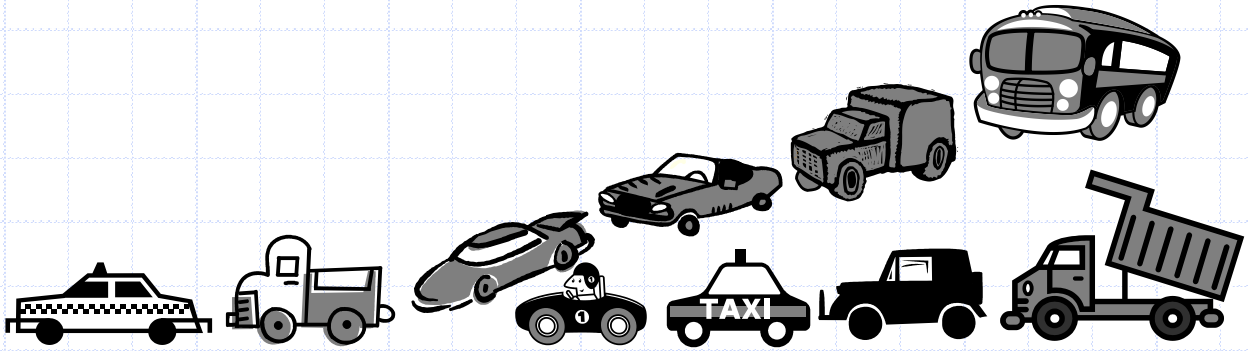
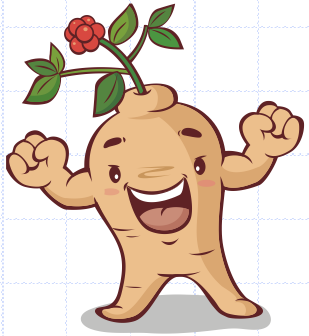
합병 정렬



Outline

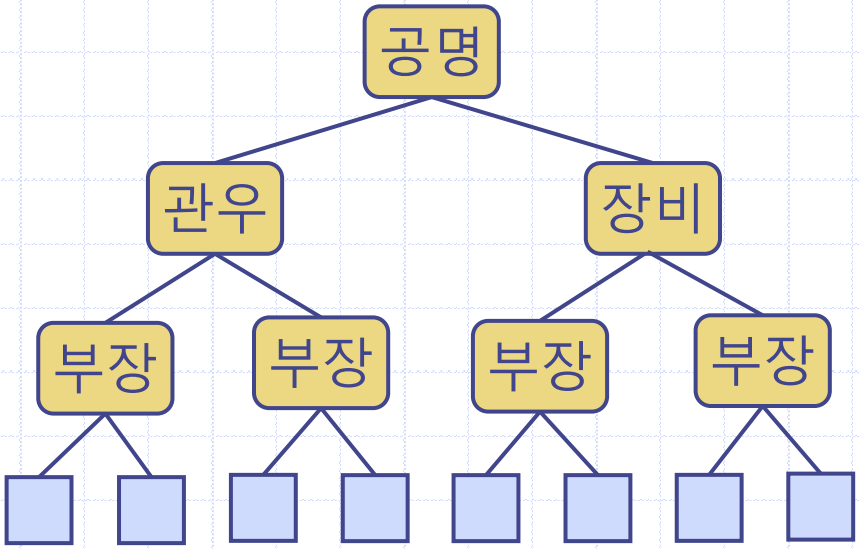
- 7.1 분할통치법
- 7.2 합병 정렬
- 7.3 응용문제

분할통치법



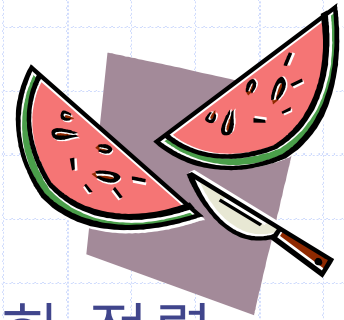
- **분할통치법**(divide-and-conquer): 일반적인 알고리즘 설계 기법(algorithm design paradigm)의 일종
  1. **분할**(divide): 입력 데이터 L을 둘 이상의 분리된 부분집합 $L_1, L_2, \ldots$ 으로 나눈다
  2. **재귀**(recur): $L_1, L_2, \ldots$ 각각에 대한 부문제를 재귀적으로 해결
  3. **통치**(conquer): 부문제들에 대한 해결을 합쳐 L을 해결
- 재귀의 **베이스 케이스:** 상수 크기의 부문제들
- **점화식**(recurrence equations)을 사용하여 분석

- **예**
  - 합병 정렬(merge-sort)
  - 퀵 정렬(quick-sort)



산삼채집 작전

합병 정렬



- **합병 정렬**(merge-sort): **분할통치법**에 기초한 정렬 알고리즘
- 힙 정렬(heap-sort)처럼,
  - 비교에 기초한 정렬
  - $O(n \log n)$ 시간에 수행
- 힙 정렬(heap-sort)과는 달리,
  - 외부의 우선순위 큐를 사용하지 않는다
  - 데이터를 **순차적** 방식으로 접근 (따라서 디스크의 데이터를 정렬하기에 적당)

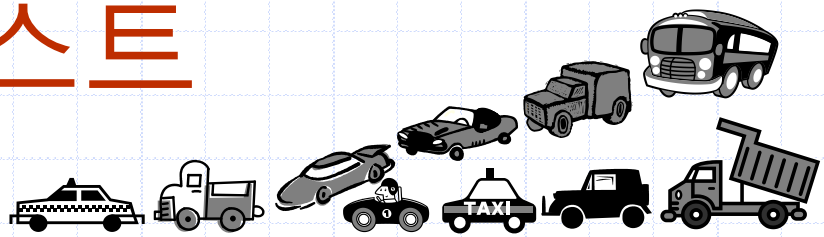
합병 정렬 (conti.)

