T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

ASAL VE YARIASAL HALKALAR ÜZERİNDE DEĞİŞMELİ VE MERKEZLEYEN DÖNÜŞÜMLER

Utkan UTKANER

Danışman: Doç. Dr. Çağrı DEMİR

Matematik Anabilim Dalı

İzmir
2022

Utkan Utkaner tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan "Asal ve Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli ve Merkezleyen Dönüşümler" başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 05/09/2022 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	**:** Doç. Dr. Çağrı Demir	
Raportör Üye	**:** Prof. Dr. Mustafa Kemal Berktaş	
Üye	**:** Prof. Dr. Nurcan Argaç	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Asal ve Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli ve Merkezleyen Dönüşümler" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

05/09/2022

Utkan Utkaner

ÖZET

ASAL VE YARIASAL HALKALAR ÜZERİNDE DEĞİŞMELİ VE MERKEZLEYEN DÖNÜŞÜMLER

UTKANER, Utkan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Çağrı DEMİR
2022, 66 sayfa

Bu tez esas olarak dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu tanıtılmıştır ve ilgili çalışmalar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacak bazı temel kavram, tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, asal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde, yarıasal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Birleşmeli halka, asal halka, yarıasal halka, değişmeli dönüşüm, merkezleyen dönüşüm.

ABSTRACT

COMMUTING AND CENTRALIZING MAPS ON PRIME AND SEMIPRIME RINGS

UTKANER, Utkan

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Çağrı DEMİR

2022, 66 pages

This thesis essentially consists of four chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and the corresponding literature is briefly outlined.

In the second chapter, some basic concepts, definitions, and theorems that will aid in a better understanding of the thesis are reviewed.

The third chapter determines the structure of commuting additive maps and centralizing additive maps on prime rings.

The fourth chapter determines the structure of commuting additive maps and centralizing additive maps on semiprime rings.

Keywords: Associative ring, prime ring, semiprime ring, commuting map, centralizing map.

ÖN SÖZ

Düşüncenin yapısı hakkında düşünmeyi her zaman heyecan verici buldum. Bu çalışmada da bir matematiksel düşüncenin gelişme sürecini inceledik ve onu "gerçek" bir matematik teoremine dönüştüren özelliklerini araştırdık.

İZMİR
05/09/2022

Utkan Utkaner

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Pozitif tamsayıların kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar halkası
δ_{jk}	Kronecker delta
$GF(q)$	Eleman sayısı q olan Galois cismi
S_n	$\{1, \ldots, n\}$ kümesi üzerindeki simetrik grup
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	Bir σ permütasyonunun işareti
$\mathrm{char}(R)$	Bir R halkasının karakteristiği
$Z(R)$	Bir R halkasının merkezi
R°	Bir R halkasının ters halkası
$M_n(R)$	Bir R halkası üzerindeki $n \times n$ matrisler halkası
$\mathrm{End}_R(M)$	Bir M R-modülünün endomorfizmalar halkası
${}_aM_b$	İki yanlı çarpma dönüşümü
$M(R)$	Bir R halkasının çarpım halkası
$\mathrm{End}_F(A)$	Bir A F-cebirinin endomorfizmalar halkası
$[A\colon F]$	Bir A F-cebirinin boyutu

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

Simgeler	Açıklama
$[x, y]$	x, y elemanlarının komütatörü
$[x, y]_n$	x, y elemanlarının n'inci dereceden komütatörü
$x \circ y$	x, y elemanlarının Jordan çarpımı
$[R, S]$	r, s elemanları için $[r, s]$ komütatörleri ile üretilen toplamsal alt grup
RS	r, s elemanları için rs çarpımları ile üretilen toplamsal alt grup
$S(R)$	Bir R involüsyonlu halkasının simetrik elemanlarının kümesi
$K(R)$	Bir R involüsyonlu halkasının ters simetrik elemanlarının kümesi
$\oplus$	Direkt toplam
$\otimes$	Tensör çarpım
$*$	Serbest çarpım
X^*	Bir X kümesi üzerindeki serbest monoid
$R < X >$	Bir X kümesi üzerindeki serbest R-cebir
$l(w)$	Bir w kelimesinin uzunluğu
$\deg(f)$	Bir f çok terimlisinin derecesi
St_d	Derecesi d olan standart çok terimli

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

Simgeler	Açıklama
$Q_Z(R)$	Bir R halkasının merkezil kesirler halkası
$Q_{rc}(R)$	Bir R halkasının sağ klasik kesirler halkası
$Q_{mr}(R)$	Bir R halkasının maksimal sağ kesirler halkası
$Q_r(R)$	Bir R halkasının iki yanlı sağ kesirler halkası
$Q_s(R)$	Bir R halkasının simetrik kesirler halkası
C	Bir R halkasının genişletilmiş merkezi
RC	Bir R halkasının merkezil kapanışı
$B(C)$	Bir R halkasının genişletilmiş merkezinin idempotentlerinin kümesi
$\mathrm{Spec}(B)$	Bir R halkası için $B(C)$ halkasının maksimal ideallerinin kümesi
$O(T)$	Bir $T \subseteq Q_{mr}(R)$ alt kümesinin ortogonal tamlaması
$\deg(q)$	Bir $q \in Q_{mr}(R)$ elemanının cebirsellik derecesi
$\deg(S)$	Bir $S \subseteq Q_{mr}(R)$ alt kümesinin cebirsellik derecesi
$r(T;S)$	Bir S halkasının bir T halkası içindeki sağ sıfırlayanı
$(T;S)$	Bir S halkasının bir T halkası içindeki iki yanlı sıfırlayanı

1 GİRİŞ

Bu çalışmada R, birimli olması gerekmeyen bir birleşmeli halka olacaktır. Ayrıca R halkasının merkezi Z ve var olması durumunda genişletilmiş merkezi C ile gösterilecektir. Sıfırdan farklı iki idealinin çarpımı sıfırdan farklı olan bir halkaya **asal halka** denir. Buna denk olarak, bazı $a, b \in R$ elemanları için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkası asaldır. Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan bir halkaya **yarıasal halka** denir. Buna denk olarak, bir $a \in R$ elemanı için $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkası yarıasaldır. Bir R halkasının bazı $x, y \in R$ elemanlarının komütatörü

$$[x, y] = xy - yx$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bazı $x, y \in R$ elemanlarının n'inci dereceden komütatörü,

$$[x, y]_1 = [x, y]$$

olmak üzere her $n > 1$ tamsayısı için

$$[x, y]_n = [[x, y]_{n-1}, y]$$

olarak tanımlanır. Bir Engel koşulu, bir $n > 1$ tamsayısı için

$$[x + y, z]_n = [x, z]_n + [y, z]_n$$

eşitliğini sağlayan, değişmeli olmayan x ve y belirsizlerinin bir

$$[x, y]_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y^i x y^{n-i}$$

çok terimlisidir. Bir Engel koşulunu sağlayan bir halkanın değişmeli veya nilpotent olup olmadığı sorusu Engel'in Lie cebirleri ile ilgili çalışmasına dayanır (Jacobson, 1979).

Bir R halkasını alalım. Bir $f\colon R \to R$ dönüşümü, her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa bu dönüşüme değişmeli dönüşüm denir. Ayrıca bir $f\colon R \to R$ dönüşümü, her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] \in Z$$

bağıntısını sağlıyorsa bu dönüşüme merkezleyen dönüşüm denir. Benzer şekilde n-değişmeli ve n-merkezleyen dönüşümler tanımlanır. Değişmeli ve merkezleyen dönüşümler ilk olarak Divinsky ve Posner tarafından çalışılmıştır. Divinsky 1955 yılında, birimden farklı bir değişmeli otomorfizmaya sahip bir basit Artin halkasının değişmeli olduğunu göstermiştir (Divinsky, 1955). Diğer taraftan, Posner 1957 yılında, sıfırdan farklı bir merkezleyen türeve sahip bir asal halkanın değişmeli olduğunu göstermiştir (Posner, 1957). Daha sonra bu sonuçlar birçok araştırmacı tarafından çeşitli yönlerde genişletilmiştir (Chacron, 2016; Chebotar, 1998a; Lanski, 1988; Lee and Lee, 1983, 1986; Liau and Liu, 2018; Mayne, 1976). Brešar 1993 yılında, bir merkezleyen dönüşümün, otomorfizmalarda veya türevlerde olduğu gibi elemanların çarpımlarının üzerinde nasıl etki ettiğini gözetmeksizin sadece toplamsallığını varsayarak karakterize edilebileceğini göstermiştir: Bir R asal halkası üzerinde bir f merkezleyen toplamsal dönüşümü, R halkasının karakteristiği 2'den farklı veya f dönüşümü değişmeli ise bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

formundadır (Brešar, 1993a). Bu sonuç daha sonra yarıasal halkalara (Brešar, 1994; Lee and Lee, 1996), asal halkaların bazı toplamsal alt gruplarına (Beidar and Martindale, 1998; Brešar and Miers, 1995; Brešar et al., 1993; Lee and Lee, 1997), süpercebirlere (Lee and Wang, 2009), von Neumann cebirlerine ve C^*-cebirlerine (Ara and Mathieu, 1993; Brešar, 1991; Kissin and Shulman, 2002; Miers, 1979), üçgensel cebirlere ve matris cebirlerine (Cheung, 2001; Du and Wang, 2012; Franca, 2012; Liu and Yang, 2017; Xiao and Wei, 2010) genişletilmiştir.

Vukman 1990 yılında, türevleri içeren Engel tipi özdeşlikleri çalışarak Posner'in teoremini asal halkalarda 2-değişmeli türevlere (Vukman, 1990) ve

2-merkezleyen türevlere (Vukman, 1992) genişletmiştir. Daha sonra Brešar benzer bir sonucu karakteristiği 2 olmayan asal halkalarda 2-değişmeli toplamsal dönüşümler için elde etmiştir (Brešar, 1992). Lanski 1993 yılında, Kharchenko'nın diferansiyel özdeşlikler teorisini kullanarak Vukman'ın teoremlerini asal halkalarda n-değişmeli türevlere genişletmiştir (Lanski, 1993). Lanski'nin çalışmasından etkilenen Brešar 1996 yılında, genelleştirilmiş fonsiyonel özdeşlikler teorisinden yararlanarak asal halkalar üzerinde n-değişmeli toplamsal dönüşümleri belirli kısıtlamalar altında karakterize etmiştir (Brešar, 1996). Diğer taraftan, Beidar 1998 yılında, asal halkalarda fonksiyonel özdeşlikler teorisini geliştirerek, cebirsellik derecesi çok küçük olmayan asal halkalarda n-değişmeli toplamsal dönüşümlerin karakterize edilebileceğini göstermiştir (Beidar, 1998). Liu 2020 yılında, bu kısıtlamaları kaldırarak herhangi bir asal halkada n-değişmeli toplamsal dönüşümleri karakterize etmiştir ve elde ettiği sonuçların herhangi bir yarıasal halkada da doğru olduğunu göstermiştir (Liu, 2020).

Bu çalışmada, bir asal halkada veya bir yarıasal halkada bir değişmeli toplamsal dönüşümün veya bir merkezleyen toplamsal dönüşümün yapısı halka üzerinde herhangi bir kısıtlama olmadan karakterize edilecektir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacak bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler gözden geçirilmiştir.

2.1 Genel Bilgiler

Bu bölümde genel bilgilere yer verilecektir.

Tanım 2.1. *(Brešar, 2014) Sıfırdan farklı her elemanı tersinir olan sıfırdan farklı bir birimli halkaya* ***bölümlü halka*** *denir. Bir değişmeli bölümlü halkaya* ***cisim*** *denir.*

Tanım 2.2. *(Brešar, 2014) Sıfırdan ve kendisinden başka ideali olmayan bir R halkası için $R^2 \neq (0)$ ise bu halkaya* ***basit halka*** *denir.*

Tanım 2.3. *(Brešar, 2014) Bir R halkasının elemanlarının kümesi, R halkasındaki toplama işlemi ve her $x, y \in R$ elemanı için*

$$x \cdot y = yx$$

ile tanımlı çarpma işlemi ile bir halka olur. Bu halkaya R halkasının ***ters halkası*** *denir ve R° ile gösterilecektir.*

Tanım 2.4. *(Brešar, 2014) Bir R halkasını alalım. Bir M R-modülünün* ***sıfırlayanı***

$$ann_R(M) = \{r \in R \mid rM = (0)\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.5. *(Brešar, 2014) Bir R halkasını alalım ve M bir R-modül olsun. Eğer $RM \neq 0$ ise ve M R-modülünün aşikar olmayan bir R-alt modülü yoksa M R-modülüne* ***basit*** ***R-modül*** *denir.*

Teorem 2.1. *(Brešar, 2014) Bir F cismini alalım. Her A F-cebiri ve her $n \geq 1$ tamsayısı için*

$$M_n(F) \otimes A \cong M_n(A)$$

olur.

Tanım 2.6. *(Brešar, 2014) Sıfırlayanı sıfır olan bir basit modüle sahip bir halkaya **primitif halka** denir.*

Teorem 2.2. *(Brešar, 2014) Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *Bazı $a, b \in R$ elemanları için $aRb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olur.*
2. *Bazı I ve J sol idealleri için $IJ = (0)$ ise $I = (0)$ veya $J = (0)$ olur.*
3. *Bazı I ve J sağ idealleri için $IJ = (0)$ ise $I = (0)$ veya $J = (0)$ olur.*
4. *Bazı I ve J idealleri için $IJ = (0)$ ise $I = (0)$ veya $J = (0)$ olur.*

Tanım 2.7. *(Brešar, 2014) Teorem 2.2 ile verilen denk koşullardan birini sağlayan bir R halkasına **asal halka** denir.*

Teorem 2.3. *(Brešar, 2014) Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *Bir $a \in R$ elemanı için $aRa = (0)$ ise $a = 0$ olur.*
2. *Bir I sol ideali için $I^2 = (0)$ ise $I = (0)$ olur.*
3. *Bir I sağ ideali için $I^2 = (0)$ ise $I = (0)$ olur.*
4. *Bir I ideali için $I^2 = (0)$ ise $I = (0)$ olur.*
5. *Sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.*

Tanım 2.8. *(Brešar, 2014) Teorem 2.3 ile verilen denk koşullardan birini sağlayan bir R halkasına **yarıasal halka** denir.*

Tanım 2.9. *(Brešar, 2014) Bir R değişmeli halkasını ve bir A R-modülünü alalım. Her $x, y \in R$ ve $a, b, c \in A$ elemanı için*

$$(xa + yb)c = x(ac) + y(bc)$$

ve

$$a(xb + yc) = x(ab) + y(ac)$$

*eşitliklerini sağlayan, $(x, y) \mapsto xy$ kuralıyla tanımlı bir $A \times A \to A$ birleşmeli çarpma işlemi ile A R-modülüne bir **R-cebir** denir.*

Bölümlü cebir, basit cebir, primitif cebir, asal cebir ve yarıasal cebir tanımları yukarıdaki tanımlara benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.10. *(Brešar, 2014) Bir F cismini alalım. Sıfırdan farklı bir A birimli F-cebirinin merkezi $F1_A$ ise A birimli F-cebirine **merkezil cebir** denir.*

Tanım 2.11. *(Brešar, 2014) Bir R birimli halkasını alalım ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer bir $\{e_{ij} \in R \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ kümesinin elemanları için*

$$e_{11} + \cdots + e_{nn} = 1$$

ve

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$$

*oluyorsa bu kümeye $n \times n$ **birimsel matrislerin kümesi** denir.*

Tanım 2.12. *(Brešar, 2014) Bir R halkasını alalım. Bir M R-modülünün R-modül endomorfizmalarının kümesi, her f, g R-modül endomorfizması ve $x \in M$ elemanı için*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ve

$$(fg)(x) = f(g(x))$$

*ile tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile bir halka olur. Bu halkaya M R-modülünün **endomorfizmalar halkası** denir ve $End_R(M)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.13. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasını alalım. Bazı $a, b \in R$ elemanları için, $x \in R$ olmak üzere*

$${}_aM_b(x) = axb$$

*ile tanımlı ${}_aM_b \in End_{\mathbb{Z}}(R)$ elemanına **iki yanlı çarpma dönüşümü** denir. Ayrıca $End_{\mathbb{Z}}(R)$ halkasının, iki yanlı çarpma dönüşümlerinin sonlu toplamları olarak yazılabilen elemanlarının kümesine R halkasının **çarpım halkası** denir ve $M(R)$ ile gösterilecektir.*

Tanım 2.14. *(Brešar, 2014) Bir A birimli cebirinin bir K alt cebiri bir cisim ve $F \subseteq K$ ise K cebirine A cebirinin **alt cismi** denir. Eğer A cebirinin bir K alt cismi, A cebirinin başka bir alt cisminde öz olarak kapsanmıyorsa K alt cismine **maksimal alt cisim** denir.*

Teorem 2.4. *(Brešar, 2014) Bir F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir D merkezil bölümlü cebiri ve D cebirinin bir K maksimal alt cismi için*

$$[D\colon F] = [K : F]^2$$

olur.

