Seminer

Utkan Utkaner

Ege Üniversitesi

2021

Genelleştirilmiş Bitürevler ve İlişkili Dönüşümler Üzerine

On Generalized Biderivations and Related Maps

Matej Brešar

1994

İçindekiler

Bu çalışmada R, Z merkezli bir asal halkayı belirtecektir.

Tanım (Merkezleyen ve Commuting Dönüşümler)

$S \subseteq R, f : S \to R$ bir dönüşüm olsun. Eğer $[f(x), x] \in Z, \forall x \in S$ ise f dönüşümü S üzerinde merkezleyendir denir. Özel olarak $[f(x), x] = 0, \forall x \in S$ ise f dönüşümü S üzerinde commuting olur.

[19] E. C. Posner (1957)

R asal halkası üzerinde sıfırdan farklı merkezleyen türev varsa R değişmelidir.

İyi bilinen bu teorem merkezleyen dönüşümler üzerindeki ilk önemli çalışmadır.
Daha sonra birçok kişi Posner'in çalışmasını çeşitli yönlerde ilerletmiştir.

[14] C. Lanski (1988)

Değişmeli olmayan asal halkaların bazı alt kümelerinde sıfırdan farklı merkezleyen olmayan türevler vardır.

Benzer sonuçlar daha sonra otomorfizmalar gibi farklı dönüşümler için de elde edilmiştir.

Burada merkezleyen ve toplamsal dönüşümler çalışılmıştır. Öncelikle 2-burulmasız yarı asal halkanın bir Jordan alt halkasında merkezleyen ve toplamsal her dönüşümün commuting olacağı gösterilmiştir. Ana teorem asal halkalar üzerindeki commuting toplamsal dönüşümleri karakterize eder.

[5] M. Brešar (1993)

Bir R halkasının commuting toplamsal dönüşümleri $\lambda \in C, \zeta \colon R \to C$ toplamsal olmak üzere $x \mapsto \lambda x + \zeta(x)$ formundadır. Burada C, R halkasının genişletilmiş merkezidir.

Daha sonra benzer sonuçlar yarı asal halkalar [1, 7], von Neumann [3] ve C^*-cebirleri ve involüsyonlu asal halkaların skew elemanları [9] için elde edilmiştir. Ayrıca [6] ve [10] ile bazı halkaların 2-toplamsal dönüşümlerinin commuting izleri karakterize edilmiştir.

Commuting toplamsal dönüşümler ile bitürevler arasında yakın ilişki bulunur.

Tanım (Bitürev)

$S \subseteq R$ bir alt halka olsun. Her değişkeni için türev olan bir $D\colon S \times S \to R$ 2-toplamsal dönüşümüne S'nin bir bitürevi denir. Yani D dönüşümü S'nin bir bitürevi ise her $x \in S$ elemanı için $y \mapsto D(x, y)$ ve $y \mapsto D(y, x)$ dönüşümleri S'den R'ye türevlerdir.

Her $f\colon S \to R$ commuting toplamsal dönüşümü S'nin bir bitürevini oluşturur.
$[f(x), x] = 0, x \in S$ eşitliğinden $x \mapsto x + y$ dönüşümü ile
$[f(x), y] = [x, f(y)], x, y \in S$ eşitliği elde edilir.
Buradan $(x, y) \mapsto [f(x), y]$ dönüşümünün bir bitürev olduğu görülür.

[9] M. Brešar, W. S. Martindale ve C. R. Miers (1993)

Değişmeli olmayan R asal halkasının her D bitürevi

$$D(x,y)=\lambda[x,y], \exists\lambda\in C$$

formundadır.

Bu teoremin bir sonucu olarak asal halkaların commuting toplamsal dönüşümleri [5]'te karakterize edilmiştir.