- n개의 원소로 이루어진 입력 리스트 L에 대한 합병 정렬(merge-sort)의 세 단계
  1. **분할**(divide): 무순리스트 L을 각각 $n/2$개의 원소를 가진 두 개의 부리스트 L_1과 L_2로 분할
  2. **재귀**(recur): L_1과 L_2를 각각 재귀적으로 정렬
  3. **통치**(conquer): L_1과 L_2를 단일 순서리스트로 합병

Alg ***mergeSort***(L)
  input list L with n elements
  output sorted list L

1. **if** (L.***size***() > 1)
    $L_1, L_2 \leftarrow$ ***partition***$(L, n/2)$
    mergeSort(L_1)
    mergeSort(L_2)
    $L \leftarrow$ ***merge***(L_1, L_2)
2. **return**

두 개의 정렬 리스트 합병하기

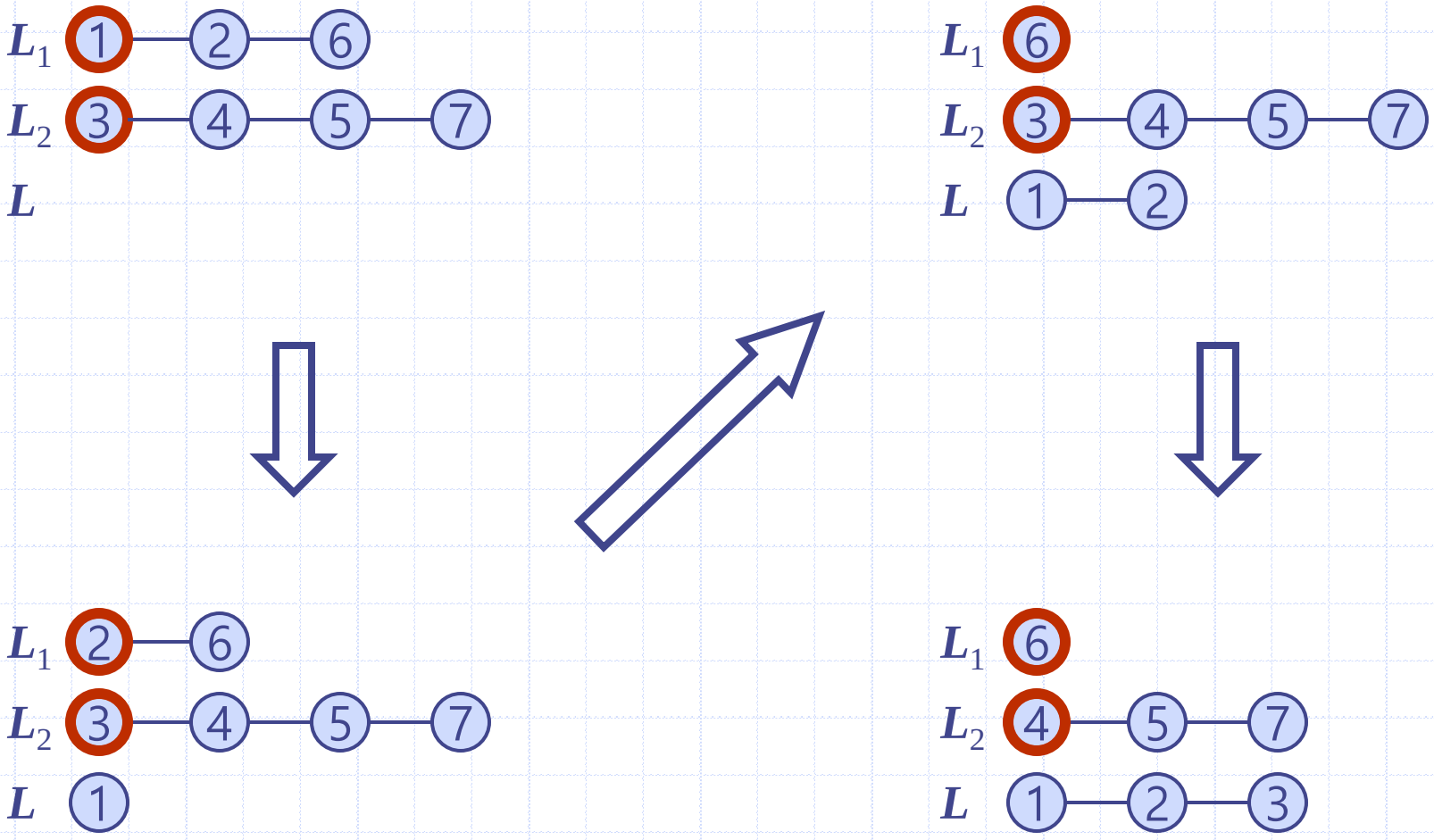


- merge-sort의 **통치** 단계
  - 두 개의 정렬된 리스트 L_1과 L_2를 L_1과 L_2의 원소들의 합을 포함하는 정렬 리스트 L로 합병하는 과정
- 각각 $n/2$개의 원소를 가지며, 이중연결리스트로 구현된 두 개의 정렬 리스트를 합병하는데 $O(n)$ 시간 소요

