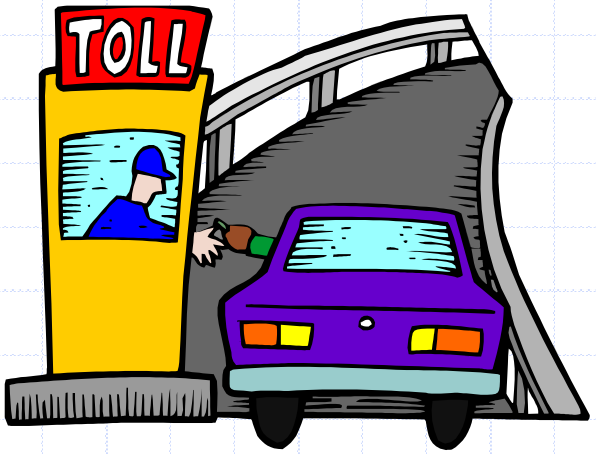
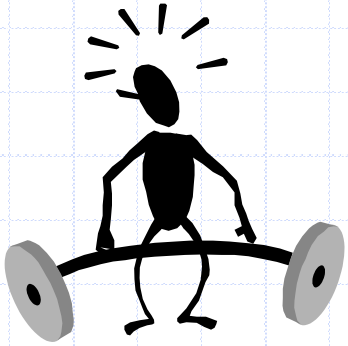
최소신장트리



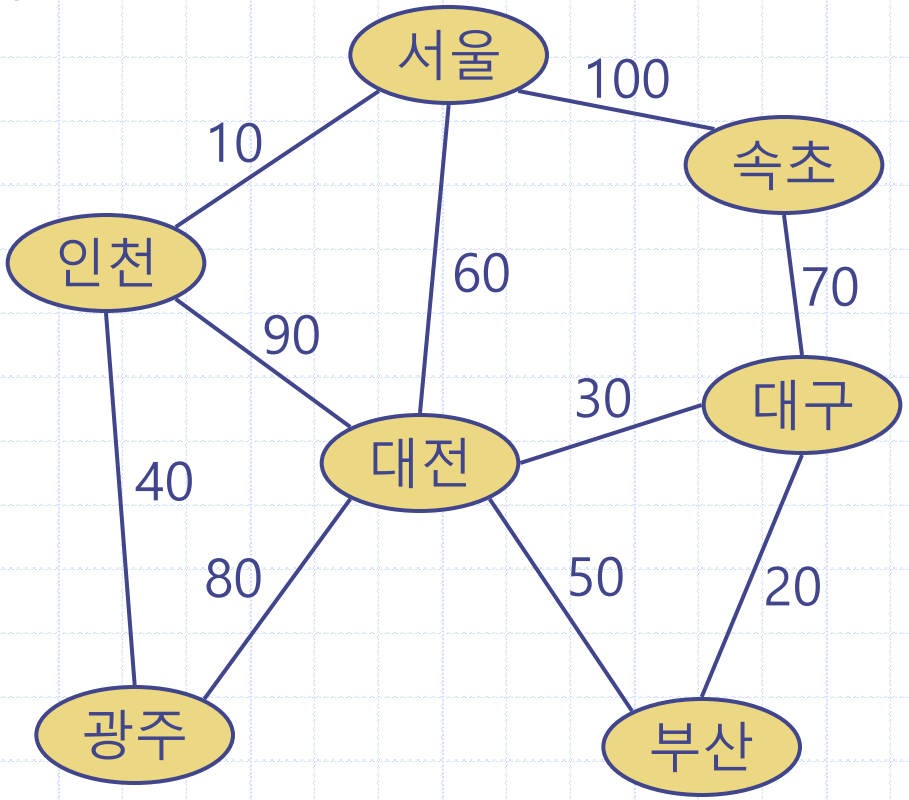
Outline

- 16.1 가중그래프
- 16.2 최소신장트리
- 16.3 탐욕법
- 16.4 최소신장트리 알고리즘
- 16.5 응용문제

가중그래프

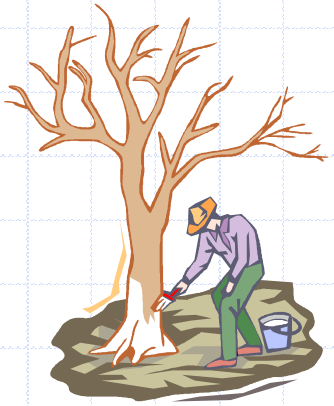


- **가중그래프**(weighted graph): 각 간선이 **무게**(weight)라 부르는 수치값을 가지는 그래프
- **무게:** 거리, 비용, 시간 등
- **예**
  - 오른편 철도 그래프에서, 간선의 무게는 양끝점 역간의 여행거리(km)를 표현



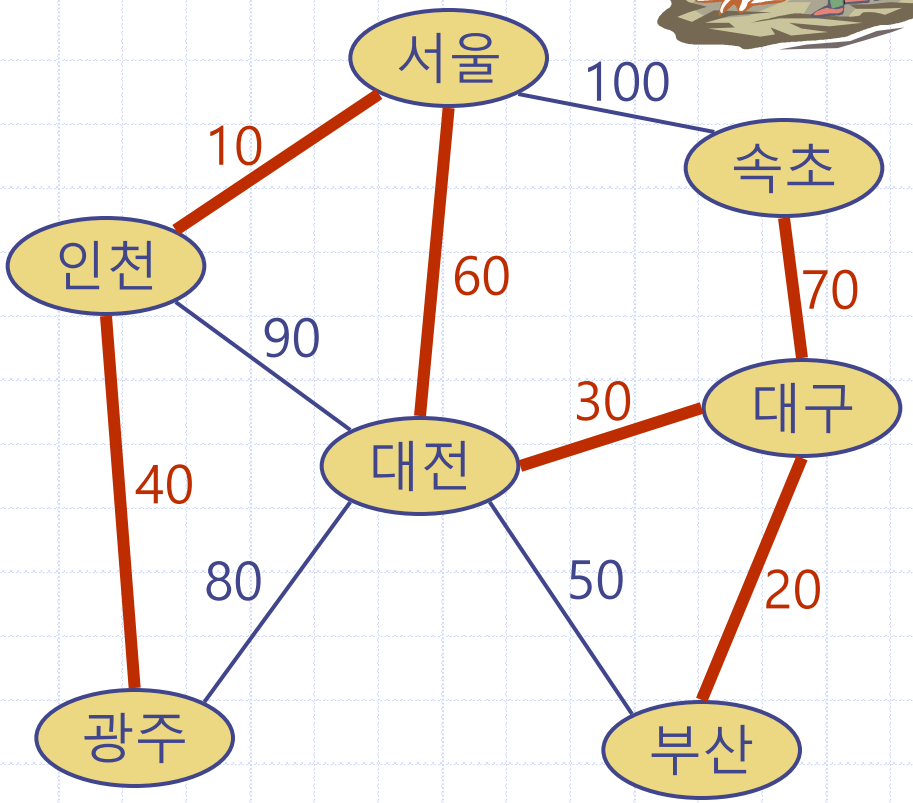
가중그래프 예

최소신장트리



- **신장 부그래프**(spanning subgraph)
  - 그래프 G의 모든 정점들을 포함하는 부그래프
- **신장트리**(spanning tree)
  - (자유) 트리인 신장 부그래프
- **최소신장트리**(minimum spanning tree, **MST**)
  - 가중그래프의 총 간선 무게가 최소인 신장트리

