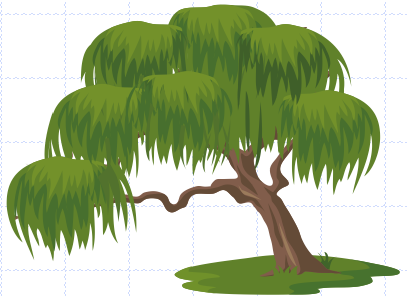
탐색트리

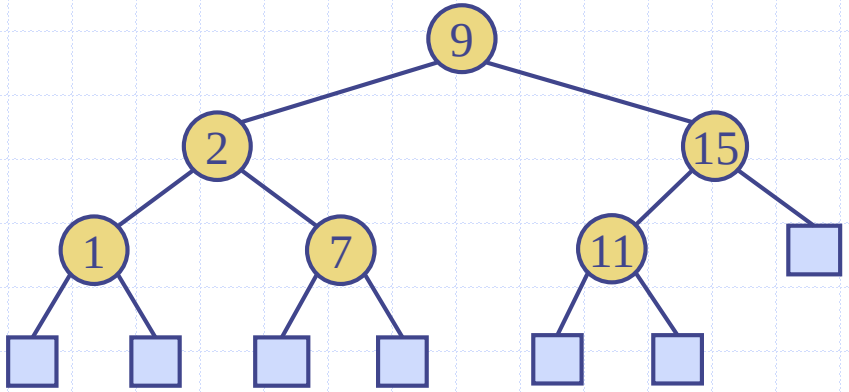
Outline

- 11.1 이진탐색트리
- 11.2 AVL 트리
- 11.3 스플레이 트리
- 11.4 응용문제

이진탐색트리

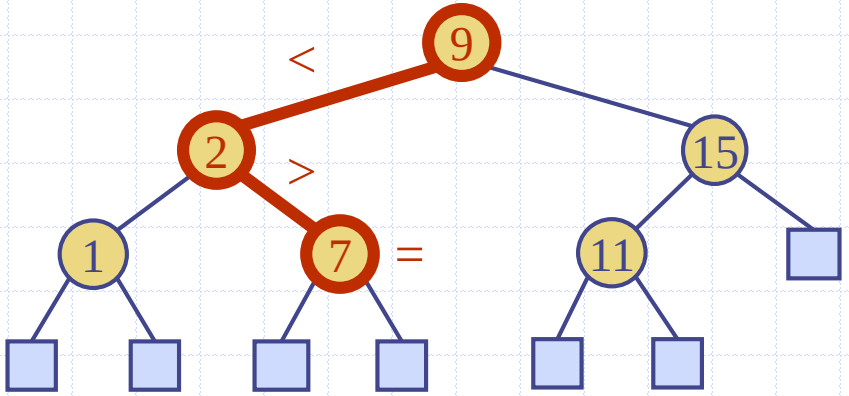


- **이진탐색트리**(binary search tree): 내부노드에 (**키, 원소**) **쌍**을 저장하며 다음의 성질을 만족하는 **이진트리**
  - u, v, w는 모두 트리노드며 u와 w가 각각 v의 왼쪽과 오른쪽 부트리에 존재할 때 다음이 성립
    $key(u) < key(v) \leq key(w)$
- **전제: 적정이진트리**로 구현
- **그림 표기:** 내부노드 내에 간단히 키만 표시
- 이진탐색트리를 **중위순회**(inorder traversal)하면 키가 증가하는 순서로 방문
- 이진탐색트리 **예:**



탐색

- 키 k를 찾기 위해, 루트에서 출발하는 하향 경로를 추적
- 다음에 방문할 노드는 k와 현재 노드의 키의 크기를 비교한 결과에 따라 결정
- 잎(즉, 외부노드)에 다다르면, 키 k가 발견되지 않은 것이므로 $NoSuchKey$를 반환
- **예:** findElement(7)



탐색 (conti.)

Alg ***findElement***(***k***)
  input binary search tree ***T***, key ***k***
  output element with key ***k***

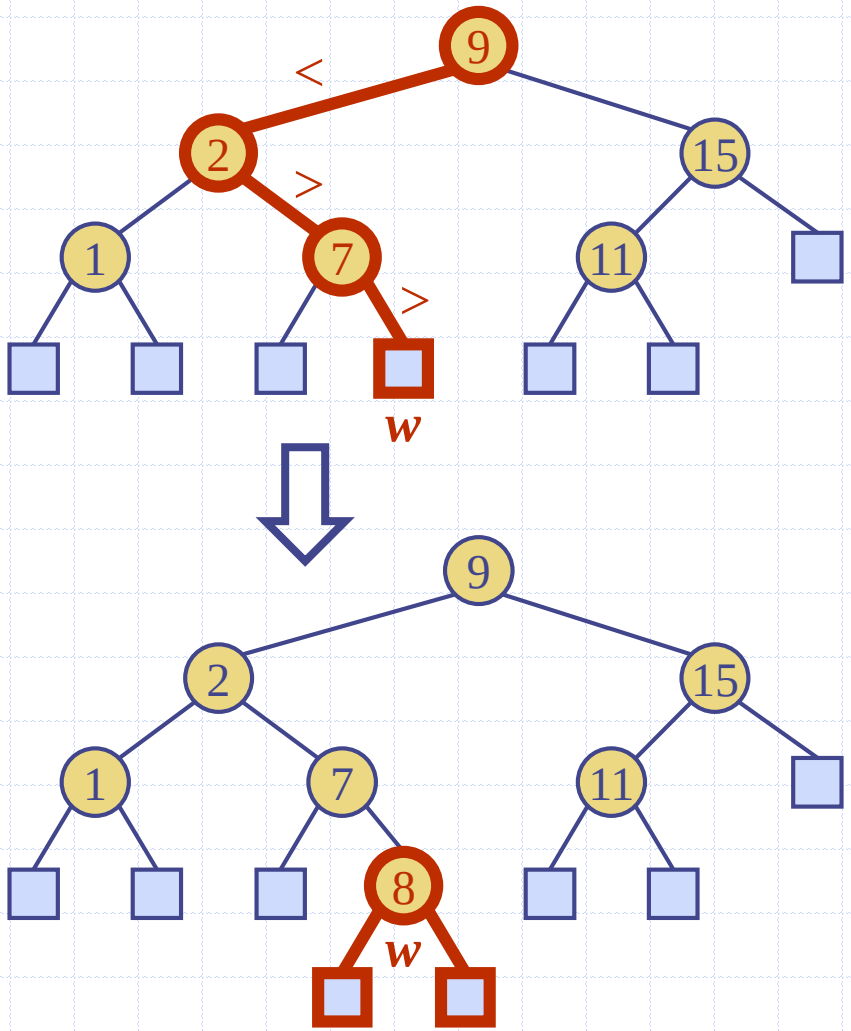
1. ***w*** ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
2. **if** (***isExternal***(***w***))
    return ***NoSuchKey***
  else
    return ***element***(***w***)

Alg ***treeSearch***(***v***, ***k***) {generic}
  input node ***v*** of a binary search tree, key ***k***
  output node ***w***, s.t. either ***w*** is an internal node storing key ***k*** or ***w*** is the external node where key ***k*** would belong if it existed

1. **if** (***isExternal***(***v***))
    return ***v***
2. **if** (***k*** = ***key***(***v***))
    return ***v***
  elseif (***k*** < ***key***(***v***))
    return ***treeSearch***(***leftChild***(***v***), ***k***)
  else {***k*** > ***key***(***v***)}
    return ***treeSearch***(***rightChild***(***v***), ***k***)

삽입

- insertItem(k, e) 작업을 수행하기 위해, 우선 키 k를 탐색
- k가 트리에 존재하지 않을 경우, 탐색은 외부노드(w라 하자)에 도착
- 외부노드 w에 k를 삽입한 후 expandExternal(w) 작업을 사용하여 w를 내부노드로 확장
- **예:** insertItem(8, e)

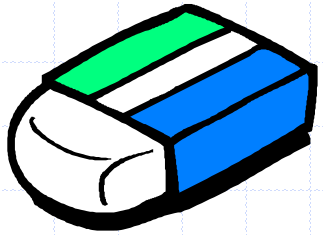


삽입 (conti.)

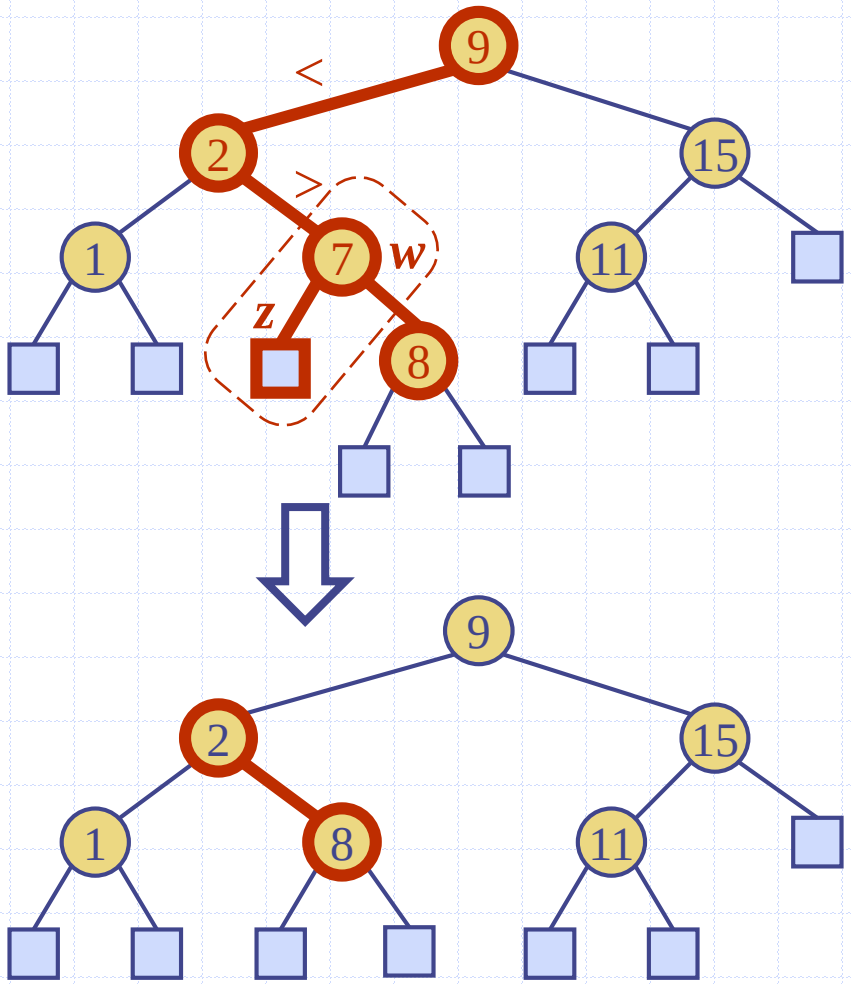
Alg ***insertItem***(***k***, ***e***)
    input binary search tree ***T***, key ***k***,
        element ***e***
    output none

1. ***w*** ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
2. **if** (***isInternal***(***w***))
        return
    else
        Set node ***w*** *to* (***k***, ***e***)
        expandExternal(***w***)
        return

삭제: Case 1



- removeElement(k) 작업을 수행하기 위해, 우선 키 k를 탐색
- k가 트리에 존재할 경우, 탐색은 k를 저장하고 있는 노드(w라 하자)에 도착
- 노드 w의 자식 중 하나가 외부노드(z라 하자)라면, reduceExternal(z) 작업을 사용하여 w와 z를 트리로부터 삭제
- **예:** removeElement(7)