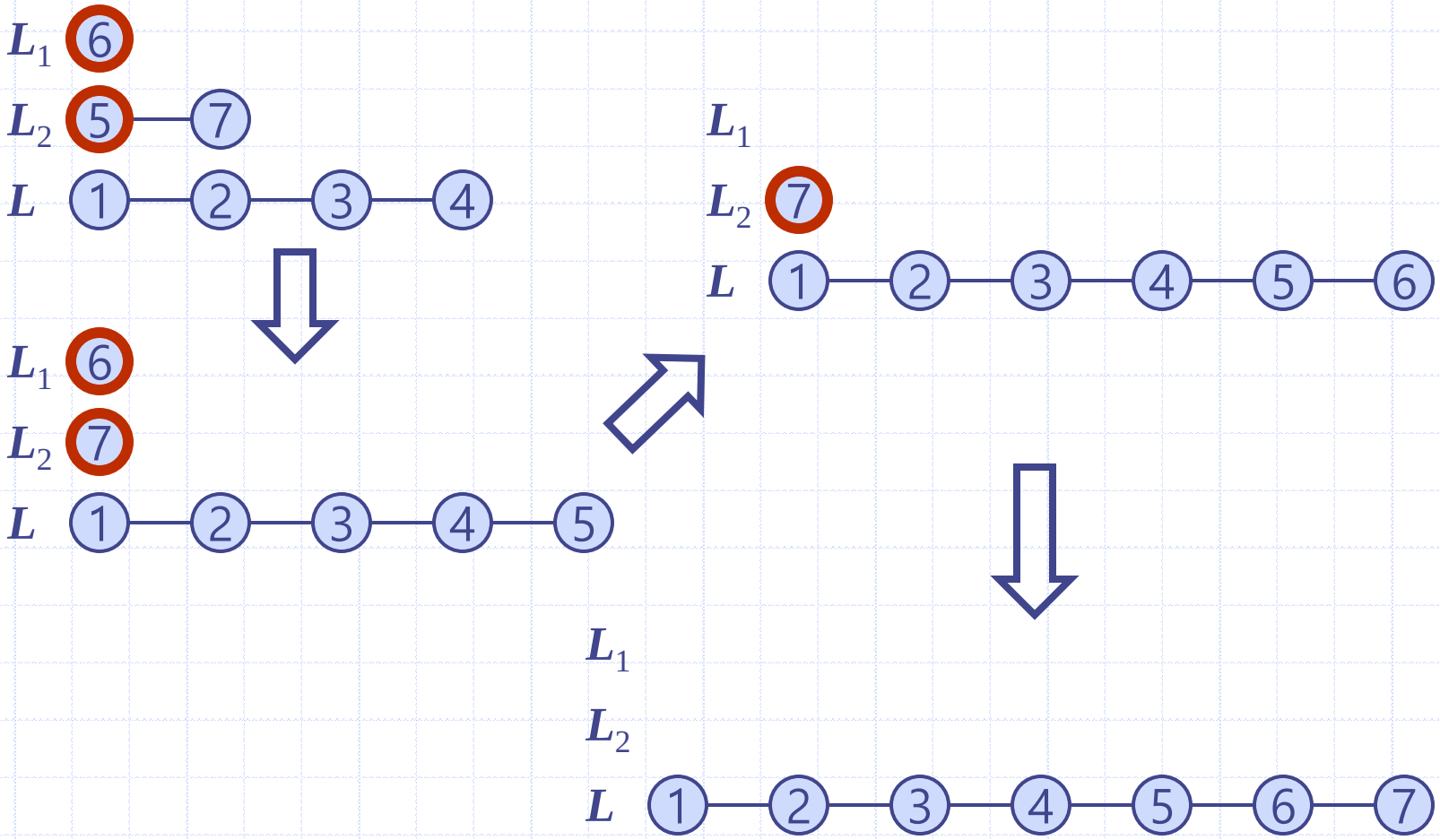
Alg ***merge***(L_1, L_2)
input sorted list L_1 and L_2 with $n/2$ elements each
output sorted list of $L_1 \cup L_2$

1. $L \leftarrow$ *empty list*
2. **while** (!L_1.***isEmpty***() & !L_2.***isEmpty***())
   if (L_1.***get***(1) $\leq$ L_2.***get***(1))
   L.***addLast***(L_1.***removeFirst***())
   else
   L.***addLast***(L_2.***removeFirst***())
3. **while** (!L_1.***isEmpty***())
   L.***addLast***(L_1.***removeFirst***())
4. **while** (!L_2.***isEmpty***())
   L.***addLast***(L_2.***removeFirst***())
5. **return** L

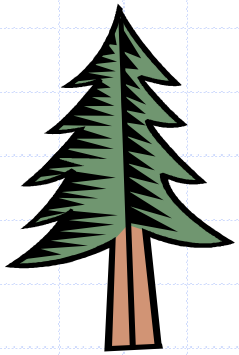
합병 예



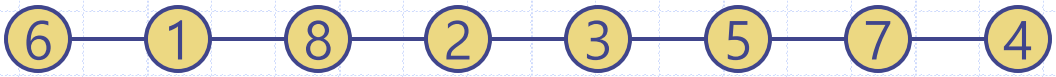
합병 예 (conti.)



합병정렬 트리

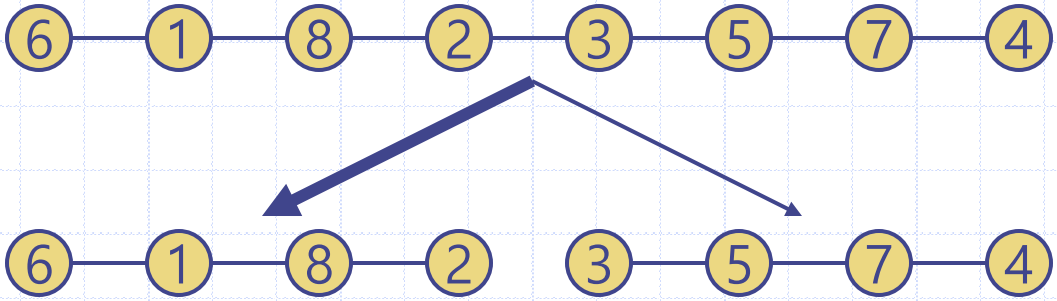


- merge-sort의 실행을 이진트리로 보이기
  - 이진트리의 각 노드는 merge-sort의 **재귀호출**을 표현하며 다음을 저장
    - 실행 이전의 무순리스트 및 분할
    - 실행 이후의 정렬리스트
  - 루트는 **초기 호출**을 의미
  - 잎들은 크기 1의 부리스트에 대한 호출을 의미
- 실행예를 위한 입력 리스트