◆ **응용**
- 통신망
- 교통망



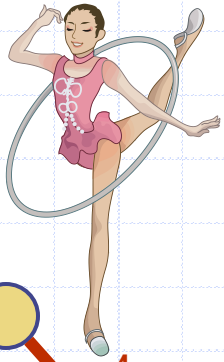
최소신장트리 예

최소신장트리 속성

- 싸이클 속성
- 분할 속성

최소신장트리 알고리즘의 정확성 검증에 이용

싸이클 속성

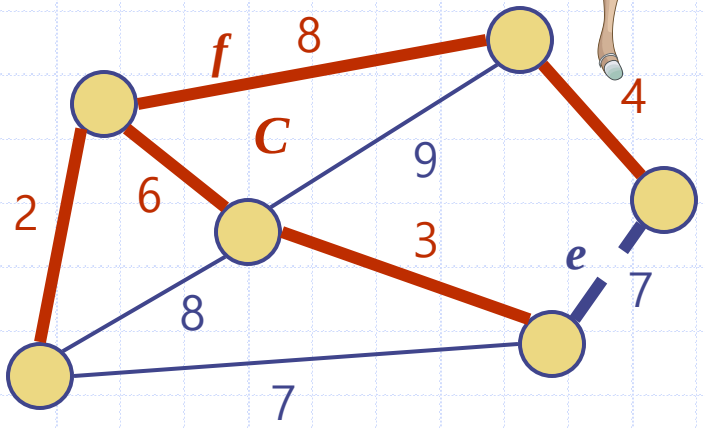


싸이클 속성

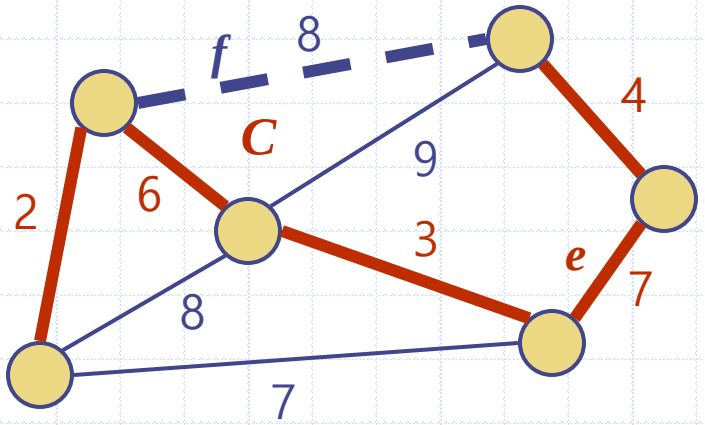
- T를 가중그래프 G의 **최소신장트리**라 하자
- e를 T에 존재하지 않는 G의 간선으로, C를 e를 T에 추가하여 형성된 **싸이클**로 가정
- 그러면 C의 모든 간선 f에 대해, $weight(f) \leq weight(e)$

증명

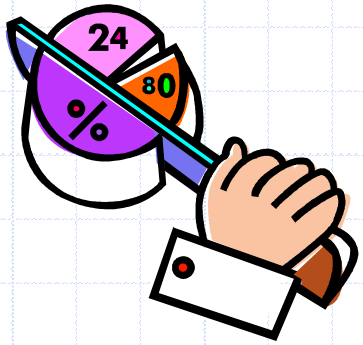
- **모순법**
- 만약 $weight(f) > weight(e)$라면, f를 e로 대체함으로써 무게가 더 작은 신장트리를 얻을 수 있기 때문



f를 e로 대체하면 더 좋은 신장트리를 얻는다



분할 속성

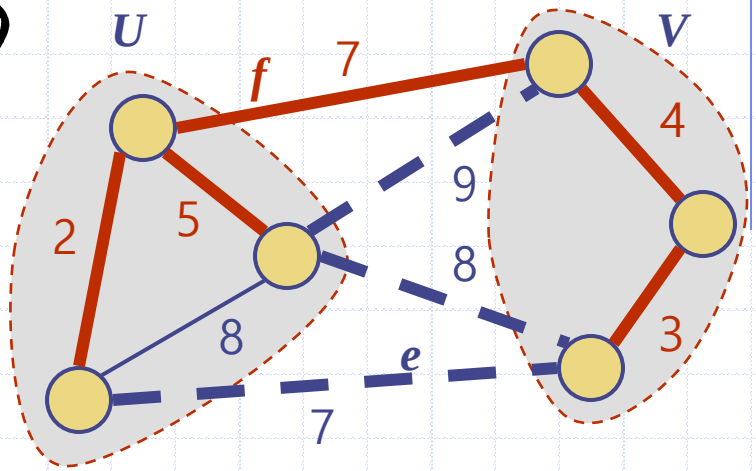


분할 속성

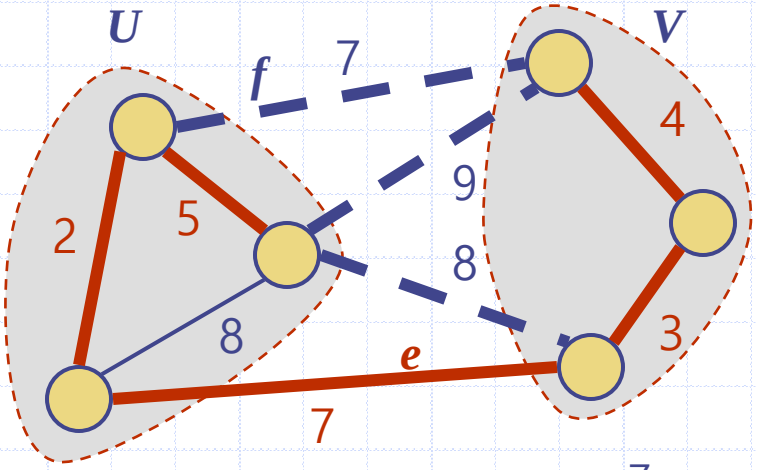
- G의 정점들을 두 개의 부분집합 U와 V로 **분할**한다고 하자
- e를 분할을 가로지르는 **최소 무게**의 간선이라고 하자
- 간선 e를 포함하는 G의 **최소신장트리**가 반드시 존재

증명

- T를 G의 **MST**라 하자
- 만약 T가 e를 포함하지 않는다면, e를 T에 추가하여 형성된 싸이클 C를 구성하는 간선들 가운데 분할을 가로지르는 간선 f가 존재
- **싸이클 속성**에 의해,
  $weight(f) \leq weight(e)$
- 그러므로, $weight(f) = weight(e)$
- f를 e로 대체하면 또 하나의 **MST**를 얻을 수 있다



f를 e로 대체하면 다른 MST를 얻는다



탐욕법

- **탐욕법**(greedy method): 일반적인 알고리즘 설계 기법 가운데 하나 – 다음 요소에 기초하여 설계
  - **구성**(configuration): 다양한 선택, 모음, 또는 찾아야 할 값들
  - **목표**(objective): 구성에 할당된 점수가 존재하며, 이를 최대화 또는 최소화해야 하는 상황
- **탐욕적 선택 속성**(greedy-choice property)을 가진 문제에 적용할 경우 가장 잘 맞는다
  - 출발 구성으로부터 시작하여 지속적인 지역적 향상을 통해 전체 최적해를 항상 찾을 수 있다
- **예**
  - 잔돈 거스르기
  - 부분적 배낭 문제(the fractional knapsack problem)
  - 최소신장트리 문제(minimum spanning trees)

잔돈 거스르기 문제

- **구성**
  - 거슬러줘야 할 금액 정보
  - 종류별로 여러 개의 동전들
- **목표**
  - 동전 수를 최소화
- **탐욕해**
  - 가능하면 항상 제일 큰 동전으로 거슬러준다

"만약 이 문제가 **탐욕적 선택 속성**을 가졌다면 **탐욕해는 최적해**가 된다"

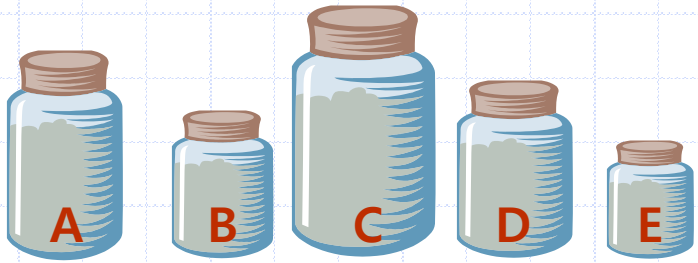
- **예 1:** 동전 종류가 32원, 8원, 1원인 경우
  - **탐욕적 선택 속성** 있음 – 왜냐면, 32원 이상의 금액은 32원을 빼고는 최소 수의 동전으로 만들 수가 없기 때문(8원을 넘지만 32원에 못 미치는 금액에 대해서도 마찬가지)
- **예 2:** 동전 종류가 30원, 20원, 5원, 1원인 경우
  - **탐욕적 선택 속성** 없음 – 왜냐면, 40원은 두 개의 20원만으로 만들 수 있으나, 탐욕해는 세 개의 동전을 택하기 때문(어떤 세 개인가?)

