Asal ve Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli ve Merkezleyen Dönüşümler

Utkan Utkaner

Ege Üniversitesi

2022

İçindekiler

Giriş

Asal Halkalar Üzerinde Değişmeli ve Merkezleyen Dönüşümler
- Asal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler
- Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli ve Merkezleyen Dönüşümler
- Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler
- Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Sonuç

Kaynaklar Dizini

Giriş

Bu çalışmada R, merkezi Z ve var olması durumunda genişletilmiş merkezi C olan bir birleşmeli halka olacaktır.

Giriş

Sıfırdan farklı iki idealinin çarpımı sıfırdan farklı olan bir halkaya **asal halka** denir. Buna denk olarak, bazı $a, b \in R$ elemanları için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkası asaldır. Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan bir halkaya **yarıasal halka** denir. Buna denk olarak, bir $a \in R$ elemanı için $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkası yarıasaldır.

Giriş

Bir R halkasının bazı $x, y \in R$ elemanlarının komütatörü

$$[x, y] = xy - yx$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bazı $x, y \in R$ elemanlarının n'inci dereceden komütatörü,

$$[x, y]_1 = [x, y]$$

olmak üzere her $n > 1$ tamsayısı için

$$[x, y]_n = [[x, y]_{n-1}, y]$$

olarak tanımlanır.

Giriş

Bir Engel koşulu, bir $n > 1$ tamsayısı için

$$[x + y, z]_n = [x, z]_n + [y, z]_n$$

eşitliğini sağlayan, değişmeli olmayan x ve y belirsizlerinin bir

$$[x, y]_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y^i x y^{n-i}$$

çok terimlisidir. Bir Engel koşulunu sağlayan bir halkanın değişmeli veya nilpotent olup olmadığı sorusu Engel'in Lie cebirleri ile ilgili çalışmasına dayanır [32].

Giriş

Bir R halkasını alalım. Bir $f : R \to R$ dönüşümü, her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa bu dönüşüme değişmeli dönüşüm denir. Ayrıca bir $f : R \to R$ dönüşümü, her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] \in Z$$

bağıntısını sağlıyorsa bu dönüşüme merkezleyen dönüşüm denir. Benzer şekilde n-değişmeli ve n-merkezleyen dönüşümler tanımlanır.

Giriş

Değişmeli ve merkezleyen dönüşümler ilk olarak Divinsky ve Posner tarafından çalışılmıştır. Divinsky 1955 yılında, birimden farklı bir değişmeli otomorfizmaya sahip bir basit Artin halkasının değişmeli olduğunu göstermiştir [26]. Diğer taraftan, Posner 1957 yılında, sıfırdan farklı bir merkezleyen türeve sahip bir asal halkanın değişmeli olduğunu göstermiştir [50]. Daha sonra bu sonuçlar birçok araştırmacı tarafından çeşitli yönlerde genişletilmiştir [21, 22, 34, 37, 38, 44, 48].

Giriş

Brešar 1993 yılında, bir merkezleyen dönüşümün, otomorfizmalarda veya türevlerde olduğu gibi elemanların çarpımlarının üzerinde nasıl etki ettiğini gözetmeksizin sadece toplamsallığını varsayarak karakterize edilebileceğini göstermiştir: Bir R asal halkası üzerinde bir f merkezleyen toplamsal dönüşümü, R halkasının karakteristiği 2'den farklı veya f dönüşümü değişmeli ise bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta \colon R \to C$ toplamsal dönüşümü için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

formundadır [10]. Bu sonuç daha sonra yarıasal halkalara [12, 43], asal halkaların bazı toplamsal alt gruplarına [5, 20, 19, 40], süpercebirlere [41], von Neumann cebirlerine ve C^*-cebirlerine [2, 8, 33, 49], üçgensel cebirlere ve matris cebirlerine [24, 27, 28, 46, 54] genişletilmiştir.

Giriş

Vukman 1990 yılında, türevleri içeren Engel tipi özdeşlikleri çalışarak Posner'in teoremini asal halkalarda 2-değişmeli türevlere [52] ve 2-merkezleyen türevlere [53] genişletmiştir. Daha sonra Brešar benzer bir sonucu karakteristiği 2 olmayan asal halkalarda 2-değişmeli toplamsal dönüşümler için elde etmiştir [9]. Lanski 1993 yılında, Kharchenko'nın diferansiyel özdeşlikler teorisini kullanarak Vukman'ın teoremlerini asal halkalarda n-değişmeli türevlere genişletmiştir [35].

Giriş

Lanski'nin çalışmasından etkilenen Brešar 1996 yılında, genelleştirilmiş fonsiyonel özdeşlikler teorisinden yararlanarak asal halkalar üzerinde n-değişmeli toplamsal dönüşümleri belirli kısıtlamalar altında karakterize etmiştir [14]. Diğer taraftan, Beidar 1998 yılında, asal halkalarda fonksiyonel özdeşlikler teorisini geliştirerek, cebirsellik derecesi çok küçük olmayan asal halkalarda n-değişmeli toplamsal dönüşümlerin karakterize edilebileceğini göstermiştir [3]. Liu 2020 yılında, bu kısıtlamaları kaldırarak herhangi bir asal halkada n-değişmeli toplamsal dönüşümleri karakterize etmiştir ve elde ettiği sonuçların herhangi bir yarıasal halkada da doğru olduğunu göstermiştir [45].

Giriş

Bu çalışmada, bir asal halkada veya bir yarıasal halkada bir değişmeli toplamsal dönüşümün veya bir merkezleyen toplamsal dönüşümün yapısı halka üzerinde herhangi bir kısıtlama olmadan karakterize edilecektir.

Asal Halkalar Üzerinde Değişmeli ve Merkezleyen Dönüşümler

Bu bölümde R halkası maksimal sağ kesirler halkası $Q = Q_{mr}(R)$ ve genişletilmiş merkezi C olan bir asal halka olacaktır. Ayrıca R halkasının merkezil kapanışı RC ile gösterilecektir.

Asal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Bu bölümde bir asal halkada değişmeli toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Değişmeli dönüşümler ile ilgili ilk önemli çalışma Posner'ın 1957 yılındaki çalışması olarak görülür [50]. Posner bu çalışmada bir asal halkada sıfırdan farklı bir değişmeli türevin varlığının halkanın değişmeli olmasını gerektirdiğini göstermiştir. Daha sonra Brešar bir asal halkada bir değişmeli toplamsal dönüşümü karakterize etmeyi başarmıştır [10]. Hatta daha genel olarak n-toplamsal dönüşümlerin değişmeli izleri karakterize edilmiştir ve bu sonuçlar birçok doğal uygulama alanı bulmuştur. Örneğin Herstein'ın birleşmeli halkalarda Lie izomorfizmalarını konu alan ve uzun süre cevaplanamayan soruları çözülebilmiştir.

Asal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Türevler aslında belirli özelliklere sahip toplamsal dönüşümler olduğundan keyfi değişmeli toplamsal dönüşümleri incelemenin daha karmaşık yöntemler gerektireceği beklenir. Ancak Brešar komütatörleri iç türev olarak ele alarak türevler üzerinde bilinen sonuçları probleme başarıyla uygulamıştır. Daha sonra Lee, Wong, Lin ve Wang problemin daha farklı ve daha kısa bir çözümünü elde etmiştir [42].

Bu bölümde esas olarak [42] çalışması ele alınacaktır.

Teorem 3.1.
Eğer $f : R \to RC$ dönüşümü bir değişmeli toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta : R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. İlk olarak $[f(x), x] = 0$ eşitliği doğrusallaştırılarak her $x, y \in R$ elemanı için

$$[f(x), y] = [x, f(y)] \tag{1}$$

olduğu görülür. Daha sonra (1) eşitliğinden

$$[f(x^2), y] = [f(x), y]x + x[f(x), y]$$

eşitliği elde edilir. Buradan her $x, y \in R$ elemanı için

$$(y(f(x)x - f(x^2)) + xyf(x)) + ((f(x^2) - xf(x))y + (-f(x))yx) = 0$$

bulunur.

Eğer $x \notin C$ ise 1 ve x elemanları C cismi üzerinde doğrusal bağımsız olur. Teorem 2.12 ile, $f(x)$ elemanının C cismi üzerinde 1 ve x elemanlarının bir doğrusal birleşimi olduğu sonucuna varılır.[1] Diğer taraftan, $x \in C$ ise (1) eşitliği ile $f(x) \in C$ olduğu görülür.

---

[1]**Teorem 2.12.** Bir R asal halkasını alalım ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Ayrıca bazı $a_i, b_i, c_j, d_j \in Q_{mr}(R)$ elemanları her $r \in R$ elemanı için

$$\sum_{i=1}^{n} a_i r b_i = \sum_{j=1}^{m} c_j r d_j$$

eşitliğini sağlasın. Eğer a_i elemanları C cismi üzerinde doğrusal bağımsız ise her b_i elemanı d_j elemanlarının C cismi üzerinde bir doğrusal birleşimidir. Benzer şekilde eğer b_i elemanları C cismi üzerinde doğrusal bağımsız ise her a_i elemanı c_j elemanlarının C cismi üzerinde bir doğrusal birleşimidir.

Öyleyse her iki durumda da bir $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda_x x + \zeta_x$$

olacak şekilde bazı $\lambda_x, \zeta_x \in C$ elemanları vardır. Burada R halkasının değişmeli olmadığını kabul edebiliriz. Bazı $a, b \in R$ elemanları için $[a, b] \neq 0$ olsun ve $f(b) = \lambda b + \zeta_0$ diyelim.

Eğer bir $x \in R$ elemanı için $[x, b] \neq 0$ ise (1) eşitliği kullanılarak

$$\lambda_x[x, b] = \lambda[x, b]$$

eşitliği elde edilir ve buradan $\lambda_x = \lambda$ olduğu görülür. Özel olarak $\lambda_a = \lambda$ olur. Aksine, $[x, b] = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $[x + a, b] \neq 0$ olduğundan $\lambda_{x+a} = \lambda$ olur ve f dönüşümünün toplamsallığı kullanılarak

$$\lambda(x + a) + \zeta_{x+a} = \lambda_x x + \zeta_x + \lambda a + \zeta_a$$

eşitliği elde edilir. O halde $(\lambda_x - \lambda)x \in C$ olur. Eğer $x \notin C$ ise yine $\lambda_x = \lambda$ olmalıdır.