Tanım (σ-Bitürev)

σ, R'nin bir otomorfizması ve $S \subseteq R$ bir alt halka olmak üzere $d\colon S \to R$ dönüşümü toplamsal olsun. Eğer

$$d(xy) = \sigma(x)d(y) + d(x)y, x, y \in S$$

ise d dönüşümüne bir σ-türev denir. Ayrıca bir $\Delta\colon S \times S \to R$ 2-toplamsal dönüşümü için $x \in S$ olmak üzere $y \mapsto \Delta(x, y)$ ve $y \mapsto \Delta(y, x)$ dönüşümleri S'den R'ye σ-türevler ise Δ 2-toplamsal dönüşümüne σ-bitürev denir.

3. σ-Bitürevler

Bu bölümde R asal halkasının σ-bitürevlerinin yapısı belirlenecektir. Bunun bir uygulaması olarak R halkasının $f(x)x = \sigma(x)f(x), x \in R$ formundaki toplamsal f dönüşümleri karakterize edilecektir.

Lanski [15] ve [16]'da R asal halkasının sıfırdan farklı bir d türevinin, R'nin belirli S alt halkaları için

$$c_1xd(y) + c_2d(x)y + c_3yd(x) + c_4d(y)x \in C, \exists c_i \in C, \forall x, y \in S$$

ilişkisini sağladığı durumları incelemiştir. ([15]'te S bir ideal veya Lie idealidir. [16]'da ise R involüsyonlu bir halka olmak üzere S, R'nin skew veya simetrik elemanlarının kümesidir).
Karakteristiğin 2 veya 3 olmadığı zamanlarda sonuç iki durum için de aynıdır: ya $c_i = 0$ olur ya da R, S_4'ü sağlar.

4. İdealler Üzerine Sonuçlar

Bu bölümde Lanski'nin ve yazarın önceki çalışmalarından yola çıkılarak R bir asal halka, $I \trianglelefteq R$ olmak üzere $f_1, f_2, f_3, f_4 : I \to R$ toplamsal dönüşümleri için

$$\pi(x, y) = f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x) \in Z, x, y \in I$$

olması durumu incelenecektir.
R halkasının karakteristiği 2 veya 3 değilse ya $\pi(x, y) = 0, x, y \in I$ olur ya da R, S_4'ü sağlar.
$\pi(x, y) = 0, x, y \in I$ olması durumunda f_1, f_2, f_3, f_4 dönüşümleri tamamen karakterize edilecektir.

Tanım (Genelleştirilmiş Bitürev)

$S \subseteq R$ ve $g \colon S \to R$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$g(x) = ax + xb, x \in S, \exists a, b \in R$$

ise g dönüşümüne bir genelleştirilmiş (iç) türev denir. Ayrıca bir $G \colon S \times S \to R$ 2-toplamsal dönüşümü için $x \in S$ olmak üzere $y \mapsto G(x, y)$ ve $y \mapsto G(y, x)$ dönüşümleri S'den R'ye genelleştirilmiş türevler ise G 2-toplamsal dönüşümüne genelleştirilmiş bitürev denir.

Ana Teorem

Çalışmanın esas sonucu olarak bir R halkasının bir idealinin her G genelleştirilmiş bitürevinin

$$G(x,y) = xay + ybx, \exists a, b \in Q_s$$

formunda olduğu görülecektir.

5. Sağ İdealler Üzerine Sonuçlar

Bu bölümde R asal halkasının T sağ idealleri için bitürevler, commuting ve skew-commuting dönüşümler incelenecektir. Sonuçlar $TC \trianglelefteq_r R_c$ sağ idealinin minimal olması durumu hariç idealler üzerine sonuçlar ile aynı bulunacaktır.

2. Ön Hazırlıklar

Bu bölümde sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı tanım ve sonuçlar ele alınacaktır.
Bu çalışmadaki ana teoremlerin tamamen Lemma 2.3 ve Lemma 2.5 ispatlarındaki elemanter hesaplamalara bağlı olduğu vurgulanmıştır.