부분적 배낭 문제

- **구성:** n 항목의 집합 S – 각 항목 i는 다음을 가진다
  - b_i : 양수의 이득
  - v_i : 양수의 부피
- **목표**
  - 최대 부피 한도 V 내에서, 최대의 총이득을 주는 항목들을 선택
- **부분적 배낭 문제**(the fractional knapsack problem): 각 항목의 일부만을 취할 수 있는 문제
  - x_i가 항목 i를 덜어 담는 양을 표시한다고 하면,
  - **목표:** $\sum_{i \in S} b_i (x_i / v_i)$를 최대화
  - **제약:** $\sum_{i \in S} x_i \leq V$

부분적 배낭 문제 예

- **구성:** n 항목의 집합 S – 각 항목 i는 다음을 가진다
  - b_i : 양수의 이득
  - v_i : 양수의 부피
- **목표**: 최대 부피 한도 V 내에서, 최대의 총이득을 주는 항목들을 선택



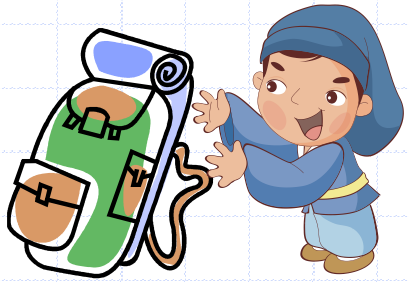
항목:	A	B	C	D	E
이득:	32	15	27	5	4
부피:	8ml	3ml	9ml	5ml	2ml
가치: (ml 당)	4	5	3	1	2

배낭 10ml

탐욕해:
- **B** (3ml)
- **A** (7ml)

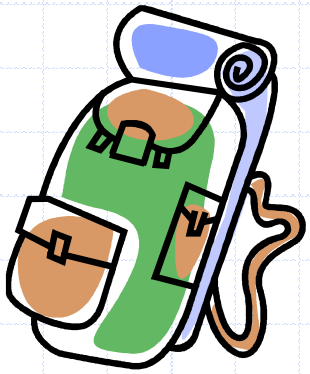
총이득: 43

0-1 배낭 문제



- **0/1 배낭 문제**(또는 all-or-nothing knapsack problem): 각 항목의 일부만을 취할 수 없는 문제
- 0/1 배낭 문제는 탐욕적 선택 속성을 만족하지 **않는다**
- **예: 최적해**는 이득 = 36을 가져다 주는 {**A**, **E**}지만, **탐욕해**는 이득 = 24를 가져다 주는 {**B**, **E**, **D**}를 고른다

항목:	A	B	C	D	E
이득:	32	15	27	5	4
무게:	8kg	3kg	9kg	5kg	2kg
가치: (kg 당)	4	5	3	1	2



배낭 10kg

탐욕해:
- **B** (3kg)
- **E** (2kg)
- **D** (5kg)

총이득: 24

최소신장트리 알고리즘

- Prim-Jarnik 알고리즘
- Kruskal 알고리즘
- Baruvka 알고리즘

모두 **탐욕법**으로 해결

Prim-Jarnik 알고리즘

- **탐욕 알고리즘**
- **대상:** 단순 연결 무방향 가중그래프
- 임의의 정점 s를 택하여, s로부터 시작하여 정점들을 (가상의) **배낭**에 넣어가며 배낭 안에서 MST T를 키워 나간다 – s는 T의 루트가 된다
- 각 정점 v에 라벨 $d(v)$를 정의 – $d(v)$는 배낭 안의 정점과 배낭 밖의 정점을 연결하는 간선의 무게
- 반복의 각 회전에서:
  - 배낭 밖의 정점들 가운데 최소 $d(z)$ 라벨을 가진 정점 z를 배낭에 넣는다
  - z에 인접한 정점들의 라벨을 갱신

Prim-Jarnik 알고리즘 (conti.)

- **배낭** 밖의 정점들을 **우선순위 큐**에 저장
  - **키:** 거리
  - **원소:** 정점
- 보조 메쏘드
  - Q.replaceKey(e, k): 원소 e의 키를 k로 변경하고 우선순위 큐 Q 내의 e의 위치를 갱신
- 각 정점 v에 세 개의 라벨을 저장
  - **거리**(distance): $d(v)$
  - **위치자**(locator): 우선순위 큐에서의 v의 위치
  - **부모**(parent): $p(v)$, MST에서 v의 부모를 향한 간선

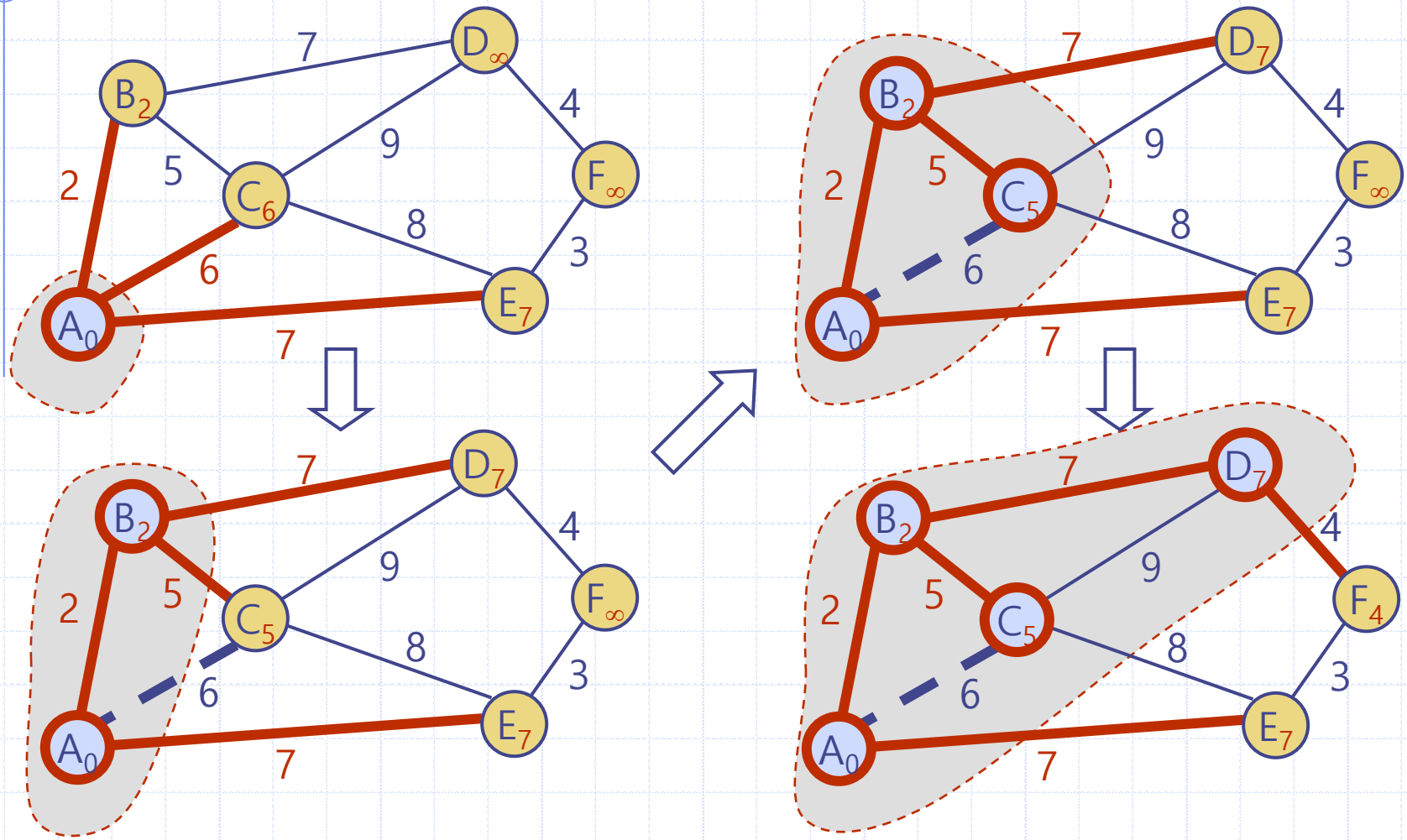
Alg *PrimJarnikMST(G)*
input a simple connected weighted graph G with n vertices and m edges
output an MST T for G

1. **for each** $v \in G.vertices()$
   $d(v) \leftarrow \infty$
   $p(v) \leftarrow \varnothing$
2. $s \leftarrow$ *a vertex of* G
3. $d(s) \leftarrow 0$
4. $Q \leftarrow$ *a priority queue containing all the vertices of* G *using* d *labels as keys*
5. **while** $(!Q.isEmpty())$
   {pull a vertex into the sack}
   $u \leftarrow Q.removeMin()$
   for each $e \in G.incidentEdges(u)$
   $z \leftarrow G.opposite(u, e)$
   if $((z \in Q) \,\&\, (w(u, z) < d(z)))$
   $d(z) \leftarrow w(u, z)$
   $p(z) \leftarrow e$
   $Q.replaceKey(z, w(u, z))$