Öyleyse iki durumda da her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) - \lambda x \in C$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı vardır. Eğer $\zeta(x) = f(x) - \lambda x$ dersek $\zeta \colon R \to C$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur. $\square$

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Bu bölümde bir asal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Posner 1957 yılında, bir asal halkada sıfırdan farklı bir merkezleyen türevin varlığının halkanın değişmeli olmasını gerektirdiğini göstermiştir [50]. Daha sonra Mayne 1976 yılnda, aynı sonucu merkezleyen otomorfizmalar için elde etmiştir [48]. Posner ve Mayne tarafından elde edilen sonuçlar birçok araştırmacı tarafından çeşitli yönlerde genişletilmiştir.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Brešar 1993 yılında, karakteristiği 2 olmayan bir asal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün bir değişmeli dönüşüm olduğunu göstermeyi başarmıştır [10]. Böylece belirli koşullar altında, bir asal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün yapısını belirlemiştir.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

İnceboz, Koşan ve Lee 2014 yılında, bir yarıasal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün bir değişmeli dönüşüm olduğunu daha genel bir durumu ele alarak göstermiştir [31]. Ancak bu çalışmada bir merkezleyen dönüşüm, bir R halkasının her $x, y \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] \in C$$

bağıntısını sağlayan bir $f: R \to Q$ dönüşümü olarak tanımlanmıştır.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Liu 2020 yılında yayınladığı çalışmada bir yarıasal halkada bir n-değişmeli toplamsal dönüşümün yapısını halka üzerinde başka herhangi bir koşul olmadan belirlemeyi başarmıştır [45]. Bu çalışmanın bir sonucu olarak bir asal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün yapısı belirlenir.

Bu bölümde Liu'nun çalışmasını bir asal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlere indirgeyeceğiz.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Önerme 3.1.

[10]
Bir R 2-burulmasız yarıasal halkasını ve R halkasının bir J Jordan alt halkasını alalım. Eğer bir $f : R \to R$ dönüşümü J halkası üzerinde bir merkezleyen dönüşüm ise f dönüşümü J halkası üzerinde değişmelidir.

İspat. İlk olarak $[f(x), x] \in Z$ bağıntısı doğrusallaştırılarak her $x, y \in J$ elemanı için

$$[f(x), y] + [f(y), x] \in Z$$

olduğu görülür. Özel olarak her $x \in J$ elemanı için

$$[f(x), x^2] + [f(x^2), x] \in Z$$

olur. Her $x \in J$ elemanı için $[f(x), x] \in Z$ olduğundan

$$[f(x), x^2] = 2[f(x), x]x$$

bulunur. Öyleyse her $x \in J$ elemanı için

$$2[f(x), x]x + [f(x^2), x] \in Z \tag{2}$$

olur. Ayrıca her $x \in J$ elemanı için $[f(x^2), x^2] \in Z$ olduğundan

$$[f(x^2), x]x + x[f(x^2), x] \in Z \tag{3}$$

bulunur.

Şimdi bir $x \in J$ elemanını sabitleyelim. Ayrıca

$$a = [f(x), x] \in Z$$
$$b = [f(x^2), x]$$

olsun. Burada $a = 0$ olduğunu görmek istiyoruz. İlk olarak (2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x), 2ax + b] \\ &= 2a^2 + [f(x), b] \end{aligned}$$

ve buradan

$$[f(x), b] = -2a^2 \tag{4}$$

bulunur. Ayrıca (3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x), bx + xb] \\ &= [f(x), b]x + b[f(x), x] + [f(x), x]b + x[f(x), b] \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan, (4) eşitliği ile

$$-4a^2x + 2ab = 0$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse

$$ab = 2a^2x$$

olur. Eğer (4) eşitliğini $a \in Z$ elemanı ile çarparsak

$$\begin{aligned} -2a^3 &= [f(x), 2a^2x] \\ &= 2a^3 \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$a^3 = 0$$

olmalıdır. Yarıasal bir halkanın merkezi sıfırdan farklı bir nilpotent eleman içermediğinden

$$a = 0$$

olur. $\square$

Yardımcı Özellik 3.1.

Bir $f\colon R \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümü için aşağıdaki koşullardan biri geçerlidir:

1. Her $x \in R$ elemanı için $f(x) = \lambda x + \zeta(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.
2. R halkası 2 karakteristikli değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi ve $Q = RC$ halkası C cismi üzerinde 4 boyutlu bir merkezil bölümlü cebirdir.

İspat. Eğer R halkası değişmeli ise $R = Z \subseteq C$ olur. O halde $\lambda = 0$ ve $\zeta = f$ alarak her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur. Öyleyse R halkasının değişmeli olmadığını varsayabiliriz.

Şimdi $\deg(R) > 2$ olduğunu kabul edelim. Her $x \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= [[f(x), x], x] \\ &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} x^i f(x) x^{2-i} \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.33 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta \colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu görülür. Öyleyse $\deg(R) \leq 2$ olduğunu varsayabiliriz.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

[2]

---

[2]**Teorem 2.33.** Bir R asal halkasını ve R halkasının bir L Lie idealini alalım. Her $x \in L$ ve bir $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı için

$$\overline{x}^{[n]} = (x, \ldots, x) \in L^n$$

diyelim. Her $x \in L$ ve bazı $n, m \in \mathbb{N}$ tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i x^i f(\overline{x}^{[n]}) x^{m-i} = 0$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $f : L^n \to Q_{mr}(R)$ simetrik n-toplamsal dönüşümünü ve en az biri sıfırdan farklı bazı $\lambda_i \in C$ elemanlarını alalım. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. Ya $\mathrm{char}(R) = 0$ ya da $\mathrm{char}(R) > n$ olsun.
2. Ya $L = R$ ve $\deg(R) > n + m - 1$ ya da $\deg(L) > n + m$ olsun.

O zaman

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$$

olur ve her $x \in R$ elemanı için

$$f(\overline{x}^{[n]}) = \sum_{i=0}^{n} \zeta_i(\overline{x}^{[n-i]}) x^i$$

eşitliğini sağlayan bazı $\zeta_i : L^{n-i} \to C$ simetrik $(n-i)$-toplamsal dönüşümleri vardır.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Eğer $d = \deg(R)$ dersek Teorem 2.21 ile, R halkasının bir asal çok terimli özdeşliği halkası ve $Q = RC$ halkasının C cismi üzerinde d^2 boyutlu bir merkezil basit cebir olduğu görülür.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

3

---

[3] **Teorem 2.21.** Bir R asal halkasını alalım ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

1. R halkasının merkezil kapanışı RC, C cismi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezil basit cebirdir ve $[RC : C] = n^2$ olur.
2. R halkası St_{2n} standart çok terimli özdeşliğini sağlar fakat derecesi $2n$ tamsayısından küçük hiçbir çok terimli özdeşliğini sağlamaz.
3. Bir F cismi için R halkası $M_n(F)$ halkası içine gömülebilir ve $M_n(F)$ halkası R halkası ile aynı çoklu doğrusal çok terimli özdeşliklerini sağlar. Böylece R halkası bir S değişmeli halkası için $M_{n-1}(S)$ halkası içine gömülemez.
4. $\deg(R) = n$ olur.

Eğer denk koşullardan biri sağlanıyorsa $i \in \{1, \ldots, n\}$ olmak üzere her $x \in R$ elemanı için

$$x^n + q_1(x)x^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(x)x + q_n(x) = 0$$

olacak şekilde, i-toplamsal dönüşümlerin izleri olan bazı $q_i : R \to C$ dönüşümleri vardır. Ayrıca

$$Q_{mr}(R) = RC$$

olur.

Burada R halkası değişmeli olmadığından $d = 2$ bulunur. Ayrıca $f(R) \subseteq Q = RC$ olur. Eğer $\mathrm{char}(R) \neq 2$ ise Önerme 3.1 ile, f dönüşümünün değişmeli olduğu görülür ve Teorem 3.1 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta \colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu sonucuna varılır. Öyleyse $\mathrm{char}(R) = 2$ olduğunu varsayabiliriz.

Teorem 2.24 ile, bir D bölümlü halkası ve bir $n \in \{1, 2\}$ tamsayısı için

$$Q = RC \cong M_n(D)$$

olduğunu düşünebiliriz.[4]

---

[4] **Teorem 2.24.** Bir R asal çok terimli özdeşliği halkasını alalım. Bir $n \geq 1$ tamsayısı ve bir D bölümlü halkası için

$$Q_{mr}(R) = RC \cong M_n(D)$$

olur. Ayrıca D halkasının, merkezil kesirler halkası D halkası olan bir alt halkası Δ olsun. Yani D halkasının her elemanı $0 \neq a \in Z(\Delta)$ ve $b \in \Delta$ olmak üzere $a^{-1}b$ formunda olsun. O zaman R halkasının $M_n(\Delta)$ halkasına izomorf bir S alt halkası vardır ve $Q_{mr}(R)$ halkasının her elemanı $0 \neq a \in Z(S)$ ve $b \in S$ olmak üzere $a^{-1}b$ formundadır.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

İlk olarak $n = 1$ alalım. Bu durumda R halkası 2 karakteristikli değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi ve $Q = RC \cong D$ halkası C cismi üzerinde 4 boyutlu bir merkezil bölümlü cebir olur. Şimdi $n = 2$ olsun. O zaman $Q = RC \cong M_2(D)$ ve $D = C$ olur. Öyleyse $Q = RC \cong M_2(C)$ ve $\mathrm{char}(C) = 2$ bulunur. Ayrıca bir $m \geq 1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{2^m} (-1)^i \binom{2^m}{i} x^i f(x) x^{2^m - i} \\ &= f(x)x^{2^m} - x^{2^m} f(x) \\ &= [f(x), x^{2^m}] \qquad (5) \end{aligned}$$

olur. Bu noktadan sonra ispatı $R \not\cong M_2(C)$ ve $R \cong M_2(C)$ olarak iki duruma ayıracağız.

İlk olarak $R \ncong M_2(C)$ alalım. Teorem 2.24 ile, C cisminin bir Δ alt halkası için $M_2(\Delta) \subseteq R$ olduğu görülür.[5] Ayrıca C cismi Δ halkasının merkezil kesirler halkasıdır.