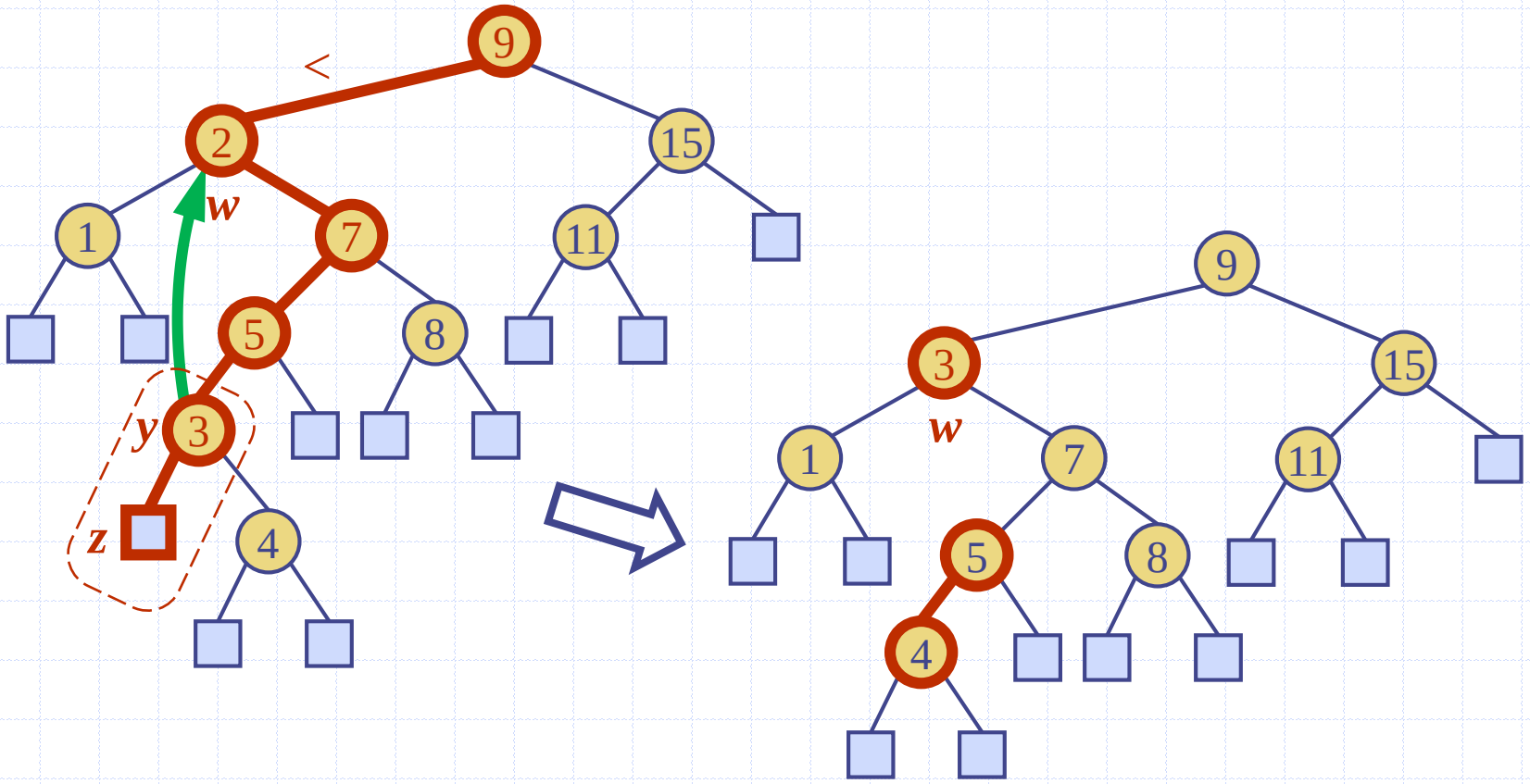


삭제: Case 2

- 삭제되어야 할 키 k가 내부노드만을 자식들로 가지는 노드(w라 하자)에 저장되어 있다면 다음과 같이 처리
  1. 트리 T에 대해 w의 **중위순회 계승자** y와 그 자식노드 z을 찾아낸다
     - 노드 y는 우선 w의 오른쪽 자식으로 이동한 후, 거기서부터 왼쪽 자식들만을 끝까지 따라 내려가면 도달하게 되는 마지막 내부노드며, 노드 z은 y의 왼쪽 자식인 외부노드
     - y는 T를 중위순회할 경우 노드 w 바로 다음에 방문하게 되는 내부노드이므로 w의 **중위순회 계승자**(inorder successor)라 불린다
     - 따라서 y는 w의 오른쪽 부트리 내 노드 중 **가장 왼쪽으로 돌출된 내부노드**
  2. y의 내용을 w에 복사
  3. reduceExternal(z) 작업을 사용하여 노드 y와 z를 삭제

삭제: Case 2 (conti.)

- 예: removeElement(2)

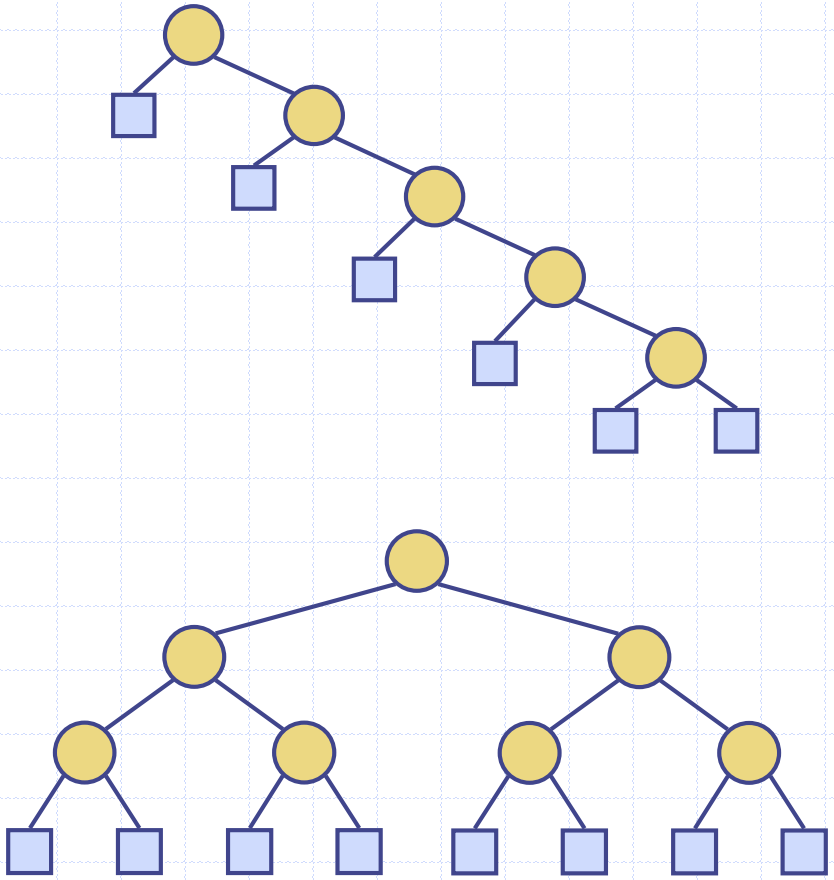


삭제 (conti.)

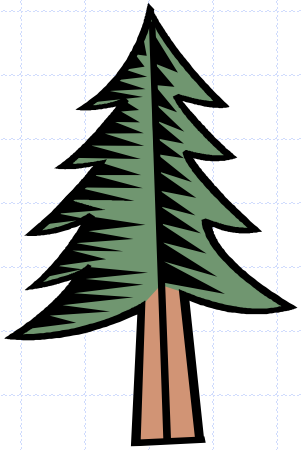
```
Alg removeElement(k)
    input binary search tree T,
        key k
    output element with key k

1. w ← treeSearch(root(), k)
2. if (isExternal(w))
        return NoSuchKey
3. e ← element(w)
4. z ← leftChild(w)
5. if (!isExternal(z))
        z ← rightChild(w)
6. if (isExternal(z))                    {case 1}
        reduceExternal(z)
   else                                  {case 2}
        y ← inOrderSucc(w)
        z ← leftChild(y)
        Set node w to (key(y), element(y))
        reduceExternal(z)
7. return e
```

이진탐색트리의 성능

- 높이 h의 이진탐색트리를 사용하여 구현된 n항목의 사전을 가정하면:
  - $O(n)$ 공간 사용
  - findElement, insertItem, removeElement 작업 모두 $O(h)$ 시간에 수행
  - 높이 h는:
    - 최악의 경우 $O(n)$
    - 최선의 경우 $O(\log n)$

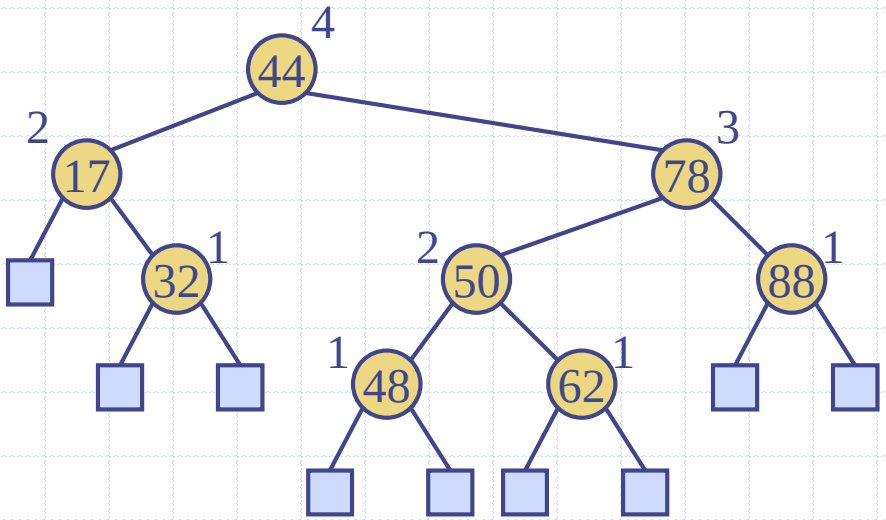


AVL 트리



- **AVL 트리:** 트리 T의 모든 내부노드 v에 대해 v의 자식들의 좌우 높이 차이가 1을 넘지 않는 이진탐색트리 (즉, **높이균형 속성**, height-balance property)
  - AVL 트리의 부트리 역시 AVL 트리
  - 높이 (또는 균형) 정보는 각 내부노드에 저장
  - n개의 항목을 저장하는 AVL 트리의 높이: $O(\log n)$
  - findElement 작업: $O(\log n)$ 시간 소요