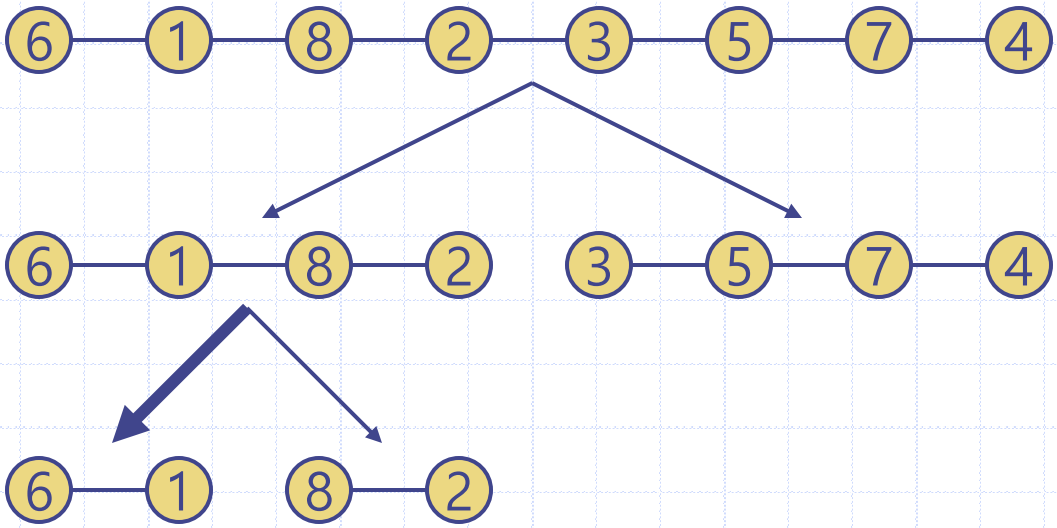
합병 정렬 수행 예

- 초기 호출, 분할, 재귀 호출



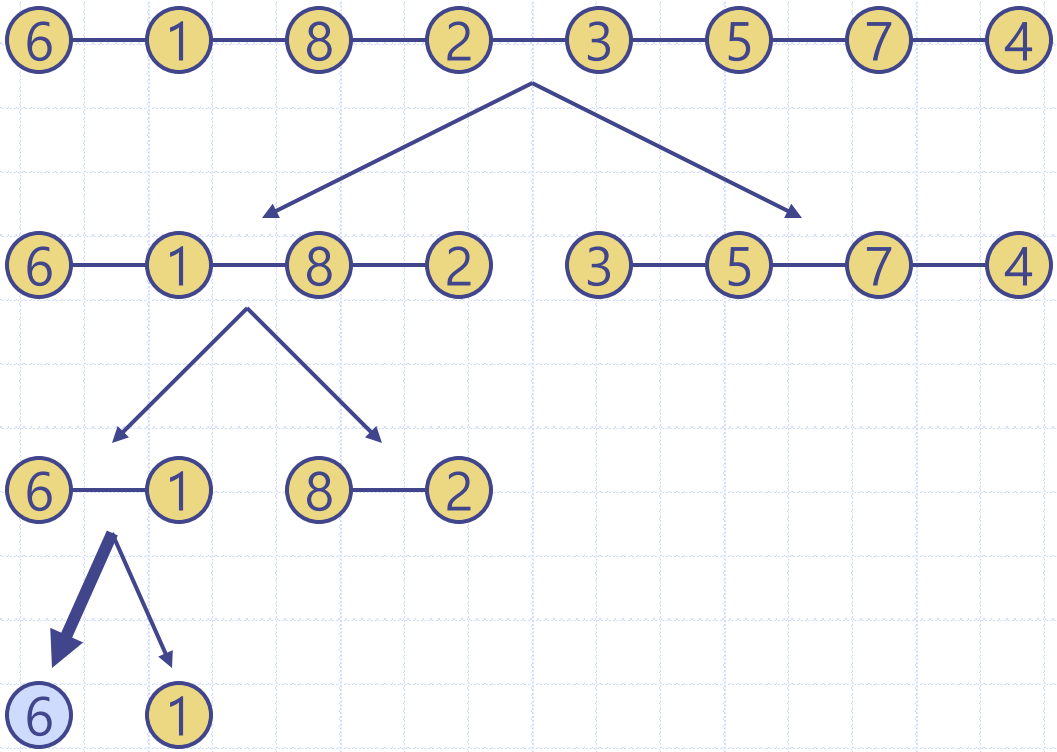
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 분할, 재귀호출