---

[5] **Teorem 2.24.** Bir R asal çok terimli özdeşliği halkasını alalım. Bir $n \geq 1$ tamsayısı ve bir D bölümlü halkası için

$$Q_{mr}(R) = RC \cong M_n(D)$$

olur. Ayrıca D halkasının, merkezil kesirler halkası D halkası olan bir alt halkası Δ olsun. Yani D halkasının her elemanı $0 \neq a \in Z(\Delta)$ ve $b \in \Delta$ olmak üzere $a^{-1}b$ formunda olsun. O zaman R halkasının $M_n(\Delta)$ halkasına izomorf bir S alt halkası vardır ve $Q_{mr}(R)$ halkasının her elemanı $0 \neq a \in Z(S)$ ve $b \in S$ olmak üzere $a^{-1}b$ formundadır.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Burada $M_2(\Delta) \subseteq R \subseteq Q = M_2(C)$ olduğundan Teorem 2.26 ile, her $x \in M_2(\Delta)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x) \tag{6}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu görülür.[6]

[6]**Teorem 2.26.** Bir D bölgesini alalım ve D bölgesinin merkezil kesirler halkası Δ olsun. Ayrıca Δ halkası bir bölümlü halka olsun ve $f\colon M_2(D) \to M_2(\Delta)$ dönüşümü, $n \geq 2$ olmak üzere her $x \in M_2(D)$ elemanı için

$$[f(x), x^n] = 0$$

eşitliğini sağlayan bir toplamsal dönüşüm olsun. O zaman ya her $x \in M_2(D)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in Z(\Delta)$ elemanı ve bir $\zeta\colon M_2(D) \to Z(\Delta)I_2$ toplamsal dönüşümü vardır ya da

$$D = \Delta = GF(2)$$

olur.

Şimdi $|\Delta| < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Δ halkası sonlu bir tamlık bölgesi ve böylece sonlu bir cisim olur. Ayrıca C cismi Δ halkasının kesirler cismi olduğundan $\Delta = C$ bulunur. Böylece $M_2(\Delta) = R = M_2(C)$ çelişkisine varılır. Öyleyse $|\Delta| = \infty$ olmalıdır.

Şimdi $a \in \Delta$, $x \in R$ ve $y \in M_2(\Delta)$ olsun. O zaman $ay \in M_2(\Delta)$ ve $x + ay \in R$ olur. Her $i \in \{0, 1, \ldots, 2^m\}$ için $\phi_i(x, y)$ ile, x-derecesi $2^m - i$ ve y-derecesi i olan monik tek terimlilerin toplamını gösterelim. Özel olarak $\phi_0(x, y) = y^{2^m}$, $\phi_{2^m-1}(x, y) = \sum_{i=0}^{2^m-1} y^{2^m-1-i}xy^i$ ve $\phi_{2^m}(x, y) = y^{2^m}$ olur. Burada

$$\begin{aligned}[\lambda ay, \phi_{2^m}(x, y)] &= [\lambda ay, y^{2^m}] \\ &= \lambda a[y, y^{2^m}] \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Ayrıca (6) eşitliği ile

$$f(ay) = \lambda ay + \zeta(ay)$$

bulunur.

Eğer (5) göz önünde bulundurulursa

$$
\begin{aligned}
0 =& [f(x+ay),(x+ay)^{2^m}] \\
=& [f(x)+f(ay),(x+ay)^{2^m}] \\
=& [f(x)+\lambda ay+\zeta(ay),(x+ay)^{2^m}] \\
=& [f(x)+\lambda ay,(x+ay)^{2^m}] \\
=& [f(x)+\lambda ay,\sum_{i=0}^{2^m} a^i\phi_i(x,y)] \\
=& a^{2^m}([f(x),y^{2^m}]+[\lambda y,\phi_{2^m-1}(x,y)])+\sum_{i=0}^{2^m-1} a^i[f(x),\phi_i(x,y)] \\
&+\sum_{i=0}^{2^m-2} a^{i+1}[\lambda y,\phi_i(x,y)] \qquad (7)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Burada $|\Delta| = \infty$ olduğundan (7) ile, Vandermonde determinant argümanı kullanılarak her $x \in R$ ve $y \in M_2(\Delta)$ elemanı için

$$[f(x), y^{2^m}] + [\lambda y, \phi_{2^m-1}(x, y)] = 0$$

bulunur. Ayrıca $[y, \phi_{2^m-1}(x, y)] = [y^{2^m}, x]$ olduğundan her $x \in R$ ve $y \in M_2(\Delta)$ elemanı için

$$[f(x) - \lambda x, y^{2^m}] = 0$$

olur. Burada $M_2(C)$ halkasının her elemanı $0 \neq b \in M_2(\Delta)$ ve $c \in Z(M_2(\Delta))$ olmak üzere $b^{-1}c$ formunda olduğundan $Z(M_2(\Delta)) \subseteq Z(M_2(C)) \subseteq CI_2 \cong C$ olmalıdır. Öyleyse her $x \in R$ ve $y \in M_2(C) = Q$ elemanı için

$$[f(x) - \lambda x, y^{2^m}] = 0$$

bulunur.

Teorem 2.32 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) - \lambda x \in C$$

olduğu görülür.[7] Eğer $\zeta(x) = f(x) - \lambda x$ dersek $\zeta \colon R \to C$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

---

[7] **Teorem 2.32.** Bir R yarıasal halkasını alalım ve $a \in Q_{mr}(R)$ olsun. Eğer $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $x \in R$ elemanı için $[a, x^m]_n = 0$ ise $a \in C$ olur.

Şimdi $R \cong M_2(C)$ olsun. Kolaylık olması için $R = M_2(C)$ diyelim. İlk olarak (5) göz önünde bulundurularak her $x \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x), x^{2^m}]x^{2^m} + x^{2^m}[f(x), x^{2^m}] \\ &= [f(x), x^{2^m}x^{2^m}] \\ &= [f(x), x^{2^{m+1}}] \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse genelliği kaybetmeden m tamsayısının çift olduğunu varsayabiliriz.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Her $i, j \in \{1, 2\}$ için

$$f(e_{11}) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} e_{ij}$$

$$f(e_{22}) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} e_{ij}$$

olacak şekilde bazı $a_{ij}, b_{ij} \in C$ elemanları vardır.

O halde

$$\begin{aligned} 0 &= [f(e_{11}), e_{11}^{2^m}] \\ &= [f(e_{11}), e_{11}] \\ &= f(e_{11})e_{11} - e_{11}f(e_{11}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$a_{12} = a_{21} = 0 \tag{8}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$b_{12} = b_{21} = 0 \tag{9}$$

bulunur.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Her $i, j \in \{1, 2\}$ için

$$f(e_{12}) = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} e_{ij}$$

$$f(e_{21}) = \sum_{i,j=1}^{2} d_{ij} e_{ij}$$

olacak şekilde bazı $c_{ij}, d_{ij} \in C$ elemanları vardır.

O halde,

$$\begin{aligned}0 &= [f(e_{11}+e_{12}),(e_{11}+e_{12})^{2^m}] \\ &= [f(e_{11}+e_{12}),(e_{11}+e_{12})] \\ &= f(e_{11}+e_{12})(e_{11}+e_{12})-(e_{11}+e_{12})f(e_{11}+e_{12})\end{aligned}$$

olur ve (8) ile

$$c_{21}=0 \text{ ve } c_{12}-(c_{11}-c_{22})=a_{11}-a_{22} \tag{10}$$

bulunur. Ayrıca

$$[f(e_{22}+e_{12}),(e_{22}+e_{12})^{2^m}]=0$$

olduğundan (9) ile

$$c_{12}+(c_{11}-c_{22})=b_{22}-b_{11} \tag{11}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde

$$[f(e_{11}+e_{21}),(e_{11}+e_{21})^{2^m}]=0$$

olduğundan (8) ile

$$d_{12}=0 \text{ ve } d_{21}-(d_{11}-d_{22})=a_{11}-a_{22} \qquad (12)$$

bulunur.

Burada

$$(e_{11}+e_{12}+e_{21})^4 = e_{11}+e_{12}+e_{21}$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ tamsayısı için

$$\begin{aligned}(e_{11}+e_{12}+e_{21})^{2^{2k}} &= ((e_{11}+e_{12}+e_{21})^{2^2})^{2^{2k-2}} \\ &= (e_{11}+e_{12}+e_{21})^{2^{2k-2}}\end{aligned}$$

olur. Ayrıca m tamsayısı çift olduğundan

$$(e_{11}+e_{12}+e_{21})^{2^m} = e_{11}+e_{12}+e_{21}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}0 &= [f(e_{11}+e_{12}+e_{21}), (e_{11}+e_{12}+e_{21})^{2^m}] \\ &= [f(e_{11}+e_{12}+e_{21}), e_{11}+e_{12}+e_{21}]\end{aligned}$$

olur.

Buradan (10) ve (12) ile

$$c_{11} = c_{22} \text{ ve } d_{11} = d_{22} \tag{13}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi $\lambda = a_{11} - a_{22}$ diyelim. Öyleyse (10)-(13) ile

$$\lambda = b_{22} - b_{11} = c_{12} = d_{21}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} f(e_{11}) &= \lambda e_{11} + a_{22} I_2 \\ f(e_{22}) &= \lambda e_{22} + b_{11} I_2 \\ f(e_{12}) &= \lambda e_{12} + c_{11} I_2 \\ f(e_{21}) &= \lambda e_{21} + d_{11} I_2 \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan f dönüşümünün C cismi üzerinde doğrusal olduğu açıktır. Eğer her $x \in M_2(C)$ elemanı için

$$\zeta(x) = f(x) - \lambda x$$

dersek $\zeta\colon M_2(C) \to CI_2$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x \in M_2(C)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur. $\square$

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Yardımcı Özellik 3.2.

Eğer $f : R \to Q$ dönüşümü bir merkezleyen Z-modül homomorfizması ise her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta : R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 3.1 ile, R halkasının değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda $Q = RC$ halkası C cismi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezil bölümlü cebir olur. Eğer C cismi sonlu ise $Q = RC$ halkası sonlu bir bölümlü halka ve böylece bir cisim olur. Buradan R halkasının değişmeli olduğu çelişkisine varılır. Öyleyse C cismi sonsuz olmalıdır.

Teorem 2.23 ile RC halkasının her elemanının $0 \neq a \in Z$ ve $b \in R$ olmak üzere $a^{-1}b$ formunda olduğu görülür.[8] O halde C cisminin her elemanı $0 \neq a \in Z$ ve $b \in Z$ olmak üzere $a^{-1}b$ formundadır. Burada f dönüşümü bir Z-modül homomorfizması olduğundan, $0 \neq a \in Z$ ve $b \in R$ olmak üzere

$$\overline{f}(a^{-1}b) = a^{-1}f(b)$$

ile tanımlı $\overline{f}: RC \to RC$ dönüşümüne tek türlü genişletilebilir ve $\overline{f}$ dönüşümü C cismi üzerinde doğrusaldır.