- AVL 트리 **예:**

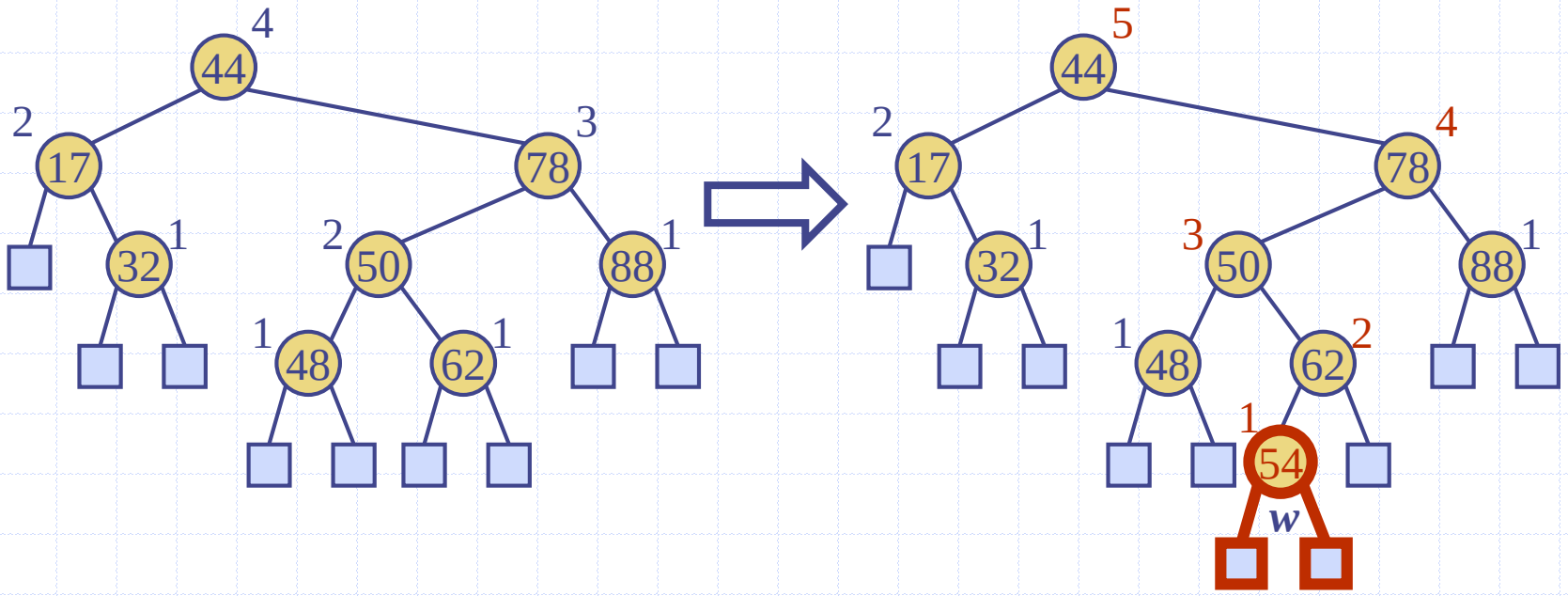


갱신 작업

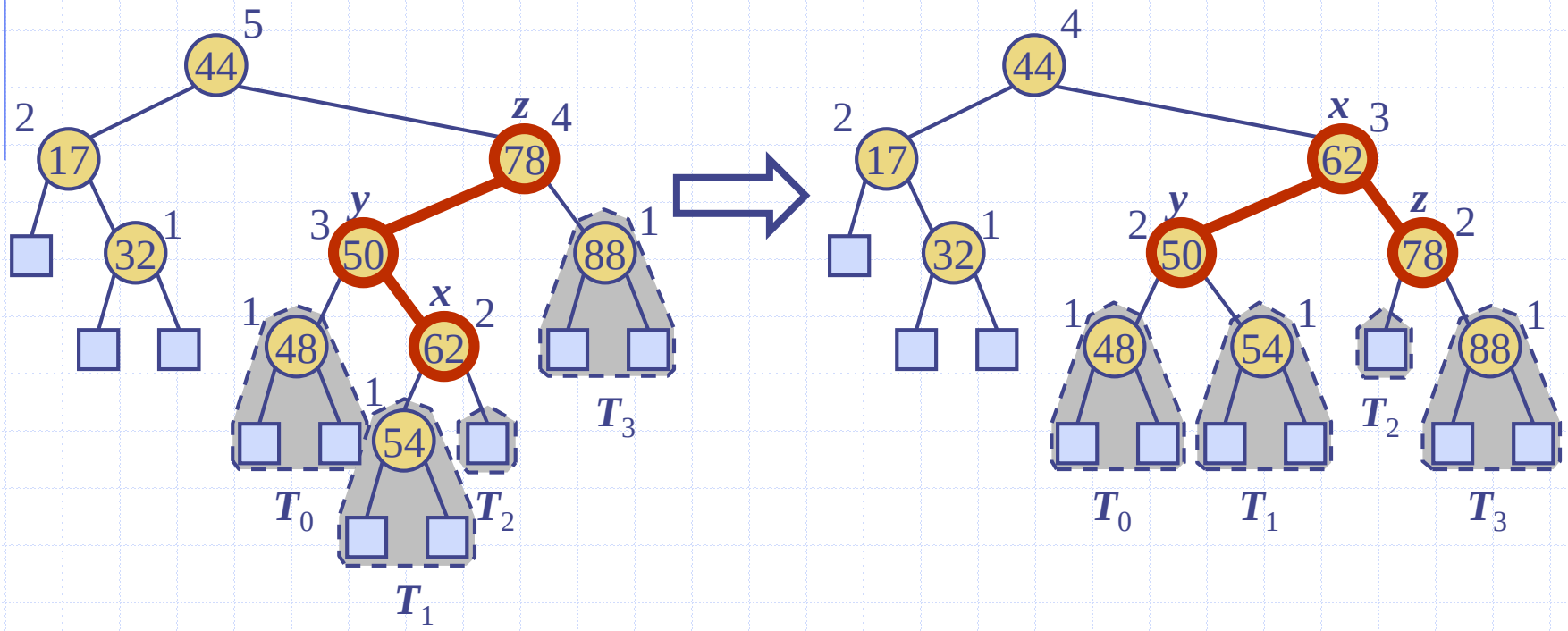
- AVL 트리에 대한 **삽입** 및 **삭제** 작업은 이진탐색트리에서의 삽입 및 삭제 작업과 유사
- 삽입이나 삭제 작업의 결과 AVL 트리의 **높이균형 속성**이 파괴될 수도 있다
- 그러므로 삽입이나 삭제 작업 후에는 혹시 생겼을지도 모를 불균형을 "**찾아서 수리**"해야 한다
  - **불균형 찾기:** 각 노드의 **균형검사**(balance check)를 통해 찾는다
  - **불균형 수리: 개조**(restructure)라 불리는 작업을 통해 트리의 높이균형 속성을 회복하기 위한 계산 작업을 수행

AVL 트리에서 삽입

- 삽입은 이진탐색트리에서와 동일하게 수행
- expandExternal 작업에 의해 확장된 노드 w(그리고 조상노드들)가 균형을 잃을 수 있다
- **예:** insertItem(54, e)



삽입 후 개조


5
44
2
17
z
4
78
32
1
3
y
50
88
1
1
48
x
62
2
1
54
T_0
T_2
T_1
T_3
4
44
2
17
x
3
62
32
1
2
y
50
z
78
2
1
48
1
54
1
88
1
T_0
T_1
T_2
T_3

삽입

Alg ***insertItem***(***k***, ***e***)
    input AVL tree ***T***, key ***k***, element ***e***
    output none

1. ***w*** ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
2. **if** (***isInternal***(***w***))
        return
    else
        Set node ***w*** *to* (***k***, ***e***)
        expandExternal(***w***)
        searchAndFixAfterInsertion(***w***)
        return

삽입 (conti.)

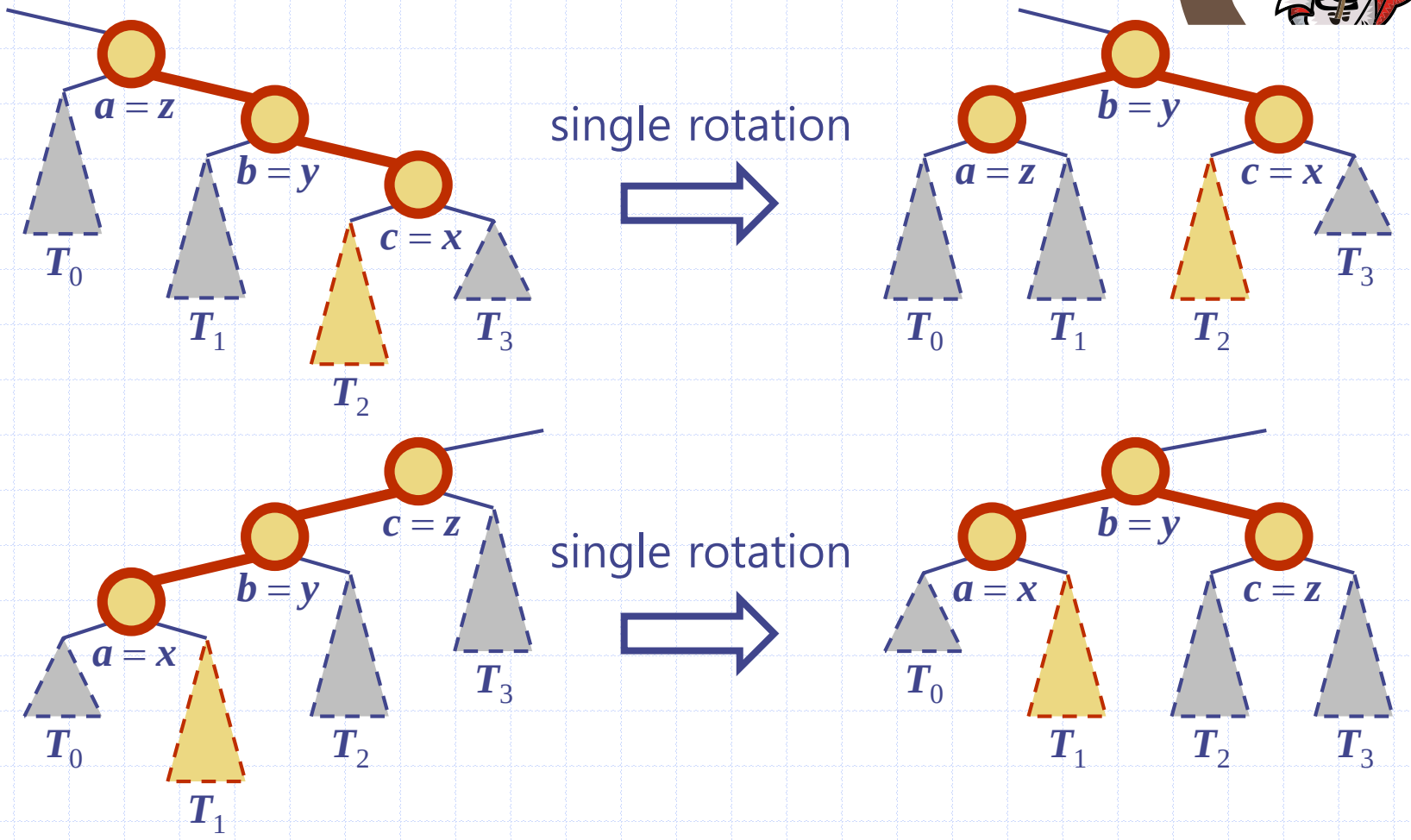
Alg ***searchAndFixAfterInsertion***(*w*)
input internal node *w*
output none

1. *w*에서 *T*의 루트로 향해 올라가다가 처음 만나는 불균형 노드를 *z*이라 하자(그러한 *z*이 없다면 **exit**).
2. *z*의 높은 자식을 *y*라 하자.
   {수행 후, *y*는 *w*의 조상이 되는 것에 유의}
3. *y*의 높은 자식을 *x*라 하자.
   {수행 후, 노드 *x*가 *w*와 일치할 수도 있으며 *x*가 *z*의 손자임에 유의. *y*의 높이는 그의 형제의 높이보다 2가 더 많다}
4. ***restructure***(*x*, *y*, *z*)
   {수행 후, 이제 *b*를 루트로 하는 부트리의 모든 노드는 균형을 유지한다. 높이균형 속성은 노드 *x*, *y*, *z*에서 *지역적*으로나 *전역적*으로나 모두 복구된다}
5. **return**