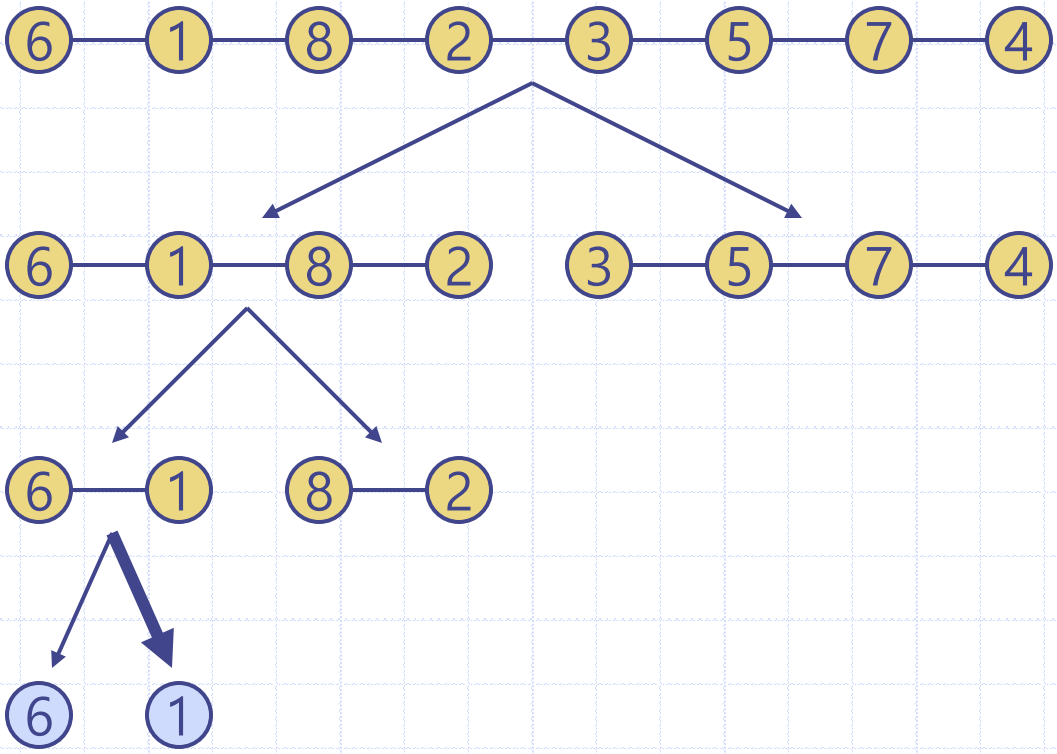
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 분할, 재귀 호출, 베이스 케이스



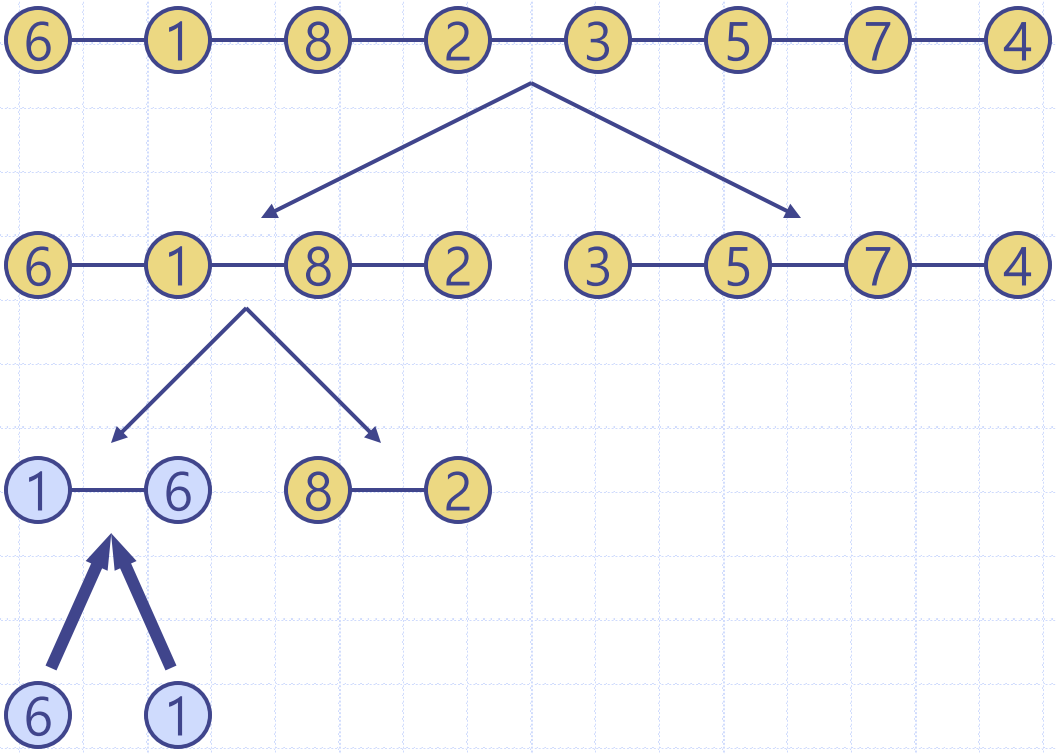
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 재귀 호출, 베이스 케이스