[8] **Teorem 2.23.** Bir R asal halkasının bir çok terimli özdeşliği halkası olması için gerek ve yeter bir koşul R halkasının, merkezi üzerinde sonlu boyutlu olan bir D bölümlü halkası üzerindeki $n \times n$ matrisler halkasının bir alt halkası ve bu matrisler halkasının, R halkasının iki yanlı kesirler halkası olmasıdır.

Ayrıca her $x \in RC$ elemanı için

$$\phi(\sum_i a_i \otimes b_i^o)(x) = \sum_i a_i x b_i$$

ile tanımlı ϕ: $RC \otimes_C RC^o \to \mathrm{End}_C(RC)$ kanonik dönüşümü ile

$$RC \otimes_C RC^o \cong \mathrm{End}_C(RC)$$

olduğu görülür. O halde

$$\overline{f} = \phi(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i^o)$$

olacak şekilde bazı $a_i, b_i \in RC$ elemanları vardır.

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Öyleyse her $x \in RC$ elemanı için

$$\overline{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

olur. Özel olarak her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

olur. Hipotezden her $x \in R$ elemanı için $[[f(x), x], x] = 0$ olacağından

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} x^i (\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i) x^{2-i} = 0 \qquad (14)$$

bulunur.

Şimdi C cisminin cebirsel kapanışına $\overline{C}$ diyelim. O zaman bir $m \geq 1$ tamsayısı için

$$RC \otimes_C \overline{C} \cong M_m(\overline{C})$$

olur. Ayrıca RC halkası $x \mapsto x \otimes 1$ dönüşümü ile $RC \otimes_C \overline{C}$ halkası içine gömülür. Öyleyse RC halkasını $RC \otimes_C \overline{C}$ halkasının bir alt halkası olarak düşünebiliriz. Teorem 2.31 ve [39] ile, R, RC ve $RC \otimes_C \overline{C}$ halkalarının aynı genelleştirilmiş çok terimli özdeşliklerini sağladıkları görülür.[9] O halde (14) özdeşliği her $x \in RC \otimes_C \overline{C}$ elemanı için sağlanır.

[9] **Teorem 2.31.** Bir R asal halkasını alalım ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in Q_{mr}(R) *_C C < X >$$

çok terimlisi R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali üzerinde bir genelleştirilmiş çok terimli özdeşliği olsun. O zaman f çok terimlisi $Q_{mr}(R)$ halkası üzerinde de bir genelleştirilmiş çok terimli özdeşliğidir.

Her $x \in RC \otimes_C \overline{C}$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

ile tanımlı $\widetilde{f} \colon RC \otimes_C \overline{C} \to RC \otimes_C \overline{C}$ toplamsal dönüşümünü alalım. O zaman her $x \in RC \otimes_C \overline{C} \cong M_m(\overline{C})$ elemanı için

$$[[\widetilde{f}(x), x], x] = 0$$

olur. Özel olarak her $x \in R$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) = f(x)$$

olur.

Ayrıca R halkası değişmeli olmadığından $m \geq 2$ olması gerektiği açıktır. Teorem 2.25 ve Teorem 2.26 ile, her $x \in RC \otimes_C \overline{C}$ elemanı için

$$[\widetilde{f}(x), x] = 0$$

olduğu görülür. Öyleyse her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

olur. Teorem 3.1 ile ispat tamamlanır. $\square$

Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

10 11

---

[10]**Teorem 2.25.** Bir D bölgesini alalım ve D bölgesinin merkezil kesirler halkası Δ olsun. Ayrıca Δ halkası bir bölümlü halka olsun ve bir $m \geq 3$ tamsayısı için $f: M_m(D) \to M_m(\Delta)$ dönüşümü, $n \geq 2$ olmak üzere her $x \in M_m(D)$ elemanı için

$$[f(x), x^n] = 0$$

eşitliğini sağlayan bir toplamsal dönüşüm olsun. O zaman her $x \in M_m(D)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in Z(\Delta)$ elemanı ve bir $\zeta: M_m(D) \to Z(\Delta)I_m$ toplamsal dönüşümü vardır.

[11]**Teorem 2.26.** Bir D bölgesini alalım ve D bölgesinin merkezil kesirler halkası Δ olsun. Ayrıca Δ halkası bir bölümlü halka olsun ve $f: M_2(D) \to M_2(\Delta)$ dönüşümü, $n \geq 2$ olmak üzere her $x \in M_2(D)$ elemanı için

$$[f(x), x^n] = 0$$

eşitliğini sağlayan bir toplamsal dönüşüm olsun. O zaman ya her $x \in M_2(D)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in Z(\Delta)$ elemanı ve bir $\zeta: M_2(D) \to Z(\Delta)I_2$ toplamsal dönüşümü vardır ya da

$$D = \Delta = GF(2)$$

olur.

Teorem 3.2.
Eğer $f\colon R \to Q$ bir merkezleyen toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 3.1 ile, R halkasının 2 karakteristikli değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda $Q = RC$ halkası C cismi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezil bölümlü cebir olur. Her $x \in R$ elemanı için $[f(x), x] = 0$ olduğunu görmek istiyoruz. Aksine, bir $x_0 \in R$ elemanı için $[f(x_0), x_0] \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

Öyleyse, her $x \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{2^n} (-1)^i \binom{2^n}{i} x^i f(x) x^{2^n - i} \\ &= f(x)x^{2^n} - x^{2^n} f(x) \\ &= [f(x), x^{2^n}] \end{aligned}$$

olacak şekilde bir en küçük $n \geq 1$ tamsayısının olduğu görülür. Bu durumda

$$[f(y), y^{2^n}] = 0$$
$$[f(y), y^{2^{n-1}}] \neq 0$$

olacak şekilde bir $y \in R$ elemanı bulunur.

Şimdi Q C-cebirinin, y ve $f(y)$ elemanları ile üretilen bir A C-alt cebirini alalım. O halde A C-cebiri sonlu boyutlu bir bölge ve böylece Q C-cebirinin bir bölümlü C-alt cebiri olur. Öyleyse A C-cebirinin merkezi $Z(A)$ bir cisimdir. Ayrıca $C \subseteq Z(A)$ ve $y^{2^n} \in Z(A)$ olur. Şimdi A $Z(A)$-cebirinin, y elemanı ile üretilen bir B $Z(A)$-alt cebirini alalım. Bir başka deyişle $B = Z(A)[y]$ olsun. Burada y elemanı $Z(A)$ cismi üzerinde cebirsel olduğundan B $Z(A)$-cebiri bir cisim olur. Ayrıca B $Z(A)$-cebirinin boyutu y elemanının $Z(A)$ cismi üzerindeki minimal çok terimlisinin derecesine eşit olur.

Şimdi y elemanının $Z(A)$ cismi üzerindeki minimal çok terimlisine $m_y(t) \in Z(A)[t]$ diyelim ve $m_y(t) = t^{2^n} - y^{2^n}$ olduğunu görelim. Burada $y^{2^n} \in Z(A)$ olduğundan $m_y(t)$ çok terimlisi $t^{2^n} - y^{2^n} = (t-y)^{2^n}$ çok terimlisini böler. O halde $1 \leq m \leq 2^n$ olacak şekilde bir m tamsayısı için

$$m_y(t) = (t-y)^m$$

olur. Eğer bir l tamsayısı ve $(k,2) = 1$ olacak şekilde bir k tamsayısı için $m = 2^l k$ dersek

$$\begin{aligned} m_y(t) &= (t-y)^m \\ &= (t-y)^{2^l k} \\ &= (t^{2^l} - y^{2^l})^k \\ &= t^{2^l k} - \binom{k}{1} y^{2^l} t^{2^l(k-1)} + \dots \end{aligned}$$

bulunur.

Burada $m_y(t) \in Z(A)[t]$ olduğundan $\binom{k}{1} y^{2^l} \in Z(A)$ olur. Ayrıca $(k, 2) = 1$ olduğundan $\binom{k}{1} = k \neq 0$ olur ve buradan $y^{2^l} \in Z(A)$ bağıntısı elde edilir. Öyleyse, $y^{2^{n-1}} \notin Z(A)$ olduğundan $l \geq n$ olur. Aynı zamanda $m = 2^l k \leq 2^n$ olduğundan $k = 1$ ve $l = n$ bulunur. Buradan

$$m_y(t) = t^{2^n} - y^{2^n}$$

olduğu görülür. Böylece

$$[B \colon Z(A)] = 2^n$$

olur.

Burada B cismi Q halkasının bir alt cismi ve $C \subseteq Z(A) \subseteq B$ olduğundan Zorn Lemması ile, Q halkasının, B cismini içeren bir K maksimal alt cisminin bulunduğu görülür. Ayrıca

$$[K\colon C] = [K\colon B][B\colon Z(A)][Z(A)\colon C] \geq [B\colon Z(A)] = 2^n$$

bulunur. O halde Teorem 2.3 ile

$$[Q\colon C] = [K\colon C]^2 \geq (2^n)^2 \tag{15}$$

olduğu görülür.[12]

[12] **Teorem 2.3.** Bir F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir D merkezil bölümlü cebiri ve D cebirinin bir K maksimal alt cismi için

$$[D\colon F] = [K\colon F]^2$$

olur.

Şimdi bir d pozitif tamsayısı için derecesi d olan simetrik grup S_d olmak üzere

$$M_d(X_1, \dots, X_d) = \sum_{\sigma \in \mathsf{S}_d} X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(d)}$$

ve

$$M^i_{d+1}(X_1, \dots, X_{d+1}) = M_d(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{d+1})$$

diyelim. Eğer $d = 2^n$ alırsak, $[f(x), x^{2^n}] = 0$ eşitliği doğrusallaştırılarak her $x_1, \dots, x_{d+1} \in R$ elemanı için

$$\sum_{i=1}^{d+1} [f(x_i), M^i_{d+1}(x_1, \dots, x_{d+1})] = 0 \tag{16}$$

olduğu görülür.

Eğer (16) eşitliğinde x_{d+1} elemanını bir $a \in Z \subseteq C$ elemanı için ax_{d+1} elemanıyla değiştirirsek, her $x_1, \ldots, x_{d+1} \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{d} [f(x_i), M_{d+1}^{i}(x_1, \ldots, ax_{d+1})] + [f(ax_{d+1}), M_{d+1}^{d+1}(x_1, \ldots, x_{d+1})] \\ &= a \sum_{i=1}^{d} [f(x_i), M_{d+1}^{i}(x_1, \ldots, x_{d+1})] + [f(ax_{d+1}), M_{d+1}^{d+1}(x_1, \ldots, x_{d+1})] \end{aligned} \tag{17}$$

olur.