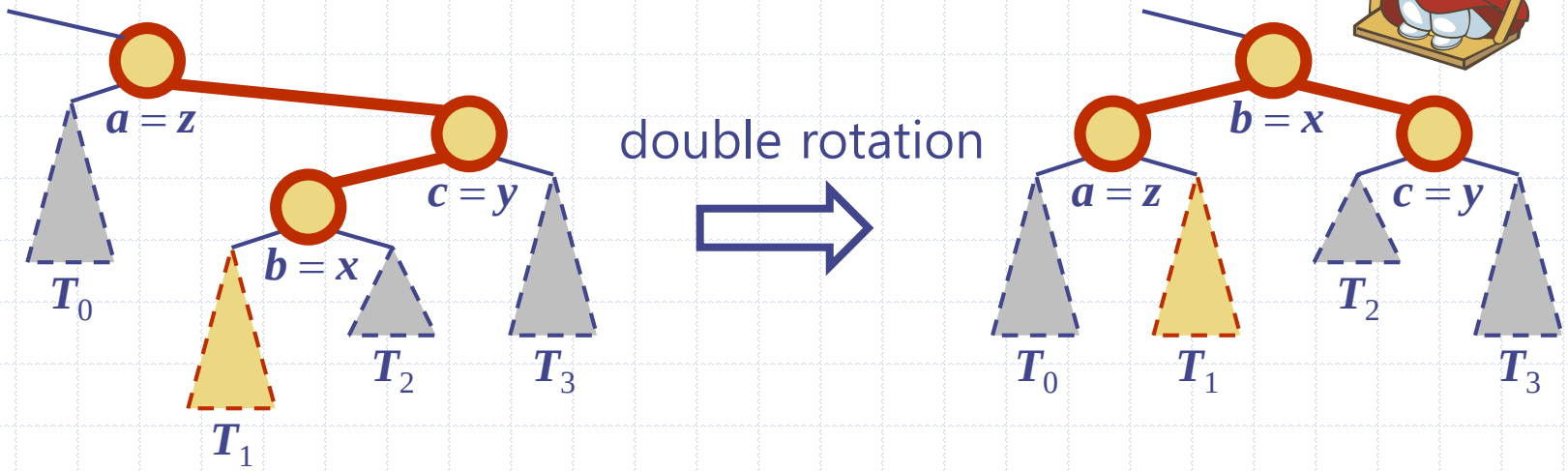
개조

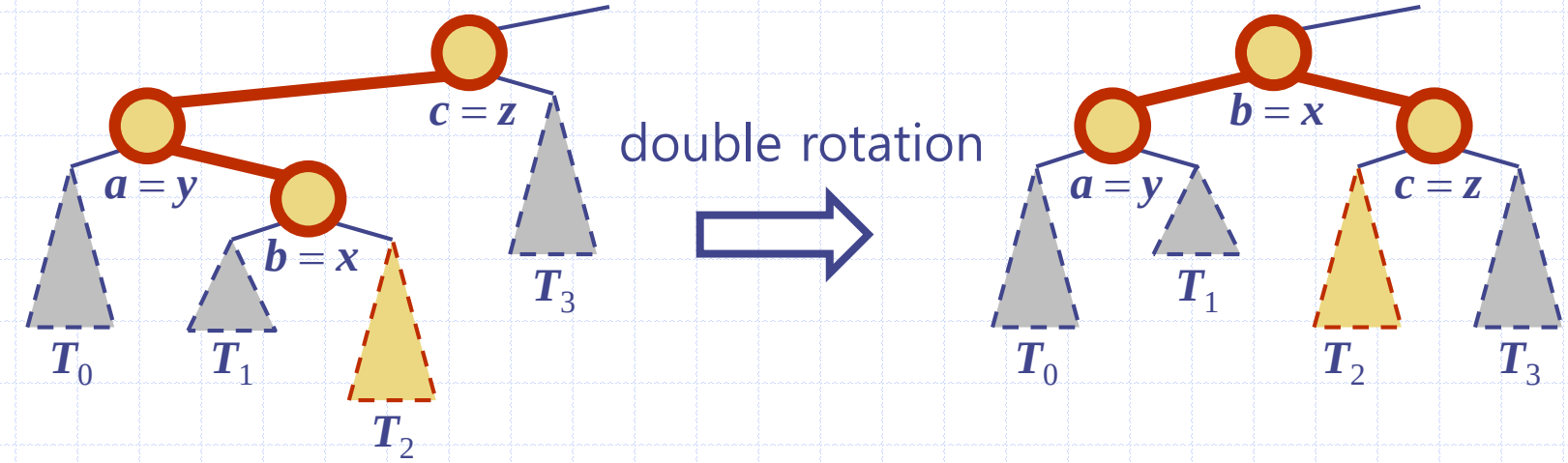
- 개조는 종종 "**회전**(rotation)"이라고도 불린다
- **3-노드 개조**(trinode restructure)
  - 3대의 직계 노드 x, y(x의 부모), z(y의 부모)의 **중위순회 순서** a, b, c를 회전축으로 하여 수행
- **단일회전**(single rotation)
  - 만약 $b = y$면, y를 중심으로 z을 회전
- **이중회전**(double rotation)
  - 만약 $b = x$면, x를 중심으로 y를 회전한 후, 다시 x를 중심으로 z을 회전
- 좌우대칭 포함하여 모두 4종류의 회전 유형 존재

단일회전에 의한 개조


a = z
b = y
c = x
T0
T1
T2
T3
single rotation
b = y
a = z
c = x
T0
T1
T2
T3
c = z
b = y
a = x
T0
T1
T2
T3
single rotation
b = y
a = x
c = z
T0
T1
T2
T3

이중회전에 의한 개조


a = z
c = y
b = x
T0
T1
T2
T3
double rotation
b = x
a = z
c = y
T0
T1
T2
T3


c = z
a = y
b = x
T0
T1
T2
T3
double rotation
b = x
a = y
c = z
T0
T1
T2
T3

개조를 위한 통합 알고리즘

- 4가지 유형의 회전 (대칭 모양에 대한 단일 및 이중회전)이 restructure 작업에 모두 반영되어 있다
- T의 모든 노드의 중위순회 순서는 **보존**
- T의 $O(1)$개 노드의 부모-자식 관계만 수정

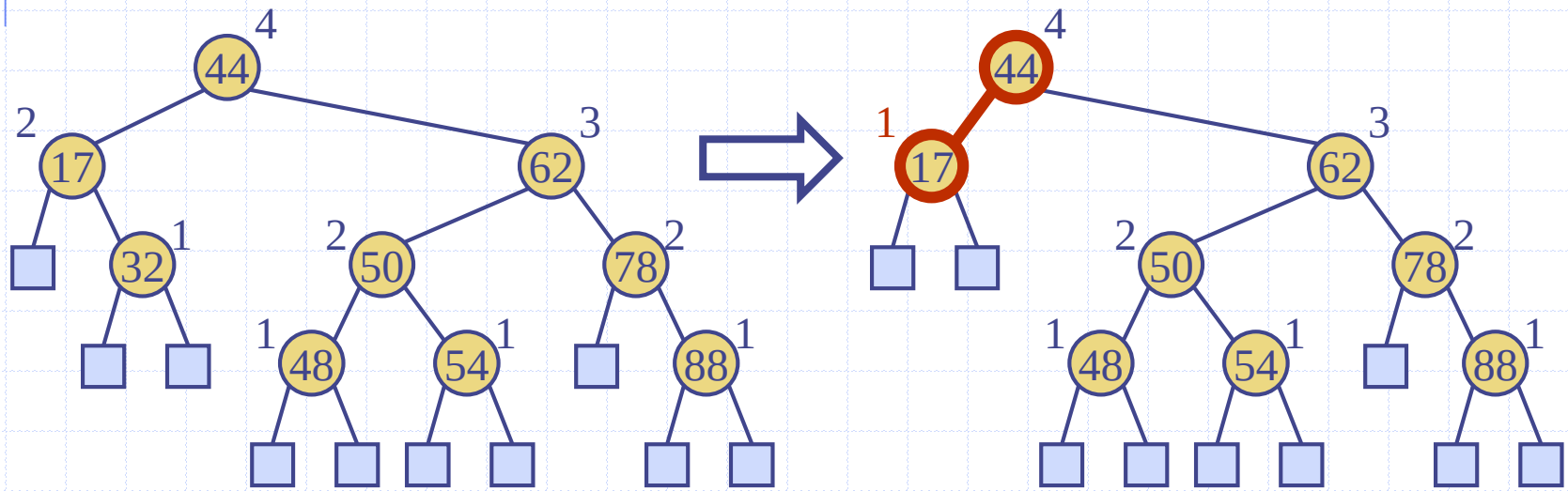
개조

Alg ***restructure*(*x*, *y*, *z*)**
input a node ***x*** of a binary search tree ***T*** that has both a parent ***y*** and a grandparent ***z***
output tree ***T*** after restructuring involving nodes ***x***, ***y*** and ***z***

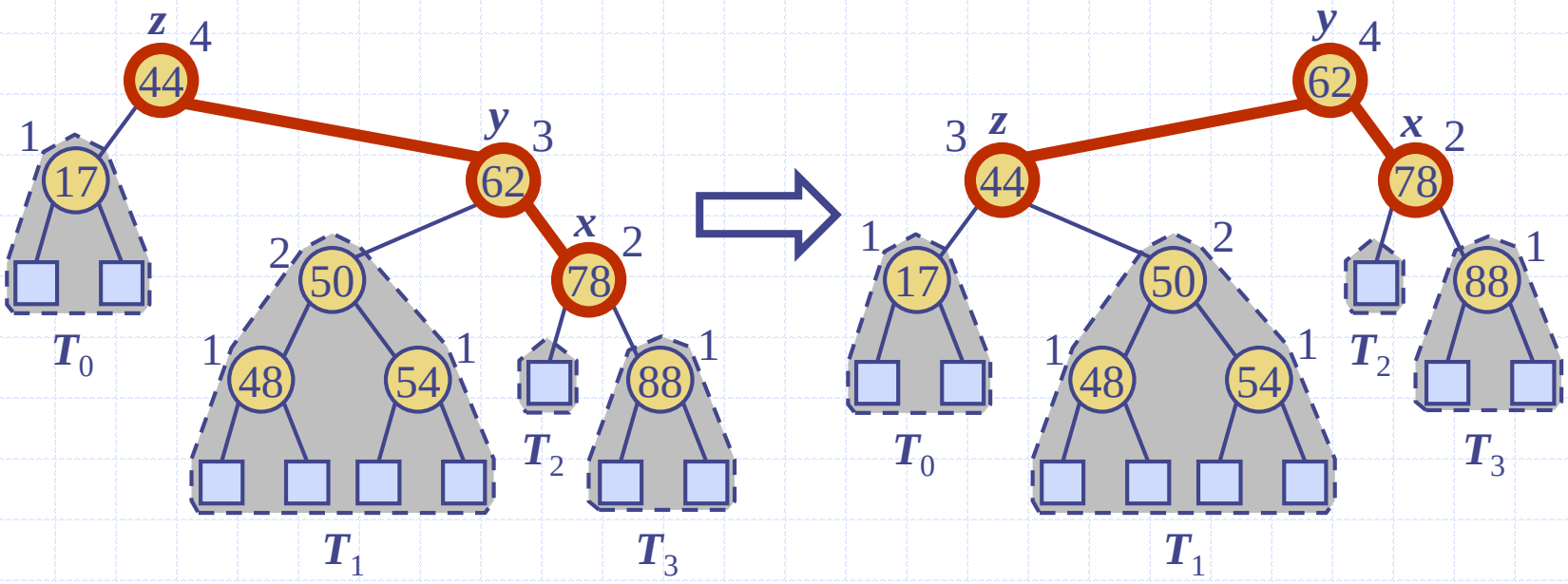
1. ***x***, ***y***, ***z***의 중위순회 방문 순서의 나열을 (***a***, ***b***, ***c***)라 하자.
2. ***x***, ***y***, ***z***의 부트리들 가운데 ***x***, ***y***, ***z***를 루트로 하는 부트리를 제외한 4개의 부트리들의 중위순회 방문순서의 나열을 (T_0, T_1, T_2, T_3)라 하자.
3. ***z***를 루트로 하는 부트리를 ***b***를 루트로 하는 부트리로 대체.
4. T_0와 T_1을 각각 ***a***의 왼쪽 및 오른쪽 부트리로 만든다.
5. T_2와 T_3를 각각 ***c***의 왼쪽 및 오른쪽 부트리로 만든다.
6. ***a***와 ***c***를 각각 ***b***의 왼쪽 및 오른쪽 자식으로 만든다.
7. **return** ***b***

AVL 트리에서 삭제

- 삭제는 이진탐색트리에서와 동일하게 수행
- reduceExternal 작업에 의해 삭제된 노드의 부모노드 w(그리고 조상노드들)가 불균형 상태일 수 있다
- **예:** removeElement(32)



삭제 후 개조


z
4
44
1
17
y
3
62
2
50
1
48
1
54
x
2
78
1
88
T0
T1
T2
T3
y
4
62
3
z
44
x
2
78
1
17
2
50
1
88
1
48
1
54
T0
T1
T2
T3

삭제

```
Alg removeElement(k)
    input AVL tree T, key k
    output element with key k

1. w ← treeSearch(root(), k)
2. if (isExternal(w))
       return NoSuchKey
3. e ← element(w)
4. z ← leftChild(w)
5. if (!isExternal(z))
       z ← rightChild(w)
6. if (isExternal(z))                    {case 1}
       zs ← reduceExternal(z)
   else                                  {case 2}
       y ← inOrderSucc(w)
       z ← leftChild(y)
       Set node w to (key(y), element(y))
       zs ← reduceExternal(z)
7. searchAndFixAfterRemoval(parent(zs))
8. return e
```

삭제 (conti.)