Martindale Kesirler Halkası

[17]'de tanımlanan Q_r sağ Martindale kesirler halkası aşağıdaki dört özellik ile karakterize edilebilir:

1. $R \subseteq Q_r$,
2. $\forall q \in Q_r, \exists I \trianglelefteq R, I \neq 0, qI \subseteq R$,
3. $q \in Q_r$ ve $0 \neq I \trianglelefteq R$ için $qI = 0$ ise $q = 0$ olur,
4. $I \trianglelefteq R$ ve $k \colon I \to R$ bir sağ R-modül homomorfizması ise $\exists q \in Q_r, k(u) = qu, \forall u \in I$ olur.

Martindale Kesirler Halkası

Q_r'nin merkezine R halkasının genişletilmiş merkezi denir ve C ile gösterilir. C bir cisimdir. Ayrıca C, R halkasının Q_r'deki merkezleyenidir ve $Z \subseteq C$ olur.
Q_r'nin R ve C ile oluşturulan alt halkasına R'nin merkezil kapanışı denir ve R_c ile gösterilir.
Q_r'nin bir diğer önemli alt halkası simetrik Martindale kesirler halkasıdır ve $Q_s = \{q \in Q_r | Iq \subseteq R, \exists I \trianglelefteq R, I \neq 0\}$ ile tanımlanır. Ayrıca $R \subseteq R_c \subseteq Q_s \subseteq Q_r$ olur. C cismi üzerinde R_c, Q_s ve Q_r asal cebirlerdir.

Lemma (2.1) R asal halkasının C genişletilmiş merkezinin önemini vurgular.

Lemma 2.1

Diyelim ki sıfırdan farklı $a_i, b_i \in Q_r$, $i = 1, \ldots, m$, elemanları bir $0 \neq I \trianglelefteq R$ için $\sum_{i=1}^{m} a_i x b_i = 0, \forall x \in I$ eşitliğini sağlasın. O zaman a_i elemanları C üzerinde lineer bağımlıdır ve b_i elemanları C üzerinde lineer bağımlıdır.

[13, Teorem 1], $a_i, b_i \in R$ durumunu inceler. Ancak buradaki sonuç daha geneldir.

Lemma (2.2), [2, Lemma] ve [9, Lemma 3.2]'nin daha genel halidir.

Lemma 2.2

M bir küme olsun. $F, G : M \to Q_r$ dönüşümleri bir $0 \neq I \trianglelefteq R$ için $F(s)xG(t) = G(s)xF(t), \forall s, t \in M, \forall x \in I$ eşitliğini sağlasın. Eğer $F \neq 0$ ise $G(s) = \lambda F(s), \forall s \in M, \exists \lambda \in C$ olur.

İlerideki lemmalarda temel ilişkileri türeteceğiz.

Lemma 2.3

B bir halka, $A \subseteq B$ bir alt halka ve σ, B'nin bir otomorfizması olsun. Eğer $\Delta\colon A \times A \to B$ bir σ-bitürev ise

$$\Delta(x, y)z[u, v] = [\sigma(x), \sigma(y)]\sigma(z)\Delta(u, v), \forall x, y, z, u, v \in A$$

olur.

İspat

$\Delta(xu, yv)$ değerini iki farklı şekilde hesaplayacağız.
Δ bir σ-bitürev olduğundan

$$\Delta(xu, yv) = \Delta(x, yv)u + \sigma(x)\Delta(u, yv)$$

olur. O halde

$$\Delta(xu, yv) = \Delta(x, y)vu + \sigma(y)\Delta(x, v)u + \sigma(x)\Delta(u, y)v + \sigma(x)\sigma(y)\Delta(u, v) \quad (1)$$

olur. Öte yandan

$$\Delta(xu, yv) = \Delta(xu, y)v + \sigma(y)\Delta(xu, v)$$

olur. O halde

$$\Delta(xu, yv) = \Delta(x, y)uv + \sigma(x)\Delta(u, y)v + \sigma(y)\Delta(x, v)u + \sigma(y)\sigma(x)\Delta(u, v) \quad (2)$$

olur.

İspat (Devam)

(1) ve (2) ile

$$\Delta(x,y)[u,v] = [\sigma(x),\sigma(y)]\Delta(u,v)$$

elde edilir. $u \mapsto zu$ dönüşümü ile

$$[zu,v] = [z,v]u + z[u,v]$$

ve

$$\Delta(zu,v) = \Delta(z,v)u + \sigma(z)\Delta(u,v)$$

olduğundan eşitlik görülür.