Ayrıca (16) eşitliğini soldan a elemanı ile çarparsak, her $x_1, \ldots, x_{d+1} \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= a\sum_{i=1}^{d}[f(x_i), M_{d+1}^{i}(x_1, \ldots, x_{d+1})] + a[f(x_{d+1}), M_{d+1}^{d+1}(x_1, \ldots, x_{d+1})] \\ &= a\sum_{i=1}^{d}[f(x_i), M_{d+1}^{i}(x_1, \ldots, x_{d+1})] + [af(x_{d+1}), M_{d+1}^{d+1}(x_1, \ldots, x_{d+1})] \end{aligned} \tag{18}$$

olur.

Eşitlik (17) ve (18) ile, her $x_1, \ldots, x_{d+1} \in R$ elemanı için

$$[f(ax_{d+1}) - af(x_{d+1}), M_{d+1}^{d+1}(x_1, \ldots, x_{d+1})] = 0 \qquad (19)$$

bulunur. Burada

$$M_{d+1}^{d+1}(X_1, \ldots, X_{d+1}) = M_d(X_1, \ldots, X_d)$$

olur. O halde (19) eşitliği ile, her $a \in Z$ ve $x, x_1, \ldots, x_d \in R$ elemanı için

$$[f(ax) - af(x), M_d(x_1, \ldots, x_d)] = 0$$

olduğu görülür.

Ayrıca Teorem 2.31 ile, R ve Q halkalarının aynı genelleştirilmiş çok terimli özdeşliklerini sağladığı görülür. [13] Öyleyse her $a \in Z$, $x \in R$ ve $x_1, \ldots, x_d \in Q$ elemanı için

$$[f(ax) - af(x), M_d(x_1, \ldots, x_d)] = 0 \tag{20}$$

eşitliği elde edilir.

---

[13] **Teorem 2.31.** Bir R asal halkasını alalım ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in Q_{mr}(R) *_C C < X >$$

çok terimlisi R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali üzerinde bir genelleştirilmiş çok terimli özdeşliği olsun. O zaman f çok terimlisi $Q_{mr}(R)$ halkası üzerinde de bir genelleştirilmiş çok terimli özdeşliğidir.

Şimdi $x_1, \ldots, x_d \in Q$ olmak üzere Q halkasının, $M_d(x_1, \ldots, x_d)$ elemanlarıyla üretilen toplamsal alt grubu G olsun. Ayrıca $G \subseteq C$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse Q halkası $d+1$ dereceli $[M_d(X_1, \ldots, X_d), X_{d+1}]$ çok terimli özdeşliğini sağlar. Teorem 2.19 ile

$$[Q\colon C] \leq [\frac{d+1}{2}]^2 = [\frac{2^n+1}{2}]^2$$

olduğu görülür.[14] Buradan

$$[Q\colon C] \leq [\frac{2^n+1}{2}]^2 < (2^n)^2$$

bulunur. Bu ise (15) ile çelişir. O halde $G \not\subseteq C$ olmalıdır.

[14] **Teorem 2.19.** Bir A primitif cebiri bir d dereceli çok terimli özdeşliğini sağlıyorsa A cebiri merkezi üzerinde sonlu boyutlu bir basit cebirdir. Ayrıca $d/2$ rasyonel sayısından küçük veya ona eşit en büyük tamsayı $[d/2]$ olmak üzere A cebirinin boyutu en fazla $[d/2]^2$ olur.

Teorem 2.27 ile $[Q, Q] \subseteq G$ olduğu görülür.[15] Eşitlik (20) ile, her $a \in Z$ ve $x \in R$ elemanı için

$$[f(ax) - af(x), [Q, Q]] = 0$$

eşitliği elde edilir. Teorem 2.6 ile, her $a \in Z$ ve $x \in R$ elemanı için

$$f(ax) - af(x) \in C \tag{21}$$

bulunur.[16]

[15]**Teorem 2.27.** Bir R asal halkasını ve R halkasının sıfırdan farklı bir I idealini alalım. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere C cismi üzerinde bir $f(x_1, \ldots, x_n)$ çok terimlisi için RC halkasının, bir $\{f(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in I\}$ kümesi ile üretilen toplamsal alt grubu G olsun. Eğer R halkası $GF(2)$ cismi üzerindeki 2×2 matrisler halkası değilse ya $f(x_1, \ldots, x_n)$ çok terimlisi merkezildir ya da G toplamsal alt grubu R halkasının bir Lie öz idealini içerir. Burada bir Lie öz ideali ile, R halkasının sıfırdan farklı bir J ideali için $[J, R] \subseteq L$ bağıntısını sağlayan bir L Lie ideali belirtilmektedir.

[16]**Teorem 2.6.** Bir R yarıasal halkasının bir $a \in R$ elemanı her $x, y \in R$ elemanı için $[x, y]$ komütatörleri ile değişmeli ise $a \in Z$ olur.

Burada C cismi Q halkasının bir alt halkası olduğundan Q C-vektör uzayının

$$Q = W \oplus C$$

olacak şekilde bir W C-alt vektör uzayı vardır. Şimdi $\pi \colon Q \to Q$ dönüşümü W C-alt vektör uzayı üzerine izdüşüm olsun. O halde π dönüşümü her $\alpha \in W$ ve $\beta \in C$ elemanı için

$$\pi(\alpha + \beta) = \alpha$$

olacak şekilde, C cismi üzerinde bir doğrusal dönüşümdür.

Öylese her $x \in R$ elemanı için

$$\pi f(x) - f(x) \in C$$

olur. Ayrıca (21) bağıntısı ile, her $a \in Z$ ve $x \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} \pi f(ax) &= \pi(af(x)) \\ &= a\pi f(x) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\pi f : R \to Q$ dönüşümü merkezleyen bir Z-modül homomorfizması olur.

Yardımcı Özellik 3.2 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$\pi f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta \colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu görülür. O halde her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) - \lambda x \in C$$

olur. Buradan her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

bulunur. Bu ise $[f(x_0), x_0] \neq 0$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak f dönüşümü değişmeli olur ve Teorem 3.1 ile ispat tamamlanır. $\square$

Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli ve Merkezleyen Dönüşümler

Bu bölümde R halkası maksimal sağ kesirler halkası $Q = Q_{mr}(R)$ ve genişletilmiş merkezi C olan bir yarıasal halka olacaktır. Ayrıca R halkasının merkezil kapanışı RC ile gösterilecektir.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Bu bölümde bir yarıasal halkada değişmeli toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Bir R asal halkasının bazı $a, b \in R$ elemanları her $x \in R$ elemanı için

$$axb = bxa \tag{22}$$

eşitliğini sağlıyorsa $a, b \in R$ elemanları R halkasının C genişletilmiş merkezi üzerinde doğrusal bağımlıdır. Bu sonuç ilk olarak primitif halkalar için Amitsur tarafından kanıtlanmıştır [1] ve Martindale tarafından asal halkalara genişletilmiştir [47].

Daha sonra Brešar, bir R yarıasal halkasının (22) eşitliğini sağlayan bazı $a, b \in R$ elemanlarının arasındaki ilişkiyi göstermiştir: Bir $\lambda \in C$ tersinir elemanı ve toplamları 1 olan bazı $e_1, e_2, e_3 \in C$ ortogonal idempotentleri için

$$e_1 a = \lambda e_1 b$$
$$e_2 b = 0$$
$$e_3 a = 0$$

olur [12]. Aslında daha genel olarak bir S kümesinden bir R yarıasal halkasına f ve g dönüşümlerinin her $s, t \in S$ ve $x \in R$ elemanı için

$$f(s)xg(t) = g(s)xf(t) \tag{23}$$

eşitliğini sağladığı durumda benzer sonuç elde etmiştir.

Brešar, Martindale ve Miers, değişmeli olmayan bir asal halkanın her B bitürevinin bir $\lambda \in C$ elemanı için

$$B(x, y) = \lambda[x, y]$$

formunda olduğunu göstermiştir [19]. Daha sonra Brešar (23) özdeşliğine ilişkin teoremi kullanarak bu sonucu yarıasal halkalara genişletmiştir [12].

Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Bitürevler ve değişmeli toplamsal dönüşümler arasında yakın ilişki bulunur. Brešar, Martindale ve Miers, asal halkalarda her değişmeli toplamsal dönüşümün bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta \colon R \to C$ toplamsal dönüşümü için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

formunda olduğunu belirlemiştir [19]. Daha sonra bu sonuç Ara ve Mathieu tarafından yarıasal halkalara genişletilmiştir [2]. Brešar, bitürevler üzerindeki teoremi kullanarak Ara ve Mathieu tarafından verilen sonucun kısa bir ispatını elde etmiştir [12].
Bu bölümde esas olarak [12] çalışması ele alınacaktır.

Yardımcı Özellik 4.1.

[19]
Bir R halkasını ve bir $B\colon R \times R \to R$ bitürevini alalım. Her $x, y, z, u, v \in R$ elemanı için

$$B(x, y)z[u, v] = [x, y]zB(u, v)$$

olur.

İspat. İlk olarak, B dönüşümü ilk bileşen için bir türev olduğundan

$$B(xu, yv) = B(x, yv)u + xB(u, yv)$$

bulunur. Buradan, B dönüşümü ikinci bileşen için bir türev olduğundan

$$B(xu, yv) = B(x, y)vu + yB(x, v)u + xB(u, y)v + xyB(u, v) \quad (24)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$B(xu, yv) = B(x, y)uv + xB(u, y)v + yB(x, v)u + yxB(u, v) \quad (25)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (24) ve (25) ile, her $x, y, u, v \in R$ elemanı için

$$B(x, y)[u, v] = [x, y]B(u, v)$$

olduğu görülür. Burada u elemanı yerine zu elemanı alınırsa

$$B(x, y)z[u, v] = [x, y]zB(u, v)$$

bulunur. $\square$

Önerme 4.1.

Bir S kümesinden R halkasına f ve g dönüşümleri her $s, t \in S$ ve $x \in R$ elemanı için

$$f(s)xg(t) = g(s)xf(t)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman her $s \in S$ elemanı için

$$\begin{aligned} e_1 f(s) &= \lambda e_1 g(s) \\ e_2 g(s) &= 0 \\ e_3 f(s) &= 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde, toplamları 1 olan bazı $e_1, e_2, e_3 \in C$ ortogonal idempotentleri ile bir $\lambda \in C$ tersinir elemanı vardır.

İspat. Eğer

$$f(s)xg(t) = g(s)xf(t)$$

eşitliği her $x \in R$ elemanı için sağlanıyorsa eşitliğin aynı zamanda her $x \in RC$ elemanı için de sağlanacağı açıktır. O halde genelliği kaybetmeden R halkasının merkezil kapalı olduğunu kabul edebiliriz.