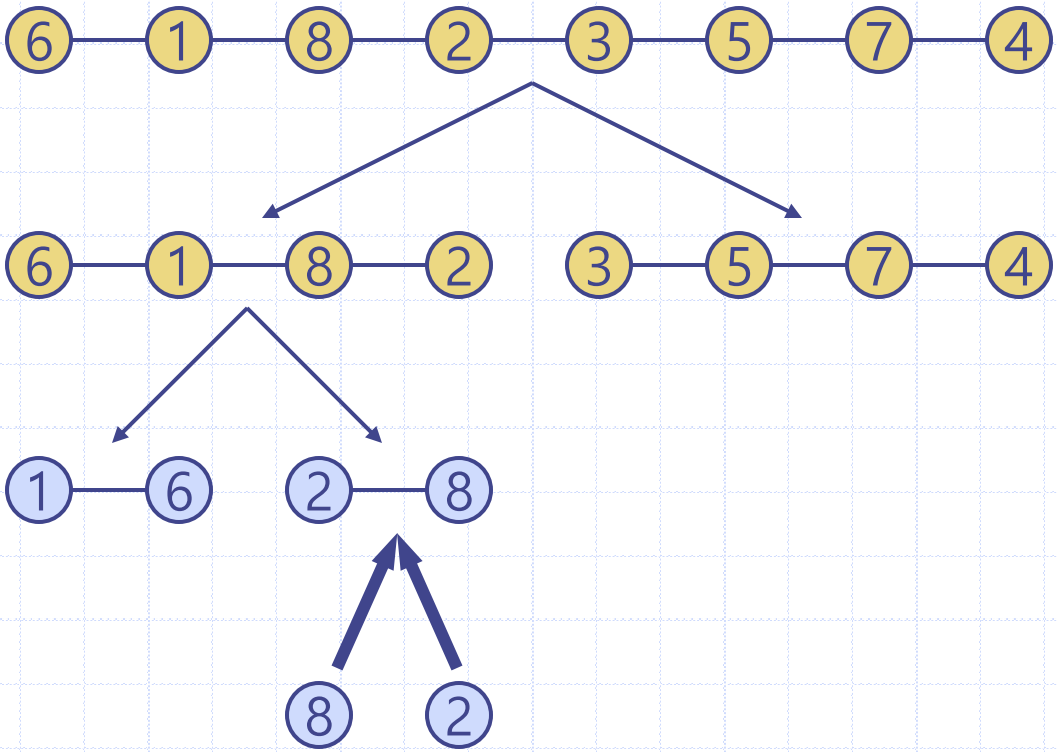
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 합병



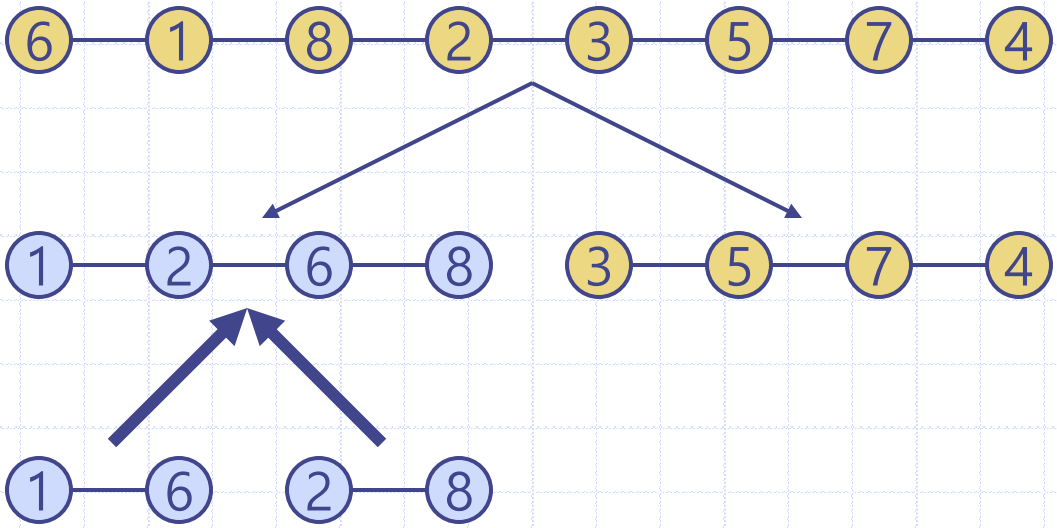
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 재귀 호출, … , 합병



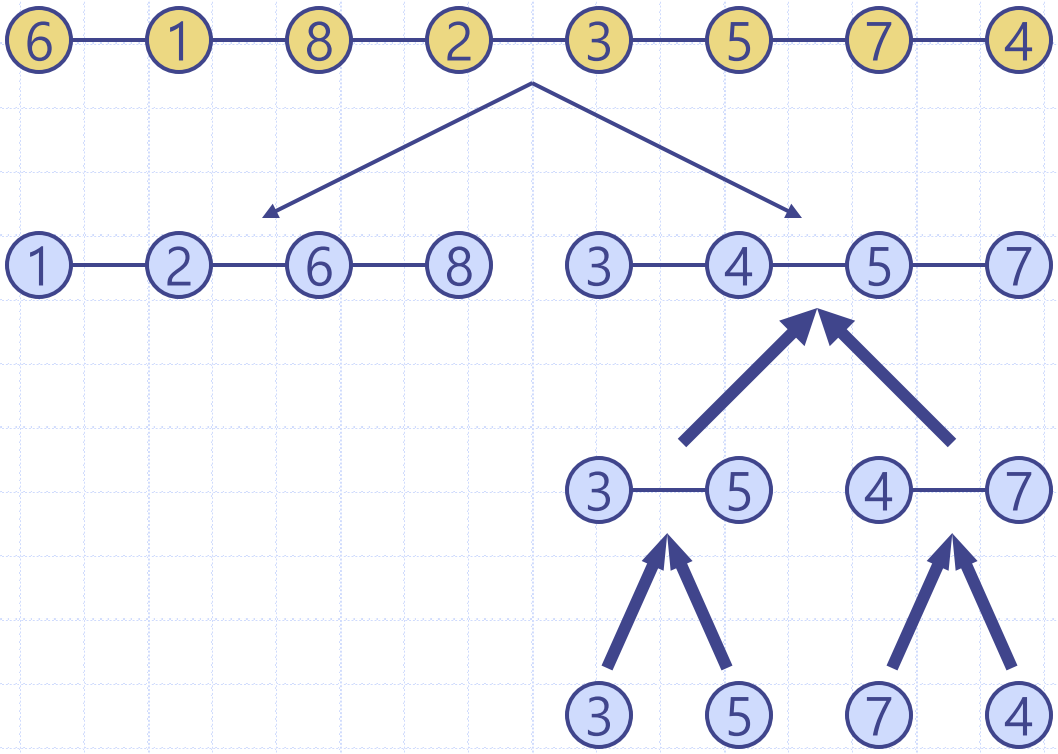
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 합병



