阶跃函数 $u(t)$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

三角函数

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2i}[F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)]$$