σ birim olduğunda [9, Lemma 3.1] elde edilir.

Sonuç 2.4

B bir halka, $A \subseteq B$ bir alt halka olsun. Eğer $D\colon A \times A \to B$ bir bitürev ise

$$D(x,y)z[u,v] = [x,y]zD(u,v), \forall x,y,z,u,v \in A$$

olur.

Lemma 2.5

B bir halka, $A \subseteq B$ bir alt halka ve $0 \neq T \trianglelefteq_r A$ olsun. $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon T \to B$ dönüşümleri için

$$\pi(x, y) = f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x)$$

olsun. O zaman her $x, y \in T, r \in A$ için

$$\begin{aligned} x[r, f_2(yr) - f_2(y)r] + y[r, f_4(xr) - f_4(x)r] \\ = \pi(x, y)r^2 - (\pi(xr, y) + \pi(x, yr))r + \pi(xr, yr) \end{aligned}$$

olur.

İspat

Sağlama ile eşitlik görülür.

Sonuç 2.6

B bir halka, $A \subseteq B$ bir alt halka ve $0 \neq T \trianglelefteq_r A$ olsun.
$f_1, f_2, f_3, f_4 : T \to B$ dönüşümleri için

$$f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x) = 0, \forall x, y \in T$$

olsun. O zaman her $x, y \in T, r \in A$ için

$$x[r, f_2(yr) - f_2(y)r] + y[r, f_4(xr) - f_4(x)r] = 0$$

olur.

3. σ-Bitürevler

Tanım

σ, R asal halkasının bir otomorfizması olsun. Eğer $\sigma(r) = ara^{-1}, \forall r \in R$ olacak şekilde bir $a \in Q_s$ tersinir elemanı varsa σ X-içseldir denir.

Lemma 3.1 [18, Lemma 12.1]

σ, R'nin bir otomorfizması olsun. Eğer

$$a_1 r a_2 = a_3 \sigma(r) a_4, \forall r \in R$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $a_1, a_2, a_3, a_4 \in Q_r$ elemanları varsa σ otomorfizması X-içseldir.

Artık Teorem (3.2)'yi kanıtlayabiliriz.

Teorem 3.2

R değişmeli olmayan bir asal halka, R'nin bir otomorfizması σ ve R'nin sıfırdan farklı bir σ-bitürevi $\Delta : R \times R \to R$ olsun. O zaman σ otomorfizması X-içseldir ve

$$\sigma(x) = bxb^{-1}, \Delta(x, y) = b[x, y], \forall x, y \in R$$

olacak şekilde tersinir bir $b \in Q_s$ elemanı vardır.

İspat

Lemma (2.3) ile

$$\Delta(x,y)r[u,v] = [\sigma(x),\sigma(y)]\sigma(r)\Delta(u,v), \forall x,y,u,v,r \in R$$

olduğu görülür. R değişmeli olmadığından ve $\Delta \neq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} a_1 &= \Delta(x_0,y_0) \neq 0, \\ a_2 &= [u_0,v_0] \neq 0, \\ a_3 &= [\sigma(x_0),\sigma(y_0)] \neq 0, \\ a_4 &= \Delta(u_0,v_0) \neq 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_0, y_0, u_0, v_0 \in R$ elemanları vardır. O halde

$$a_1 r a_2 = a_3 \sigma(r) a_4, r \in R$$

olur.

İspat

Lemma (3.1) ile σ otomorfizması X-içseldir. O halde

$$\Delta(x,y)r[u,v] = a[x,y]ra^{-1}\Delta(u,v), \forall x,y,u,v,r \in R$$

olur. Eşitliği sol taraftan a^{-1} ile çarparak

$$a^{-1}\Delta(x,y)r[u,v] = [x,y]ra^{-1}\Delta(u,v)$$

elde edilir. $M = R \times R$ diyelim. $F(x,y) = [x,y]$, $G(x,y) = a^{-1}\Delta(x,y)$ ile tanımlı $F, G : M \to Q_r$ dönüşümleri Lemma (2.2) için şartları sağlar. Öyleyse

$$G(x,y) = \lambda F(x,y), \exists \lambda \in C$$

olur. $b = \lambda a$ olmak üzere

$$\Delta(x,y) = b[x,y]$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\sigma(x) = bxb^{-1}, x \in R$$

olur.