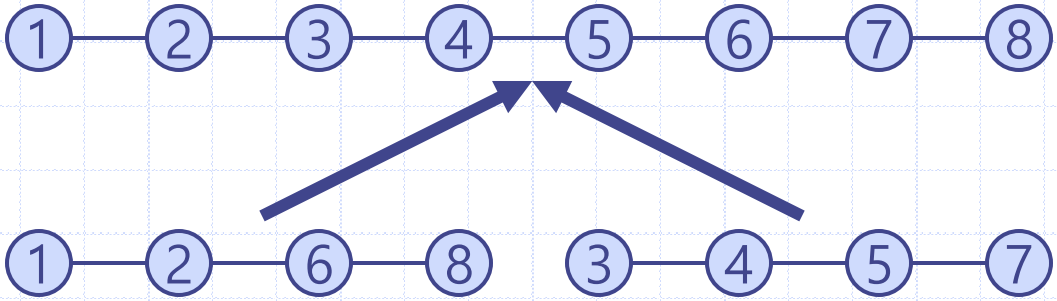
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 재귀 호출, … , 합병



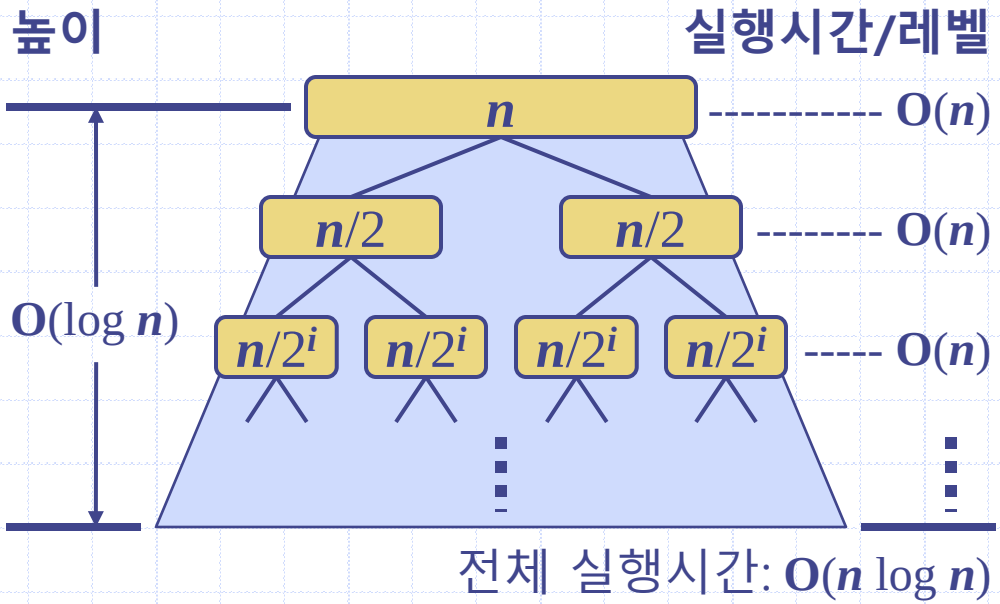
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 합병



합병 정렬 분석

- 합병 정렬 트리의 높이 h: $O(\log n)$
  - 각 재귀호출에서 리스트를 절반으로 나누기 때문
- 깊이 i의 노드들에서 이루어지는 총 작업량: $O(n)$
  - 2^i개의 크기 $n/2^i$의 리스트들을 분할하고 합병하기 때문
  - 2^{i+1}번의 재귀호출
- 따라서, merge-sort의 전체 **실행시간: $O(n \log n)$**
- 점화식으로도 해결 가능
  - $T(n) = c \quad (n < 2)$
  - $T(n) = 2T(n/2) + O(n) \quad (n \geq 2)$
  - $\therefore T(n) = O(n \log n)$



응용문제: 배열에 대한 합병 정렬

- 일반 리스트가 아닌, **배열**에 대해 작동하는 merge-sort 알고리즘의 버전을 작성하라
  - mergeSort(A): n개의 원소로 구성된 배열 A를 합병 정렬
- **힌트:** 외부 배열을 "버퍼", 즉 임시 저장 공간으로 사용하라

해결

Alg ***mergeSort***(***A***)
  input array ***A*** of ***n*** keys
  output sorted array ***A***

1. ***rMergeSort***(***A***, 0, ***n*** – 1)
2. **return**

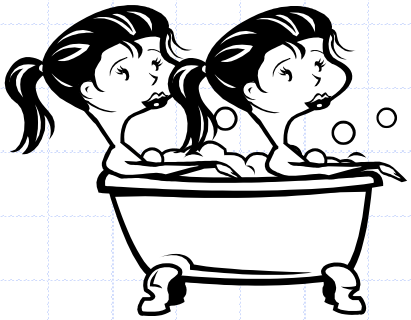
Alg ***rMergeSort***(***A***, ***l***, ***r***)
  input array ***A***[***l***..***r***]
  output sorted array ***A***[***l***..***r***]

1. **if** (***l*** < ***r***)
    m ← ⌊(***l*** + ***r***)/2⌋
    rMergeSort(***A***, ***l***, ***m***)
    rMergeSort(***A***, ***m*** + 1, ***r***)
    merge(***A***, ***l***, ***m***, ***r***)
2. **return**