Teorem 2.5. *(Brešar, 2014) Bir M R-modülü bir basit R-modül ise M R-modülünün R-modül endomorfizmalarının halkası $\mathrm{End}_R(M)$ bir bölümlü halkadır.*

Tanım 2.15. *(Brešar, 2014) Bir D bölümlü halkası üzerinde bir V vektör uzayının $\mathrm{End}_D(V)$ endomorfizmalar halkasının bir alt halkası R olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı için V vektör uzayının her $\{v_1, \ldots v_n\}$ doğrusal bağımsız alt kümesi, herhangi bir $\{w_1, \ldots, w_n\}$ alt kümesi ve her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için*

$$f(v_i) = w_i$$

olacak şekilde bir $f \in R$ elemanı varsa R halkasına V vektör uzayının doğrusal operatörlerinin bir ***yoğun halkası*** *denir.*

Teorem 2.6. *(Brešar, 2014) Bir R halkasının primitif olması için gerek ve yeter bir koşul R halkasının bir bölümlü halka üzerinde bir vektör uzayının doğrusal operatörlerinin bir yoğun halkasına izomorf olmasıdır.*

Tanım 2.16. *(Brešar, 2014) Boştan farklı bir $X = \{x_i \mid x \in I\}$ kümesinin sonlu bir $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ dizisine bir* ***kelime*** *diyelim. Ayrıca boş diziye bir* ***boş kelime*** *diyelim ve boş kelimeyi 1 ile gösterelim. O zaman tüm kelimelerin kümesi*

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_n})(x_{j_1} \ldots x_{j_m}) = x_{i_1} \ldots x_{i_n} x_{j_1} \ldots x_{j_m}$$

ile tanımlı çarpma işlemi ile bir monoid olur ve bu monoide X kümesi üzerindeki ***serbest monoid*** *denir. Serbest monoidi X^* ile gösterelim. Bir R değişmeli halkası üzerindeki X^* monoidi ile üretilen cebire* ***serbest R-cebir*** *denir ve $R < X >$ ile gösterilecektir. Ayrıca X kümesinin elemanlarına* ***belirsizler*** *ve $R < X >$ serbest cebirinin elemanlarına* ***değişmeli olmayan***

çok terimliler *veya kısaca* ***çok terimliler*** *denir.* ***Katsayı****,* ***sabit terim*** *ve* ***sabit çok terimli****, değişmeli çok terimlilerde olduğu gibi tanımlanır. Burada bir* ***tek terimli*** *bir kelimenin sıfırdan farklı bir skaler katıdır. Boştan farklı bir $w = x_1 \dots x_n$ kelimesinin* ***uzunluğu***

$$l(w) = n$$

ile tanımlanır ve

$$l(1) = 0$$

olarak alınır. Sıfırdan farklı bir $f = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ çok terimlisinin ***derecesi***

$$deg(f) = max\{l(w_1), \dots, l(w_n)\}$$

olur. Tüm tek terimlilerinin derecesi aynı olan bir çok terimliye ***homojen çok terimli*** *denir. Bir homojen çok terimlinin her tek terimlisinde bir belirsiz yalnız bir kere yer alıyorsa bu çok terimliye* ***çoklu doğrusal çok terimli*** *denir.*

Tanım 2.17. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının, bazı $x, y \in R$ elemanları için*

$$[x, y] = xy - yx$$

ile tanımlı elemanına $x, y \in R$ elemanlarının ***Lie çarpımı*** *ya da* ***komütatörü*** *denir. Eğer bir $f : R \to R$ dönüşümü her $x \in R$ elemanı için*

$$[f(x), x] = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa bu dönüşüme ***değişmeli dönüşüm*** *denir. Eğer her $x \in R$ elemanı için*

$$[f(x), x] \in Z$$

ise f dönüşümüne ***merkezleyen dönüşüm*** *denir.*

Tanım 2.18. *(Liu, 2020) Bir R halkasının bazı $x, y \in R$ elemanları için*

$$[x, y]_1 = [x, y]$$

olmak üzere bir $n > 1$ tamsayısı için

$$[x, y]_n = [[x, y]_{n-1}, y]$$

olsun. Eğer bir $f\colon R \to R$ dönüşümü her $x \in R$ ve bir $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı için

$$[f(x), x]_n = 0$$

*eşitliğini sağlıyorsa bu dönüşüme n-**değişmeli dönüşüm** denir. Eğer her $x \in R$ ve bir $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı için*

$$[f(x), x]_n \in Z$$

*ise f dönüşümüne n-**merkezleyen dönüşüm** denir.*

Teorem 2.7. *(Herstein, 1976) Bir R yarıasal halkasının bir $a \in R$ elemanı her $x, y \in R$ elemanı için $[x, y]$ komütatörleri ile değişmeli ise $a \in Z$ olur.*

Tanım 2.19. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının, bazı $x, y \in R$ elemanları için*

$$x \circ y = xy + yx$$

*ile tanımlı elemanına x ve y elemanlarının **Jordan çarpımı** denir.*

Tanım 2.20. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının sıfırdan farklı her $a \in R$ elemanı ve bir $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı için $na \neq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa R halkasına n-**burulmasız halka** denir.*

Tanım 2.21. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının her $a \in R$ elemanı için $na = 0$ olacak şekilde bir en küçük n pozitif tamsayısı varsa n tamsayısına R halkasının **karakteristiği** denir ve $char(R) = n$ ile gösterilecektir. Eğer böyle bir n tamsayısı yoksa R halkasının karakteristiği sıfır olarak tanımlanır.*

Tanım 2.22. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının*

$$[L, L] \subseteq L$$

*olacak şekilde bir L toplamsal alt grubuna R halkasının **Lie alt halkası** denir. Bir L Lie alt halkasının*

$$[I, L] \subseteq I$$

olacak şekilde bir I toplamsal alt grubuna L halkasının ***Lie ideali*** *denir. Bir Lie alt halkasının merkezinde kapsanmayan bir Lie idealine* ***merkezil olmayan Lie ideal*** *denir.* ***Jordan alt halkalar*** *ve* ***Jordan idealler*** *benzer şekilde tanımlanır.*

Tanım 2.23. *(Brešar, 2014) Bir R halkası üzerinde bir* ***involüsyon****, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x \mapsto x^*$ dönüşümüdür:*

1. *Her $x, y \in R$ elemanı için $(x+y)^* = x^* + y^*$ olur.*
2. *Her $x, y \in R$ elemanı için $(xy)^* = y^* x^*$ olur.*
3. *Her $x \in R$ elemanı için $(x^*)^* = x$ olur.*

Ayrıca R halkasının ***simetrik elemanlarının kümesi***

$$S(R) = \{x \in R \mid x^* = x\}$$

ve ***ters simetrik elemanlarının kümesi***

$$K(R) = \{x \in R \mid x^* = -x\}$$

olarak tanımlanır. Burada $S(R)$ kümesi R halkasının bir Jordan alt halkasıdır ve $K(R)$ kümesi R halkasının bir Lie alt halkasıdır.

Tanım 2.24. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasını ve bir S halkasının bir L Lie alt halkasını alalım. Eğer bir $f\colon L \to R$ dönüşümü her $x, y \in L$ elemanı için*

$$f([x,y]) = [f(x), f(y)]$$

eşitliğini sağlıyorsa f dönüşümüne ***Lie homomorfizması*** *denir.* ***Jordan homomorfizmaları*** *benzer şekilde tanımlanır.*

Tanım 2.25. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının bir M (R,R)-bimodülünü ve bir $d\colon R \to M$ toplamsal dönüşümünü alalım. Her $x, y \in R$ elemanı için*

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

ise bu dönüşüme ***türev dönüşümü*** *denir. Sabit bir $a \in R$ elemanı için $x \mapsto [a, x]$ kuralıyla tanımlı dönüşüm R halkasının bir türevidir ve* ***iç türev*** *olarak adlandırılır.*

Tanım 2.26. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının bir M (R, R)-bimodülünü ve bir L Lie alt halkasını alalım. Bir $d\colon L \to M$ dönüşümü her $x, y \in L$ elemanı için*

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

*eşitliğini sağlıyorsa bu dönüşüme **Lie türev** denir. **Jordan türevler** benzer şekilde tanımlanır.*

Tanım 2.27. *(Brešar et al., 2007) Bir G toplamsal grubu için n kere kartezyen çarpımı $G^n = G \times \cdots \times G$ olsun ve bir H toplamsal grubunu alalım. Eğer bir $B\colon G^n \to H$ dönüşümü her bileşeni için toplamsal ise B dönüşümüne **n-toplamsal dönüşüm** denir. Ayrıca $x \mapsto B(x, \ldots, x)$ dönüşümüne B **n-toplamsal dönüşümünün izi** denir. Özel olarak $n = 2$ durumunda B dönüşümüne **ikitoplamsal dönüşüm** denir. Her bileşeni için bir türev olan bir ikitoplamsal dönüşüme **ikitürev** denir.*

Tanım 2.28. *(Beidar et al., 1996) Bir G toplamsal grubu için n kere kartezyen çarpımı $G^n = G \times \cdots \times G$ olsun ve bir H toplamsal grubunu alalım. Eğer bir $B\colon G^n \to H$ n-toplamsal dönüşümü her $x_1, \ldots, x_n \in G$ elemanı ve her $\sigma \in S_n$ permütasyonu için*

$$B(x_1, \ldots, x_n) = B(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma_n}) \tag{2.1}$$

*eşitliğini sağlıyorsa B n-toplamsal dönüşümüne **simetrik n-toplamsal dönüşüm** denir.*

2.2 Maksimal Kesirler Halkası

Maksimal kesirler halkaları ve genişletilmiş merkezler birçok çalışmaya konu olmuştur. Asal ve yarıasal halkalarda genelleştirilmiş çok terimli özdeşliklerini çalışırken önemli rol oynarlar. Değişmeli bölgeler her zaman kesirler cismi denilen bir cisim içine gömülebilir. Benzer kurgular halka teorisinde yaygındır. Fakat değişmeli olmayan halkalarda bazı zorluklar ortaya çıkar. Örneğin her bölge bir bölümlü halka içine gömülemez. Bu nedenle elemanların terslerine ihtiyaç duyulduğunda daha ince yaklaşımlara gerek duyulmaktadır. Maksimal kesirler halkalarından başka, merkezil kesirler halkaları, klasik kesirler halkaları ve Martindale kesirler halkaları gibi iyi bilinen daha küçük kesirler halkaları da vardır. Fakat bu halkaların merkezleri, yani orijinal halkanın genişletilmiş merkezi aynıdır.

Bu bölümde bazı tanım ve teoremler keyfi halkalar için de doğrudur. Ancak yine de aksi belirtilmedikçe R bir yarıasal halka olacaktır.

Tanım 2.29. *(Brešar, 2014) Bir R halkasının sıfırdan farklı bir $a \in R$ elemanı ne bir sol sıfır bölen ve ne de bir sağ sıfır bölen ise $a \in R$ elemanına* ***regüler eleman*** *denir.*

Tanım 2.30. *(Brešar, 2014) Merkezi sıfırdan farklı bir R halkasını alalım ve $Z \setminus \{0\}$ kümesinin her elemanı regüler olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $Q_Z(R)$ halkasına R halkasının* ***merkezil kesirler halkası*** *denir:*

1. *$Q_Z(R)$ halkası R halkasını içeren bir birimli halkadır.*
2. *$Z \setminus \{0\}$ kümesinin her elemanı $Q_Z(R)$ halkasında tersinirdir.*
3. *$Q_Z(R)$ halkasının her elemanı $a \in R$ ve $b \in Z \setminus \{0\}$ olmak üzere ab^{-1} formundadır.*

Tanım 2.31. *(Brešar, 2014) Bir R halkasını alalım ve R halkasının regüler elemanlarının kümesi S olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $Q_{rc}(R)$ halkasına R halkasının* ***sağ klasik kesirler halkası*** *denir:*

1. *$Q_{rc}(R)$ halkası R halkasını içeren bir birimli halkadır.*
2. *S kümesinin her elemanı $Q_{rc}(R)$ halkasında tersinirdir.*
3. *$Q_{rc}(R)$ halkasının her elemanı $a \in R$ ve $b \in S$ olmak üzere ab^{-1} formundadır.*

Tanım 2.32. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasının bir I sağ idealini alalım. Eğer $a_1 \neq 0$ olmak üzere bazı $a_1, a_2 \in R$ elemanları için $a_1 a \neq 0$ ve $a_2 a \in I$ olacak şekilde bir $a \in R$ elemanı varsa I idealine* ***yoğun sağ ideal*** *denir.*

Tanım 2.33. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasının bir I sağ idealini alalım. Eğer R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin I sağ ideali ile kesişimi sıfırdan farklı ise I sağ idealine* ***esansiyel sağ ideal*** *denir.*

Teorem 2.8. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasının bir I ideali için aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *I idealinin R halkası içindeki sol sıfırlayanı sıfırdır.*
2. *I ideali bir yoğun sağ idealdir.*
3. *I ideali bir esansiyel sağ idealdir.*
4. *I ideali bir esansiyel idealdir.*

Tanım 2.34. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasının I yoğun sağ ideallerinin ve $f\colon I \to R$ sağ R-modül homomorfizmalarının $(f;I)$ ikililerinin kümesini alalım. Bu küme üzerinde*

$$(f;I) \sim (g;J) \iff \text{“Bir } K \subseteq I \cap J \text{ yoğun sağ ideali üzerinde } f = g \text{ olur.”}$$

ile tanımlı $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. O halde $(f;I)$ ikililerinin denklik kümesini $[f;I]$ ile gösterelim ve denklik sınıflarının kümesi üzerinde

$$[f;I] + [g;I] = [f+g; I \cap J]$$
$$[f;I][g;J] = [fg; g^{-1}(I)]$$

işlemlerini tanımlayalım. Denklik sınıflarının kümesi bu işlemler ile bir halka olur. Bu halkaya R halkasının ***maksimal sağ kesirler halkası*** *denir ve $Q_{mr}(R)$ ile gösterilecektir. Ayrıca $Q_{mr}(R)$ halkası da yarıasaldır. Eğer R halkası asal ise $Q_{mr}(R)$ halkası asal olur.*

Tanım 2.35. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasını alalım ve R halkasının, R halkası içindeki sol sıfırlayanı sıfır olan ideallerinin kümesi $\mathcal{I} = \mathcal{I}(R)$ olsun. Bu küme çarpma işlemi ve sonlu kesişimler altında kapalıdır. Ayrıca $\mathcal{I}$ kümesinin elemanları esansiyel ideallerdir. Şimdi $I \in \mathcal{I}$ elemanlarının ve $f\colon I \to R$ sağ R-modül homomorfizmalarının $(f;I)$ ikililerinin kümesini alalım. Bu küme üzerinde*

$$(f;I) \sim (g;J) \iff \text{“Bir } K \subseteq I \cap J \text{ ideali üzerinde } f = g \text{ olur.”}$$

ile tanımlı $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. O halde $(f; I)$ ikililerinin denklik kümesini $\{f; I\}$ ile gösterelim ve denklik sınıflarının kümesi üzerinde

$$\{f; I\} + \{g; I\} = \{f + g; JI\}$$
$$\{f; I\}\{g; J\} = \{fg; JI\}$$

işlemlerini tanımlayalım. Denklik sınıflarının kümesi bu işlemler ile bir halka olur. Bu halkaya R halkasının ***iki yanlı sağ (Martindale) kesirler halkası*** *denir ve $Q_r(R)$ ile gösterilecektir. Ayrıca $Q_r(R)$ halkasının*

$$Q_s(R) = \{q \in Q_{mr}(R) \mid \exists I \in \mathcal{I}, qI \cup Iq \subseteq R\}$$

ile tanımlı alt halkasına R halkasının ***simetrik (Martindale) kesirler halkası*** *denir ve $Q_s(R)$ ile gösterilecektir. Ayrıca $Q_r(R)$ ve $Q_s(R)$ halkaları da yarıasaldır. Eğer R halkası asal ise $Q_r(R)$ ve $Q_s(R)$ halkaları asal olur.*

Bir R halkasının maksimal sağ kesirler halkası bir sonraki teoremde verilen özelliklere sahiptir.