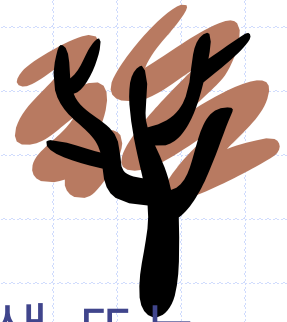
Alg ***searchAndFixAfterRemoval(w)***
input internal node ***w***
output none

1. ***w***에서 ***T***의 루트로 향해 올라가다가 처음 만나는 불균형 노드를 ***z***이라 하자(그러한 ***z***이 없다면 **exit**).
2. ***z***의 높은 자식을 ***y***라 하자.
   {수행 후, ***y***는 ***w***의 조상이 아닌 ***z***의 자식이 되는 것에 유의}
3. 다음과 같이 하여 ***y***의 자식 중 하나를 ***x***라 하자. ***y***의 두 자식 중 어느 한쪽이 높으면 높은 자식을 ***x***라 하고, 두 자식의 높이가 같으면 둘 중 ***y***와 같은 쪽의 자식을 ***x***로 선택.
4. ***b*** ← ***restructure(x, y, z)***
   {수행 후, 높이균형 속성은, 방금 전 ***z***를 루트로 했으나 이젠 변수 ***b***를 루트로 하는 부트리에서 *지역적*으로 복구된다. 하지만, 방금의 개조에 의해 ***b***를 루트로 하는 부트리의 높이가 1 줄어들 수 있으며 이때문에 ***b***의 조상이 균형을 잃을 수 있다. 즉, 삭제 후 1회의 개조만으로는 높이균형 속성을 *전역적*으로 복구하지 못할 수도 있다}
5. ***T***를 ***b***의 부모부터 루트까지 올라가면서 균형을 잃은 노드를 찾아 수리하는 것을 계속.

AVL 트리의 성능

- AVL 트리를 사용하여 구현된 n개의 항목으로 이루어진 **사전**을 전제하면
  - 공간사용량: $O(n)$
  - 높이: $O(\log n)$
  - **3-노드 개조**, 즉 한 번의 restructure: $O(1)$
    - 연결 이진트리 사용을 전제
  - findElement: $O(\log n)$
    - 개조 불필요
  - insertItem, removeElement: $O(\log n)$
    - 초기의 treeSearch: $O(\log n)$
    - 트리를 올라가면서 개조를 수행하여 높이균형을 회복: $O(\log n)$

스플레이 트리

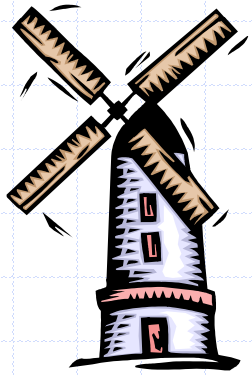


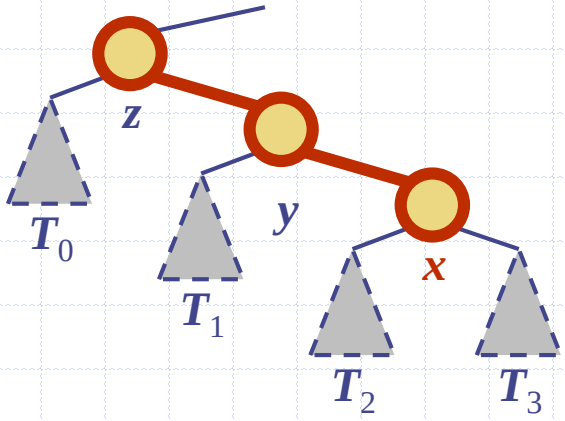
- **스플레이 트리**(splay tree): 트리의 노드가 (탐색 또는 갱신을 위해) 접근된 후 스플레이되는 이진탐색트리
  - "**노드 x를 스플레이**" = "연속적인 재구성을 통해 노드 x를 루트로 이동시킴"
  - 가장 깊은 내부노드를 스플레이
- 일종의 **자기조정**(self-adjusting) 이진탐색트리
- 이점
  - 비교적 단순: 높이균형을 유지하지 않으므로
  - 탐색, 삽입, 삭제: $\mathbf{O}(\log n)$ **상각실행시간**
  - 자기조정성: 각 항목에 대한 접근빈도가 균등하지 않은 사전에 사용하면 유리

언제 무엇을 스플레이?

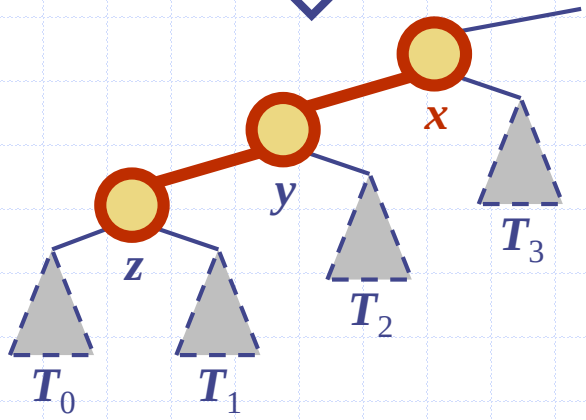
언제	어떤 노드를
탐색 시에	▪ 키가 어떤 내부노드에서 발견되면, 그 노드를 스플레이 ▪ 그렇지 않으면 탐색이 실패한 외부노드의 부모노드를 스플레이
삽입 시에	▪ 새로 삽입한 내부노드를 스플레이
삭제 시에	▪ 실제로 삭제된 내부노드의 부모노드를 스플레이

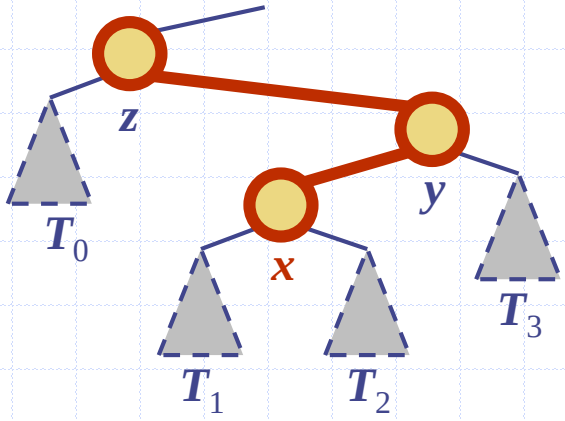
스플레이의 세 가지 경우



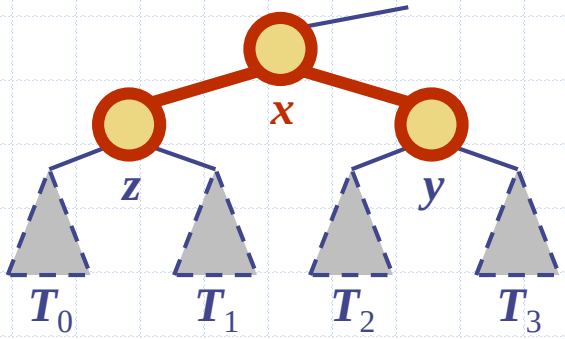


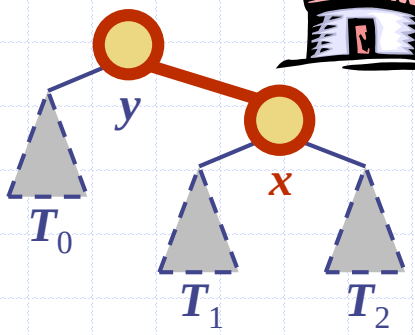
zig-zig 회전



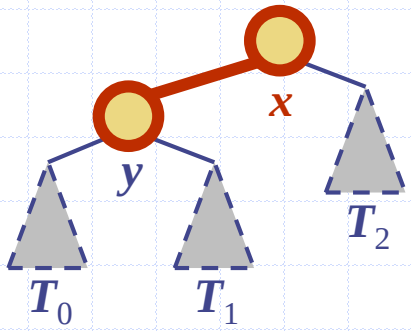


zig-zag 회전

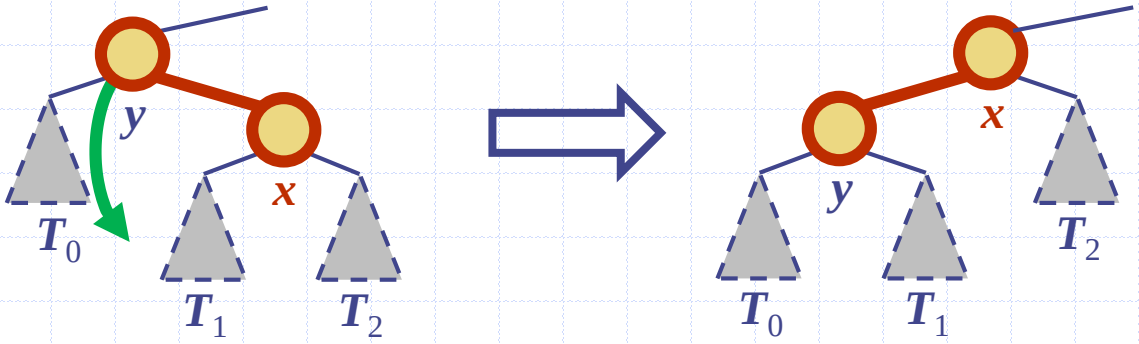




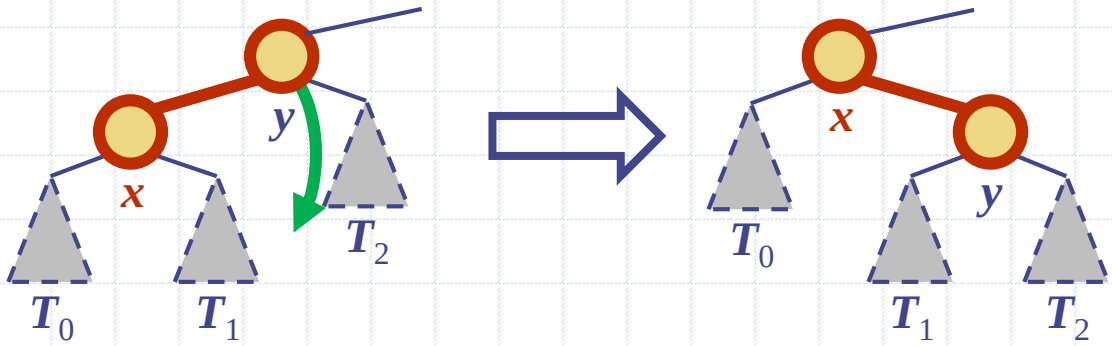
zig 회전



두 가지 기본 회전



(a) leftRotate(x, y)