Şimdi R halkasının

$$I = Rf(S)R$$
$$J = Rg(S)R$$

ideallerini alalım. Teorem 2.15 ile

$$(R; I) = \varepsilon_1 R$$
$$(R; J) = \varepsilon_2 R$$

olacak şekilde bazı $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C$ idempotentlerinin varlığı görülür.[17]

---

[17] **Teorem 2.15.** Bir R halkası ve R halkasının bir I ideali için $I \oplus (R; I)$ direkt toplamı R halkasının bir esansiyel ideali olur. Eğer R halkası merkezil kapalı ise

$$(R; I) = eR$$

olacak şekilde bir $e \in B$ elemanı vardır.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Eğer

$$\begin{aligned} e_1 &= (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) \\ e_2 &= (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 \\ e_3 &= \varepsilon_1 \end{aligned}$$

dersek $e_1, e_2, e_3 \in C$ elemanları toplamları 1 olan ortogonal idempotentler olur. Her $s \in S$ elemanı için $\varepsilon_2 g(s) \in (R; J)$ olduğundan $\varepsilon_2 g(s) R \varepsilon_2 g(s) = (0)$ ve buradan da $\varepsilon_2 g(s) = 0$ eşitlikleri elde edilir. O halde her $s \in S$ elemanı için

$$e_2 g(s) = 0$$

olur. Benzer şekilde her $s \in S$ elemanı için

$$e_3 f(s) = 0$$

olduğu görülür.

Burada

$$(R; e_1 I) = (1 - e_1)R$$
$$(R; e_1 J) = (1 - e_1)R$$

olduğu açıktır. Teorem 2.15 ile, $e_1 I \oplus (1 - e_1)R$ ve $e_1 J \oplus (1 - e_1)R$ direkt toplamları R halkasının esansiyel idealleri olarak bulunur.[18]

[18] **Teorem 2.15.** Bir R halkası ve R halkasının bir I ideali için $I \oplus (R; I)$ direkt toplamı R halkasının bir esansiyel ideali olur. Eğer R halkası merkezil kapalı ise

$$(R; I) = eR$$

olacak şekilde bir $e \in B$ elemanı vardır.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Şimdi

$$E = e_1 I \oplus (1 - e_1)R$$

diyelim ve bir $\varphi\colon E \to R$ dönüşümünü

$$\varphi(e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i f(s_i) y_i) + (1 - e_1)r) = e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i) y_i) + (1 - e_1)r$$

olarak tanımlayalım. İyi tanımlılığı görmek için

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i f(s_i) y_i) = 0$$

olduğunu varsayalım. Her $x \in R$ ve $s \in S$ elemanı için

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i f(s_i) y_i) x g(s) = 0$$

olur.

Hipotezden her $x \in R$ ve $s \in S$ elemanı için

$$f(s_i)y_i x g(s) = g(s_i)y_i x f(s)$$

ve buradan da

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i)y_i)xf(s) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i)y_i) \in (R; I)$$

olur. Ancak $(R; I) = \varepsilon_1 R$ ve $e_1 = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$ olduğundan

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i)y_i) = 0$$

bulunur ve iyi tanımlılık görülür.

Burada φ dönüşümünün bir R-bimodül homomorfizması olduğu açıktır. Sonuç 2.2 ile, her $x \in E$ elemanı için

$$\varphi(x) = \lambda x$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının varlığı görülür.[19] Böylece her $s \in S$ elemanı için

$$e_1 f(s) = \lambda e_1 g(s)$$

olur.

---

[19] **Sonuç 2.2.** Bir R halkasını ve R halkasının bir I esansiyel idealini alalım. Eğer bir $f : I \to R$ dönüşümü bir (R, R)-bimodül homomorfizması ise her $x \in I$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı vardır. Ayrıca bir $q \in Q_{mr}(R)$ elemanı için $qI = (0)$ ise $q = 0$ olur.

Eğer $\lambda \in C$ elemanının tersinir olduğunu görürsek ispat tamamlanır. Burada

$$\lambda E = e_1 J \oplus (1 - e_1)R$$

eşitliği sağlandığından ve $e_1 J \oplus (1 - e_1)R$ direkt toplamı bir esansiyel ideal olduğundan $\lambda \in C$ elemanı bir sıfır bölen olamaz. Sonuç olarak, C halkası bir von Neumann regüler halka olduğundan $\lambda \in C$ elemanı tersinirdir. $\square$

Önerme 4.2.

Bir $B\colon R \times R \to R$ bitürevini alalım. O zaman $(1-e)R$ halkası değişmeli olacak şekilde bir $e \in C$ idempotenti ve her $x, y \in R$ elemanı için

$$eB(x, y) = \lambda e[x, y]$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda \in C$ elemanı vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 4.1 ile, bir $B\colon R \times R \to R$ bitürevinin, her $x, y, z, u, v \in R$ elemanı için

$$B(x, y)z[u, v] = [x, y]zB(u, v)$$

eşitliğini sağladığı görülür. Öyleyse, her $x, y \in R$ elemanı için

$$A(x, y) = [x, y]$$

olmak üzere A ve B dönüşümlerinin Önerme 4.1 için tüm koşulları sağladığı görülür.

O halde her $x, y \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} e_1 B(x,y) &= \mu e_1 [x,y] \\ e_2 [x,y] &= 0 \\ e_3 B(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde toplamları 1 olan bazı $e_1, e_2, e_3 \in C$ ortogonal idempotentleri ve bir $\mu \in C$ tersinir elemanı vardır. Burada $e = e_1 + e_3$ ve $\lambda = \mu e_1$ alarak ispat tamamlanır. $\square$

Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Teorem 4.1.
Eğer $f: R \to R$ bir değişmeli toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta: R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. İlk olarak $[f(x), x] = 0$ eşitliği doğrusallaştırılarak her $x, y \in R$ elemanı için

$$[f(x), y] = [x, f(y)]$$

olduğu görülür. Buradan $(x, y) \to [f(x), y]$ ile tanımlı dönüşümün bir bitürev olduğu sonucuna varılır. Önerme 4.2 ile, $(1 - e)R$ halkası değişmeli olacak şekilde bir $e \in C$ idempotentinin ve her $x, y \in R$ elemanı için

$$e[f(x), y] = \mu e[x, y]$$

eşitliğini sağlayan bir $\mu \in C$ elemanının varlığı görülür.

Öyleyse her $y \in R$ elemanı için

$$[ef(x) - \mu ex, y] = 0$$

olacağından

$$ef(x) - \mu ex \in C$$

olur. Eğer, $\lambda = \mu e$ olmak üzere

$$\zeta(x) = (ef(x) - \lambda x) + (1 - e)f(x)$$

dersek $\zeta : R \to C$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur. $\square$

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Bu bölümde bir yarıasal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Brešar 1993 yılında, 2-burulmasız bir yarıasal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün bir değişmeli dönüşüm olduğunu göstermiştir. Daha sonra 2-burulmasız bir yarıasal halkada bir merkezleyen dönüşümün yapısını belirlemeyi başarmıştır [12]. Bu sonuç 1993 yılında Ara ve Matheu tarafından farklı bir yoldan gösterilmiştir [2].

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Yarıasal halkalarda merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı halka üzerinde ek bir koşul olmadan 2020 yılında Liu'nun çalışmasının bir sonucu olarak elde edilmiştir [45]. Liu bu çalışmasında problemi, Beidar ve Mikhalev tarafından geliştirilen, yarıasal halkalarda ortogonal tamlamalar teorisini kullanarak ele almıştır [7].

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Bu bölümde Liu'nun çalışmasını bir yarıasal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlere indirgeyeceğiz. Ayrıca R halkasının ortogonal tamlaması $O = O(R)$ ve C halkasının idempotentlerinin kümesi $B = B(C)$ ile gösterilecektir.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Bir $U \subseteq B$ alt kümesi için $r(C; U) = (0)$ ise U alt kümesine **yoğun alt küme** denir. Her $u, v \in U$ elemanı için $u \neq v$ olduğunda $uv = 0$ oluyorsa U alt kümesine **ortogonal alt küme** denir.
Bir $T \subseteq Q$ alt kümesini alalım ve $U \subseteq B$ bir yoğun ortogonal alt küme olsun. Her $u \in U$ ve $t_u \in T$ elemanı için

$$tu = t_u u$$

olacak şekilde bir $t \in T$ elemanı varsa T alt kümesine **ortogonal tam alt küme** denir. Ayrıca t elemanı

$$t = \sum_{u \in U}^{\perp} t_u u$$

ile gösterilecektir.
Bir $T \subseteq Q$ alt kümesinin $O(T)$ **ortogonal tamlaması**, Q halkasının, T alt kümesini içeren ortogonal tam alt kümelerinin kesişimi olarak tanımlanır. Ayrıca $O(T)$ ortogonal tamlaması ortogonal tamdır.

Yardımcı Özellik 4.2.

[31]

Bir C-modül olarak $Q = W \oplus C$ olmak üzere $f : R \to Q$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm ve $\pi : Q \to Q$ dönüşümü W C-alt modülü üzerine izdüşüm olsun. Ayrıca bazı $x \in R$ ve $\lambda \in C$ elemanları için

$$\lambda x = 0 \implies \lambda f(x) \in C$$

koşulu sağlansın. O zaman her $\sum_{i \in I}^{\perp} x_i e_i \in O$ elemanı için

$$\widetilde{f}(\sum_{i \in I}^{\perp} x_i e_i) = \sum_{i \in I}^{\perp} \pi(f(x_i))e_i$$

ile tanımlı $\widetilde{f} : O \to Q$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. İlk olarak $\widetilde{f}$ dönüşümünün iyi tanımlılığını görelim. Bunun için B kümesinin bazı $\{e_i \mid i \in I\}$ ve $\{f_j \mid j \in J\}$ yoğun ortogonal alt kümeleri alalım. Şimdi her $i \in I$ ve $j \in J$ için $x_i, y_j \in R$ olmak üzere

$$x = \sum_{i \in I}^{\perp} x_i e_i = \sum_{j \in J}^{\perp} y_j f_j$$

olsun. Burada $\{e_i f_j \mid i \in I, j \in J\}$ kümesinin de B kümesinin bir yoğun ortogonal alt kümesi olduğu görülür. Ayrıca her $i \in I$ ve $j \in J$ için

$$x_{i,j} = x_i$$
$$y_{j,i} = y_j$$

dersek

$$x = \sum_{i \in I, j \in J}^{\perp} x_{i,j}(e_i f_j) = \sum_{i \in I, j \in J}^{\perp} y_{j,i}(e_i f_j)$$

olur.