Teorem 2.9. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkası için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $Q_{mr}(R)$ halkası vardır:*

1. *R halkası $Q_{mr}(R)$ halkasının bir alt halkasıdır.*
2. *Her $q \in Q_{mr}(R)$ elemanı için $qI \subseteq R$ olacak şekilde R halkasının bir I yoğun sağ ideali vardır.*
3. *Eğer $0 \neq q \in Q_{mr}(R)$ ise R halkasının her I yoğun sağ ideali için $qI \neq (0)$ olur.*
4. *Eğer R halkasının bir I yoğun sağ ideali üzerinde bir $f\colon I \to R$ dönüşümü bir sağ R-modül homomorfizması ise her $x \in I$ elemanı için $f(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q_{mr}(R)$ elemanı vardır.*

Ayrıca $Q_{mr}(R)$ halkası bu özellikler ile izomorfizma altında tek türlü belirlenir.

Sonuç 2.1. *(Beidar et al., 1996) Her $a_1, \ldots, a_n \in Q_{mr}(R)$ elemanı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $a_iI \subseteq R$ olacak şekilde R halkasının bir I yoğun sağ ideali vardır.*

Sonuç 2.2. *(Brešar, 1994) Bir R halkasını ve R halkasının bir I esansiyel idealini alalım. Eğer bir $f\colon I \to R$ dönüşümü bir (R, R)-bimodül homomorfizması ise her $x \in I$ elemanı için*

$$f(x) = \lambda x$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı vardır. Ayrıca bir $q \in Q_{mr}(R)$ elemanı için $qI = (0)$ ise $q = 0$ olur.

Teorem 2.10. *(Beidar et al., 1996) Bir R yarıasal halkasını ve R halkasının bir I yoğun sağ idealini alalım. Eğer $Q_{mr}(R)$ halkasının bir S alt halkası için $I \subseteq S$ ise S halkası yarıasaldır.*

Teorem 2.11. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasını ve R halkasının bir I yoğun sağ idealini alalım. Eğer $Q_{mr}(R)$ halkasının bir S alt halkası için $I \subseteq S$ ise*

$$Q_{mr}(S) = Q_{mr}(R)$$

olur.

Sonuç 2.3. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkası için*

$$Q_{mr}(Q_{mr}(R)) = Q_{mr}(R)$$

olur.

Tanım 2.36. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının maksimal sağ kesirler halkasının merkezine R halkasının* ***genişletilmiş merkezi*** *denir. Bu halka C ile gösterilecektir. Ayrıca C halkası bir von Neumann regüler halkadır yani her $\lambda \in C$ elemanı için $\lambda = \lambda\mu\lambda$ olacak şekilde bir $\mu \in C$ elemanı vardır.*

Tanım 2.37. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasının* ***merkezil kapanışı****, $Q_{mr}(R)$ C-cebirinin, R halkası ile üretilen bir C-alt cebiridir. Bu cebir RC ile gösterilecektir. Ayrıca RC C-cebiri yarıasaldır. Eğer R halkası asal ise RC C-cebiri asal olur.*

Tanım 2.38. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkası kendi merkezil kapanışına eşitse R halkasına* ***merkezil kapalı halka*** *denir. Bir halkanın merkezil kapanışı bir merkezil kapalı halkadır.*

Teorem 2.12. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının asal olması için gerek ve yeter bir koşul R halkasının C genelleştirilmiş merkezinin bir cisim olmasıdır.*

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe R halkası bir asal halka olacaktır.

Teorem 2.13. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasını alalım ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Ayrıca bazı $a_i, b_i, c_j, d_j \in Q_{mr}(R)$ elemanları her $r \in R$ elemanı için*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i r b_i = \sum_{j=1}^{m} c_j r d_j$$

eşitliğini sağlasın. Eğer a_i elemanları C cismi üzerinde doğrusal bağımsız ise her b_i elemanı d_j elemanlarının C cismi üzerinde bir doğrusal birleşimidir. Benzer şekilde eğer b_i elemanları C cismi üzerinde doğrusal bağımsız ise her a_i elemanı c_j elemanlarının C cismi üzerinde bir doğrusal birleşimidir.

Teorem 2.14. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasını ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bazı $a_1, \ldots, a_n \in Q_{mr}(R)$ elemanlarını alalım. Eğer a_1 elemanı $a_2, \ldots, a_n$ elemanlarının C cismi üzerinde gerdiği uzayın bir elemanı değilse R halkasının $M(R)$ çarpım halkasında*

$$f(a_1) \neq 0$$

ve

$$f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$$

olacak şekilde bir $f \in M(R)$ elemanı vardır.

Tanım 2.39. *(Beidar et al., 1996) Bir R halkasının sıfırdan farklı bir I sağ ideali, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini öz olarak içermiyorsa I sağ idealine **minimal sağ ideal** denir. Ayrıca yarıasal halkaların minimal sağ idealleri idempotentler ile üretilir. Eğer eR sağ ideali bir minimal sağ ideal ise e idempotentine **minimal idempotent** denir.*

Teorem 2.15. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkası merkezil kapalı olsun. Eğer R halkasının çarpım halkasında, görüntüsü C cismi üzerinde sonlu boyutlu olan sıfırdan farklı bir $f \in M(R)$ elemanı varsa*

$$[eRe \colon C] < \infty$$

olacak şekilde bir $e \in R$ minimal idempotenti vardır.

2.3 Ortogonal Tamlama

Ortogonal tamlamalar teorisi Beidar ve Mikhalev tarafından bir dizi çalışma ile geliştirilmiştir. Bu teori ile, yarıasal halkalardaki bir problemi asal halkalara indirgemenin kolaylık sağladığı görülmüştür. Ancak bu, direkt yollarla her zaman mümkün değildir. Örneğin bir R asal halkası üzerindeki her çok terimli özdeşliği aynı zamanda $Q_{mr}(R)$ halkası üzerinde de bir çok terimli özdeşliğidir ve benzer bir sonucu yarıasal halkalar için aramak doğaldır. Fakat R halkasının bir P asal ideali için genellikle bir $Q_{mr}(R) \to Q_{mr}(R/P)$ homomorfizması bulunmaz. Bu gibi birçok zorluk ortogonal tamlamalar ile başarıyla aşılmıştır.

Bu bölümde R halkası maksimal sağ kesirler halkası $Q = Q_{mr}(R)$ ve genişletilmiş merkezi C olan bir yarıasal halka olacaktır. Ayrıca C halkasının idempotentlerinin kümesi $B = B(C)$ ile gösterilecektir. Bir $S \subseteq Q$ alt halkasının bir $T \subseteq Q$ alt halkası içindeki sağ sıfırlayanı $r(T; S)$ ve iki yanlı sıfırlayanı $(T; S)$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.16. *(Brešar, 1994) Bir R halkası ve R halkasının bir I ideali için $I \oplus (R; I)$ direkt toplamı R halkasının bir esansiyel ideali olur. Eğer R halkası merkezil kapalı ise*

$$(R; I) = eR$$

olacak şekilde bir $e \in B$ elemanı vardır.

Yardımcı Özellik 2.1. *(Beidar et al., 1996) Her $S \subseteq Q$ alt halkası için*

$$r(C; S) = (1 - E(S))C$$

olacak şekilde bir tek $E(S) \in B$ elemanı vardır. Ayrıca her $e \in B$ elemanı için

$$E(Se) = E(S)e$$

olur.

Bundan sonra $E(\{s\})$ yerine $E(s)$ yazacağız. Ayrıca her $e \in B$ elemanı için

$$L_e = \{r \in R \mid er \in R\}$$

olacaktır.

Tanım 2.40. *(Brešar et al., 2007) Bir $U \subseteq B$ alt kümesi için $r(C; U) = (0)$ yani $E(U) = 1$ ise U alt kümesine* ***yoğun alt küme*** *denir. Her $u, v \in U$ elemanı için $u \neq v$ olduğunda $uv = 0$ oluyorsa U alt kümesine* ***ortogonal alt küme*** *denir.*

Yardımcı Özellik 2.2. *(Brešar et al., 2007) Eğer B kümesinin bazı U ve V alt kümeleri yoğun ortogonal ise*

$$UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$$

kümesi de B kümesinin bir yoğun ortogonal alt kümesidir.

Yardımcı Özellik 2.3. *(Beidar et al., 1996) Eğer B kümesinin bir U alt kümesi yoğun ortogonal ise R halkasının*

$$I = \sum_{u \in U} L_u u$$

ideali bir esansiyel ideal olur.

Tanım 2.41. *(Brešar et al., 2007) Bir $T \subseteq Q$ alt kümesini alalım ve $U \subseteq B$ bir yoğun ortogonal alt küme olsun. Her $u \in U$ ve $t_u \in T$ elemanı için*

$$tu = t_u u$$

olacak şekilde bir $t \in T$ elemanı varsa T alt kümesine ***ortogonal tam alt küme*** *denir. Ayrıca t elemanı için*

$$t = \sum_{u \in U}^{\perp} t_u u$$

olur. Benzer şekilde bir $s = \sum_{v \in V}^{\perp} s_v v$ elemanı alırsak

$$t \pm s = \sum_{uv \in UV}^{\perp} (t_u \pm s_v)(uv)$$

ve

$$ts = \sum_{uv \in UV}^{\perp} t_u s_v uv$$

olur.

Yardımcı Özellik 2.4. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının maksimal sağ kesirler halkası Q ortogonal tamdır.*

Yardımcı Özellik 2.5. *(Beidar et al., 1996) Bir T ortogonal tam kümesini alalım ve $0 \in T$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar geçerlidir:*

1. *Her $e \in B$ elemanı için $Te \subseteq T$ olur.*
2. *Bir $t \in T$ elemanı için $E(t) = E(T)$ olur.*

Tanım 2.42. *(Brešar et al., 2007) Bir $T \subseteq Q$ alt kümesinin $O(T)$ **ortogonal tamlaması**, Q halkasının, T alt kümesini içeren ortogonal tam alt kümelerinin kesişimi olarak tanımlanır. Ayrıca $O(T)$ ortogonal tamlaması ortogonal tamdır.*

Yardımcı Özellik 2.6. *(Brešar et al., 2007) Bir $T \subseteq Q$ alt kümesinin ortogonal tamlaması $O(T)$, bir $U \subseteq B$ yoğun ortogonal alt kümesinin her $u \in U$ elemanı için $t_u \in T$ olmak üzere*

$$\sum_{u \in U}^{\perp} t_u u$$

formundaki elemanlardan oluşur.

Tanım 2.43. *(Brešar et al., 2007) Bir R halkasının genişletilmiş merkezinin idempotentlerinin kümesi B, her $e, f \in B$ elemanı için*

$$e \leq f \iff e = ef$$

ile tanımlı sıralama bağıntısı ile bir kısmi sıralı küme olur. Ayrıca

$$e \oplus f = e + f - 2ef$$

*ile tanımlı toplama işlemi ve C halkası üzerindeki çarpma işlemi ile bir Boole halkası olur. Öyleyse B halkasının **maksimal ideallerinin kümesi** tanımlıdır ve $Spec(B)$ ile belirtilecektir.*

Yardımcı Özellik 2.7. *(Beidar et al., 1996) Bir $U = \{u_i \mid i \in I\} \subseteq B$ alt kümesini alalım ve her $M \in Spec(B)$ maksimal ideali için $U \nsubseteq M$ olsun.*

O zaman her $j \in \{1, \ldots, n\}$ için $e_j \leq u_{i_j}$ olacak şekilde bir $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ alt kümesi ve toplamları 1 olan bazı $e_1, \ldots, e_n \in B$ ortogonal idempotentleri vardır.

Yardımcı Özellik 2.8. *(Brešar et al., 2007) Bir $a \in O = O(R)$ elemanı ve bir $M \in Spec(B)$ maksimal ideali için $a \in OM = \{\sum_i a_i e_i \mid a_i \in O \text{ ve } e_i \in M\}$ olması için gerek ve yeter bir koşul $E(a) \in M$ olmasıdır.*

Teorem 2.17. *(Beidar et al., 1996) Bir R ortogonal tam yarıasal halkası ve bir $M \in Spec(B)$ maksimal ideali için R/RM halkası asaldır.*

Teorem 2.18. *(Beidar et al., 1996) Bir R ortogonal tam yarıasal halkasını ve bir $M \in Spec(B)$ maksimal idealini alalım. Eğer $\pi\colon R \to R/RM$ dönüşümü kanonik izdüşüm ise R/RM halkasının merkezi $\pi(Z)$ olur.*

Teorem 2.19. *(Beidar et al., 1996) Bir R ortogonal tam yarıasal halkası ve bir $M \in Spec(B)$ maksimal ideali için*

$$Q/QM \subseteq Q_{mr}(R/RM)$$

olur. Ayrıca $\pi\colon Q \to Q/QM$ dönüşümü kanonik izdüşüm olmak üzere R/RM halkasının genişletilmiş merkezi $\pi(C)$ olur.