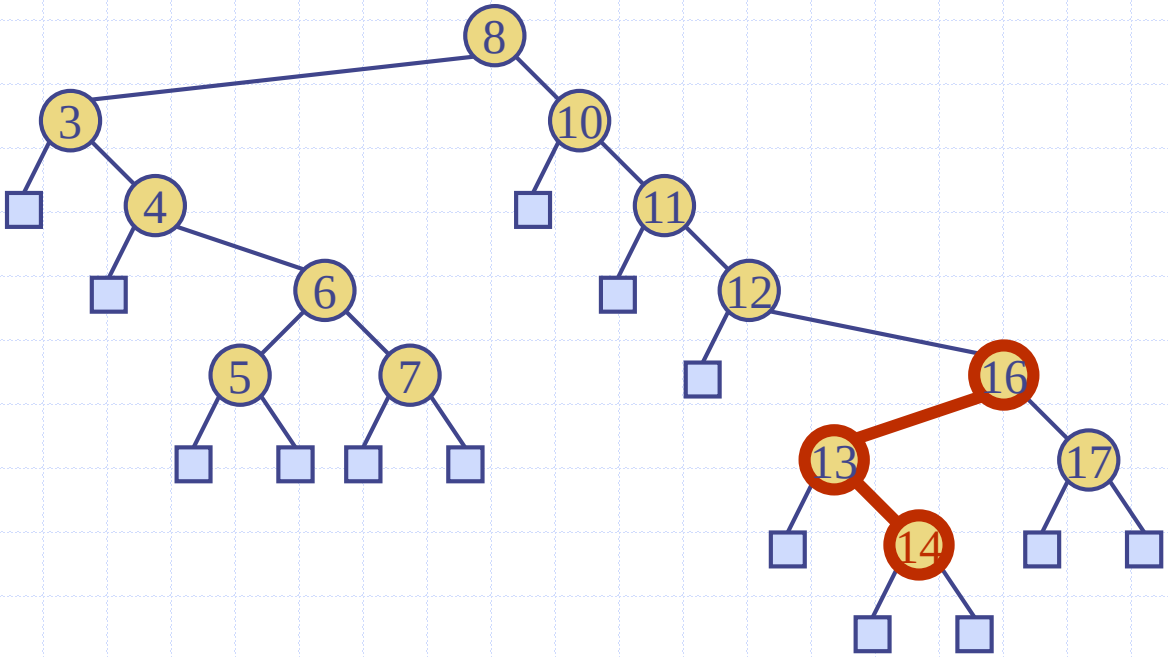
(a) rightRotate(x, y)

스플레이

```
Alg splay(x)
    input internal node x
    output none

1. if (isRoot(x))
       return
2. if (isRoot(parent(x)))                {zig}
       if (x = leftChild(root()))
           rightRotate(x, root())
       else
           leftRotate(x, root())
       return
3. p ← parent(x)
4. g ← parent(p)
5. if (x = leftChild(leftChild(g)))      {zig-zig}
       rightRotate(p, g)
       rightRotate(x, p)
   elseif (x = rightChild(rightChild(g)))
                                         {zig-zig}
       leftRotate(p, g)
       leftRotate(x, p)
   elseif (x = leftChild(rightChild(g)))
                                         {zig-zag}
       rightRotate(x, p)
       leftRotate(x, g)
   else {x = rightChild(leftChild(g))}
                                         {zig-zag}
       leftRotate(x, p)
       rightRotate(x, g)
6. splay(x)
```

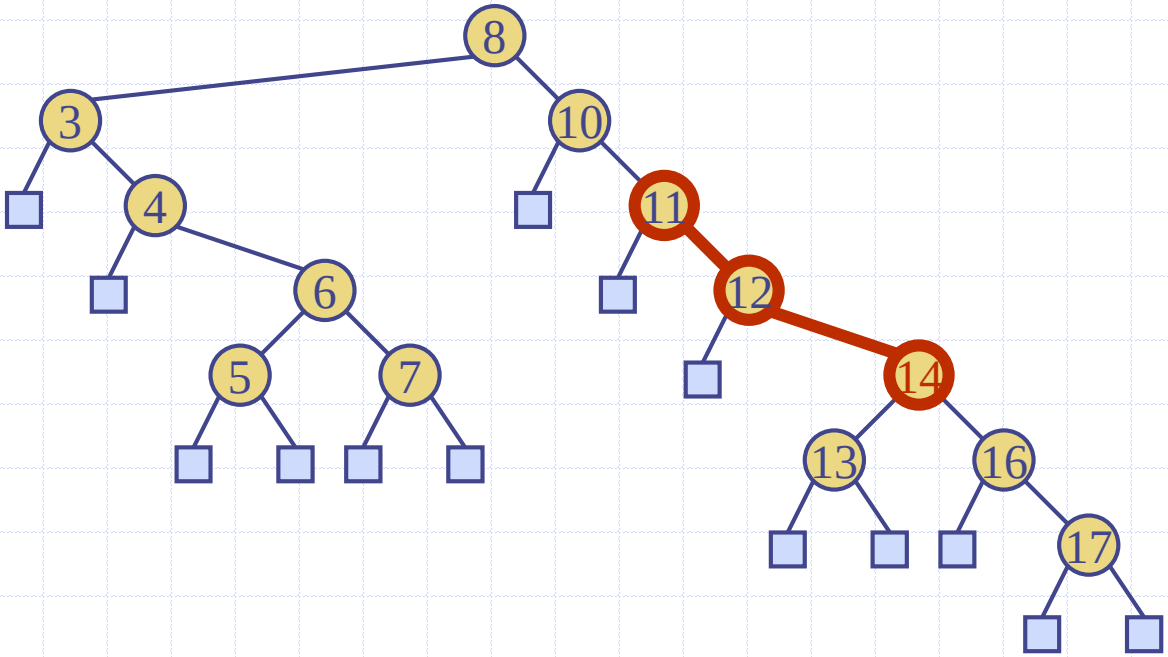
스플레이 예

- 주어진 스플레이 트리는 아래 셋 가운데 한 작업이 처리된 직후의 모습으로 전제
  - 키 14에 대한 성공적인 탐색, 또는 키 15에 대한 실패한 탐색
  - 키 14를 삽입
  - 키 14를 저장한 노드의 자식노드를 삭제
- 키 14를 저장한 노드에 대한 스플레이는 zig-zag으로 출발



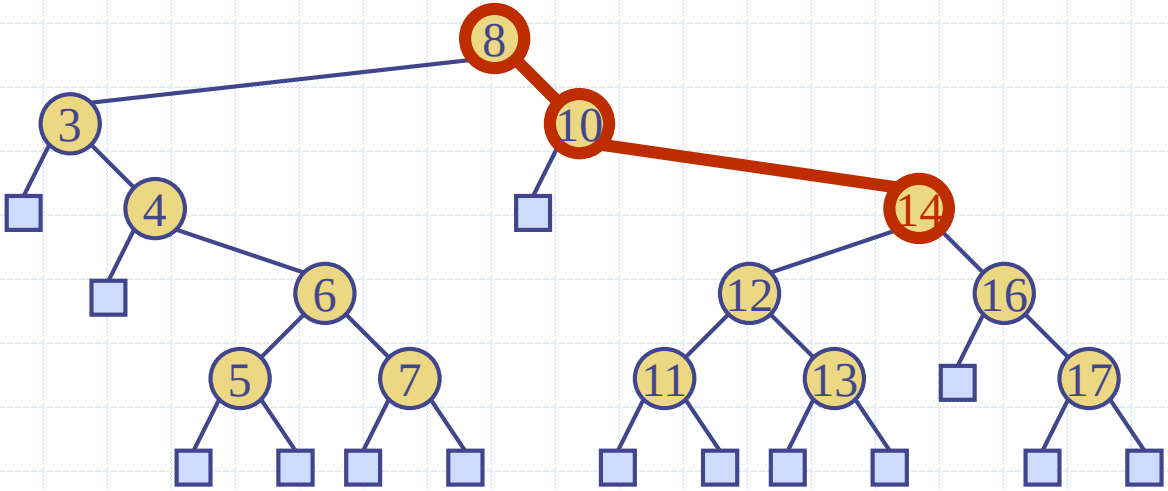
스플레이 예 (conti.)

- zig-zag 회전 다음은 zig-zig



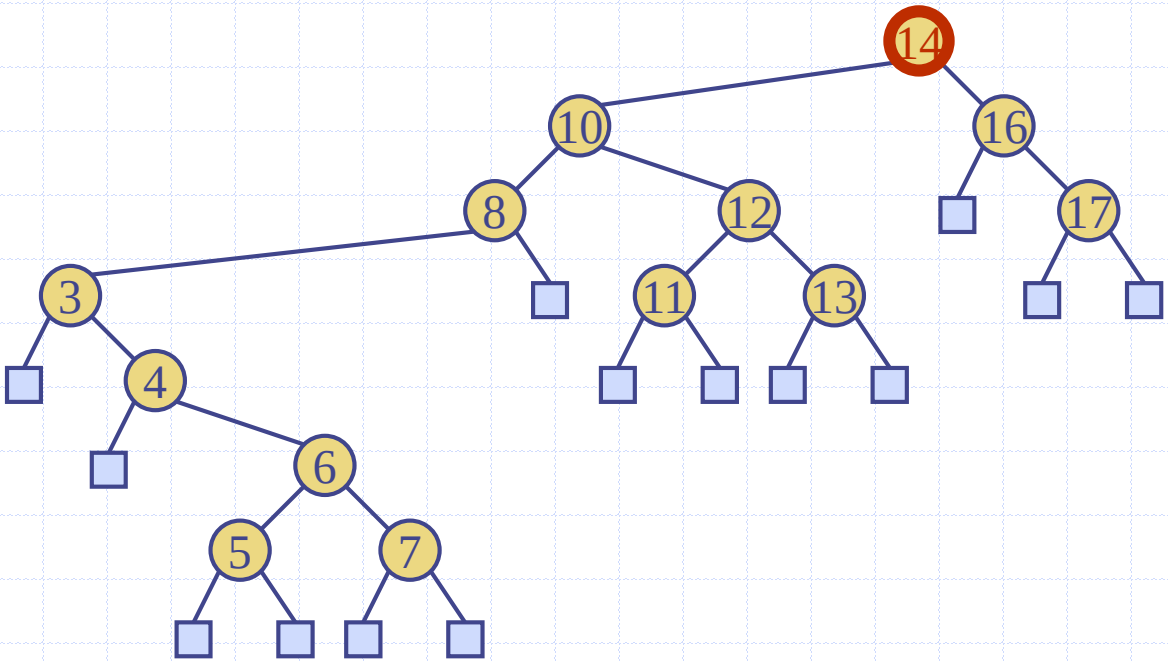
스플레이 예 (conti.)

- zig-zig 회전 다음은 또다시 zig-zig



스플레이 예 (conti.)