Her $i \in I$ ve $j \in J$ için

$$y_{j,i}e_i f_j = xe_i f_j = x_{i,j}e_i f_j$$

olduğundan

$$(y_{j,i} - x_{i,j})e_i f_j = 0$$

bulunur. Hipotezden

$$f(y_{j,i} - x_{i,j})e_i f_j \in C$$

ve buradan

$$\pi(f(y_{j,i}))e_i f_j = \pi(f(x_{i,j}))e_i f_j$$

olur.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

O halde

$$\sum_{i\in I}^{\perp} \pi(f(x_i))e_i = \sum_{i\in I, j\in J}^{\perp} \pi(f(x_{i,j}))e_i f_j$$
$$= \sum_{i\in I, j\in J}^{\perp} \pi(f(y_{j,i}))e_i f_j$$
$$= \sum_{j\in J}^{\perp} \pi(f(y_j))f_j$$

olduğu görülür.
Şimdi $\widetilde{f}$ dönüşümünün toplamsal olduğunu görelim. Eğer $x, y \in O$ ise

$$x = \sum_{i\in I}^{\perp} x_i e_i$$
$$y = \sum_{i\in I}^{\perp} y_i e_i$$

olacak şekilde B kümesinin bir $\{e_i \mid i \in I\}$ yoğun ortogonal alt kümesi ve her $i \in I$ için bazı $x_i, y_i \in R$ elemanları bulunur.

O halde

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x+y) &= \widetilde{f}\Big(\sum_{i\in I}^{\perp}(x_i+y_i)e_i\Big)\\
&= \sum_{i\in I}^{\perp}\pi(f(x_i+y_i))e_i\\
&= \sum_{i\in I}^{\perp}\pi(f(x_i))e_i + \sum_{i\in I}^{\perp}\pi(f(y_i))e_i\\
&= \widetilde{f}(x)+\widetilde{f}(y)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\square$

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Yardımcı Özellik 4.3.

Bir $f : R \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümünü alalım. Eğer bazı $\lambda \in C$ ve $x \in R$ elemanları için $\lambda x = 0$ ise

$$\lambda f(x) \in C$$

olur.

İspat. Bazı $\lambda \in C$ ve $x \in R$ elemanları için $\lambda x = 0$ olsun. Ayrıca f dönüşümü merkezleyen olduğundan her $x, y \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda[[f(x+y), x+y], y] \\ &= \lambda[[f(x), y], y] \\ &= [[\lambda f(x), y], y] \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.32 ile

$$\lambda f(x) \in C$$

olduğu görülür.[20] □

---

[20] **Teorem 2.32.** Bir R yarıasal halkasını alalım ve $a \in Q_{mr}(R)$ olsun. Eğer $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $x \in R$ elemanı için $[a, x^m]_n = 0$ ise $a \in C$ olur.

Yardımcı Özellik 4.4.

Bir $f : R \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümünü alalım ve $\widetilde{f} : O \to Q$ dönüşümü Yardımcı Özellik 4.2 ile tanımlanan toplamsal dönüşüm olsun. O zaman $\widetilde{f}$ dönüşümü bir merkezleyen dönüşümdür ve her $x \in R$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) - f(x) \in C$$

olur.

İspat. Her $x, y \in O$ elemanı için

$$x = \sum_{i \in I}^{\perp} x_i e_i$$
$$y = \sum_{j \in J}^{\perp} x_j f_j$$

olacak şekilde bazı $\{e_i \mid i \in I\}$ ve $\{f_j \mid j \in J\}$ yoğun ortogonal alt kümeleri, her $i \in I$ ve her $j \in J$ için bazı $x_i, y_j \in R$ elemanları vardır.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Yardımcı Özellik 4.2 ile

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x) &= \widetilde{f}\Big(\sum_{i\in I}^{\perp} x_i e_i\Big) \\ &= \sum_{i\in I}^{\perp} \pi(f(x_i))e_i\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Ayrıca

$$\pi(f(x_i)) - f(x_i) \in C$$

olduğu da göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
[[\widetilde{f}(x), x], y] &= [[\sum_{i\in I}^{\perp} \pi(f(x_i))e_i, \sum_{i\in I}^{\perp} x_i e_i], \sum_{j\in J}^{\perp} y_j f_j] \\
&= \sum_{i\in I, j\in J}^{\perp} [[\pi(f(x_i)), x_i], y_j] e_i f_j \\
&= \sum_{i\in I, j\in J}^{\perp} [[f(x_i), x_i], y_j] e_i f_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

O halde $\widetilde{f}$ dönüşümü bir merkezleyen dönüşümdür. Ayrıca $x \in R$ olmak üzere

$$\widetilde{f}(x) = \pi(f(x))$$

olacağından her $x \in R$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) - f(x) \in C$$

bağıntısı elde edilir. $\square$

Önerme 4.3.

Bir R ortogonal tam halkasını alalım ve $M \in \mathrm{Spec}(B)$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar geçerlidir:

1. $\overline{R} = R + MQ/MQ$ halkası genişletilmiş merkezi $\overline{C} = C + MQ/MQ$ olan bir asal halkadır ve $\overline{Q} = Q/MQ$ halkası $\overline{R}$ halkasının maksimal sağ kesirler halkasında içerilir.
2. $Z(\overline{R}) = Z + MQ/MQ$ olur.
3. $\overline{Q}$ $\overline{C}$-vektör uzayının bir $\overline{C}$-alt vektör uzayı W için $\overline{Q} = W \oplus \overline{C}$ olsun. Ayrıca $\pi\colon \overline{Q} \to \overline{Q}$ dönüşümü W $\overline{C}$-alt vektör uzayı üzerine izdüşüm ve $f\colon R \to Q$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşüm olsun. Her $x \in Q$ elemanı için $\overline{x} = x + MQ$ diyelim. Her $x \in R$ elemanı için $\overline{f}(\overline{x}) = \pi(\overline{f(x)})$ ile tanımlı $\overline{f}\colon \overline{R} \to \overline{Q}$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşümdür.

İspat. Burada (1) ve (2) koşulları Teorem 2.16-2.18 ile görülür.[21] [22] [23]

---

[21] **Teorem 2.16.** Bir R ortogonal tam yarıasal halkası ve bir $M \in \mathrm{Spec}(B)$ maksimal ideali için R/RM halkası asaldır.

[22] **Teorem 2.17.** Bir R ortogonal tam yarıasal halkasını ve bir $M \in \mathrm{Spec}(B)$ maksimal idealini alalım. Eğer $\pi\colon R \to R/RM$ dönüşümü kanonik izdüşüm ise R/RM halkasının merkezi $\pi(Z)$ olur.

[23] **Teorem 2.18.** Bir R ortogonal tam yarıasal halkası ve bir $M \in Spec(B)$ maksimal ideali için

$$Q/QM \subseteq Q_{mr}(R/RM)$$

olur. Ayrıca $\pi\colon Q \to Q/QM$ dönüşümü kanonik izdüşüm olmak üzere R/RM halkasının genişletilmiş merkezi $\pi(C)$ olur.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Şimdi (3) koşulu için $\overline{f}$ dönüşümününün iyi tanımlılığını görelim. Burada toplamsallık açıktır. Eğer $x \in R \cap MQ$ ise

$$\overline{x} = \overline{0}$$

olur. Ayrıca f dönüşümü merkezleyen olduğundan her $x, y \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \overline{[[f(x+y), x+y], y]} \\
&= [[\overline{f(x+y)}, \overline{x+y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x+y)}, \overline{y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x)} + \overline{f(y)}), \overline{y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x)}, \overline{y}], \overline{y}] + [[\overline{f(y)}, \overline{y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x)}, \overline{y}], \overline{y}] + \overline{[[f(y), y], y]} \\
&= [[\overline{f(x)}, \overline{y}], \overline{y}]
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.32 ile $\overline{f(x)} \in \overline{C}$ olduğu görülür ve buradan $\pi(\overline{f(x)}) = \overline{0}$ eşitliği elde edilir.[24] Öyleyse

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{0}$$

olur ve iyi tanımlılık görülür.

[24] **Teorem 2.32.** Bir R yarıasal halkasını alalım ve $a \in Q_{mr}(R)$ olsun. Eğer $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $x \in R$ elemanı için $[a, x^m]_n = 0$ ise $a \in C$ olur.

Son olarak
$$\pi(\overline{f(x)}) - \overline{f(x)} \in \overline{C}$$
bağıntısı kullanılarak her $x, y \in R$ elemanı için
$$\begin{aligned}\overline{0} &= \overline{[[f(x), x], y]} \\ &= [[\overline{f(x)}, \overline{x}], \overline{y}] \\ &= [[\pi(\overline{f(x)}), \overline{x}], \overline{y}] \\ &= [[\overline{f}(\overline{x}), \overline{x}], \overline{y}]\end{aligned}$$
bulunur. O halde $\overline{f}$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşümdür. $\square$

Teorem 4.2.
Eğer $f\colon R \to Q$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 4.2-4.4 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) - f(x) \in C$$

olacak şekilde bir $\widetilde{f} \colon O \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümü elde edilir. Teorem 2.9 ile, O halkasının bir ortogonal tam yarıasal halka olduğu görülür.[25] Ayrıca Teorem 2.10 ile, O halkasının maksimal sağ kesirler halkası ve genişletilmiş merkezi sırasıyla Q ve C halkaları olarak bulunur.[26]

---

[25] **Teorem 2.9.** Bir R yarıasal halkasını ve R halkasının bir I yoğun sağ idealini alalım. Eğer $Q_{mr}(R)$ halkasının bir S alt halkası için $I \subseteq S$ ise S halkası yarıasaldır.

[26] **Teorem 2.10.** Bir R yarıasal halkasını ve R halkasının bir I yoğun sağ idealini alalım. Eğer $Q_{mr}(R)$ halkasının bir S alt halkası için $I \subseteq S$ ise

$$Q_{mr}(S) = Q_{mr}(R)$$

olur.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Bir $M \in \mathrm{Spec}(B)$ maksimal ideali için

$$\begin{aligned}\overline{Q} &= Q/MQ \\ \overline{O} &= O + MQ/MQ \\ \overline{C} &= C + MQ/MQ\end{aligned}$$

diyelim ve her $x \in Q$ elemanı için

$$\overline{x} = x + MQ$$

alalım.