2.4 Çok Terimli Özdeşlikleri

Bu bölümde çok terimli özdeşlikleri ile ilgili bazı temel bilgilere ve ana bölümlerde ihtiyaç duyulan bazı teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.44. *(Brešar et al., 2007) Bir $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ sayılabilir kümesini alalım ve X kümesi üzerindeki serbest $\mathbb{Z}$-cebir $\mathbb{Z} < X >$ olsun. En büyük dereceli tek terimlilerinden en az birinin katsayısının 1 olduğu bir*

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z} < X >$$

çok terimlisini alalım. Eğer bir R halkasının her $a_1, \ldots, a_n \in R$ elemanı için

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

ise f çok terimlisine R halkası üzerinde ***çok terimli özdeşliği*** *ve R halkasına* ***çok terimli özdeşliği halkası*** *denir.*

Tanım 2.45. *(Brešar et al., 2007) Derecesi d olan* ***standart çok terimli****, bir $\sigma \in S_d$ permütasyonun işareti $sgn(\sigma)$ olmak üzere*

$$St_d = St_d(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{\sigma \in S_d} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(d)}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.20. *(Herstein, 1968) Bir A primitif cebiri bir d dereceli çok terimli özdeşliğini sağlıyorsa A cebiri merkezi üzerinde sonlu boyutlu bir basit cebirdir. Ayrıca $d/2$ rasyonel sayısından küçük veya ona eşit en büyük tamsayı $[d/2]$ olmak üzere A cebirinin boyutu en fazla $[d/2]^2$ olur.*

Teorem 2.21. *(Brešar et al., 2007) Bir R asal halkasının bir çok terimli özdeşliği halkası olması için gerek ve yeter bir koşul R halkasının RC merkezil kapanışının C cismi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezil basit cebir olmasıdır.*

Tanım 2.46. *(Brešar et al., 2007) Bir R asal halkasını alalım. Eğer bir $q \in Q_{mr}(R)$ elemanı C cismi üzerinde cebirsel ise $deg(q)$ ile bu elemanın cebirsellik derecesini belirtelim. Aksi durumda $deg(q) = \infty$ olsun. Boştan farklı bir $S \subseteq Q_{mr}(R)$ alt kümesinin* ***cebirsellik derecesi***

$$deg(S) = sup\{deg(s) \mid s \in S\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.22. *(Brešar et al., 2007) Bir R asal halkasını alalım ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *R halkasının merkezil kapanışı RC, C cismi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezil basit cebirdir ve $[RC : C] = n^2$ olur.*
2. *R halkası St_{2n} standart çok terimli özdeşliğini sağlar fakat derecesi $2n$ tamsayısından küçük hiçbir çok terimli özdeşliğini sağlamaz.*
3. *Bir F cismi için R halkası $M_n(F)$ halkası içine gömülebilir ve $M_n(F)$ halkası R halkası ile aynı çoklu doğrusal çok terimli özdeşliklerini sağlar. Böylece R halkası bir S değişmeli halkası için $M_{n-1}(S)$ halkası içine gömülemez.*

4. $deg(R) = n$ olur.

Eğer denk koşullardan biri sağlanıyorsa $i \in \{1, \ldots, n\}$ olmak üzere her $x \in R$ elemanı için

$$x^n + q_1(x)x^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(x)x + q_n(x) = 0$$

olacak şekilde, i-toplamsal dönüşümlerin izleri olan bazı $q_i \colon R \to C$ dönüşümleri vardır. Ayrıca

$$Q_{mr}(R) = RC$$

olur.

Sonuç 2.4. *(Brešar et al., 2007) Bir R birimli basit halkası için $[R\colon Z] = n^2$ olması için gerek ve yeter bir koşul $deg(R) = n$ olmasıdır. Bu durumda, $i \in \{1, \ldots, n\}$ olmak üzere her $x \in R$ elemanı için*

$$x^n + q_1(x)x^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(x)x + q_n(x) = 0$$

olacak şekilde, i-toplamsal dönüşümlerin izleri olan bazı $q_i \colon R \to Z$ dönüşümleri vardır.

Teorem 2.23. *(Brešar et al., 2007) Sıfırdan farklı bir yarıasal çok terimli özdeşliği halkasının merkezi sıfırdan farklıdır.*

Teorem 2.24. *(Posner, 1960) Bir R asal halkasının bir çok terimli özdeşliği halkası olması için gerek ve yeter bir koşul R halkasının, merkezi üzerinde sonlu boyutlu olan bir D bölümlü halkası üzerindeki $n \times n$ matrisler halkasının bir alt halkası ve bu matrisler halkasının, R halkasının iki yanlı kesirler halkası olmasıdır.*

Teorem 2.25. *(Liu, 2020) Bir R asal çok terimli özdeşliği halkasını alalım. Bir $n \geq 1$ tamsayısı ve bir D bölümlü halkası için*

$$Q_{mr}(R) = RC \cong M_n(D)$$

olur. Ayrıca D halkasının, merkezil kesirler halkası D halkası olan bir alt halkası Δ olsun. Yani D halkasının her elemanı $0 \neq a \in Z(\Delta)$ ve $b \in \Delta$ olmak *üzere $a^{-1}b$ formunda olsun. O zaman R halkasının $M_n(\Delta)$ halkasına izomorf bir S alt halkası vardır ve $Q_{mr}(R)$ halkasının her elemanı $0 \neq a \in Z(S)$ ve $b \in S$ olmak üzere $a^{-1}b$ formundadır.*

Teorem 2.26. *(Liu, 2020) Bir D bölgesini alalım ve D bölgesinin merkezil kesirler halkası Δ olsun. Ayrıca Δ halkası bir bölümlü halka olsun ve bir $m \geq 3$ tamsayısı için $f\colon M_m(D) \to M_m(\Delta)$ dönüşümü, $n \geq 2$ olmak üzere her $x \in M_m(D)$ elemanı için*

$$[f(x), x^n] = 0$$

eşitliğini sağlayan bir toplamsal dönüşüm olsun. O zaman her $x \in M_m(D)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in Z(\Delta)$ elemanı ve bir $\zeta\colon M_m(D) \to Z(\Delta)I_m$ toplamsal dönüşümü vardır.

Teorem 2.27. *(Liu, 2020) Bir D bölgesini alalım ve D bölgesinin merkezil kesirler halkası Δ olsun. Ayrıca Δ halkası bir bölümlü halka olsun ve $f\colon M_2(D) \to M_2(\Delta)$ dönüşümü, $n \geq 2$ olmak üzere her $x \in M_2(D)$ elemanı için*

$$[f(x), x^n] = 0$$

eşitliğini sağlayan bir toplamsal dönüşüm olsun. O zaman ya her $x \in M_2(D)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in Z(\Delta)$ elemanı ve bir $\zeta\colon M_2(D) \to Z(\Delta)I_2$ toplamsal dönüşümü vardır ya da

$$D = \Delta = GF(2)$$

olur.

Teorem 2.28. *(Chuang, 1987) Bir R asal halkasını ve R halkasının sıfırdan farklı bir I idealini alalım. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere C cismi üzerinde bir $f(x_1, \ldots, x_n)$ çok terimlisi için RC halkasının, bir $\{f(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in I\}$ kümesi ile üretilen toplamsal alt grubu G olsun. Eğer R halkası $GF(2)$*

cismi üzerindeki 2×2 *matrisler halkası değilse ya* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *çok terimlisi merkezildir ya da* G *toplamsal alt grubu* R *halkasının bir Lie öz idealini içerir. Burada bir Lie öz ideali ile,* R *halkasının sıfırdan farklı bir* J *ideali için* $[J, R] \subseteq L$ *bağıntısını sağlayan bir* L *Lie ideali belirtilmektedir.*

Teorem 2.29. *(Inceboz et al., 2014) Bir* R *yarıasal çok terimli özdeşliği halkasını alalım ve* $Q = Q_{mr}(R)$ *olsun. O zaman* B *halkasının maksimal ideallerinin bir* $\{M_i \mid i \in I\}$ *kümesi aşağıdaki koşulları sağlar:*

1. *Her* Q/M_iQ *halkası,* $\overline{C} = C + M_iQ/M_iQ$ *olmak üzere sonlu boyutlu bir merkezil basit* $\overline{C}$*-cebirdir.*
2. *Her* $R \cap (M_iQ)$ *halkası* R *halkasının bir asal idealidir ve* $(R/R \cap (M_iQ))\overline{C} = Q/M_iQ$ *olur.*
3. $\bigcap_{i \in I} M_iQ = 0$ *olur.*

2.5 Genelleştirilmiş Çok Terimli Özdeşlikleri

Bu bölümde genelleştirilmiş çok terimli özdeşlikleri ile ilgili bazı temel bilgilere ve ana bölümlerde ihtiyaç duyulan bazı teoremlere yer verilecektir.

Teorem 2.30. *(Beidar et al., 1996) Bir* R *değişmeli halkasını alalım ve* A_1 *ile* A_2 *bazı birimli* R*-cebirler olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir* A *birimli* R*-cebiri vardır ve tek türlü belirlenir:*

1. A R*-cebiri bazı* $f_1 \colon A_1 \to A$ *ve* $f_2 \colon A_2 \to A$ R*-cebir homomorfizmaları için* $f_1(A_1) \cup f_2(A_2)$ *kümesi ile üretilir.*
2. *Bir* A_3 *birimli* R*-cebirini alalım ve* $g_1 \colon A_1 \to A_3$ *ile* $g_2 \colon A_2 \to A_3$ *bazı homomorfizmalar olsun. O zaman* $g_1 h = f_1$ *ve* $g_2 h = f_2$ *olacak şekilde bir* $h \colon A \to A_3$ *homomorfizması vardır.*

Tanım 2.47. *(Beidar et al., 1996) Teorem 2.30 ile belirlenen* A R*-cebirine* A_1 *ve* A_2 R*-cebirlerinin* R *değişmeli halkası üzerindeki* ***serbest çarpımı*** *denir ve* $A = A_1 *_R A_2$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.48. *(Beidar et al., 1996) Bir R yarıasal halkasını ve bir $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ sayılabilir kümesini alalım. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \in Q_{mr}(R) *_C C < X >$$

olsun. Her $a_1, \ldots a_n \in R$ elemanı için

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

ise f çok terimlisine R halkası üzerinde ***genelleştirilmiş çok terimli özdeşliği*** *ve R halkasına* ***genelleştirilmiş çok terimli özdeşliği halkası*** *denir.*

Teorem 2.31. *(Brešar et al., 2007) Bir R asal halkasının bir genelleştirilmiş çok terimli özdeşliği halkası olması için gerek ve yeter bir koşul R halkasının RC merkezil kapanışının*

$$[eRCe \colon C] < \infty$$

olacak şekilde bir $e \in RC$ minimal idempotentini içermesidir.

Teorem 2.32. *(Beidar et al., 1996) Bir R asal halkasını alalım ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in Q_{mr}(R) *_C C < X >$$

çok terimlisi R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali üzerinde bir genelleştirilmiş çok terimli özdeşliği olsun. O zaman f çok terimlisi $Q_{mr}(R)$ halkası üzerinde de bir genelleştirilmiş çok terimli özdeşliğidir.

Teorem 2.33. *(Liu, 2020) Bir R yarıasal halkasını alalım ve $a \in Q_{mr}(R)$ olsun. Eğer $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $x \in R$ elemanı için $[a, x^m]_n = 0$ ise $a \in C$ olur.*

Teorem 2.34. *(Beidar, 1998) Bir R asal halkasını ve R halkasının bir L Lie idealini alalım. Her $x \in L$ ve bir $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı için*

$$\overline{x}^{[n]} = (x, \ldots, x) \in L^n$$

diyelim. Her $x \in L$ ve bazı $n, m \in \mathbb{N}$ tamsayıları için

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i x^i f(\overline{x}^{[n]}) x^{m-i} = 0$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $f\colon L^n \to Q_{mr}(R)$ simetrik n-toplamsal dönüşümünü ve en az biri sıfırdan farklı bazı $\lambda_i \in C$ elemanlarını alalım. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. *Ya $char(R) = 0$ ya da $char(R) > n$ olsun.*
2. *Ya $L = R$ ve $deg(R) > n + m - 1$ ya da $deg(L) > n + m$ olsun.*

O zaman

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$$

olur ve her $x \in R$ elemanı için

$$f(\overline{x}^{[n]}) = \sum_{i=0}^{n} \zeta_i(\overline{x}^{[n-i]}) x^i$$

eşitliğini sağlayan bazı $\zeta_i\colon L^{n-i} \to C$ simetrik $(n-i)$-toplamsal dönüşümleri vardır.

3 ASAL HALKALAR ÜZERİNDE DEĞİŞMELİ VE MERKEZLEYEN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde R halkası maksimal sağ kesirler halkası $Q = Q_{mr}(R)$ ve genişletilmiş merkezi C olan bir asal halka olacaktır. Ayrıca R halkasının merkezil kapanışı RC ile gösterilecektir.

3.1 Asal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Bu bölümde bir asal halkada değişmeli toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Değişmeli dönüşümler ile ilgili ilk önemli çalışma Posner'ın 1957 yılındaki çalışması olarak görülür (Posner, 1957). Posner bu çalışmada bir asal halkada sıfırdan farklı bir değişmeli türevin varlığının halkanın değişmeli olmasını gerektirdiğini göstermiştir. Daha sonra Brešar bir asal halkada bir değişmeli toplamsal dönüşümü karakterize etmeyi başarmıştır (Brešar, 1993a). Hatta daha genel olarak n-toplamsal dönüşümlerin değişmeli izleri karakterize edilmiştir ve bu sonuçlar birçok doğal uygulama alanı bulmuştur. Örneğin Herstein'ın birleşmeli halkalarda Lie izomorfizmalarını konu alan ve uzun süre cevaplanamayan soruları çözülebilmiştir.

Türevler aslında belirli özelliklere sahip toplamsal dönüşümler olduğundan keyfi değişmeli toplamsal dönüşümleri incelemenin daha karmaşık yöntemler gerektireceği beklenir. Ancak Brešar komütatörleri iç türev olarak ele alarak türevler üzerinde bilinen sonuçları probleme başarıyla uygulamıştır. Daha sonra Lee, Wong, Lin ve Wang problemin daha farklı ve daha kısa bir çözümünü elde etmiştir (Lee et al., 1997).

Bu bölümde esas olarak (Lee et al., 1997) çalışmasındaki sonuç ele alınacaktır.

Teorem 3.1. *Eğer $f\colon R \to RC$ dönüşümü bir değişmeli toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için*

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. İlk olarak $[f(x),x]=0$ eşitliği doğrusallaştırılarak her $x,y\in R$ elemanı için

$$[f(x),y]=[x,f(y)] \tag{3.1}$$

olduğu görülür. Daha sonra (3.1) eşitliğinden

$$[f(x^2),y]=[f(x),y]x+x[f(x),y]$$

eşitliği elde edilir. Buradan her $x,y\in R$ elemanı için

$$(y(f(x)x-f(x^2))+xyf(x))+((f(x^2)-xf(x))y+(-f(x))yx)=0$$

bulunur. Eğer $x\notin C$ ise 1 ve x elemanları C cismi üzerinde doğrusal bağımsız olur. Teorem 2.13 ile, $f(x)$ elemanının C cismi üzerinde 1 ve x elemanlarının bir doğrusal birleşimi olduğu sonucuna varılır. Diğer taraftan, $x\in C$ ise (3.1) eşitliği ile $f(x)\in C$ olduğu görülür. Öyleyse her iki durumda da bir $x\in R$ elemanı için

$$f(x)=\lambda_x x+\zeta_x$$

olacak şekilde bazı $\lambda_x,\zeta_x\in C$ elemanları vardır. Burada R halkasının değişmeli olmadığını kabul edebiliriz. Bazı $a,b\in R$ elemanları için $[a,b]\neq 0$ olsun ve $f(b)=\lambda b+\zeta_0$ diyelim. Eğer bir $x\in R$ elemanı için $[x,b]\neq 0$ ise (3.1) eşitliği kullanılarak

$$\lambda_x[x,b]=\lambda[x,b]$$

eşitliği elde edilir ve buradan $\lambda_x=\lambda$ olduğu görülür. Özel olarak $\lambda_a=\lambda$ olur. Aksine, $[x,b]=0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $[x+a,b]\neq 0$ olduğundan $\lambda_{x+a}=\lambda$ olur ve f dönüşümünün toplamsallığı kullanılarak

$$\lambda(x+a)+\zeta_{x+a}=\lambda_x x+\zeta_x+\lambda a+\zeta_a$$

eşitliği elde edilir. O halde $(\lambda_x-\lambda)x\in C$ olur. Eğer $x\notin C$ ise yine $\lambda_x=\lambda$ olmalıdır. Öyleyse iki durumda da her $x\in R$ elemanı için

$$f(x)-\lambda x\in C$$

olacak şekilde bir $\lambda\in C$ elemanı vardır. Eğer $\zeta(x)=f(x)-\lambda x$ dersek $\zeta\colon R\to C$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x\in R$ elemanı için

$$f(x)=\lambda x+\zeta(x)$$

bulunur. □

3.2 Asal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Bu bölümde bir asal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Posner 1957 yılında, bir asal halkada sıfırdan farklı bir merkezleyen türevin varlığının halkanın değişmeli olmasını gerektirdiğini göstermiştir (Posner, 1957). Daha sonra Mayne 1976 yılnda, aynı sonucu merkezleyen otomorfizmalar için elde etmiştir (Mayne, 1976). Posner ve Mayne tarafından elde edilen sonuçlar birçok araştırmacı tarafından çeşitli yönlerde genişletilmiştir. Brešar 1993 yılında, karakteristiği 2 olmayan bir asal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün bir değişmeli dönüşüm olduğunu göstermeyi başarmıştır (Brešar, 1993a). Böylece belirli koşullar altında, bir asal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün yapısını belirlemiştir. İnceboz, Koşan ve Lee 2014 yılında, bir yarıasal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün bir değişmeli dönüşüm olduğunu daha genel bir durumu ele alarak göstermiştir (Inceboz et al., 2014). Ancak bu çalışmada bir merkezleyen dönüşüm, bir R halkasının her $x, y \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] \in C$$

bağıntısını sağlayan bir $f\colon R \to Q$ dönüşümü olarak tanımlanmıştır. Liu 2020 yılında yayınladığı çalışmada bir yarıasal halkada bir n-değişmeli toplamsal dönüşümün yapısını halka üzerinde başka herhangi bir koşul olmadan belirlemeyi başarmıştır (Liu, 2020). Bu çalışmanın bir sonucu olarak bir asal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün yapısı belirlenir.