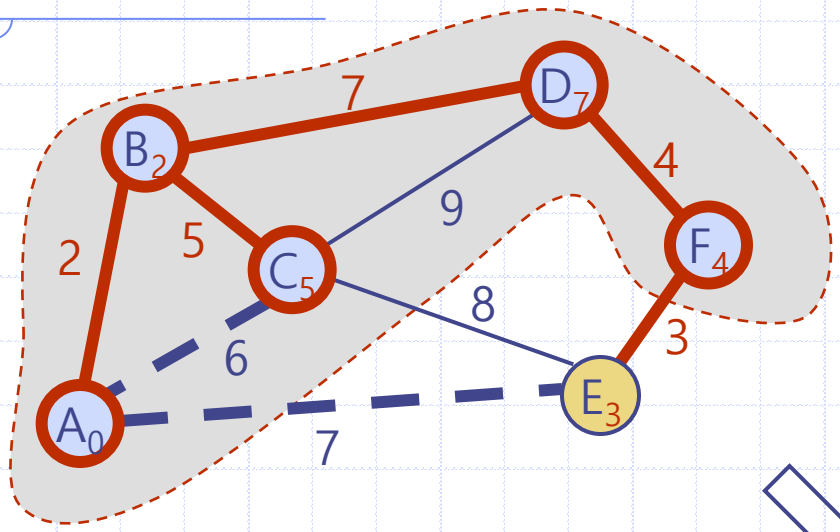
Prim-Jarnik 알고리즘이 탐욕법 알고리즘인 이유

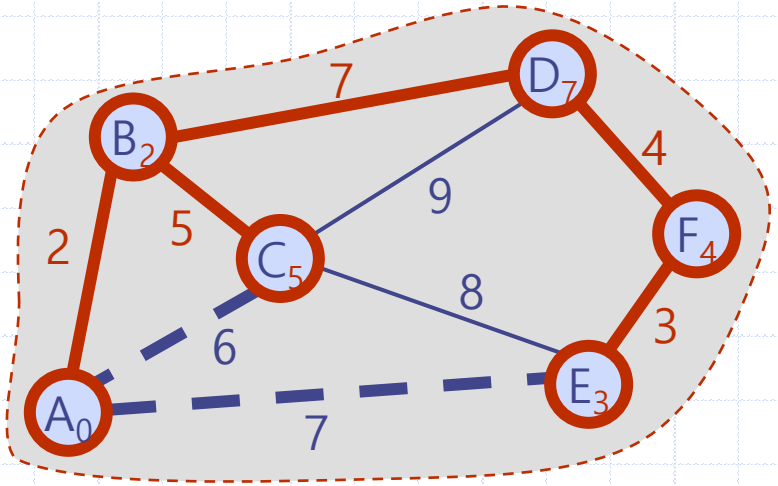
- **구성:** 다양한 수치의 항목들 가운데 선택
  - **직녀의 문제:** 다양한 이득을 주는 물건들 가운데 선택
  - **MST 문제:** 다양한 무게의 간선들 가운데 선택
- **목표:** 총수치를 최대화 또는 최소화
  - **직녀의 문제:** 배낭 안 물건들의 총이득을 최대화
  - **MST 문제:** 배낭 안 간선들의 총무게를 최소화
- **탐욕적 해결:** 항상 최대/최소 수치 항목부터 배낭에 포함
  - **직녀의 문제:** 항상 최대 이득 물건부터 배낭에 포함
  - **MST 문제:** 항상 최소 무게 간선부터 배낭에 포함
- 즉, 구성, 목표, 해결 절차 면에서 **탐욕법**의 일반 공식과 일치
- **탐욕법**을 사용하는 **정당성**
  - **탐욕적 선택 속성**
  - 즉, 탐욕적 문제 **구성**과 **목표** 설정이 가능하더라도, **탐욕적 해결**로 목표를 성취할 수 있는 문제여야 함

Prim-Jarnik 알고리즘 수행 예

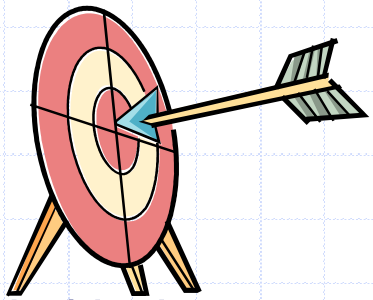


Prim-Jarnik 알고리즘 수행 예 (conti.)



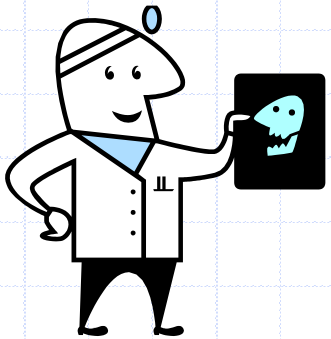


Prim-Jarnik 알고리즘 정확성



- Prim-Jarnik 알고리즘은 반복의 각 회전에서 항상 배낭 C 안의 정점을 배낭 C 밖의 정점과 이어주는 **최소 무게**의 간선을 선택하므로, MST에 항상 타당한 간선을 추가한다
- 따라서 최소신장트리에 관한 **분할 속성**의 요건을 만족

Prim-Jarnik 알고리즘 분석



- 그래프 작업
  - 메쏘드 incidentEdges는 각 정점에 대해 한번 호출
- 라벨 작업
  - 정점 z의 거리, 부모, 위치자 라벨을 $O(deg(z))$ 시간 읽고 쓴다
  - 라벨을 읽고 쓰는데 $O(1)$ 시간 소요
- 우선순위 큐 (**힙**으로 구현할 경우) 작업
  - 각 정점은 우선순위 큐에 한번 삽입되고 한번 삭제: 삽입과 삭제에 각각 $O(\log n)$ 시간 소요
  - 우선순위 큐 내의 정점 w의 키는 최대 $deg(w)$번 변경: 각 키 변경에 $O(\log n)$ 시간 소요
- 그래프가 인접리스트 구조로 표현되어 있다면, Prim-Jarnik 알고리즘은 $O((n+m)\log n)$ 시간에 수행
  - **참고:** $\sum_v deg(v) = 2m$
- 단순 연결그래프에서 $n = O(m)$이므로, 실행시간: $O(m \log n)$

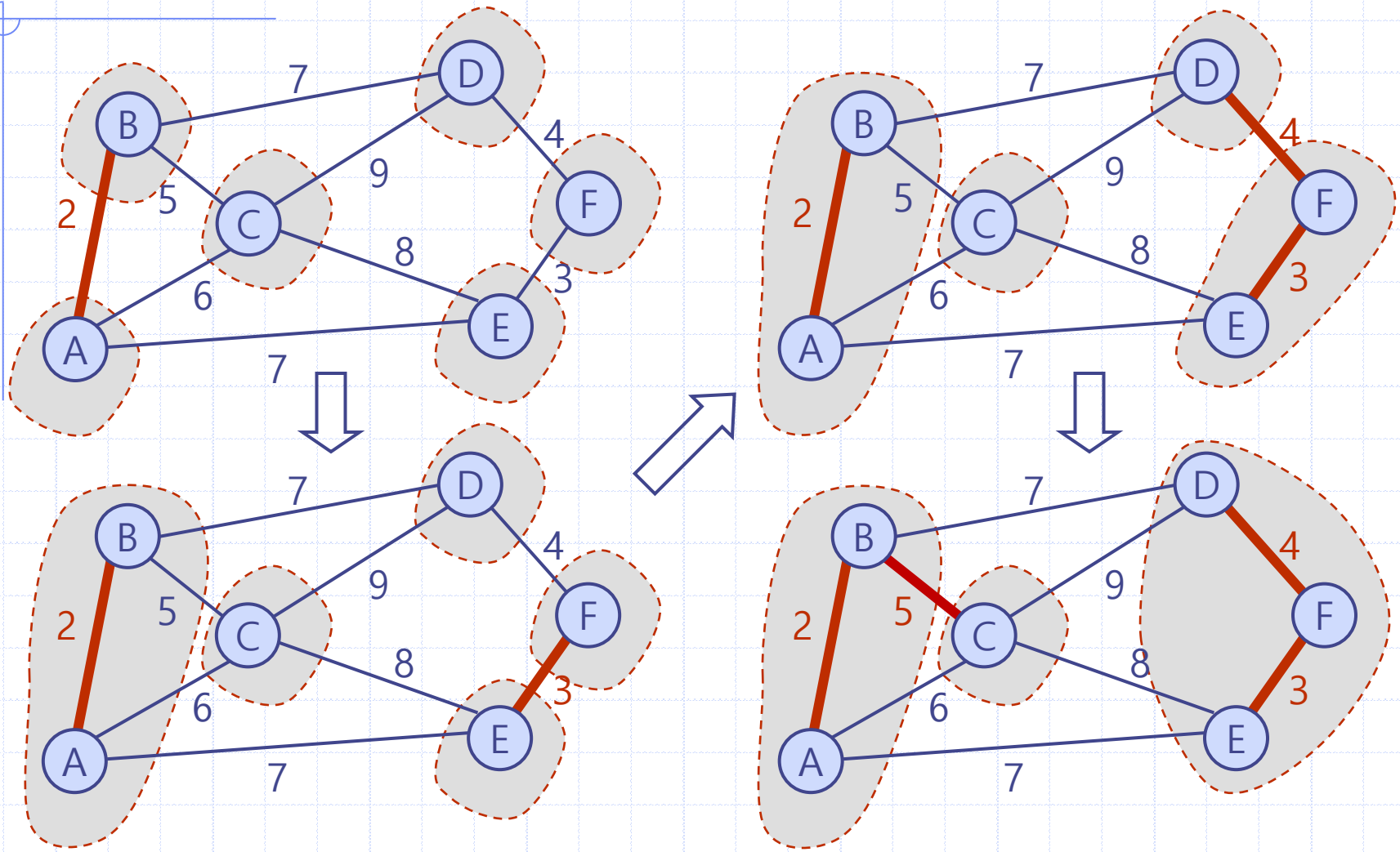
Kruskal 알고리즘

- **탐욕 알고리즘**
- 알고리즘을 위한 초기 작업
  - 모든 정점을 각각의 독자적인 (실제의) **배낭**에 넣는다
  - 배낭 밖의 간선들을 **우선순위 큐**에 저장
    - **키:** 무게
    - **원소:** 간선
  - 비어 있는 MST T를 초기화
- 반복의 각 회전에서:
  - 두 개의 다른 배낭 속에 양끝점을 가진 최소 무게의 간선을 MST T에 포함하고 두 배낭을 하나로 합친다
- 반복이 완료되면:
  - MST T를 포함하는 한 개의 배낭만 남는다