Önerme 4.3 ile, $\overline{O}$ halkasının, genişletilmiş merkezi $\overline{C}$ halkası olan bir asal halka olduğu ve $\overline{Q}$ halkasının, $\overline{O}$ halkasının maksimal sağ kesirler halkasında içerildiği görülür. Ayrıca Sonuç 2.3 ile, $\overline{C}$ halkasının aynı zamanda $\overline{Q}$ halkasının da genişletilmiş merkezi olduğu görülür.[27]

[27] **Sonuç 2.3.** Bir R yarıasal halkası için

$$Q_{mr}(Q_{mr}(R)) = Q_{mr}(R)$$

olur.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Burada $\overline{C}$ cismi $\overline{Q}$ halkasının bir alt halkası olduğundan $\overline{Q}$ $\overline{C}$-vektör uzayının bir $\overline{C}$-alt vektör uzayı W için

$$\overline{Q} = W \oplus \overline{C}$$

olur. Şimdi $\pi \colon \overline{Q} \to \overline{Q}$ dönüşümü W $\overline{C}$-alt vektör uzayı üzerine izdüşüm olsun ve her $x \in O$ elemanı için

$$\widehat{f}(\overline{x}) = \pi(\overline{\widetilde{f}(x)})$$

ile tanımlı $\widehat{f} \colon \overline{O} \to \overline{Q}$ dönüşümünü alalım.

Önerme 4.3 ile, $\widehat{f}$ dönüşümünün bir merkezleyen toplamsal dönüşüm olduğu görülür. Teorem 3.2 ile, her $x \in O$ elemanı için

$$[\widehat{f}(\overline{x}), \overline{x}] = \overline{0}$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse her $x \in O$ elemanı için

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= [\widehat{f}(\overline{x}), \overline{x}] \\
&= [\pi(\overline{\widetilde{f}(x)}), \overline{x}] \\
&= [\overline{\widetilde{f}(x)}, \overline{x}] \\
&= \overline{[\widetilde{f}(x), x]}
\end{aligned}$$

olur. O halde her $x \in O$ elemanı için

$$[\widetilde{f}(x), x] \in MQ$$

olmalıdır.

Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Ancak Teorem 2.28 ile

$$\bigcap_{M \in \mathrm{Spec}(B)} MQ = (0)$$

olduğu görülür ve böylece her $x \in O$ elemanı için

$$[\widetilde{f}(x), x] = 0$$

bulunur.[28]

---

[28] **Teorem 2.28.** Bir R yarıasal çok terimli özdeşliği halkasını alalım ve $Q = Q_{mr}(R)$ olsun. O zaman B halkasının maksimal ideallerinin bir $\{M_i \mid i \in I\}$ kümesi aşağıdaki koşulları sağlar:

1. Her Q/M_iQ halkası, $\overline{C} = C + M_iQ/M_iQ$ olmak üzere sonlu boyutlu bir merkezil basit $\overline{C}$-cebirdir.
2. Her $R \cap (M_iQ)$ halkası R halkasının bir asal idealidir ve $(R/R \cap (M_iQ))\overline{C} = Q/M_iQ$ olur.
3. $\bigcap_{i \in I} M_iQ = 0$ olur.

Özel olarak her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

olur. Teorem 4.1 ile ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç

Üçüncü bölümde asal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı belirlenmiştir.
Dördüncü bölümde yarıasal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı belirlenmiştir.
Asal ve yarıasal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısının aynı olduğu görülmüştür: Bir R asal veya yarıasal halkası üzerinde bir $f: R \to R$ toplamsal dönüşümü bir değişmeli dönüşüm veya bir merkezleyen dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta: R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

Kaynaklar Dizini

[1] S. A. Amitsur. Generalized polynomial identities and pivotal monomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:210–226, 1965.

[2] Pere Ara and Martin Mathieu. An application of local multipliers to centralizing mappings of C^*-algebras. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 44(174):129–138, 1993.

[3] K. I. Beidar. On functional identities and commuting additive mappings. *Comm. Algebra*, 26(6):1819–1850, 1998.

[4] K. I. Beidar and M. A. Chebotar. On functional identities and d-free subsets of rings. I, II. *Comm. Algebra*, 28(8):3925–3951, 3953–3972, 2000.

[5] K. I. Beidar and W. S. Martindale, III. On functional identities in prime rings with involution. *J. Algebra*, 203(2):491–532, 1998.

[6] K. I. Beidar, W. S. Martindale, III, and A. V. Mikhalev. *Rings with generalized identities*, volume 196 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[7] K. I. Beĭdar and A. V. Mikhalëv. Orthogonal completeness and algebraic systems. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(6(246)):79–115, 199, 1985.

[8] Matej Brešar. Centralizing mappings on von Neumann algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(2):501–510, 1991.

[9] Matej Brešar. On a generalization of the notion of centralizing mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114(3):641–649, 1992.

[10] Matej Brešar. Centralizing mappings and derivations in prime rings. *J. Algebra*, 156(2):385–394, 1993.

[11] Matej Brešar. Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 335(2):525–546, 1993.

[12] Matej Brešar. On certain pairs of functions of semiprime rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3):709–713, 1994.

[13] Matej Brešar. On generalized biderivations and related maps. *J. Algebra*, 172(3):764–786, 1995.

[14] Matej Brešar. Applying the theorem on functional identities. *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, 4(1):43–54, 1996.

[15] Matej Brešar. Functional identities: a survey. In *Algebra and its applications (Athens, OH, 1999)*, volume 259 of *Contemp. Math.*, pages 93–109. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[16] Matej Brešar. Commuting maps: a survey. *Taiwanese J. Math.*, 8(3):361–397, 2004.

[17] Matej Brešar. *Introduction to noncommutative algebra*. Universitext. Springer, Cham, 2014.

[18] Matej Brešar, Mikhail A. Chebotar, and Wallace S. Martindale, III. *Functional identities*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[19] Matej Brešar, W. S. Martindale, III, and C. Robert Miers. Centralizing maps in prime rings with involution. *J. Algebra*, 161(2):342–357, 1993.

[20] Matej Brešar and C. Robert Miers. Commuting maps on Lie ideals. *Comm. Algebra*, 23(14):5539–5553, 1995.

[21] M. Chacron. Commuting involution. *Comm. Algebra*, 44(9):3951–3965, 2016.

[22] M. A. Chebotar. A note on certain subrings and ideals of prime rings. *Comm. Algebra*, 26(1):107–116, 1998.

[23] M. A. Chebotar. On generalized functional identities on prime rings. *J. Algebra*, 202(2):655–670, 1998.

[24] Wai-Shun Cheung. Commuting maps of triangular algebras. *J. London Math. Soc. (2)*, 63(1):117–127, 2001.

[25] C.-L. Chuang. The additive subgroup generated by a polynomial. *Israel J. Math.*, 59(1):98–106, 1987.

Kaynaklar Dizini

[26] N. J. Divinsky. On commuting automorphisms of rings. *Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III*, 49:19–22, 1955.

[27] Yiqiu Du and Yu Wang. k-commuting maps on triangular algebras. *Linear Algebra Appl.*, 436(5):1367–1375, 2012.

[28] Willian Franca. Commuting maps on some subsets of matrices that are not closed under addition. *Linear Algebra Appl.*, 437(1):388–391, 2012.

[29] I. N. Herstein. *Noncommutative rings*. The Carus Mathematical Monographs, No. 15. Mathematical Association of America; distributed by John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

[30] I. N. Herstein. *Rings with involution*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1976.

Kaynaklar Dizini

[31] Hülya G. Inceboz, M. Tamer Koşan, and Tsiu-Kwen Lee. m-power commuting MAPS on semiprime rings. *Comm. Algebra*, 42(3):1095–1110, 2014.

[32] Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Dover Publications, Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original.

[33] E. Kissin and V. S. Shulman. Range-inclusive maps on C^*-algebras. *Q. J. Math.*, 53(4):455–465, 2002.

[34] Charles Lanski. Differential identities, Lie ideals, and Posner's theorems. *Pacific J. Math.*, 134(2):275–297, 1988.

[35] Charles Lanski. An Engel condition with derivation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(3):731–734, 1993.

[36] Charles Lanski. An Engel condition with derivation for left ideals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(2):339–345, 1997.

[37] P. H. Lee and T. K. Lee. Lie ideals of prime rings with derivations. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 11(1):75–80, 1983.

[38] P. H. Lee and T. K. Lee. Derivations centralizing symmetric or skew elements. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 14(3):249–256, 1986.

[39] P. H. Lee and T. L. Wong. Derivations cocentralizing Lie ideals. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 23(1):1–5, 1995.

[40] Pjek-Hwee Lee and Tsiu-Kwen Lee. Linear identities and commuting maps in rings with involution. *Comm. Algebra*, 25(9):2881–2895, 1997.

[41] Pjek-Hwee Lee and Yu Wang. Supercentralizing maps in prime superalgebras. *Comm. Algebra*, 37(3):840–854, 2009.

[42] Pjek-Hwee Lee, Tsai-Lien Wong, Jer-Shyong Lin, and Ren-June Wang. Commuting traces of multiadditive mappings. *J. Algebra*, 193(2):709–723, 1997.

[43] Tsiu-Kwen Lee and Tsong-Cherng Lee. Commuting additive mappings in semiprime rings. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 24(4):259–268, 1996.

[44] Pao-Kuei Liau and Cheng-Kai Liu. An Engel condition with b-generalized derivations for Lie ideals. *J. Algebra Appl.*, 17(3):1850046, 17, 2018.

[45] Cheng-Kai Liu. Additive n-commuting maps on semiprime rings. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 63(1):193–216, 2020.

[46] Cheng-Kai Liu and Jheng-Jie Yang. Power commuting additive maps on invertible or singular matrices. *Linear Algebra Appl.*, 530:127–149, 2017.

[47] Wallace S. Martindale, III. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. *J. Algebra*, 12:576–584, 1969.

[48] Joseph H. Mayne. Centralizing automorphisms of prime rings. *Canad. Math. Bull.*, 19(1):113–115, 1976.

[49] C. Robert Miers. Centralizing mappings of operator algebras. *J. Algebra*, 59(1):56–64, 1979.

[50] Edward C. Posner. Derivations in prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8:1093–1100, 1957.

Kaynaklar Dizini

[51] Edward C. Posner. Prime rings satisfying a polynomial identity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:180–183, 1960.

[52] J. Vukman. Commuting and centralizing mappings in prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1):47–52, 1990.

[53] J. Vukman. On derivations in prime rings and Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(4):877–884, 1992.

[54] Zhankui Xiao and Feng Wei. Commuting mappings of generalized matrix algebras. *Linear Algebra Appl.*, 433(11-12):2178–2197, 2010.