Bu bölümde Liu'nun çalışmasını bir asal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlere indirgeyeceğiz.

Önerme 3.1. *(Brešar, 1993a) Bir R 2-burulmasız yarıasal halkasını ve R halkasının bir J Jordan alt halkasını alalım. Eğer bir $f\colon R \to R$ dönüşümü J halkası üzerinde bir merkezleyen dönüşüm ise f dönüşümü J halkası üzerinde değişmelidir.*

İspat. İlk olarak $[f(x), x] \in Z$ bağıntısı doğrusallaştırılarak her $x, y \in J$ elemanı için

$$[f(x), y] + [f(y), x] \in Z$$

olduğu görülür. Özel olarak her $x \in J$ elemanı için

$$[f(x), x^2] + [f(x^2), x] \in Z$$

olur. Her $x \in J$ elemanı için $[f(x), x] \in Z$ olduğundan

$$[f(x), x^2] = 2[f(x), x]x$$

bulunur. Öyleyse her $x \in J$ elemanı için

$$2[f(x), x]x + [f(x^2), x] \in Z \tag{3.2}$$

olur. Ayrıca her $x \in J$ elemanı için $[f(x^2), x^2] \in Z$ olduğundan

$$[f(x^2), x]x + x[f(x^2), x] \in Z \tag{3.3}$$

bulunur. Şimdi bir $x \in J$ elemanını sabitleyelim. Ayrıca

$$\begin{aligned} a &= [f(x), x] \in Z \\ b &= [f(x^2), x] \end{aligned}$$

olsun. Burada $a = 0$ olduğunu görmek istiyoruz. İlk olarak (3.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x), 2ax + b] \\ &= 2a^2 + [f(x), b] \end{aligned}$$

ve buradan

$$[f(x), b] = -2a^2 \tag{3.4}$$

bulunur. Ayrıca (3.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x), bx + xb] \\ &= [f(x), b]x + b[f(x), x] + [f(x), x]b + x[f(x), b] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, (3.4) eşitliği ile

$$-4a^2x + 2ab = 0$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse

$$ab = 2a^2x$$

olur. Eğer (3.4) eşitliğini $a \in Z$ elemanı ile çarparsak

$$\begin{aligned} -2a^3 &= [f(x), 2a^2x] \\ &= 2a^3 \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$a^3 = 0$$

olmalıdır. Yarıasal bir halkanın merkezi sıfırdan farklı bir nilpotent eleman içermediğinden

$$a = 0$$

olur. □

Yardımcı Özellik 3.1. *Bir $f\colon R \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümü için aşağıdaki koşullardan biri geçerlidir:*

1. *Her $x \in R$ elemanı için $f(x) = \lambda x + \zeta(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.*
2. *R halkası 2 karakteristikli değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi ve $Q = RC$ halkası C cismi üzerinde 4 boyutlu bir merkezil bölümlü cebirdir.*

İspat. Eğer R halkası değişmeli ise $R = Z \subseteq C$ olur. O halde $\lambda = 0$ ve $\zeta = f$ alarak her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur. Öyleyse R halkasının değişmeli olmadığını varsayabiliriz.

Şimdi $\deg(R) > 2$ olduğunu kabul edelim. Her $x \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= [[f(x), x], x] \\ &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} x^i f(x) x^{2-i} \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.34 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu görülür. Öyleyse $\deg(R) \leq 2$ olduğunu varsayabiliriz.

Eğer $d = \deg(R)$ dersek Teorem 2.22 ile, R halkasının bir asal çok terimli özdeşliği halkası ve $Q = RC$ halkasının C cismi üzerinde d^2 boyutlu bir merkezil basit cebir olduğu görülür. Burada R halkası değişmeli olmadığından $d = 2$ bulunur. Ayrıca $f(R) \subseteq Q = RC$ olur. Eğer $\mathrm{char}(R) \neq 2$ ise Önerme 3.1 ile, f dönüşümünün değişmeli olduğu görülür ve Teorem 3.1 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu sonucuna varılır. Öyleyse $\mathrm{char}(R) = 2$ olduğunu varsayabiliriz.

Teorem 2.25 ile, bir D bölümlü halkası ve bir $n \in \{1, 2\}$ tamsayısı için

$$Q = RC \cong M_n(D)$$

olduğunu düşünebiliriz.

İlk olarak $n = 1$ alalım. Bu durumda R halkası 2 karakteristikli değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi ve $Q = RC \cong D$ halkası C cismi üzerinde 4 boyutlu bir merkezil bölümlü cebir olur.

Şimdi $n = 2$ olsun. O zaman $Q = RC \cong M_2(D)$ ve $D \cong C$ olur. Öyleyse $Q = RC \cong M_2(C)$ ve $\mathrm{char}(C) = 2$ bulunur. Ayrıca f dönüşümü bir merkezleyen dönüşüm olduğundan bir $m \geq 1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{2^m} (-1)^i \binom{2^m}{i} x^i f(x) x^{2^m - i} \\ &= f(x)x^{2^m} - x^{2^m} f(x) \\ &= [f(x), x^{2^m}] \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. Bu noktadan sonra ispatı $R \ncong M_2(C)$ ve $R \cong M_2(C)$ olarak iki duruma ayıracağız.

İlk olarak $R \ncong M_2(C)$ alalım. Teorem 2.25 ile, C cisminin bir Δ alt halkası için $M_2(\Delta) \subseteq R$ olduğu görülür. Ayrıca C cismi Δ halkasının merkezil kesirler halkasıdır. Burada $M_2(\Delta) \subseteq R \subseteq Q = M_2(C)$ Teorem 2.27 ile, her $x \in M_2(\Delta)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x) \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu görülür. Şimdi $|\Delta| < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Δ halkası sonlu bir tamlık bölgesi ve böylece sonlu bir cisim olur. Ayrıca C cismi Δ halkasının kesirler cismi olduğundan $\Delta = C$ bulunur. Böylece $M_2(\Delta) = R = M_2(C)$ çelişkisine varılır. Öyleyse $|\Delta| = \infty$ olmalıdır. Şimdi $a \in \Delta$, $x \in R$ ve $y \in M_2(\Delta)$ olsun. O zaman $ay \in M_2(\Delta)$ ve $x + ay \in R$ olur. Her $i \in \{0, 1, \ldots, 2^m\}$ için $\phi_i(x, y)$ ile, x-derecesi $2^m - i$ ve y-derecesi i olan monik tek terimlilerin toplamını gösterelim. Özel olarak $\phi_0(x, y) = y^{2^m}$, $\phi_{2^m-1}(x, y) = \sum_{i=0}^{2^m-1} y^{2^m-1-i}xy^i$ ve $\phi_{2^m}(x, y) = y^{2^m}$ olur. Burada

$$\begin{aligned}
[\lambda ay, \phi_{2^m}(x, y)] &= [\lambda ay, y^{2^m}] \\
&= \lambda a[y, y^{2^m}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Ayrıca (3.6) eşitliği ile

$$f(ay) = \lambda ay + \zeta(ay)$$

bulunur. Eğer (3.5) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
0 &= [f(x + ay), (x + ay)^{2^m}] \\
&= [f(x) + f(ay), (x + ay)^{2^m}] \\
&= [f(x) + \lambda ay + \zeta(ay), (x + ay)^{2^m}] \\
&= [f(x) + \lambda ay, (x + ay)^{2^m}] \\
&= [f(x) + \lambda ay, \sum_{i=0}^{2^m} a^i \phi_i(x, y)] \\
&= a^{2^m}([f(x), y^{2^m}] + [\lambda y, \phi_{2^m-1}(x, y)]) + \sum_{i=0}^{2^m-1} a^i [f(x), \phi_i(x, y)] + \sum_{i=0}^{2^m-2} a^{i+1}[\lambda y, \phi_i(x, y)]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada $|\Delta| = \infty$ olduğundan (3.7) ile, Vandermonde determinant argümanı kullanılarak her $x \in R$ ve $y \in M_2(\Delta)$ elemanı için

$$[f(x), y^{2^m}] + [\lambda y, \phi_{2^m-1}(x, y)] = 0$$

bulunur. Ayrıca $[y, \phi_{2^m-1}(x, y)] = [y^{2^m}, x]$ olduğundan her $x \in R$ ve $y \in M_2(\Delta)$ elemanı için

$$[f(x) - \lambda x, y^{2^m}] = 0$$

olur. Burada $M_2(C)$ halkasının her elemanı $0 \neq b \in M_2(\Delta)$ ve $c \in Z(M_2(\Delta))$ olmak üzere $b^{-1}c$ formunda olduğundan $Z(M_2(\Delta)) \subseteq Z(M_2(C)) \subseteq CI_2 \cong C$ olmalıdır. Öyleyse her $x \in R$ ve $y \in M_2(C) = Q$ elemanı için

$$[f(x) - \lambda x, y^{2^m}] = 0$$

bulunur. Teorem 2.33 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) - \lambda x \in C$$

olduğu görülür. Eğer $\zeta(x) = f(x) - \lambda x$ dersek $\zeta \colon R \to C$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi $R \cong M_2(C)$ olsun. Kolaylık olması için $R = M_2(C)$ diyelim. İlk olarak (3.5) göz önünde bulundurularak her $x \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x), x^{2^m}]x^{2^m} + x^{2^m}[f(x), x^{2^m}] \\ &= [f(x), x^{2^m}x^{2^m}] \\ &= [f(x), x^{2^{m+1}}] \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse genelliği kaybetmeden m tamsayısının çift olduğunu varsayabiliriz. Her $i, j \in \{1, 2\}$ için

$$f(e_{11}) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}e_{ij}$$

$$f(e_{22}) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}e_{ij}$$

olacak şekilde bazı $a_{ij}, b_{ij} \in C$ elemanları vardır. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= [f(e_{11}), e_{11}^{2^m}] \\ &= [f(e_{11}), e_{11}] \\ &= f(e_{11})e_{11} - e_{11}f(e_{11}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$a_{12} = a_{21} = 0 \tag{3.8}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$b_{12} = b_{21} = 0 \tag{3.9}$$

bulunur. Her $i, j \in \{1, 2\}$ için

$$\begin{aligned} f(e_{12}) &= \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}e_{ij} \\ f(e_{21}) &= \sum_{i,j=1}^{2} d_{ij}e_{ij} \end{aligned}$$

olacak şekilde bazı $c_{ij}, d_{ij} \in C$ elemanları vardır. O halde,

$$\begin{aligned} 0 &= [f(e_{11} + e_{12}), (e_{11} + e_{12})^{2^m}] \\ &= [f(e_{11} + e_{12}), (e_{11} + e_{12})] \\ &= f(e_{11} + e_{12})(e_{11} + e_{12}) - (e_{11} + e_{12})f(e_{11} + e_{12}) \end{aligned}$$

olur ve (3.8) ile

$$c_{21} = 0 \text{ ve } c_{12} - (c_{11} - c_{22}) = a_{11} - a_{22} \tag{3.10}$$

bulunur. Ayrıca

$$[f(e_{22} + e_{12}), (e_{22} + e_{12})^{2^m}] = 0$$

olduğundan (3.9) ile

$$c_{12} + (c_{11} - c_{22}) = b_{22} - b_{11} \tag{3.11}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$[f(e_{11} + e_{21}), (e_{11} + e_{21})^{2^m}] = 0$$

olduğundan (3.8) ile

$$d_{12} = 0 \text{ ve } d_{21} - (d_{11} - d_{22}) = a_{11} - a_{22} \tag{3.12}$$

bulunur. Burada

$$(e_{11} + e_{12} + e_{21})^4 = e_{11} + e_{12} + e_{21}$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ tamsayısı için

$$\begin{aligned}(e_{11} + e_{12} + e_{21})^{2^{2k}} &= ((e_{11} + e_{12} + e_{21})^{2^2})^{2^{2k-2}} \\ &= (e_{11} + e_{12} + e_{21})^{2^{2k-2}}\end{aligned}$$

olur. Ayrıca m tamsayısı çift olduğundan

$$(e_{11} + e_{12} + e_{21})^{2^m} = e_{11} + e_{12} + e_{21}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}0 &= [f(e_{11} + e_{12} + e_{21}), (e_{11} + e_{12} + e_{21})^{2^m}] \\ &= [f(e_{11} + e_{12} + e_{21}), e_{11} + e_{12} + e_{21}]\end{aligned}$$

olur. Buradan (3.10) ve (3.12) ile

$$c_{11} = c_{22} \text{ ve } d_{11} = d_{22} \tag{3.13}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi $\lambda = a_{11} - a_{22}$ diyelim. Öyleyse (3.10)-(3.13) ile

$$\lambda = b_{22} - b_{11} = c_{12} = d_{21}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}f(e_{11}) &= \lambda e_{11} + a_{22} I_2 \\ f(e_{22}) &= \lambda e_{22} + b_{11} I_2 \\ f(e_{12}) &= \lambda e_{12} + c_{11} I_2 \\ f(e_{21}) &= \lambda e_{21} + d_{11} I_2\end{aligned}$$

bulunur. Buradan f dönüşümünün C cismi üzerinde doğrusal olduğu açıktır. Eğer her $x \in M_2(C)$ elemanı için

$$\zeta(x) = f(x) - \lambda x$$

dersek $\zeta\colon M_2(C) \to CI_2$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x \in M_2(C)$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur. □

Yardımcı Özellik 3.2. *Eğer $f\colon R \to Q$ dönüşümü bir merkezleyen Z-modül homomorfizması ise her $x \in R$ elemanı için*

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 3.1 ile, R halkasının değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda $Q = RC$ halkası C cismi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezil bölümlü cebir olur. Eğer C cismi sonlu ise $Q = RC$ halkası sonlu bir bölümlü halka ve böylece bir cisim olur. Buradan R halkasının değişmeli olduğu çelişkisine varılır. Öyleyse C cismi sonsuz olmalıdır.