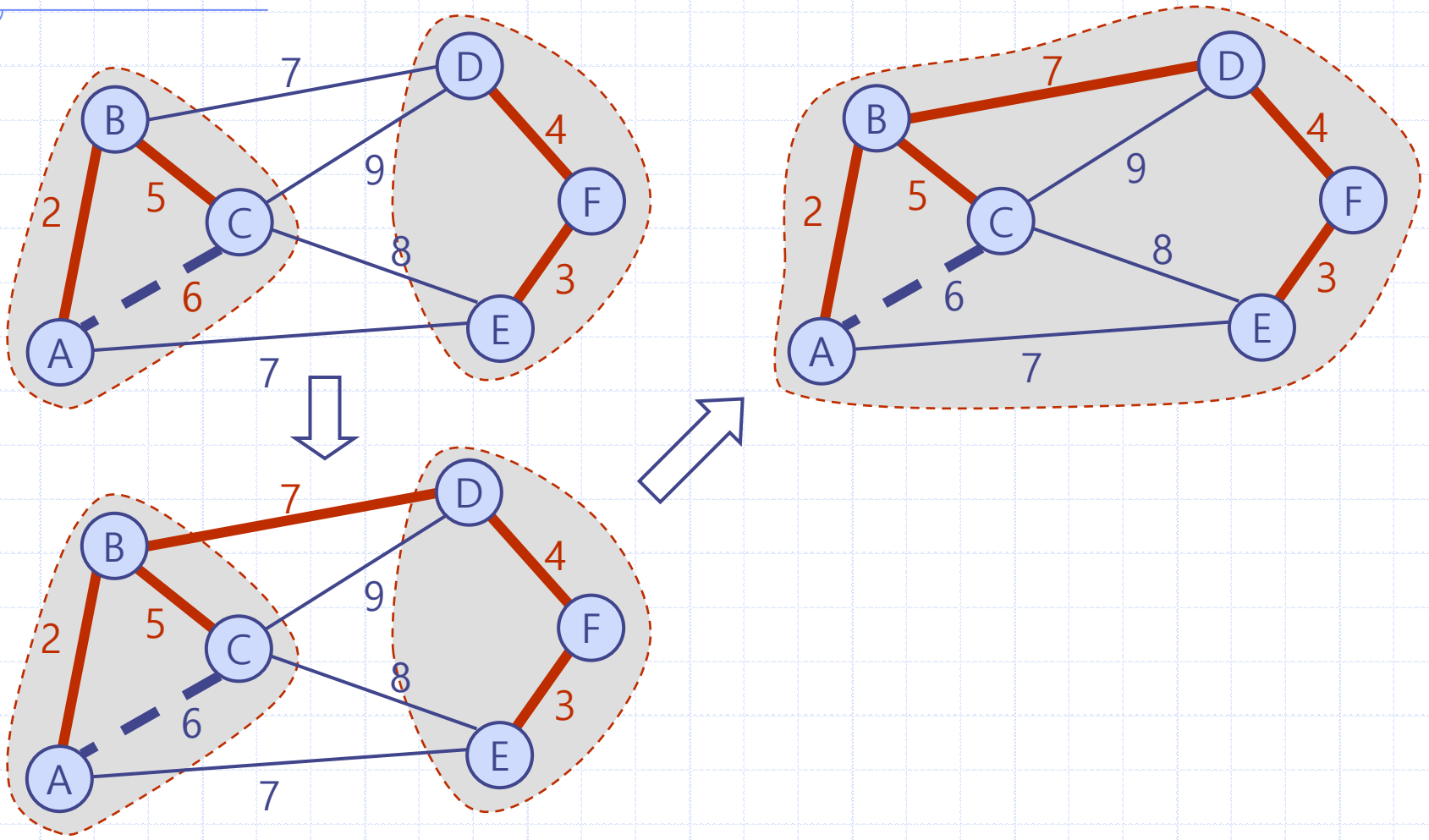
Alg ***KruskalMST(G)***
input a simple connected weighted graph G with n vertices and m edges
output an MST T for G

1. **for each** $v \in G.vertices()$
   define a $Sack(v) \leftarrow \{v\}$
2. $Q \leftarrow$ *a priority queue containing all the edges of* G *using weights as keys*
3. $T \leftarrow \emptyset$
4. **while** (T *has fewer than* $n - 1$ *edges*)
   $(u, v) \leftarrow Q.removeMin()$
   if ($Sack(u) \neq Sack(v)$)
   Add edge (u, v) *to* T
   Merge $Sack(u)$ *and* $Sack(v)$
5. **return** T

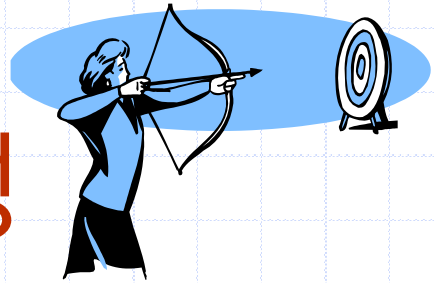
Kruskal 알고리즘 수행 예



Kruskal 알고리즘 수행 예 (conti.)

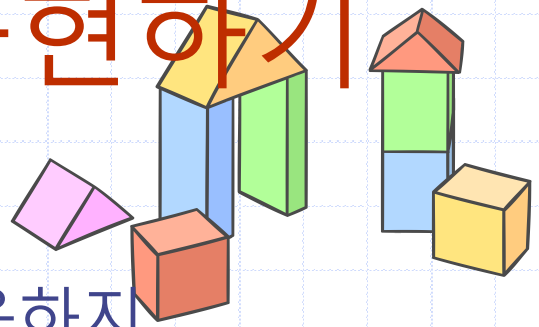


Kruskal 알고리즘 정확성



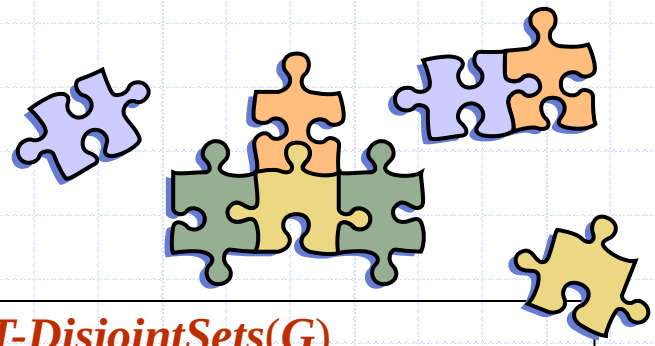
- Kruskal 알고리즘의 정확성은 **분할 속성**으로부터 유도
- Kruskal 알고리즘은 반복의 회전마다 간선 (u, v)를 MST T에 추가
- 이때 정점 집합 V가 u를 포함하는 배낭 V_1과, V_1에 속하지 않은 나머지 정점들을 모두 포함하는 배낭 V_2로 **분할**되었다고 보면,
- 이는 모든 정점이 두 부분으로 분리된 **분할** 상태
- Q로부터 간선들을 무게 순서로 추출하고 있으므로, (u, v)는 양끝점이 각각 V_1과 V_2에 속한 **최소 무게의 간선**
- 따라서, Kruskal 알고리즘은 항상 **타당한** MST 간선을 추가한다

Kruskal 알고리즘을 구현하기 위한 데이터구조



- Kruskal 알고리즘은 **인접 정보**를 사용하지 않는다
  - 인접 정보(부착리스트 또는 인접행렬)가 생략된, 즉 **간선리스트 구조**로 표현된 그래프에서 수행 가능
- Kruskal 알고리즘은 **트리들의 숲**을 유지
  - 각 트리들을 **리스트**로 구현된 **분리집합**에 저장하고 각 원소에 소속 집합을 가리키는 참조를 저장
    - 작업 find(u)는 u가 소속된 집합을 반환: $O(1)$ 시간 소요
    - 작업 union(u, v)은 크기가 작은 집합의 원소들을 큰 집합 리스트로 옮기며 원소들의 참조를 갱신: $O(min(n_u, n_v))$ 시간 소요 – 여기서 n_u와 n_v는 각각 u와 v를 저장한 집합의 크기