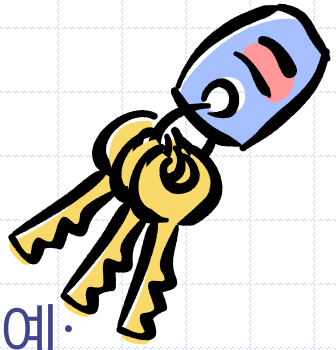
- zig-zig 회전으로 스플레이 완료



스플레이 트리의 성능

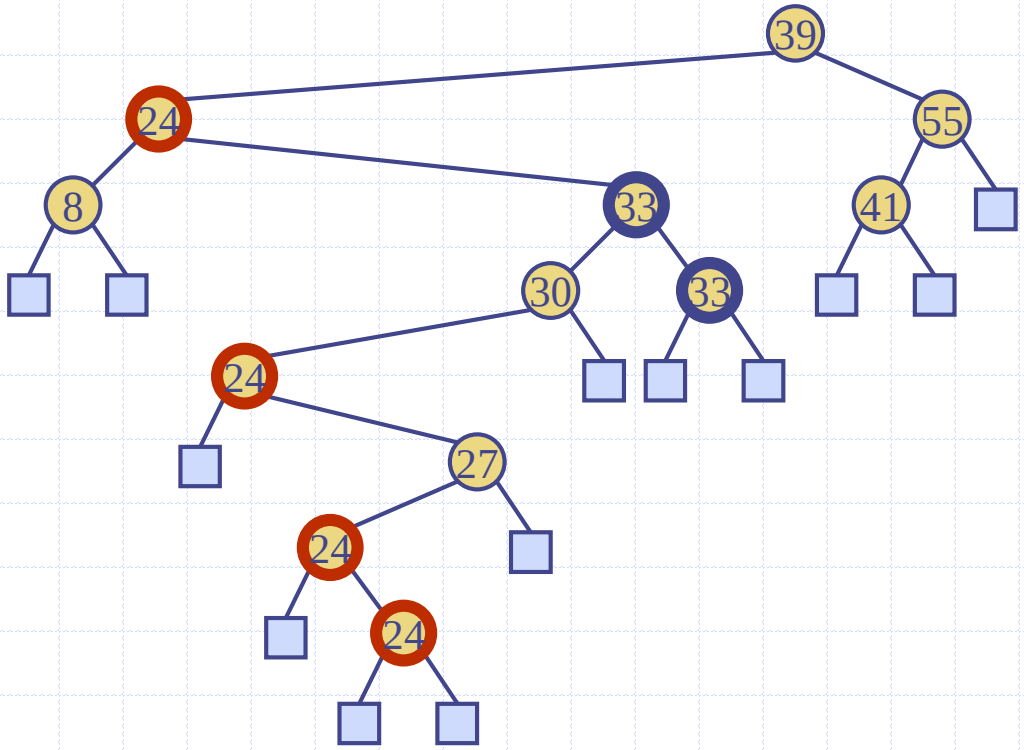
- 스플레이 실행시간: $\mathbf{O}(h)$
  - 여기서 h는 트리의 높이며, 최악의 경우 $\mathbf{O}(n)$
- 스플레이 트리 유용성
  - AVL 트리보다 구현이 간단
    - AVL 트리보다 경우의 수가 작다
    - AVL 트리와는 달리 각 노드에 높이나 균형 정보 유지 불필요
  - 탐색, 삽입, 삭제: $\mathbf{O}(\log n)$ **상각실행시간**

응용문제: 중복 키를 가진 이진탐색트리 메쏘드



- **중복** 키가 존재 가능한 **이진탐색트리**다
  - 즉,
    - u, v, w 세 개의 노드에 대해, u와 w가 각각 v의 왼쪽 및 오른쪽 부트리 내의 노드일 때 다음이 성립 $key(u) < key(v) \leq key(w)$

- 이진탐색트리 예:



응용문제: 중복 키를 가진 이진탐색트리 메쏘드 (conti.)

A. 이진탐색트리 T를 사용하여 구현된 순서 사전에서 주어진 키 k를 갖는 모든 원소들을 반환하는 findAllElements(k) 작업을 수행할 알고리즘을 작성하라

B. 이진탐색트리 T를 사용하여 구현된 순서 사전에서 insertItem(k, e) 작업을 수행할 알고리즘을 작성하라

C. 이진탐색트리 T를 사용하여 구현된 순서 사전에서 주어진 키 k를 갖는 모든 항목을 삭제하고 해당 원소들을 반환하는 removeAllElements(k) 작업을 수행할 알고리즘을 작성하라

- **주의**
  - 모든 알고리즘은 $O(h+s)$ 시간에 수행하여야 한다 – 여기서 h는 T의 높이며 s는 반환되는 원소의 수
  - 원소들이 반환되는 순서는 중요하지 않다
  - treeSearch 사용 가능

해결

Alg ***findAllElements*(*k*)**
input binary search tree ***T***, key ***k***
output elements with key ***k***

1. ***L*** ← *empty list*
2. ***w*** ← ***treeSearch*(*root*(), *k*)**
3. **while (*isInternal*(*w*))**
   ***L*.*addLast*(*element*(*w*))**
   w ← ***treeSearch*(*rightChild*(*w*), *k*)**
4. **return *L*.*elements*()**

{Total **O**(***h*** + ***s***)}

Alg ***insertItem*(*k*, *e*)**
input binary search tree ***T***, key ***k***, element ***e***
output none

1. ***w*** ← ***treeSearch*(*root*(), *k*)**
2. **while (*isInternal*(*w*))**
   w ← ***treeSearch*(*rightChild*(*w*), *k*)**
3. *Set node* ***w*** *to* (***k***, ***e***)
4. ***expandExternal*(*w*)**
5. **return**

{Total **O**(***h*** + ***s***)}

해결 (conti.)

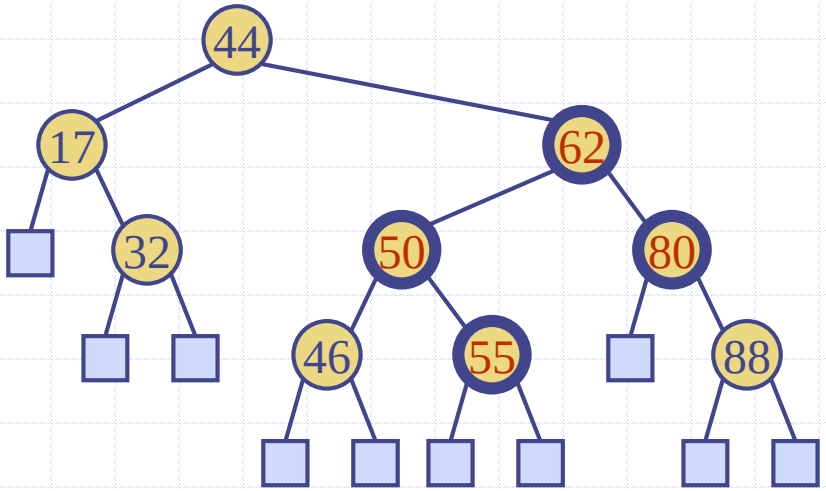
Alg ***removeAllElements(k)***
  input binary search tree ***T***, key ***k***
  output elements with key ***k***

1. ***L*** ← *empty list*
2. ***w*** ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
3. **while** (***isInternal***(***w***))
   L.addLast(***element***(***w***))
   z ← ***leftChild***(***w***)
   if (!***isExternal***(***z***))
      z ← ***rightChild***(***w***)
   if (***isExternal***(***z***)) {case 1}
      w ← ***reduceExternal***(***z***)
   else {case 2}
      y ← ***inOrderSucc***(***w***)
      x ← ***leftChild***(***y***)
      Set node ***w*** *to* (***key***(***y***), ***element***(***y***)))
      reduceExternal(***x***)
   w ← ***treeSearch***(***w***, ***k***)
4. **return** ***L.elements***()

{Total **O**(***h*** + ***s***)}

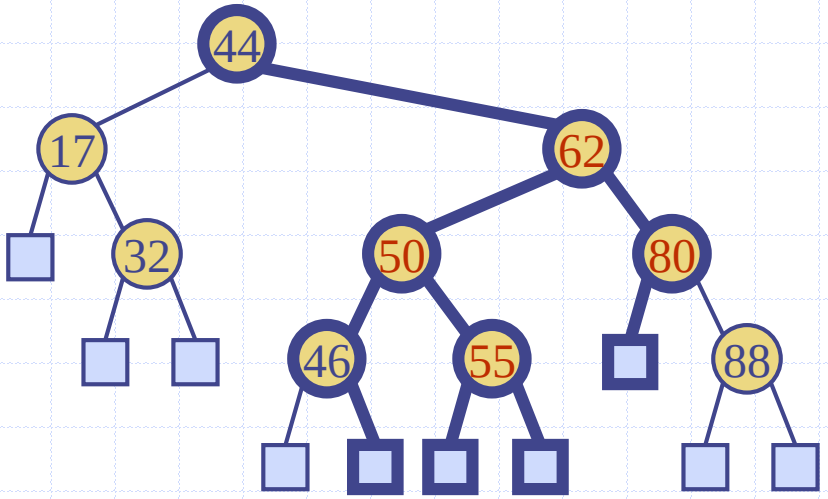
응용문제: 주어진 키 범위 내의 원소들

- **AVL 트리** T를 사용하여 구현된 **유일** 키로 이루어진 n항목의 순서사전이 있다
- T에서 $O(\log n + s)$ 시간에 수행하는 다음 메쏘드를 구현하라 – 여기서 s는 반환되는 원소의 수
  - findAllInRange(k_1, k_2): $k_1 \le k \le k_2$인 키 k를 가진 T의 모든 원소를 반환
- 원소들이 반환되는 순서는 중요하지 않다
- **예:** 오른쪽에 보인 AVL 트리 예에서, findAllInRange(48, 80)는 62, 50, 55, 80 키를 가진 원소들을 반환



해결

- AVL 트리 T의 각 내부노드 v에서 $k_1 \le key(v) \le k_2$면 노드 v의 원소 $element(v)$를 수집한 후, $key(v)$의 크기에 따라 다음 세 가지 경우로 나누어 좌우 부트리에 대한 탐색을 계속
  - $key(v) \le k_1$: 노드 v의 오른쪽 부트리에 대해 탐색을 계속
  - $k_2 \le key(v)$: 노드 v의 왼쪽 부트리에 대해 탐색을 계속
  - $k_1 < key(v) < k_2$: 노드 v의 좌우 부트리 모두에 대해 각각 탐색을 계속
- v가 외부노드인 경우 반환
- 원소들은 비어 있는 리스트 L을 초기화하여 수집
- 루트로부터 외부노드로 향하는 경로를 순회하며 s개의 노드를 방문하므로 $O(\log n + s)$ 시간에 수행
- **예:** 주어진 AVL 트리 예에서, findAllInRange(48, 80)이 방문하는 간선과 노드들을 굵은 선으로 표시



해결

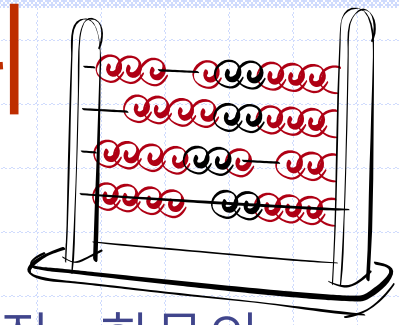
Alg ***findAllInRange***(k_1, k_2)
{distinct keys}
input AVL tree T, key k_1, k_2
output all elements with key k s.t. $k_1 \le k \le k_2$

1. $L \leftarrow$ *empty list*
2. ***rFAIR***(***root***(), k_1, k_2)
3. **return** L.***elements***()
{Total **O**(log n + s)}

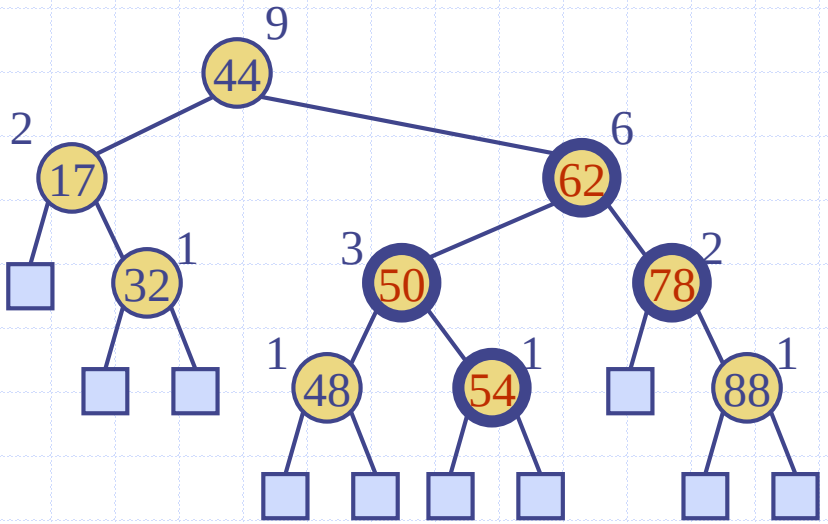
Alg ***rFAIR***(v, k_1, k_2)
input list L, node v of an AVL tree T, key k_1, k_2
output list L of elements with key k s.t. $k_1 \le k \le k_2$