Teorem 2.24 ile RC halkasının her elemanının $0 \neq a \in Z$ ve $b \in R$ olmak üzere $a^{-1}b$ formunda olduğu görülür. O halde C cisminin her elemanı $0 \neq a \in Z$ ve $b \in Z$ olmak üzere $a^{-1}b$ formundadır. Burada f dönüşümü bir Z-modül homomorfizması olduğundan, $0 \neq a \in Z$ ve $b \in R$ olmak üzere

$$\overline{f}(a^{-1}b) = a^{-1}f(b)$$

ile tanımlı $\overline{f}\colon RC \to RC$ dönüşümüne tek türlü genişletilebilir ve $\overline{f}$ dönüşümü C cismi üzerinde doğrusaldır. Ayrıca her $x \in RC$ elemanı için

$$\phi(\sum_i a_i \otimes b_i^o)(x) = \sum_i a_i x b_i$$

ile tanımlı $\phi\colon RC \otimes_C RC^o \to \mathrm{End}_C(RC)$ kanonik dönüşümü ile

$$RC \otimes_C RC^o \cong \mathrm{End}_C(RC)$$

olduğu görülür. O halde

$$\overline{f} = \phi(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i^o)$$

olacak şekilde bazı $a_i, b_i \in RC$ elemanları vardır. Öyleyse her $x \in RC$ elemanı için

$$\overline{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

olur. Özel olarak her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

olur. Hipotezden her $x \in R$ elemanı için $[[f(x), x], x] = 0$ olacağından

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} x^i (\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i) x^{2-i} = 0 \tag{3.14}$$

bulunur. Şimdi C cisminin cebirsel kapanışına $\overline{C}$ diyelim. Teorem 2.1 ile, bir $m \geq 1$ tamsayısı için

$$RC \otimes_C \overline{C} \cong M_m(\overline{C})$$

olduğu görülür. Ayrıca RC halkası $x \mapsto x \otimes 1$ dönüşümü ile $RC \otimes_C \overline{C}$ halkası içine gömülür. Öyleyse RC halkasını $RC \otimes_C \overline{C}$ halkasının bir alt halkası olarak düşünebiliriz. Teorem 2.32 ve (Lee and Wong, 1995) ile, C cisminin sonsuz olduğu göz önünde bulundurularak R, RC ve $RC \otimes_C \overline{C}$ halkalarının aynı genelleştirilmiş çok terimli özdeşliklerini sağladıkları görülür. O halde (3.14) özdeşliği her $x \in RC \otimes_C \overline{C}$ elemanı için sağlanır. Her $x \in RC \otimes_C \overline{C}$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

ile tanımlı $\widetilde{f} \colon RC \otimes_C \overline{C} \to RC \otimes_C \overline{C}$ toplamsal dönüşümünü alalım. O zaman her $x \in RC \otimes_C \overline{C} \cong M_m(\overline{C})$ elemanı için

$$[[\widetilde{f}(x), x], x] = 0$$

olur. Özel olarak her $x \in R$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) = f(x)$$

olur. Ayrıca R halkası değişmeli olmadığından $m \geq 2$ olması gerektiği açıktır. Teorem 2.26 ve Teorem 2.27 ile, her $x \in RC \otimes_C \overline{C}$ elemanı için

$$[\widetilde{f}(x), x] = 0$$

olduğu görülür. Öyleyse her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

olur. Teorem 3.1 ile ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2. *Eğer $f\colon R \to Q$ bir merkezleyen toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için*

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 3.1 ile, R halkasının 2 karakteristikli değişmeli olmayan bir çok terimli özdeşliği bölgesi olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda $Q = RC$ halkası C cismi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezil bölümlü cebir olur. Her $x \in R$ elemanı için $[f(x), x] = 0$ olduğunu görmek istiyoruz. Aksine, bir $x_0 \in R$ elemanı için $[f(x_0), x_0] \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse (3.5) ile, her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x^{2^n}] = 0$$

olacak şekilde bir en küçük $n \geq 1$ tamsayısının olduğu görülür. Bu durumda

$$[f(y), y^{2^n}] = 0$$
$$[f(y), y^{2^{n-1}}] \neq 0$$

olacak şekilde bir $y \in R$ elemanı bulunur. Şimdi Q C-cebirinin, y ve $f(y)$ elemanları ile üretilen bir A C-alt cebirini alalım. O halde A C-cebiri sonlu boyutlu bir bölge ve böylece Q C-cebirinin bir bölümlü C-alt cebiri olur. Öyleyse A C-cebirinin merkezi $Z(A)$ bir cisimdir. Ayrıca $C \subseteq Z(A)$ ve $y^{2^n} \in Z(A)$ olur. Şimdi A $Z(A)$-cebirinin, y elemanı ile üretilen bir B $Z(A)$-alt cebirini alalım. Bir başka deyişle $B = Z(A)[y]$ olsun. Burada y elemanı $Z(A)$ cismi üzerinde cebirsel olduğundan B $Z(A)$-cebiri bir cisim olur. Ayrıca B $Z(A)$-cebirinin boyutu y elemanının $Z(A)$ cismi üzerindeki minimal çok terimlisinin derecesine eşit olur.

Şimdi y elemanının $Z(A)$ cismi üzerindeki minimal çok terimlisine $m_y(t) \in Z(A)[t]$ diyelim ve $m_y(t) = t^{2^n} - y^{2^n}$ olduğunu görelim. Burada

$y^{2^n} \in Z(A)$ olduğundan $m_y(t)$ çok terimlisi $t^{2^n} - y^{2^n} = (t-y)^{2^n}$ çok terimlisini böler. O halde $1 \leq m \leq 2^n$ olacak şekilde bir m tamsayısı için

$$m_y(t) = (t-y)^m$$

olur. Eğer bir l tamsayısı ve $(k,2) = 1$ olacak şekilde bir k tamsayısı için $m = 2^l k$ dersek

$$\begin{aligned} m_y(t) &= (t-y)^m \\ &= (t-y)^{2^l k} \\ &= (t^{2^l} - y^{2^l})^k \\ &= t^{2^l k} - \binom{k}{1} y^{2^l} t^{2^l(k-1)} + \ldots \end{aligned}$$

bulunur. Burada $m_y(t) \in Z(A)[t]$ olduğundan $\binom{k}{1} y^{2^l} \in Z(A)$ olur. Ayrıca $(k,2) = 1$ olduğundan $\binom{k}{1} = k \neq 0$ olur ve buradan $y^{2^l} \in Z(A)$ bağıntısı elde edilir. Öyleyse, $y^{2^{n-1}} \notin Z(A)$ olduğundan $l \geq n$ olur. Aynı zamanda $m = 2^l k \leq 2^n$ olduğundan $k = 1$ ve $l = n$ bulunur. Buradan

$$m_y(t) = t^{2^n} - y^{2^n}$$

olduğu görülür. Böylece

$$[B \colon Z(A)] = 2^n$$

olur.

Burada B cismi Q halkasının bir alt cismi ve $C \subseteq Z(A) \subseteq B$ olduğundan Zorn Lemması ile, Q halkasının, B cismini içeren bir K maksimal alt cisminin bulunduğu görülür. Ayrıca

$$[K \colon C] = [K \colon B][B \colon Z(A)][Z(A) \colon C] \geq [B \colon Z(A)] = 2^n$$

bulunur. O halde Teorem 2.4 ile

$$[Q \colon C] = [K \colon C]^2 \geq (2^n)^2 \tag{3.15}$$

olduğu görülür.

Şimdi bir d pozitif tamsayısı için derecesi d olan simetrik grup S_d olmak üzere

$$M_d(X_1,\ldots,X_d)=\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_d} X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(d)}$$

ve

$$M_{d+1}^i(X_1,\ldots,X_{d+1})=M_d(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_{d+1})$$

diyelim. Eğer $d=2^n$ alırsak, $[f(x),x^{2^n}]=0$ eşitliği doğrusallaştırılarak her $x_1,\ldots,x_{d+1}\in R$ elemanı için

$$\sum_{i=1}^{d+1}[f(x_i),M_{d+1}^i(x_1,\ldots,x_{d+1})]=0 \tag{3.16}$$

olduğu görülür. Eğer (3.16) eşitliğinde x_{d+1} elemanını bir $a\in Z\subseteq C$ elemanı için ax_{d+1} elemanıyla değiştirirsek, her $x_1,\ldots,x_{d+1}\in R$ elemanı için

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i=1}^{d}[f(x_i),M_{d+1}^i(x_1,\ldots,ax_{d+1})]+[f(ax_{d+1}),M_{d+1}^{d+1}(x_1,\ldots,x_{d+1})]\\&=a\sum_{i=1}^{d}[f(x_i),M_{d+1}^i(x_1,\ldots,x_{d+1})]+[f(ax_{d+1}),M_{d+1}^{d+1}(x_1,\ldots,x_{d+1})]\end{aligned} \tag{3.17}$$

olur. Ayrıca (3.16) eşitliğini soldan a elemanı ile çarparsak, her $x_1,\ldots,x_{d+1}\in R$ elemanı için

$$\begin{aligned}0&=a\sum_{i=1}^{d}[f(x_i),M_{d+1}^i(x_1,\ldots,x_{d+1})]+a[f(x_{d+1}),M_{d+1}^{d+1}(x_1,\ldots,x_{d+1})]\\&=a\sum_{i=1}^{d}[f(x_i),M_{d+1}^i(x_1,\ldots,x_{d+1})]+[af(x_{d+1}),M_{d+1}^{d+1}(x_1,\ldots,x_{d+1})]\end{aligned} \tag{3.18}$$

olur. Eşitlik (3.17) ve (3.18) ile, her $x_1,\ldots,x_{d+1}\in R$ elemanı için

$$[f(ax_{d+1})-af(x_{d+1}),M_{d+1}^{d+1}(x_1,\ldots,x_{d+1})]=0 \tag{3.19}$$

bulunur. Burada

$$M_{d+1}^{d+1}(X_1,\ldots,X_{d+1})=M_d(X_1,\ldots,X_d)$$

olur. O halde (3.19) eşitliği ile, her $a\in Z$ ve $x,x_1,\ldots,x_d\in R$ elemanı için

$$[f(ax)-af(x),M_d(x_1,\ldots,x_d)]=0$$

olduğu görülür. Ayrıca Teorem 2.32 ile, R ve Q halkalarının aynı genelleştirilmiş çok terimli özdeşliklerini sağladığı görülür. Öyleyse her $a \in Z$, $x \in R$ ve $x_1, \ldots, x_d \in Q$ elemanı için

$$[f(ax) - af(x), M_d(x_1, \ldots, x_d)] = 0 \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $x_1, \ldots, x_d \in Q$ olmak üzere Q halkasının, $M_d(x_1, \ldots, x_d)$ elemanlarıyla üretilen toplamsal alt grubu G olsun. Ayrıca $G \subseteq C$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse Q halkası $d+1$ dereceli $[M_d(X_1, \ldots, X_d), X_{d+1}]$ çok terimli özdeşliğini sağlar. Teorem 2.20 ile

$$[Q\colon C] \leq [\frac{d+1}{2}]^2 = [\frac{2^n+1}{2}]^2$$

olduğu görülür. Buradan

$$[Q\colon C] \leq [\frac{2^n+1}{2}]^2 < (2^n)^2$$

bulunur. Bu ise (3.15) ile çelişir. O halde $G \nsubseteq C$ olmalıdır. Teorem 2.28 ile $[Q, Q] \subseteq G$ olduğu görülür. Eşitlik (3.20) ile, her $a \in Z$ ve $x \in R$ elemanı için

$$[f(ax) - af(x), [Q, Q]] = 0$$

eşitliği elde edilir. Teorem 2.7 ile, her $a \in Z$ ve $x \in R$ elemanı için

$$f(ax) - af(x) \in C \tag{3.21}$$

bulunur. Burada C cismi Q halkasının bir alt halkası olduğundan Q C-vektör uzayının

$$Q = W \oplus C$$

olacak şekilde bir W C-alt vektör uzayı vardır. Şimdi $\pi\colon Q \to Q$ dönüşümü W C-alt vektör uzayı üzerine izdüşüm olsun. O halde π dönüşümü her $\alpha \in W$ ve $\beta \in C$ elemanı için

$$\pi(\alpha + \beta) = \alpha$$

olacak şekilde, C cismi üzerinde bir doğrusal dönüşümdür. Öylese her $x \in R$ elemanı için

$$\pi f(x) - f(x) \in C$$

olur. Ayrıca (3.21) bağıntısı ile, her $a \in Z$ ve $x \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned}\pi f(ax) &= \pi(af(x)) \\ &= a\pi f(x)\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\pi f\colon R \to Q$ dönüşümü merkezleyen bir Z-modül homomorfizması olur. Yardımcı Özellik 3.2 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$\pi f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümünün olduğu görülür. O halde her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) - \lambda x \in C$$

olur. Buradan her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

bulunur. Bu ise $[f(x_0), x_0] \neq 0$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak f dönüşümü değişmeli olur ve Teorem 3.1 ile ispat tamamlanır. $\square$

4 YARIASAL HALKALAR ÜZERİNDE DEĞİŞMELİ VE MERKEZLEYEN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde R halkası maksimal sağ kesirler halkası $Q = Q_{mr}(R)$ ve genişletilmiş merkezi C olan bir yarıasal halka olacaktır. Ayrıca R halkasının merkezil kapanışı RC ile gösterilecektir.

4.1 Yarıasal Halkalar Üzerinde Değişmeli Dönüşümler

Bu bölümde bir yarıasal halkada değişmeli toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Bir R asal halkasının bazı $a, b \in R$ elemanları her $x \in R$ elemanı için

$$axb = bxa \tag{4.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa $a, b \in R$ elemanları R halkasının C genişletilmiş merkezi üzerinde doğrusal bağımlıdır. Bu sonuç ilk olarak primitif halkalar için Amitsur tarafından kanıtlanmıştır (Amitsur, 1965) ve Martindale tarafından asal halkalara genişletilmiştir (Martindale, 1969). Daha sonra Brešar, bir R yarıasal halkasının (4.1) eşitliğini sağlayan bazı $a, b \in R$ elemanlarının arasındaki ilişkiyi göstermiştir: Bir $\lambda \in C$ tersinir elemanı ve toplamları 1 olan bazı $e_1, e_2, e_3 \in C$ ortogonal idempotentleri için

$$e_1 a = \lambda e_1 b$$
$$e_2 b = 0$$
$$e_3 a = 0$$

olur (Brešar, 1994). Aslında daha genel olarak bir S kümesinden bir R yarıasal halkasına f ve g dönüşümlerinin her $s, t \in S$ ve $x \in R$ elemanı için

$$f(s)xg(t) = g(s)xf(t) \tag{4.2}$$

eşitliğini sağladığı durumda benzer sonuç elde etmiştir.

Brešar, Martindale ve Miers, değişmeli olmayan bir asal halkanın her B ikitürevinin bir $\lambda \in C$ elemanı için

$$B(x, y) = \lambda[x, y]$$

formunda olduğunu göstermiştir (Brešar et al., 1993). Daha sonra Brešar (4.2) özdeşliğine ilişkin teoremi kullanarak bu sonucu yarıasal halkalara genişletmiştir (Brešar, 1994).

İkitürevler ve değişmeli toplamsal dönüşümler arasında yakın ilişki bulunur. Brešar, Martindale ve Miers, asal halkalarda her değişmeli toplamsal dönüşümün bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

formunda olduğunu belirlemiştir (Brešar et al., 1993). Daha sonra bu sonuç Ara ve Mathieu tarafından yarıasal halkalara genişletilmiştir (Ara and Mathieu, 1993). Brešar, ikitürevler üzerindeki teoremi kullanarak Ara ve Mathieu tarafından verilen sonucun kısa bir ispatını elde etmiştir (Brešar, 1994).

Bu bölümde esas olarak (Brešar, 1994) çalışması ele alınacaktır.

Yardımcı Özellik 4.1. *(Brešar et al., 1993) Bir R halkasını ve bir $B\colon R \times R \to R$ ikitürevini alalım. Her $x, y, z, u, v \in R$ elemanı için*

$$B(x, y)z[u, v] = [x, y]zB(u, v)$$

olur.