분리집합에 기초한 Kruskal 알고리즘



- Kruskal 알고리즘의 분리집합에 기초한 버전은 find로 소속 집합 검사를, union으로 배낭 합치기를 수행

Alg ***KruskalMST-DisjointSets(G)***
input A simple connected weighted graph ***G*** with ***n*** vertices and ***m*** edges
output An MST ***T*** for ***G***

1. *Let **D** be a disjoint set of the vertices of **G**, where each vertex forms a separate set*
2. *Let **Q** be a priority queue storing the edges of **G**, sorted by their weights*
3. *Let **T** be an initially-empty tree*
4. **while** (!***Q.isEmpty***())
   (***u***, ***v***) ← ***Q.removeMin***()
   if (***D.find***(***u***) ≠ ***D.find***(***v***))
   Add (***u***, ***v***) *to* ***T***
   D.union(***u***, ***v***)
5. **return** ***T***

Kruskal 알고리즘 분석

- 우선순위 큐 초기화 작업
  - **힙**을 사용하여 우선순위 큐 Q를 구현하면, 반복적인 삽입 방식에 의해서는 $O(m \log m)$ 시간에, 상향식 힙 생성 방식에 의해서는 $O(m)$ 시간에 Q 생성 가능
- 반복의 각 회전에서
  - 최소 무게의 간선을 $O(\log m)$ 시간에 삭제 가능 – 여기서, G가 단순그래프이므로, $O(\log m) = O(\log n)$
  - 각 배낭을 위한 **분리집합**을 리스트로 구현하면, find(u) ≠ find(v) 검사에 $O(1)$ 시간
  - 두 개의 배낭 $Sack(u)$, $Sack(v)$를 합치는데 $O(min(|Sack(u)|, |Sack(v)|))$ 시간 – 원소가 새 배낭으로 합쳐질 때마다 최소 두 배 크기의 배낭으로 합쳐지므로, 각 원소는 최대 $\log n$번 이동 – 이를 모든 정점에 대해 누적하면 $O(n \log n)$
- 총 반복 회수: 최악의 경우 m번
- 그러므로 Kruskal 알고리즘은 $O((n+m)\log n)$ 시간에 수행
- G가 단순 연결그래프인 경우 $n = O(m)$이므로, 실행시간은 $O(m \log n)$

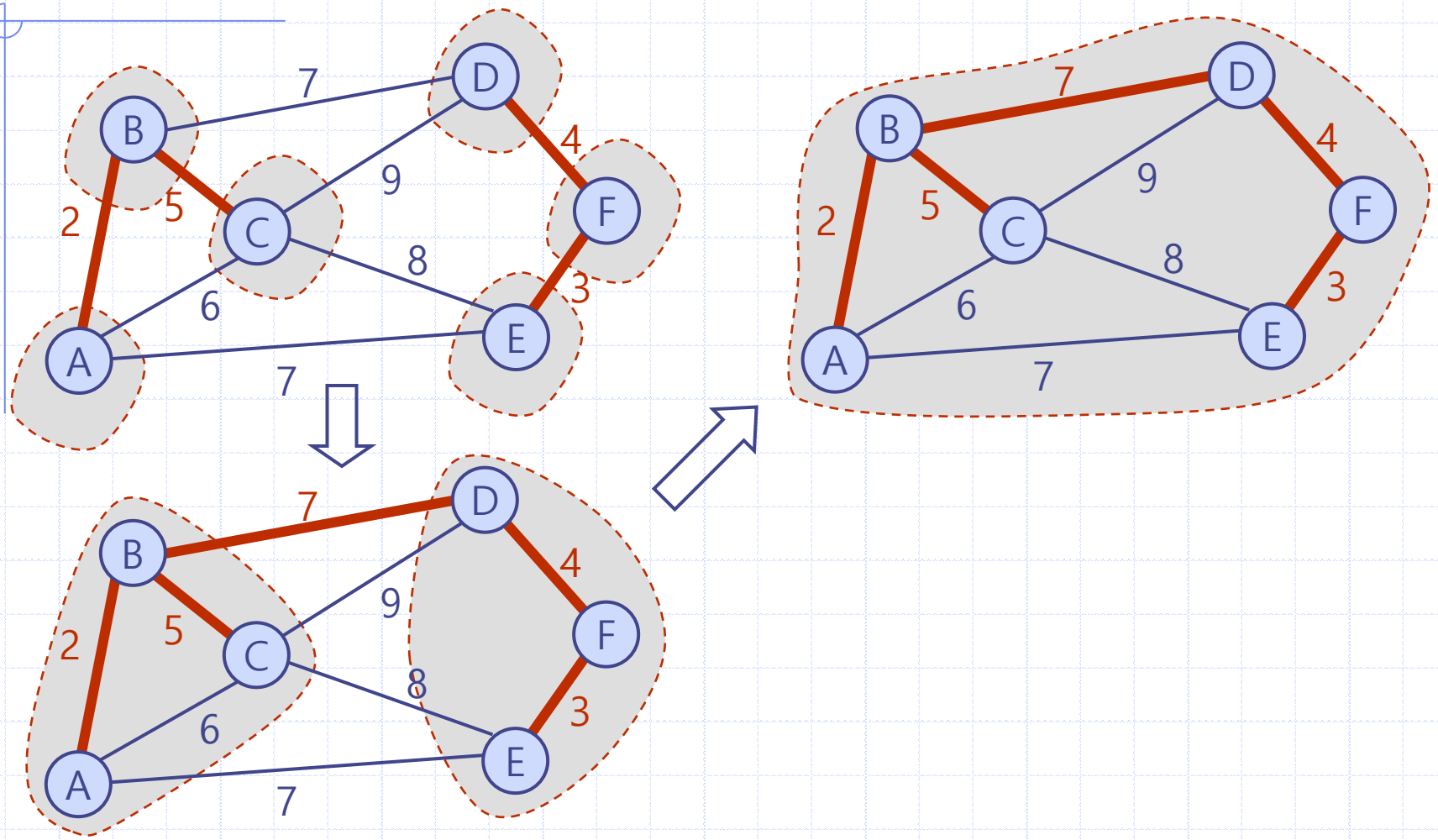
Baruvka 알고리즘

- a.k.a. Sollin 알고리즘
- Kruskal이나 Prim-Jarnik 알고리즘과 달리, **우선순위 큐**를 사용하지 않는다
- Kruskal 알고리즘과 마찬가지로, Baruvka 알고리즘도 모든 정점을 각각의 독자적인 (실제의) **배낭**에 넣고 시작
- Kruskal이나 Prim-Jarnik 알고리즘이 반복의 각 회전에서 한 개의 간선을 취함으로써 배낭을 키워 나가는 것과 달리, 한꺼번에 **여러 개**의 간선을 취하여 여러 수의 배낭을 동시에 키워 나감

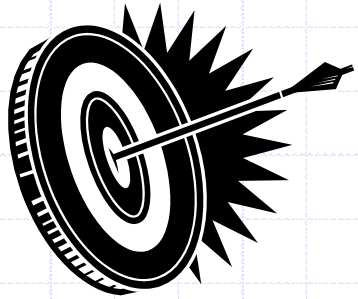
Alg ***BaruvkaMST(G)***
input A simple connected weighted graph $G = (V, E)$ with n vertices and m edges
output An MST T for G

1. $T \leftarrow V$ {just the vertices of G}
2. **while** (T *has fewer than* $n - 1$ *edges*)
   for each *connected component* C_i *in* T
   Let edge e *be the smallest-weight edge from* C_i *to another component in* T
   if (e *is not already in* T)
   Add edge e *to* T
3. **return** T

Baruvka 알고리즘 수행 예

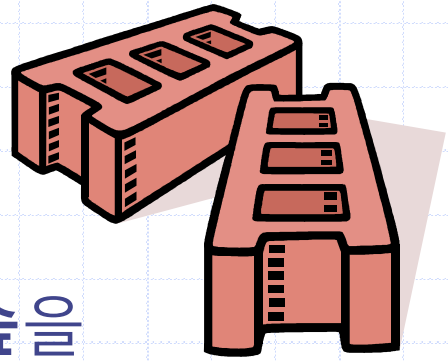


Baruvka 알고리즘 정확성



- Baruvka 알고리즘 반복의 각 단계에서는, 현재의 MST T의 각 연결요소 C_i 사이를 교차하는 최소 무게의 간선들을 취한다
- 여기서 V가 C_i에 속한 정점들과, C_i 바깥의 정점들로 **분할**되었다고 가정하면,
- C_i를 위해 선택된 간선 e는 e가 MST에 반드시 포함되어야 한다는 MST에 관한 **분할 속성**의 요건을 만족
- 따라서 반복의 각 단계에서 취해지는 간선들은 모두 타당한 선택이 된다