1. **if** (***isExternal***(v))
   return
2. **if** ($k_1 \le$ ***key***(v) $\le k_2$)
   L.***addLast***(***element***(v))
3. **if** (***key***(v) $\le k_1$)
   rFAIR(***rightChild***(v), k_1, k_2)
   elseif ($k_2 \le$ ***key***(v))
   rFAIR(***leftChild***(v), k_1, k_2)
   else {$k_1 <$ ***key***(v) $< k_2$}
   rFAIR(***leftChild***(v), k_1, k_2)
   rFAIR(***rightChild***(v), k_1, k_2)

응용문제: 주어진 키 범위 내의 원소 수

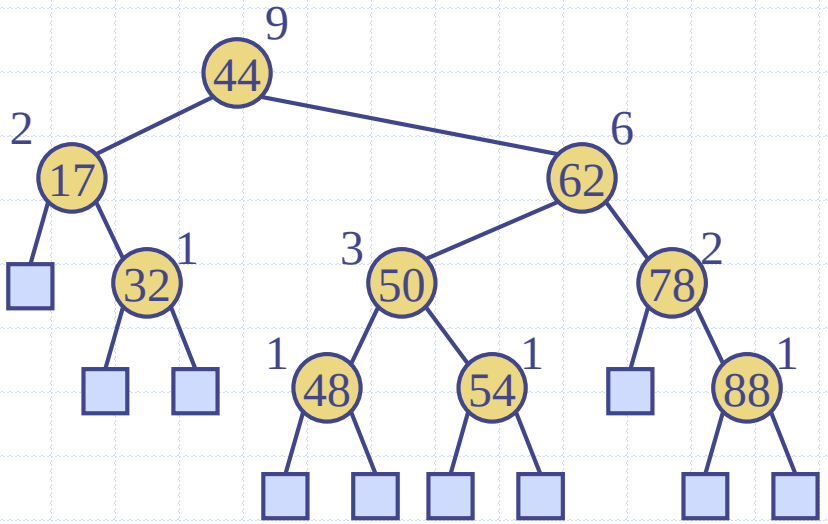


- **AVL 트리** T를 사용하여 구현된, **유일** 키로 이루어진 n항목의 순서사전이 있다
- T에서 $O(\log n)$ 시간에 수행하는 다음 메쏘드를 구현하라
  - countAllInRange(k_1, k_2): AVL 트리 T의 $k_1 \le k \le k_2$인 키 k들의 수를 계산하여 반환
- **힌트:** AVL 트리의 데이터구조를 확장하여 각 내부노드에 새 라벨을 정의하고 트리가 갱신되면 이 라벨의 값도 갱신
- **예:** 오른쪽에 보인 AVL 트리 예에서, countAllInRange(50, 80)는 4를 반환



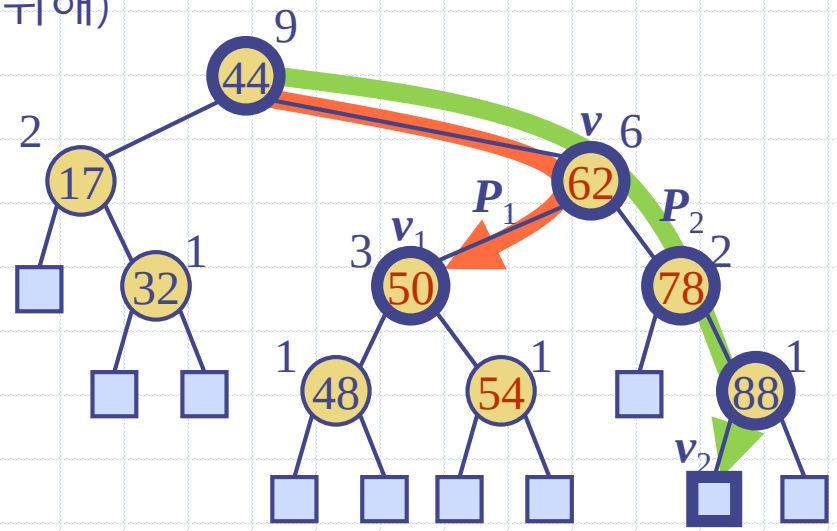
해결

- AVL 트리의 각 노드에 그 노드를 루트로 하는 부트리의 크기, 즉 부트리 내의 **내부노드** 수를 저장
- 트리 **갱신** 시에는 삽입이나 삭제가 수행된 경로의 노드들의 부트리의 크기를 증가시키거나 감소시킨다
- 특히, **3-노드 개조**를 수행할 때 세 노드(즉, 개조 알고리즘의 a, b, c 노드)를 루트로 하는 부트리의 크기를 올바르게 갱신
- 이런 방식으로 AVL 트리 T의 데이터구조가 확장되어 T의 각 노드 v에 대해 v를 루트로 하는 부트리의 크기를 반환하는 size(v) 메쏘드가 있다고 전제
- **예:** 이 방식으로 구현된 AVL 트리 – 각 노드 v의 정수 라벨은 size(v) 값



해결 (conti.)

- (k_1, k_2) 키 쌍 범위 내 노드들의 수를 계산하기 위해 k_1과 k_2 모두를 탐색하여 각각의 탐색경로를 P_1과 P_2라 하고 각각의 탐색이 반환한 노드를 v_1과 v_2라 한다
- 두 경로에 공통된 마지막 노드를 v라 한다
- P_1 경로를 v로부터 v_1까지 순회
- 순회 도중 만나는 각 내부노드 $w \neq v$에 대해, w의 **오른쪽** 자식이 P_1에 존재하지 않는다면, 현재까지의 합에 그 오른쪽 자식의 부트리의 크기와 1을 더한다(w를 포함하기 위해)
- 마찬가지로, P_2 경로를 v로부터 v_2까지 순회
- 순회 도중 만나는 각 내부노드 $w \neq v$에 대해, w의 **왼쪽** 자식이 P_2에 존재하지 않는다면, 현재까지의 합에 그 왼쪽 자식의 부트리의 크기와 1을 더한다
- 마지막으로 v가 내부노드면 현재까지의 합에 1을 더한다



해결 (conti.)

- 알고리즘 treeSearch는 방문한 경로의 노드들을 반환하도록 수정한 버전을 사용
- 분석
  - 두 키에 대한 탐색은 각각 $O(\log n)$ 시간 소요
  - 두 개의 탐색경로에 공통된 마지막 노드 v를 찾는데 $O(\log n)$ 시간 소요
  - 두 개의 탐색경로 각각에서 v로부터의 부경로를 추출하는데 $O(\log n)$ 시간 소요
  - 두 개의 탐색경로를 순회하는데 각각 $O(\log n)$ 시간 소요
  - 그러므로 전체적으로 $O(\log n)$ 시간에 수행

해결 (conti.)

Alg *countAllInRange*(k_1, k_2)
input AVL tree T, key k_1, k_2
output the number of items with key k, s.t. $k_1 \leq k \leq k_2$

1. P_1, P_2 ← *empty list*
2. v_1 ← ***treeSearch***(P_1, ***root***(), k_1) {**O**(log n))}
3. v_2 ← ***treeSearch***(P_2, ***root***(), k_2) {**O**(log n))}
4. v ← *last node common to* P_1 *and* P_2 {**O**(log n))}
5. S_1 ← *subpath of* P_1 *starting at* v
6. S_2 ← *subpath of* P_2 *starting at* v
7. $c \leftarrow 0$
8. **for each** $w \neq v \in S_1$.***elements***() {**O**(log n))}
   if (***isInternal***(w))
      $u \leftarrow$ ***rightChild***(w)
      if ($u \notin S_1$)
         if (***isInternal***(u))
            $c \leftarrow c +$ ***size***(u)
         $c \leftarrow c + 1$ {count w}
9. **for each** $w \neq v \in S_2$.***elements***() {**O**(log n))}
   if (***isInternal***(w))
      $u \leftarrow$ ***leftChild***(w)
      if ($u \notin S_2$)
         if (***isInternal***(u))
            $c \leftarrow c +$ ***size***(u)
         $c \leftarrow c + 1$ {count w}
10. **if** (***isInternal***(v))
    $c \leftarrow c + 1$ {count v}
11. **return** c

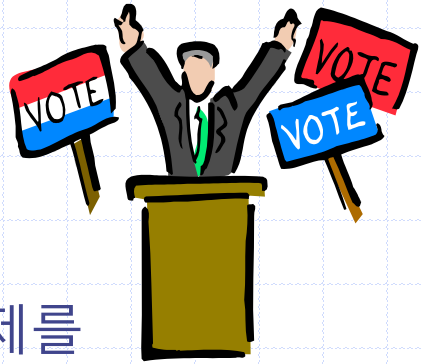
{Total **O**(log n)}

해결 (conti.)

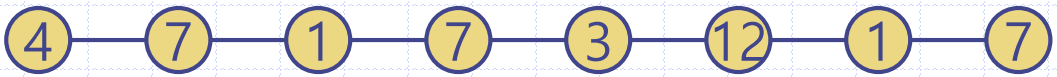
Alg ***treeSearch*(*L*, *v*, *k*)** {another version}
input list ***L***, node ***v*** of a binary search tree, key ***k***
output node ***w***, s.t. either ***w*** is an internal node storing key ***k*** or ***w*** is the external node where key ***k*** would belong if it existed, list ***L*** of nodes visited

1. ***L*.*addLast*(*v*)**
2. **if (*isExternal*(*v*))**
   return *v*
3. **if (*k* = *key*(*v*))**
   return *v*
   elseif (*k* < *key*(*v*))
   return *treeSearch*(*L*, *leftChild*(*v*), *k*)
   else {*k* > *key*(*v*)}
   return *treeSearch*(*L*, *rightChild*(*v*), *k*)
   {Total **O**(log ***n***)}

응용문제: 투표



- **정렬 일반** 장의 **응용문제**에서 다루었던 투표 문제를 다시 생각해 보자
- n-원소 리스트 L이 주어졌다고 가정하자 – 여기서 L의 각 원소는 선거에서의 **투표**를 표현
- 각 투표는 선택된 후보자의 ID를 나타내는 **정수**로 주어진다
  - 기호들은 정수지만 빠진 번호가 있을 수도 있다
- 이번엔 출마한 후보자의 수 $k < n$ 를 **안다**고 가정
- 당선자를 찾아내는 $O(n \log k)$-시간 메쏘드를 작성하라
- **전제:** 가장 많은 표를 획득한 후보자가 당선된다
- **예:** 아래 투표 리스트에서 기호 7이 당선자다



해결 (Ver. 1)

- 메쏘드 1 (**분할**을 이용)
  1. inPlacePartition의 중복 키가 존재하는 경우의 버전을 사용하여 리스트 L을 분할
  2. LT와 GT 부리스트에 대하여 분할을 반복
  3. 분할이 완료된 후 리스트를 스캔하면서 최대 득표자를 찾는다
- 실행시간
  - 1단계: $\mathbf{O}(n)$
  - 2단계: $\mathbf{O}(\log k)$회의 반복 소요
  - 3단계: $\mathbf{O}(n)$
  - 그러므로 총 $\mathbf{O}(n \log k)$ 시간

해결 (Ver. 2, 추천)

- 메쏘드 2 (**균형탐색트리**를 이용)
  1. 후보자의 ID를 AVL 트리와 같은 **균형탐색트리**에 저장 – 이 트리에서, 각 ID와 함께 해당 ID의 득표수를 저장
  2. 초기에는 득표수를 모두 0으로 설정
  3. 그 다음엔 투표 리스트를 순회하며, 각 투표의 ID에 해당하는 득표수를 증가시킨다
- 이 데이터구조는 k개의 원소를 저장하므로, 각 투표에 대한 탐색과 갱신은 $\mathbf{O}(\log k)$ 시간에 수행
- 그러므로 총 실행시간은 $\mathbf{O}(n \log k)$