İspat. İlk olarak, B dönüşümü ilk bileşen için bir türev olduğundan

$$B(xu, yv) = B(x, yv)u + xB(u, yv)$$

bulunur. Buradan, B dönüşümü ikinci bileşen için bir türev olduğundan

$$B(xu, yv) = B(x, y)vu + yB(x, v)u + xB(u, y)v + xyB(u, v) \tag{4.3}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$B(xu, yv) = B(x, y)uv + xB(u, y)v + yB(x, v)u + yxB(u, v) \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (4.3) ve (4.4) ile, her $x, y, u, v \in R$ elemanı için

$$B(x, y)[u, v] = [x, y]B(u, v)$$

olduğu görülür. Burada u elemanı yerine zu elemanı alınırsa

$$B(x,y)z[u,v] = [x,y]zB(u,v)$$

bulunur. $\square$

Önerme 4.1. *Bir S kümesinden R halkasına f ve g dönüşümleri her $s,t \in S$ ve $x \in R$ elemanı için*

$$f(s)xg(t) = g(s)xf(t)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman her $s \in S$ elemanı için

$$e_1f(s) = \lambda e_1g(s)$$

$$e_2g(s) = 0$$

$$e_3f(s) = 0$$

olacak şekilde, toplamları 1 olan bazı $e_1, e_2, e_3 \in C$ ortogonal idempotentleri ile bir $\lambda \in C$ tersinir elemanı vardır.

İspat. Eğer

$$f(s)xg(t) = g(s)xf(t)$$

eşitliği her $x \in R$ elemanı için sağlanıyorsa eşitliğin aynı zamanda her $x \in RC$ elemanı için de sağlanacağı açıktır. O halde genelliği kaybetmeden R halkasının merkezil kapalı olduğunu kabul edebiliriz.

Şimdi R halkasının

$$I = Rf(S)R$$

$$J = Rg(S)R$$

ideallerini ele alalım. Teorem 2.16 ile

$$(R;I) = \varepsilon_1R$$

$$(R;J) = \varepsilon_2R$$

olacak şekilde bazı $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C$ idempotentlerinin varlığı görülür. Eğer

$$e_1 = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$$

$$e_2 = (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2$$

$$e_3 = \varepsilon_1$$

dersek $e_1, e_2, e_3 \in C$ elemanları toplamları 1 olan ortogonal idempotentler olur. Her $s \in S$ elemanı için $\varepsilon_2 g(s) \in (R; J)$ olduğundan $\varepsilon_2 g(s) R \varepsilon_2 g(s) = (0)$ ve buradan da $\varepsilon_2 g(s) = 0$ eşitlikleri elde edilir. O halde her $s \in S$ elemanı için

$$e_2 g(s) = 0$$

olur. Benzer şekilde her $s \in S$ elemanı için

$$e_3 f(s) = 0$$

olduğu görülür.

Burada

$$(R; e_1 I) = (1 - e_1)R$$
$$(R; e_1 J) = (1 - e_1)R$$

olduğu açıktır. Teorem 2.16 ile, $e_1 I \oplus (1 - e_1)R$ ve $e_1 J \oplus (1 - e_1)R$ direkt toplamları R halkasının esansiyel idealleri olarak bulunur. Şimdi

$$E = e_1 I \oplus (1 - e_1)R$$

diyelim ve bir $\varphi\colon E \to R$ dönüşümünü

$$\varphi(e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i f(s_i) y_i) + (1 - e_1)r) = e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i) y_i) + (1 - e_1)r$$

olarak tanımlayalım. İyi tanımlılığını görmek için

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i f(s_i) y_i) = 0$$

olduğunu varsayalım. Her $x \in R$ ve $s \in S$ elemanı için

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i f(s_i) y_i) x g(s) = 0$$

olur. Hipotezden her $x \in R$ ve $s \in S$ elemanı için

$$f(s_i) y_i x g(s) = g(s_i) y_i x f(s)$$

ve buradan da

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i) y_i) x f(s) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i) y_i) \in (R; I)$$

olur. Ancak $(R; I) = \varepsilon_1 R$ ve $e_1 = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$ olduğundan

$$e_1(\sum_{i=1}^{n} x_i g(s_i) y_i) = 0$$

bulunur ve iyi tanımlılık görülür.

Burada φ dönüşümünün bir R-bimodül homomorfizması olduğu açıktır. Sonuç 2.2 ile, her $x \in E$ elemanı için

$$\varphi(x) = \lambda x$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanının varlığı görülür. Böylece her $s \in S$ elemanı için

$$e_1 f(s) = \lambda e_1 g(s)$$

olur.

Eğer $\lambda \in C$ elemanının tersinir olduğunu görürsek ispat tamamlanır. Burada

$$\lambda E = e_1 J \oplus (1 - e_1)R$$

eşitliği sağlandığından ve $e_1 J \oplus (1 - e_1)R$ direkt toplamı bir esansiyel ideal olduğundan $\lambda \in C$ elemanı bir sıfır bölen olamaz. Sonuç olarak, C halkası bir von Neumann regüler halka olduğundan $\lambda \in C$ elemanı tersinirdir. $\square$

Önerme 4.2. *Bir $B \colon R \times R \to R$ ikitürevini alalım. O zaman $(1-e)R$ halkası değişmeli olacak şekilde bir $e \in C$ idempotenti ve her $x, y \in R$ elemanı için*

$$eB(x, y) = \lambda e[x, y]$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda \in C$ elemanı vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 4.1 ile, bir $B \colon R \times R \to R$ ikitürevinin, her $x, y, z, u, v \in R$ elemanı için

$$B(x, y)z[u, v] = [x, y]zB(u, v)$$

eşitliğini sağladığı görülür. Öyleyse, her $x, y \in R$ elemanı için

$$A(x, y) = [x, y]$$

olmak üzere A ve B dönüşümlerinin Önerme 4.1 için tüm koşulları sağladığı görülür. O halde her $x, y \in R$ elemanı için

$$e_1B(x, y) = \mu e_1[x, y]$$

$$e_2[x, y] = 0$$

$$e_3B(x, y) = 0$$

olacak şekilde toplamları 1 olan bazı $e_1, e_2, e_3 \in C$ ortogonal idempotentleri ve bir $\mu \in C$ tersinir elemanı vardır. Burada $e = e_1 + e_3$ ve $\lambda = \mu e_1$ alarak ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1. *Eğer $f\colon R \to R$ bir değişmeli toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için*

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. İlk olarak $[f(x), x] = 0$ eşitliği doğrusallaştırılarak her $x, y \in R$ elemanı için

$$[f(x), y] = [x, f(y)]$$

olduğu görülür. Buradan $(x, y) \to [f(x), y]$ ile tanımlı dönüşümün bir ikitürev olduğu sonucuna varılır. Önerme 4.2 ile, $(1 - e)R$ halkası değişmeli olacak şekilde bir $e \in C$ idempotentinin ve her $x, y \in R$ elemanı için

$$e[f(x), y] = \mu e[x, y]$$

eşitliğini sağlayan bir $\mu \in C$ elemanının varlığı görülür. Öyleyse her $y \in R$ elemanı için

$$[ef(x) - \mu ex, y] = 0$$

olacağından

$$ef(x) - \mu ex \in C$$

olur. Eğer, $\lambda = \mu e$ olmak üzere

$$\zeta(x) = (ef(x) - \lambda x) + (1 - e)f(x)$$

dersek $\zeta\colon R \to C$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm olur ve her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

bulunur. □

4.2 Yarıasal Halkalar Üzerinde Merkezleyen Dönüşümler

Bu bölümde bir yarıasal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısını belirleyeceğiz. Brešar 1993 yılında, 2-burulmasız bir yarıasal halkada bir merkezleyen toplamsal dönüşümün bir değişmeli dönüşüm olduğunu göstermiştir. Daha sonra 2-burulmasız bir yarıasal halkada bir merkezleyen dönüşümün yapısını belirlemeyi başarmıştır (Brešar, 1994). Bu sonuç 1993 yılında Ara ve Matheu tarafından farklı bir yoldan gösterilmiştir (Ara and Mathieu, 1993). Yarıasal halkalarda merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı halka üzerinde ek bir koşul olmadan 2020 yılında Liu'nun çalışmasının bir sonucu olarak elde edilmiştir (Liu, 2020). Liu bu çalışmasında problemi, Beidar ve Mikhalev tarafından geliştirilen, yarıasal halkalarda ortogonal tamlamalar teorisini kullanarak ele almıştır (Beĭdar and Mikhalëv, 1985).

Bu bölümde Liu'nun çalışmasını bir yarıasal halkada merkezleyen toplamsal dönüşümlere indirgeyeceğiz. Ayrıca R halkasının ortogonal tamlaması $O = O(R)$ ve C halkasının idempotentlerinin kümesi $B = B(C)$ ile gösterilecektir.

Yardımcı Özellik 4.2. *(Inceboz et al., 2014) Bir C-modül olarak $Q = W \oplus C$ olmak üzere $f\colon R \to Q$ dönüşümü bir toplamsal dönüşüm ve $\pi\colon Q \to Q$ dönüşümü W C-alt modülü üzerine izdüşüm olsun. Ayrıca bazı $x \in R$ ve $\lambda \in C$ elemanları için*

$$\lambda x = 0 \implies \lambda f(x) \in C$$

koşulu sağlansın. O zaman her $\sum^{\perp}_{i\in I} x_i e_i \in O$ elemanı için

$$\widetilde{f}\Big(\sum^{\perp}_{i\in I} x_i e_i\Big) = \sum^{\perp}_{i\in I} \pi(f(x_i))e_i$$

ile tanımlı $\widetilde{f}: O \to Q$ *toplamsal dönüşümü vardır.*

İspat. İlk olarak $\widetilde{f}$ dönüşümünün iyi tanımlılığını görelim. Bunun için B kümesinin bazı $\{e_i \mid i \in I\}$ ve $\{f_j \mid j \in J\}$ yoğun ortogonal alt kümeleri alalım. Şimdi her $i \in I$ ve $j \in J$ için $x_i, y_j \in R$ olmak üzere

$$x = \sum_{i \in I}^{\perp} x_i e_i = \sum_{j \in J}^{\perp} y_j f_j$$

olsun. Yardımcı Özellik 2.2 ile, $\{e_i f_j \mid i \in I, j \in J\}$ kümesinin de B kümesinin bir yoğun ortogonal alt kümesi olduğu görülür. Ayrıca her $i \in I$ ve $j \in J$ için

$$x_{i,j} = x_i$$

$$y_{j,i} = y_j$$

dersek

$$x = \sum_{i \in I, j \in J}^{\perp} x_{i,j}(e_i f_j) = \sum_{i \in I, j \in J}^{\perp} y_{j,i}(e_i f_j)$$

olur. Her $i \in I$ ve $j \in J$ için

$$y_{j,i} e_i f_j = x e_i f_j = x_{i,j} e_i f_j$$

olduğundan

$$(y_{j,i} - x_{i,j}) e_i f_j = 0$$

bulunur. Hipotezden

$$f(y_{j,i} - x_{i,j}) e_i f_j \in C$$

ve buradan

$$\pi(f(y_{j,i})) e_i f_j = \pi(f(x_{i,j})) e_i f_j$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I}^{\perp} \pi(f(x_i)) e_i &= \sum_{i \in I, j \in J}^{\perp} \pi(f(x_{i,j})) e_i f_j \\ &= \sum_{i \in I, j \in J}^{\perp} \pi(f(y_{j,i})) e_i f_j \\ &= \sum_{j \in J}^{\perp} \pi(f(y_j)) f_j \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi $\widetilde{f}$ dönüşümünün toplamsal olduğunu görelim. Eğer $x, y \in O$ ise

$$x = \sum_{i \in I}^{\perp} x_i e_i$$
$$y = \sum_{i \in I}^{\perp} y_i e_i$$

olacak şekilde B kümesinin bir $\{e_i \mid i \in I\}$ yoğun ortogonal alt kümesi ve her $i \in I$ için bazı $x_i, y_i \in R$ elemanları bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x+y) &= \widetilde{f}(\sum_{i \in I}^{\perp} (x_i + y_i) e_i) \\ &= \sum_{i \in I}^{\perp} \pi(f(x_i + y_i)) e_i \\ &= \sum_{i \in I}^{\perp} \pi(f(x_i)) e_i + \sum_{i \in I}^{\perp} \pi(f(y_i)) e_i \\ &= \widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(y)\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Yardımcı Özellik 4.3. *Bir $f\colon R \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümünü alalım. Eğer bazı $\lambda \in C$ ve $x \in R$ elemanları için $\lambda x = 0$ ise*

$$\lambda f(x) \in C$$

olur.

İspat. Bazı $\lambda \in C$ ve $x \in R$ elemanları için $\lambda x = 0$ olsun. Ayrıca f dönüşümü merkezleyen olduğundan her $x, y \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned}0 &= \lambda[[f(x+y), x+y], y] \\ &= \lambda[[f(x), y], y] \\ &= [[\lambda f(x), y], y]\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.33 ile

$$\lambda f(x) \in C$$

olduğu görülür. □

Yardımcı Özellik 4.4. *Bir $f\colon R \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümünü alalım ve $\widetilde{f}\colon O \to Q$ dönüşümü Yardımcı Özellik 4.2 ile tanımlanan toplamsal dönüşüm olsun. O zaman $\widetilde{f}$ dönüşümü bir merkezleyen dönüşümdür ve her $x \in R$ elemanı için*

$$\widetilde{f}(x) - f(x) \in C$$

olur.

İspat. Her $x, y \in O$ elemanı için

$$x = \sum_{i\in I}^{\perp} x_i e_i$$
$$y = \sum_{j\in J}^{\perp} x_j f_j$$

olacak şekilde bazı $\{e_i \mid i \in I\}$ ve $\{f_j \mid j \in J\}$ yoğun ortogonal alt kümeleri, her $i \in I$ ve her $j \in J$ için bazı $x_i, y_j \in R$ elemanları vardır. Yardımcı Özellik 4.2 ile

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(\sum_{i\in I}^{\perp} x_i e_i)$$
$$= \sum_{i\in I}^{\perp} \pi(f(x_i))e_i$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\pi(f(x_i)) - f(x_i) \in C$$

olduğu da göz önünde bulundurularak

$$[[\widetilde{f}(x), x], y] = [[\sum_{i\in I}^{\perp} \pi(f(x_i))e_i, \sum_{i\in I}^{\perp} x_i e_i], \sum_{j\in J}^{\perp} y_j f_j]$$
$$= \sum_{i\in I, j\in J}^{\perp} [[\pi(f(x_i)), x_i], y_j] e_i f_j$$
$$= \sum_{i\in I, j\in J}^{\perp} [[f(x_i), x_i], y_j] e_i f_j$$
$$= 0$$

bulunur. O halde $\widetilde{f}$ dönüşümü bir merkezleyen dönüşümdür. Ayrıca $x \in R$ olmak üzere

$$\widetilde{f}(x) = \pi(f(x))$$

olacağından her $x \in R$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) - f(x) \in C$$

bağıntısı elde edilir. □

Önerme 4.3. *Bir R ortogonal tam halkasını alalım ve $M \in Spec(B)$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar geçerlidir:*

1. *$\overline{R} = R + MQ/MQ$ halkası genişletilmiş merkezi $\overline{C} = C + MQ/MQ$ olan bir asal halkadır ve $\overline{Q} = Q/MQ$ halkası $\overline{R}$ halkasının maksimal sağ kesirler halkasında içerilir.*
2. *$Z(\overline{R}) = Z + MQ/MQ$ olur.*
3. *$\overline{Q}$ $\overline{C}$-vektör uzayının bir $\overline{C}$-alt vektör uzayı W için $\overline{Q} = W \oplus \overline{C}$ olsun. Ayrıca $\pi\colon \overline{Q} \to \overline{Q}$ dönüşümü W $\overline{C}$-alt vektör uzayı üzerine izdüşüm ve $f\colon R \to Q$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşüm olsun. Her $x \in Q$ elemanı için $\overline{x} = x + MQ$ diyelim. Her $x \in R$ elemanı için $\overline{f}(\overline{x}) = \pi(\overline{f(x)})$ ile tanımlı $\overline{f}\colon \overline{R} \to \overline{Q}$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşümdür.*