Baruvka 알고리즘 구현

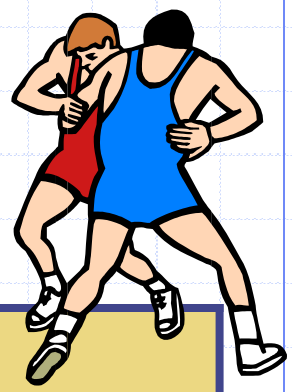


- 간선 삽입에 따른 **연결요소(트리)들의 숲**을 유지: 인접리스트를 사용하면 $\mathbf{O}(1)$ 시간에 처리 가능
- 연결요소들을 찾기 위해 숲을 순회: DFS를 사용하면 $\mathbf{O}(n)$ 시간에 수행 가능
- 정점이 소속된 연결요소 표시: 각 정점에 라벨 정의하여 표시
- 연결요소 C_i에 인접한 최소 무게의 간선 찾기: 그래프 G의 인접리스트에서 C_i에 속한 정점들을 조사

Baruvka 알고리즘 분석

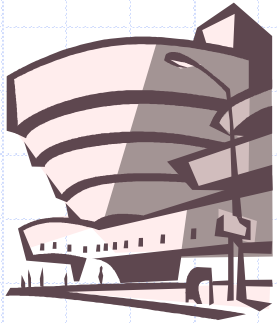
- 반복의 각 회전에서
  - 각 연결요소 C_i 사이를 교차하는 최소 무게의 간선들을 찾기 위해, 각 C_i의 인접리스트를 전면적으로 탐색
    - 이때 그래프 G의 모든 간선 (v, u)를, (각 정점은 자신이 소속된 연결요소 라벨을 가지므로) 한 번은 v에 대해 또 한 번은 u에 대해, 합계 두 번 조사하므로 총 $O(m)$ 시간 소요
  - 모든 정점을 재라벨: $O(n)$
  - T의 모든 간선을 순회: $O(n)$
  - 따라서 반복 1회전의 수행 시간은 $O(m)$ ($\because n \le m$)
- 반복회수
  - 반복의 각 회전에서, 각 배낭으로부터 나오는 하나의 간선을 고르고, 각각의 새로운 연결요소들을 합쳐 새 배낭을 만든다
  - 즉, 각각의 기존 배낭이 최소 한 개의 다른 기존 배낭과 합쳐진다
  - 따라서 반복의 회전마다 배낭의 총수는 최소 절반으로 줄어든다
  - 따라서 총 **반복회수**: $O(\log n)$
- 그러므로 Baruvka 알고리즘의 실행시간: $O(m \log n)$

MST 알고리즘 비교

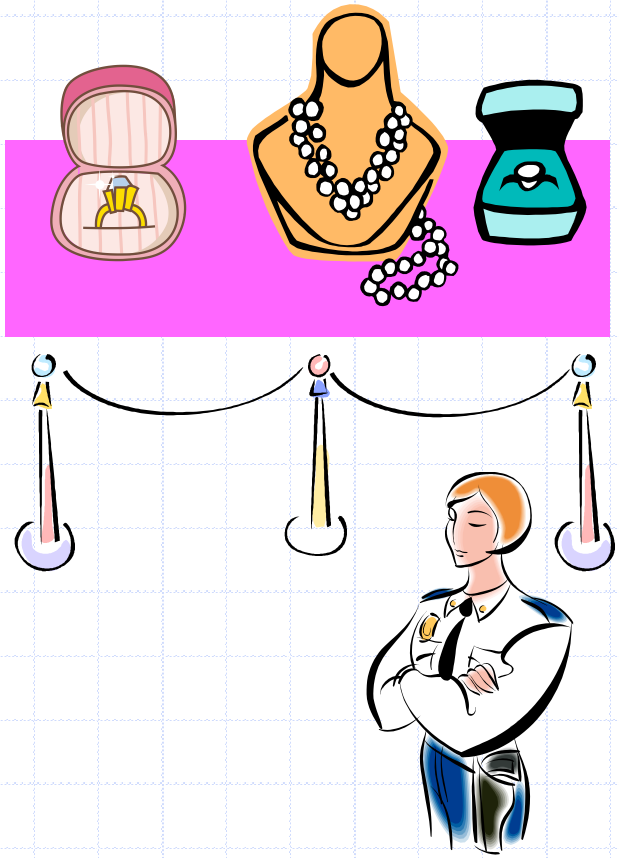


알고리즘	주요 전략	수행 시간	외부 데이터구조
Prim-Jarnik	탐욕	$O(m \log n)$	◆ 정점들을 저장하기 위한 **우선순위 큐**
Kruskal	탐욕	$O(m \log n)$	◆ 간선들을 저장하기 위한 **우선순위 큐** ◆ 배낭들을 구현하기 위한 **분리집합** (리스트로 구현 가능)
Baruvka	탐욕	$O(m \log n)$	◆ **연결요소**를 표현하기 위한 데이터구조 필요

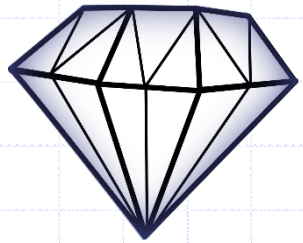
응용문제: 보석전시회



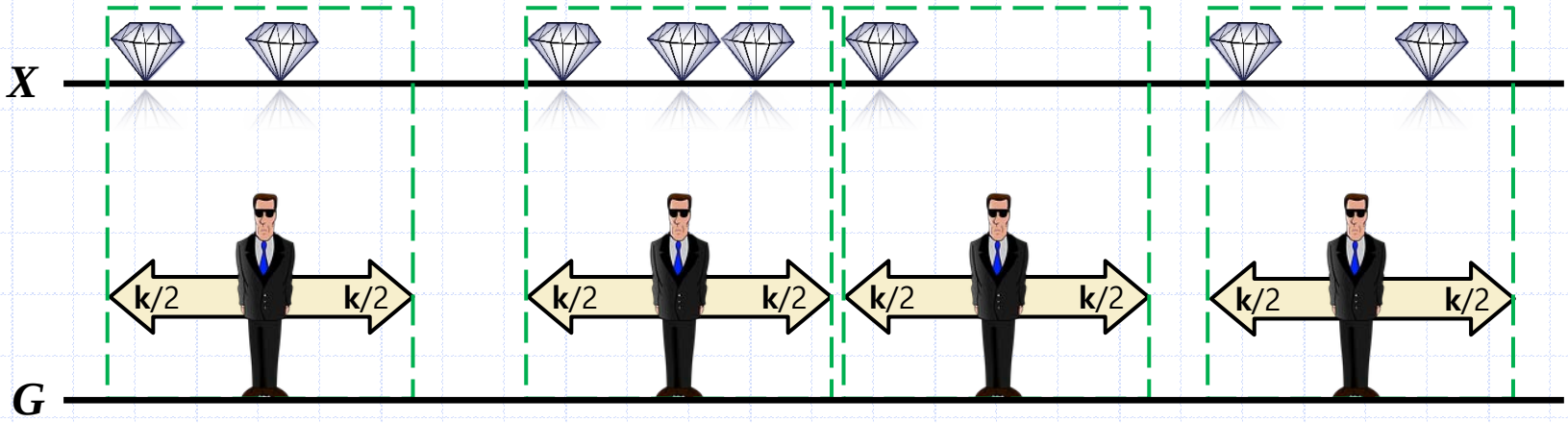
- **보석전시회**가 열리고 있는 긴 복도를 표현하는 1차원 축 L이 있다
- 복도축 L을 따라 보석들이 놓인 위치를 나타내는 실수들의 집합 $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$가 주어졌다
- 한 명의 **경비**가 자신이 서있는 위치에서 좌우 양쪽으로 최대 k 거리까지 커버할 수 있다고 가정하자 – 따라서 좌우 한쪽으로는 $k/2$
- **최소 인원**의 경비를 사용하여 X의 위치들에 놓인 보석들을 모두 지킬 수 있도록 하는 경비들의 배치를 계산할 알고리즘 gemGuard(X, k)를 **의사코드**로 작성하라



해결



- L 상의 모든 지정된 위치를 최소 개수의 k 간격으로 커버할 수 있는 **탐욕 알고리즘**을 사용
- 우선 X의 원소들(즉, 위치들)을 오름차순으로 정렬
- 다음, X의 첫 원소 x_0에 대해 x_0로부터 $k/2$ 위치에 경비를 세운다 – 이 경비는 자신의 좌우 $k/2$ 거리 내에 있는 보석들을 모두 커버
- 커버되지 않은 다음 지점이 x_i라면, x_i로부터 위와 동일한 커버링 절차를 반복
- X의 모든 원소들을 커버할 때까지 이 절차를 반복