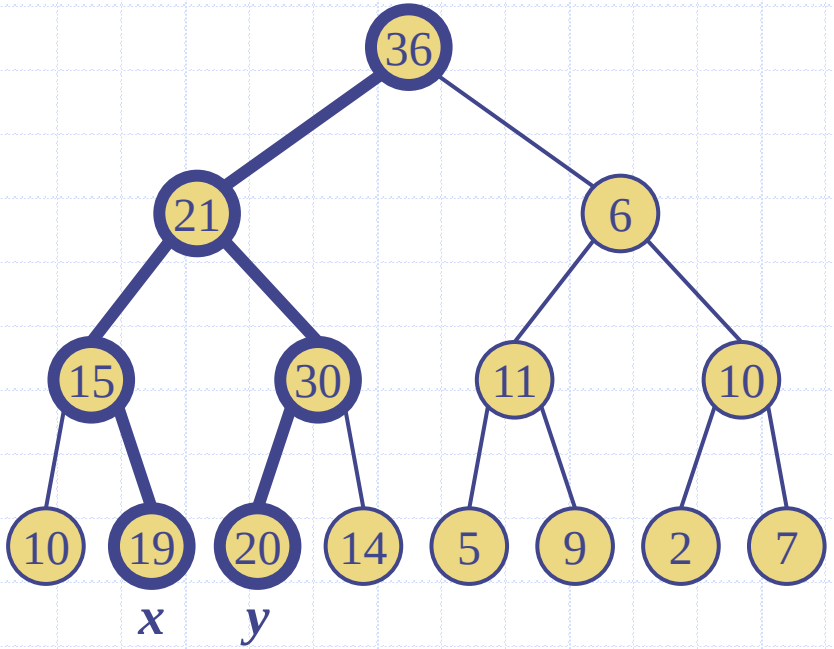
Alg ***merge***(***A***, ***l***, ***m***, ***r***)
  input sorted array ***A***[***l***..***m***], ***A***[***m***+1..***r***]
  output sorted array ***A***[***l***..***r***] merged from ***A***[***l***..***m***] and ***A***[***m***+1..***r***]

1. ***i***, ***k*** ← ***l***
2. ***j*** ← ***m*** + 1
3. **while** (***i*** ≤ ***m*** & ***j*** ≤ ***r***)
    if (***A***[***i***] ≤ ***A***[***j***])
      B[***k***++] ← ***A***[***i***++]
    else
      B[***k***++] ← ***A***[***j***++]
4. **while** (***i*** ≤ ***m***)
    B[***k***++] ← ***A***[***i***++]
5. **while** (***j*** ≤ ***r***)
    B[***k***++] ← ***A***[***j***++]
6. **for** ***k*** ← ***l*** to ***r***
    A[***k***] ← ***B***[***k***]
7. **return**

응용문제: 포화이진트리



- 높이 h의, $n = 2^h$ 개의 외부노드로 이루어진 **포화이진트리**(full binary tree)가 있다
- 트리의 각 노드 v는 임의의 실수 값 $value(v) = k$를 저장
- v가 외부노드라면, $A(v)$는 v의 **조상**들의 집합을 나타낸다 (v의 조상에는 v 자신도 포함)
- a와 b가 서로 다른 외부노드라면, $A(a, b)$는 a 또는 b의 조상들의 집합을 나타낸다 – 즉, $A(a, b) = A(a) \cup A(b)$
- $f(a, b)$를 $A(a, b)$에 포함된 노드 v의 $value(v)$ 값의 합이라 정의
- $f(x, y)$를 **최대**로 하는 두 개의 외부노드 x와 y를 찾는 **효율적인** 알고리즘을 작성하고 **분석**하라



- **예:** $f(x, y)$
  $= 19 + 15 + 21 + 36 + 20 + 30$
  $= 141$
- **힌트: 분할통치법**으로 해결

해결: 포화이진트리

- **분할통치법**으로 해결 가능한 문제
- 단순성을 위해, 여기서 제시하는 알고리즘은 최대값을 계산하기만 할 뿐 두 개의 외부노드를 반환하지는 않는다 – 이 값을 주는 두 개의 노드를 반환하도록 수정하는 것은 어렵지 않다
- max1(v)는 노드 v를 루트로 하는 부트리 내의 모든 외부노드 x의 조상 노드들의 $value(x)$의 합 $f(x)$ 중 최대값을 $O(n)$ 시간에 계산
  - $T_{max1}(n) = c$ $(n < 2)$
  - $T_{max1}(n) = 2T_{max1}(n/2) + c$ $(n \geq 2)$
  - $\therefore T_{max1}(n) = O(n)$
- max2(v)는 노드 v를 루트로 하는 부트리 내의 모든 외부노드 x, y 쌍에 대한 $f(x, y)$ 중 최대값을 $O(n \log n)$ 시간에 계산
  - $T_{max2}(n) = c$ $(n < 4)$
  - $T_{max2}(n) = 2T_{max2}(n/2) + 2T_{max1}(n/2) + c = 2T_{max2}(n/2) + O(n)$ $(n \geq 4)$
  - $\therefore T_{max2}(n) = O(n \log n)$

해결: 포화이진트리 (conti.)

Alg *max1*(*v*)
input node *v*
output maximum value of *f*(*x*), i.e. the sum of the ancestors of all leaves *x* in *v*'s subree

1. **if** (*isExternal*(*v*))
   return *value*(*v*)
2. **return** *value*(*v*) + *max*(*max1*(*leftChild*(*v*)), *max1*(*rightChild*(*v*)))
   {Total **O**(*n*)}

Alg *max2*(*v*)
input node *v*
output maximum *f*(*x*, *y*) over all pairs of leaves *x*, *y* in *v*'s subree

1. **if** (*isInternal*(*v*) & *isExternal*(*leftChild*(*v*)) & *isExternal*(*rightChild*(*v*)))
   return *value*(*v*) + *value*(*leftChild*(*v*)) + *value*(*rightChild*(*v*))
2. **return** *value*(*v*) + *max*(*max2*(*leftChild*(*v*)),
   max2(*rightChild*(*v*)),
   max1(*leftChild*(*v*)) + *max1*(*rightChild*(*v*)))
   {Total **O**(*n* log *n*)}