İspat. Burada (1) ve (2) koşulları Teorem 2.17-2.19 ile görülür. Şimdi (3) koşulu için $\overline{f}$ dönüşümününün iyi tanımlılığını görelim. Burada toplamsallık açıktır. Eğer $x \in R \cap MQ$ ise

$$\overline{x} = \overline{0}$$

olur. Ayrıca f dönüşümü merkezleyen olduğundan her $x, y \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \overline{[[f(x+y), x+y], y]} \\
&= [[\overline{f(x+y)}, \overline{x+y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x+y)}, \overline{y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x)} + \overline{f(y)}), \overline{y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x)}, \overline{y}], \overline{y}] + [[\overline{f(y)}, \overline{y}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f(x)}, \overline{y}], \overline{y}] + \overline{[[f(y), y], y]} \\
&= [[\overline{f(x)}, \overline{y}], \overline{y}]
\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.33 ile $\overline{f(x)} \in \overline{C}$ olduğu görülür ve buradan $\pi(\overline{f(x)}) = \overline{0}$ eşitliği elde edilir. Öyleyse

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{0}$$

olur ve iyi tanımlılık görülür. Son olarak

$$\pi(\overline{f(x)}) - \overline{f(x)} \in \overline{C}$$

bağıntısı kullanılarak her $x, y \in R$ elemanı için

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \overline{[[f(x), x], y]} \\
&= [[\overline{f(x)}, \overline{x}], \overline{y}] \\
&= [[\pi(\overline{f(x)}), \overline{x}], \overline{y}] \\
&= [[\overline{f}(\overline{x}), \overline{x}], \overline{y}]
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\overline{f}$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşümdür. □

Teorem 4.2. *Eğer $f\colon R \to Q$ dönüşümü bir merkezleyen toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için*

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

İspat. Yardımcı Özellik 4.2-4.4 ile, her $x \in R$ elemanı için

$$\widetilde{f}(x) - f(x) \in C$$

olacak şekilde bir $\widetilde{f}\colon O \to Q$ merkezleyen toplamsal dönüşümü elde edilir. Teorem 2.10 ile, O halkasının bir ortogonal tam yarıasal halka olduğu görülür. Ayrıca Teorem 2.11 ile, O halkasının maksimal sağ kesirler halkası ve genişletilmiş merkezi sırasıyla Q ve C halkaları olarak bulunur.

Bir $M \in \mathrm{Spec}(B)$ maksimal ideali için

$$\overline{Q} = Q/MQ$$
$$\overline{O} = O + MQ/MQ$$
$$\overline{C} = C + MQ/MQ$$

diyelim ve her $x \in Q$ elemanı için

$$\overline{x} = x + MQ$$

alalım. Önerme 4.3 ile, $\overline{O}$ halkasının, genişletilmiş merkezi $\overline{C}$ halkası olan bir asal halka olduğu ve $\overline{Q}$ halkasının, $\overline{O}$ halkasının maksimal sağ kesirler halkasında içerildiği görülür. Ayrıca Sonuç 2.3 ile, $\overline{C}$ halkasının aynı zamanda $\overline{Q}$ halkasının da genişletilmiş merkezi olduğu görülür. Burada $\overline{C}$ cismi $\overline{Q}$ halkasının bir alt halkası olduğundan $\overline{Q}$ $\overline{C}$-vektör uzayının bir $\overline{C}$-alt vektör uzayı W için

$$\overline{Q} = W \oplus \overline{C}$$

olur. Şimdi $\pi\colon \overline{Q} \to \overline{Q}$ dönüşümü W $\overline{C}$-alt vektör uzayı üzerine izdüşüm olsun ve her $x \in O$ elemanı için

$$\widehat{f}(\overline{x}) = \pi(\overline{\widetilde{f}(x)})$$

ile tanımlı $\widehat{f}\colon \overline{O} \to \overline{Q}$ dönüşümünü alalım. Önerme 4.3 ile, $\widehat{f}$ dönüşümünün bir merkezleyen toplamsal dönüşüm olduğu görülür. Teorem 3.2 ile, her $x \in O$ elemanı için

$$[\widehat{f}(\overline{x}), \overline{x}] = \overline{0}$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse her $x \in O$ elemanı için

$$\begin{aligned} \overline{0} &= [\widehat{f}(\overline{x}), \overline{x}] \\ &= [\pi(\overline{\widetilde{f}(x)}), \overline{x}] \\ &= [\overline{\widetilde{f}(x)}, \overline{x}] \\ &= \overline{[\widetilde{f}(x), x]} \end{aligned}$$

olur. O halde her $x \in O$ elemanı için

$$[\widetilde{f}(x), x] \in MQ$$

olmalıdır. Ancak Teorem 2.29 ile

$$\bigcap_{M \in \mathrm{Spec}(B)} MQ = (0)$$

olduğu görülür ve böylece her $x \in O$ elemanı için

$$[\widetilde{f}(x), x] = 0$$

bulunur. Özel olarak her $x \in R$ elemanı için

$$[f(x), x] = 0$$

olur. Teorem 4.1 ile ispat tamamlanır. $\square$

5 SONUÇ

Üçüncü bölümde asal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde yarıasal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısı belirlenmiştir.

Asal ve yarıasal halkalar üzerinde değişmeli toplamsal dönüşümlerin ve merkezleyen toplamsal dönüşümlerin yapısının aynı olduğu görülmüştür: Bir R asal veya yarıasal halkası üzerinde bir $f\colon R \to R$ toplamsal dönüşümü bir değişmeli dönüşüm veya bir merkezleyen dönüşüm ise her $x \in R$ elemanı için

$$f(x) = \lambda x + \zeta(x)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı ve bir $\zeta\colon R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

Kaynaklar

Amitsur, S.A., 1965, Generalized polynomial identities and pivotal monomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114, 210–226, ISSN 0002-9947, doi: 10.2307/1993998.

Ara, P. and **Mathieu, M.**, 1993, An application of local multipliers to centralizing mappings of C^*-algebras, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 44(174), 129–138, ISSN 0033-5606, doi:10.1093/qmath/44.2.129.

Beidar, K.I., 1998, On functional identities and commuting additive mappings, *Comm. Algebra*, 26(6), 1819–1850, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927879808826241.

Beidar, K.I. and **Chebotar, M.A.**, 2000, On functional identities and d-free subsets of rings. I, II, *Comm. Algebra*, 28(8), 3925–3951, 3953–3972, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927870008827066.

Beidar, K.I. and **Martindale, III, W.S.**, 1998, On functional identities in prime rings with involution, *J. Algebra*, 203(2), 491–532, ISSN 0021-8693, doi:10.1006/jabr.1997.7285.

Beidar, K.I., **Martindale, III, W.S.**, and **Mikhalev, A.V.**, 1996, *Rings with generalized identities*, volume 196 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, Inc., New York, ISBN 0-8247-9325-0, xiv+522 pages.

Beĭdar, K.I. and **Mikhalëv, A.V.**, 1985, Orthogonal completeness and algebraic systems, *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(6(246)), 79–115, 199, ISSN 0042-1316.

Brešar, M., 1991, Centralizing mappings on von Neumann algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(2), 501–510, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2048342.

Brešar, M., 1992, On a generalization of the notion of centralizing mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114(3), 641–649, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2159383.

Brešar, M., 1993a, Centralizing mappings and derivations in prime rings, *J. Algebra*, 156(2), 385–394, ISSN 0021-8693, doi:10.1006/jabr.1993.1080.

Brešar, M., 1993b, Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 335(2), 525–546, ISSN 0002-9947, doi:10.2307/2154392.

Brešar, M., 1994, On certain pairs of functions of semiprime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3), 709–713, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2160460.

Brešar, M., 1995, On generalized biderivations and related maps, *J. Algebra*, 172(3), 764–786, ISSN 0021-8693, doi:10.1006/jabr.1995.1069.

Brešar, M., 1996, Applying the theorem on functional identities, *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, 4(1), 43–54, ISSN 1060-9881.

Brešar, M., 2000, Functional identities: a survey, in *Algebra and its applications (Athens, OH, 1999)*, volume 259 of *Contemp. Math.*, pages 93–109, Amer. Math. Soc., Providence, RI, doi:10.1090/conm/259/04089.

Brešar, M., 2004, Commuting maps: a survey, *Taiwanese J. Math.*, 8(3), 361–397, ISSN 1027-5487, doi:10.11650/twjm/1500407660.

Brešar, M., 2014, *Introduction to noncommutative algebra*, Universitext, Springer, Cham, ISBN 978-3-319-08692-7; 978-3-319-08693-4, xxxviii+199 pages, doi:10.1007/978-3-319-08693-4.

Brešar, M., **Chebotar, M.A.**, and **Martindale, III, W.S.**, 2007, *Functional identities*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, ISBN 978-3-7643-7795-3, xii+272 pages.

Brešar, M., **Martindale, III, W.S.**, and **Miers, C.R.**, 1993, Centralizing maps in prime rings with involution, *J. Algebra*, 161(2), 342–357, ISSN 0021-8693, doi:10.1006/jabr.1993.1223.

Brešar, M. and **Miers, C.R.**, 1995, Commuting maps on Lie ideals, *Comm. Algebra*, 23(14), 5539–5553, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927879508825551.

Chacron, M., 2016, Commuting involution, *Comm. Algebra*, 44(9), 3951–3965, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927872.2015.1087546.

Chebotar, M.A., 1998a, A note on certain subrings and ideals of prime rings, *Comm. Algebra*, 26(1), 107–116, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927879808826119.

Chebotar, M.A., 1998b, On generalized functional identities on prime rings, *J. Algebra*, 202(2), 655–670, ISSN 0021-8693, doi:10.1006/jabr.1997.7255.

Cheung, W.S., 2001, Commuting maps of triangular algebras, *J. London Math. Soc. (2)*, 63(1), 117–127, ISSN 0024-6107, doi:10.1112/S0024610700001642.

Chuang, C.L., 1987, The additive subgroup generated by a polynomial, *Israel J. Math.*, 59(1), 98–106, ISSN 0021-2172, doi:10.1007/BF02779669.

Divinsky, N.J., 1955, On commuting automorphisms of rings, *Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III*, 49, 19–22, ISSN 0035-9122.

Du, Y. and **Wang, Y.**, 2012, k-commuting maps on triangular algebras, *Linear Algebra Appl.*, 436(5), 1367–1375, ISSN 0024-3795, doi:10.1016/j.laa.2011.08.024.

Franca, W., 2012, Commuting maps on some subsets of matrices that are not closed under addition, *Linear Algebra Appl.*, 437(1), 388–391, ISSN 0024-3795, doi:10.1016/j.laa.2012.02.018.

Herstein, I.N., 1968, *Noncommutative rings*, The Carus Mathematical Monographs, No. 15, Mathematical Association of America; distributed by John Wiley & Sons, Inc., New York, xi+199 pages.

Herstein, I.N., 1976, *Rings with involution*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, x+247 pages.

Inceboz, H.G., **Koşan, M.T.**, and **Lee, T.K.**, 2014, m-power commuting MAPS on semiprime rings, *Comm. Algebra*, 42(3), 1095–1110, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927872.2012.731623.

Jacobson, N., 1979, *Lie algebras*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 0-486-63832-4, ix+331 pages, republication of the 1962 original.

Kissin, E. and **Shulman, V.S.**, 2002, Range-inclusive maps on C^*-algebras, *Q. J. Math.*, 53(4), 455–465, ISSN 0033-5606, doi:10.1093/qjmath/53.4.455.

Lanski, C., 1988, Differential identities, Lie ideals, and Posner's theorems, *Pacific J. Math.*, 134(2), 275–297, ISSN 0030-8730.

Lanski, C., 1993, An Engel condition with derivation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(3), 731–734, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2160113.

Lanski, C., 1997, An Engel condition with derivation for left ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(2), 339–345, ISSN 0002-9939, doi:10.1090/S0002-9939-97-03673-3.

Lee, P.H. and **Lee, T.K.**, 1983, Lie ideals of prime rings with derivations, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 11(1), 75–80, ISSN 0304-9825.

Lee, P.H. and **Lee, T.K.**, 1986, Derivations centralizing symmetric or skew elements, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 14(3), 249–256, ISSN 0304-9825.

Lee, P.H. and **Wong, T.L.**, 1995, Derivations cocentralizing Lie ideals, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 23(1), 1–5, ISSN 0304-9825.

Lee, P.H. and **Lee, T.K.**, 1997, Linear identities and commuting maps in rings with involution, *Comm. Algebra*, 25(9), 2881–2895, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927879708826028.

Lee, P.H. and **Wang, Y.**, 2009, Supercentralizing maps in prime superalgebras, *Comm. Algebra*, 37(3), 840–854, ISSN 0092-7872, doi:10.1080/00927870802271672.

Lee, P.H., **Wong, T.L.**, **Lin, J.S.**, and **Wang, R.J.**, 1997, Commuting traces of multiadditive mappings, *J. Algebra*, 193(2), 709–723, ISSN 0021-8693, doi:10.1006/jabr.1996.7016.

Lee, T.K. and **Lee, T.C.**, 1996, Commuting additive mappings in semiprime rings, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 24(4), 259–268, ISSN 0304-9825.

Liau, P.K. and **Liu, C.K.**, 2018, An Engel condition with b-generalized derivations for Lie ideals, *J. Algebra Appl.*, 17(3), 1850046, 17, ISSN 0219-4988, doi:10.1142/S0219498818500469.

Liu, C.K., 2020, Additive n-commuting maps on semiprime rings, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 63(1), 193–216, ISSN 0013-0915, doi:10.1017/s001309151900018x.

Liu, C.K. and **Yang, J.J.**, 2017, Power commuting additive maps on invertible or singular matrices, *Linear Algebra Appl.*, 530, 127–149, ISSN 0024-3795, doi:10.1016/j.laa.2017.04.038.

Martindale, III, W.S., 1969, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra*, 12, 576–584, ISSN 0021-8693, doi:10.1016/0021-8693(69)90029-5.

Mayne, J.H., 1976, Centralizing automorphisms of prime rings, *Canad. Math. Bull.*, 19(1), 113–115, ISSN 0008-4395, doi:10.4153/CMB-1976-017-1.

Miers, C.R., 1979, Centralizing mappings of operator algebras, *J. Algebra*, 59(1), 56–64, ISSN 0021-8693, doi:10.1016/0021-8693(79)90152-2.

Posner, E.C., 1957, Derivations in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1093–1100, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2032686.

Posner, E.C., 1960, Prime rings satisfying a polynomial identity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11, 180–183, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2032951.

Vukman, J., 1990, Commuting and centralizing mappings in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1), 47–52, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2048360.

Vukman, J., 1992, On derivations in prime rings and Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(4), 877–884, ISSN 0002-9939, doi:10.2307/2159463.

Xiao, Z. and **Wei, F.**, 2010, Commuting mappings of generalized matrix algebras, *Linear Algebra Appl.*, 433(11-12), 2178–2197, ISSN 0024-3795, doi:10.1016/j.laa.2010.08.002.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince değerli görüşlerinden ve deneyimlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Çağrı Demir'e, yakın ilgilerinden dolayı Sayın Prof. Dr. Nurcan Argaç'a ve Sayın Prof. Dr. Emine Albaş'a, kurduğumuz iyi iletişimden dolayı tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman yanımda hissettiğim aileme göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı sevgilerimi sunarım.

Son olarak, desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

05/09/2022

Utkan Utkaner

ÖZ GEÇMİŞ

İzmir'de 1987 yılında doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir'de tamamladı. Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Programından 2020 yılında mezun oldu. Aynı yıldan itibaren Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans Programına kayıtlıdır.