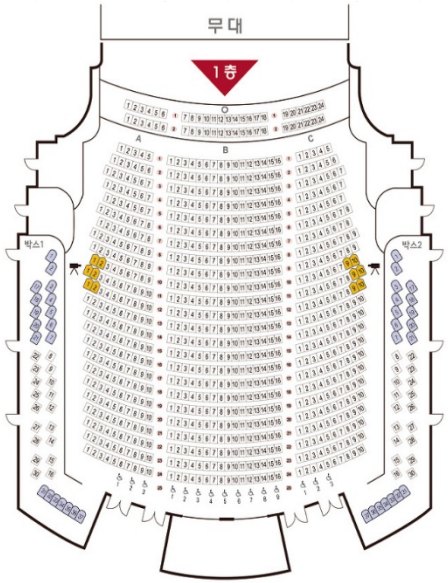
해결 (conti.)

```
Alg gemGuard(X, k)
    input list X of points on L, interval k
    output list G of guard points

1. Sort the points in X in ascending order
2. G ← empty list
3. x ← X.removeFirst()
4. g ← x + k/2
5. G.addLast(g)            {the first guard}
6. while (!X.isEmpty())
       x ← X.removeFirst()
       if (x – g > k/2)    {uncovered}
           g ← x + k/2
           G.addLast(g) {next guard}
7. return G.elements()
```

- **목표:** 최대화해야 할 목표(최소의 경비로 최다의 보석을 커버)
- **구성:** 다양한 수치의 항목들(보석들의 위치)
- **탐욕적 해결:** 출발 이후 최소 거리에 있는 원소부터 반복적으로 처리
- **탐욕적 선택 속성:** 최적해 구함

응용문제: 공연홀 좌석배정



- 당신이 살고 있는 Sin City의 **시립 공연홀**의 관장은 오로지 돈, 즉 티켓 판매고에만 관심이 있다.
- **단체관람객**이 공연을 보기 위해서는 그 단체의 모든 멤버가 좌석을 배정받아야만 하며 그렇지 않으면 관람을 포기한다
- **선착순**에 의해 티켓을 판매하는 현재 시스템에서는 좌석이 남아 있더라도 남은 좌석 수보다 큰 단체가 관람을 원할 경우 이들을 수용할 수 없다
- 관장은 당신을 판매담당 고문으로 영입하여 티켓 판매고를 올리는 문제를 일임했다 – 여러가지 생각 끝에 당신은 새로운 티켓 판매전략을 제안했다
- **새 전략:** "선착순으로 좌석을 배정하기 보다는 큰 단체에게 좌석을 우선 배정하고 그 후 크기가 작은 순서로 단체에게 배정하며 마지막에는 개인관람객(즉, 1인 단체)에게 배정"

응용문제: 공연홀 좌석배정 (conti.)

- 티켓을 사려는 단체들:

  $G[1..m] = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$

  - $g_i \geq 1$는 단체 i의 크기
- 총 관람석 수: n
- 탐욕적 좌석배정 알고리즘 seat(G, n):
  - admit(i): 단체 i를 입장시킴
  - reject(i)는 단체 i를 좌석 부족으로 돌려보냄

```
Alg seat(G, n)
    input array G[1..m] of integers, integer n
    output number of people admitted

1. admitted ← 0
2. G ← Sort G largest to smallest
3. remaining ← n
4. for i ← 1 to m
        if (G[i] ≤ remaining)
            admit(i)
            remaining ← remaining – G[i]
            admitted ← admitted + G[i]
        else
            reject(i)
5. return admitted
```

응용문제: 공연홀 좌석배정 (conti.)

A. 탐욕 알고리즘 seat가 **최적 알고리즘**은 아니라는 것을 **예**를 들어 설명하라

B. 만약 k명의 사람을 입장시키는 것이 **최적해**라면, seat 알고리즘은 적어도 $k/2$명의 사람을 입장시킨다는 것을 설명하라

해결 A

- **예:** $G = ((n + 2)/2, n/2, n/2)$
  - 구체적 예: $n = 100$에 대해 $G = (51, 50, 50)$
- G 에 대해 **탐욕 알고리즘** seat는 $(n + 2)/2$ 크기의 단체를 우선 입장시킬 것이고 나머지 단체들은 모두 입장시키지 못할 것이다
- 반면, **최적 알고리즘**이라면 $n/2$ 크기의 두 단체만을 입장시킴으로써 n개의 좌석을 모두 채울 것이다

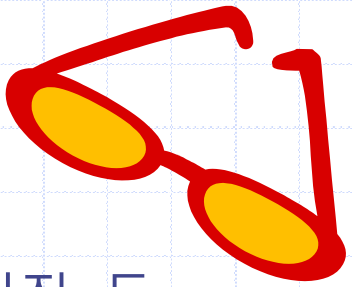
해결 B

- seat 알고리즘은 항상 적어도 $k/2$명의 사람을 입장시킨다는 명제에 대한 증명 – 여러 가지 **경우**로 나누어 고려하여 어떤 경우에도 명제가 성립함을 증명
- 아래 둘 중 하나다 – seat 알고리즘이 주어진 G의 모든 단체를:
  - 입장시키든가 (전자)
  - 입장시키지 못하든가 (후자)
- (전자) seat 알고리즘이 모든 단체를 입장시킨다면:
  - k명을 모두 입장시킨 것이니 적어도 $k/2$명을 입장시킨 것이 된다 – 따라서 증명됨

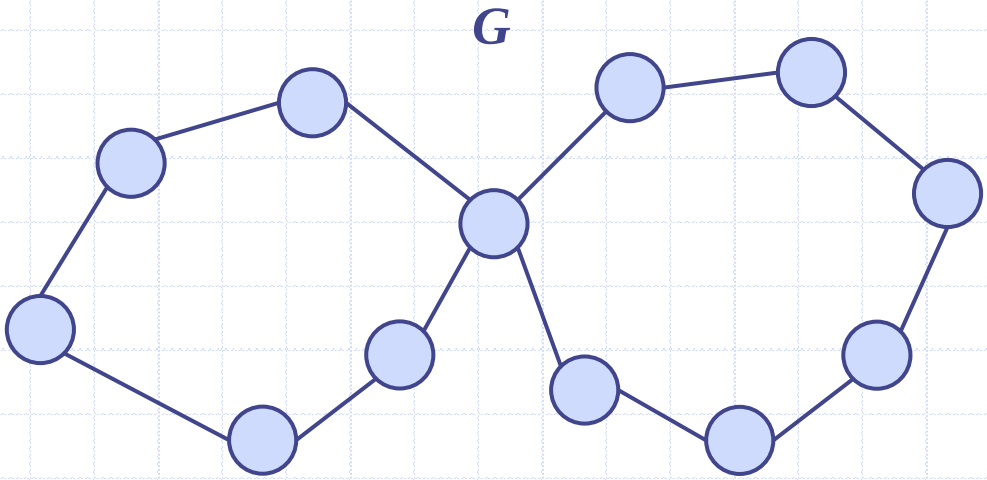
해결 B

- (후자) 모든 단체를 입장시키지는 못한다면:
  - 입장시키지 못한 단체 g_i가 적어도 한 개 존재하며, 아래 둘 중 하나다
    - $g_i \geq k/2$
    - $g_i < k/2$
  - $g_i \geq k/2$ 경우
    - 탐욕 알고리즘 seat의 속성 상 g_i보다 큰 단체를 먼저 입장시켰을 것이다 – 그런 단체가 없다면 g_i를 먼저 입장시킬 것이 확실하기 때문
    - 즉, 그런 단체가 있든 없든 seat 알고리즘이 최소 $k/2$명의 사람을 입장시킨다 – 명제가 증명됨
  - $g_i < k/2$ 경우
    - 이는 seat 알고리즘 수행의 어떤 시점에서 $remaining < g_i < k/2$ 이 성립했다는 의미 – 즉, 그 시점에 남은 좌석 수가 $k/2$보다 작았음
    - $k \leq n$이므로, 이 말은 바로 그 시점에 적어도 $k/2$명의 관객이 이미 입장했다는 말과 같다 – 명제가 증명됨

응용문제: 8자-모양 그래프에서의 MST



- 아래 그림처럼, n개의 정점과 m개의 간선으로 이루어진, 두 개의 싸이클이 한 정점에서 만난 형태의 단순 연결 무방향 가중그래프 G가 있다
- **전제:** 두 개의 싸이클은 반드시 동일한 개수의 정점으로 이루어진 것은 아니며, n에 대해서도 아무런 가정이 없다
- G의 **최소신장트리**를 구하는 **효율적인** 알고리즘을 작성하고 실행시간을 구하라



해결

- 8자-모양 그래프에 대한 최소신장트리는 기존의 MST 알고리즘을 사용하지 않고 **지름길** 메쏘드로 구할 수 있다
- **실행시간: O(n)**

Alg ***eight-ShapedMST(G)***
input a simple connected weighted graph G consisting of two cycles with n vertices and m edges
output an MST T for G

1. $e_1 \leftarrow$ *the maximum-weight edge in the left cycle of* G {O(n)}
2. $e_2 \leftarrow$ *the maximum-weight edge in the right cycle of* G {O(n)}
3. $T \leftarrow E - (\{e_1\} \cup \{e_2\})$
4. **return** T

{Total O(n)}