Sonuç 3.3

Diyelim ki R halkasının bir σ otomorfizması ve sıfırdan farklı bir $f : R \to R$ toplamsal dönüşümü

$$f(x)x = \sigma(x)f(x), \forall x \in R$$

eşitliğini sağlasın. O zaman $\sigma(x) = bxb^{-1}, x \in R$ olacak şekilde tersinir bir $b \in Q_s$ elemanı vardır ve f dönüşümü bir $\zeta : R \to C$ toplamsal dönüşümü için ya $f(x) = bx + \zeta(x)b, x \in R$ ya da $f(x) = \zeta(x)b, x \in R$ formundadır.

4. İdealler Üzerine Sonuçlar

Bu bölümde I, R asal halkasının bir ideali olacaktır.
Amaç I idealinin genelleştirilmiş bitürevlerini karakterize etmektir.

İlk olarak [9, Teorem 3.3]'ün daha genel bir halini görelim.

Önerme 4.1

$D\colon I \times I \to Q_r$ bir bitürev olsun. Eğer R değişmeli değil ise $D(x, y) = \lambda[x, y], \forall x, y \in I$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır.

Tanım

f bir dönüşüm olmak üzere tanım kümesindeki her x, y elemanları için

$$f(x+y) - f(x) - f(y) \in C$$

ise f toplamsal modulo C'dir denir.

Şimdi Önerme (4.1)'in bir sonucu olarak [5]'in ana teoreminin biraz daha genel halini göreceğiz.

Sonuç 4.2

$f : I \to Q_r$ toplamsal modulo C olsun. Eğer f commuting ise $f(x) = \lambda x + \zeta(x), \forall x \in I$ olacak şekilde $\lambda \in C$ ve bir $\zeta : I \to C$ dönüşümü vardır.

Lemma 4.3

$f: I \to R$ toplamsal modulo C olsun. Diyelim ki her $y \in I, r \in R$ için

$$[r, f(yr) - f(y)r] = 0$$

eşitliği sağlansın. O zaman $f(y) = ay - \lambda(y), \forall y \in I$ olacak şekilde $a \in Q_r$ ve bir $\lambda \colon I \to C$ dönüşümü vardır.

Lemma 4.4

Diyelim ki $g_1, g_2 : I \to Q_r$ dönüşümleri için aşağıdaki koşullardan biri sağlansın:

1. $xg_1(y) + yg_2(x) = 0, \forall x, y \in I$,
2. $g_1(x)y + g_2(y)x = 0, \forall x, y \in I$.

O zaman ya $g_1 = g_2 = 0$ olur ya da R değişmelidir.

Lemma 4.5

Diyelim ki f_1, f_2, f_3, f_4 dönüşümleri toplamsal modulo C olsun ve her $x, y \in I$ için

$$f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x) = 0$$

eşitliği sağlansın. O zaman her $x \in I$ için

$$f_1(x) = -xa + \mu(x), f_2(x) = ax - \lambda(x),$$
$$f_3(x) = -xb + \lambda(x), f_4(x) = bx - \mu(x)$$

olacak şekilde $a, b \in Q_s$ ve $\lambda, \mu \colon I \to C$ dönüşümleri vardır.

Lemma 4.6

Diyelim ki $I \neq 0$ olsun. Eğer $q_1, q_2 \in Q_r$ için $q_1 x + x q_2 \in C, \forall x \in I$ ise ya $q_1 = -q_2 \in C$ olur ya da R değişmelidir. Özel olarak $q \in Q_r$ için $qI \subseteq C$ veya $Iq \subseteq C$ ise ya $q = 0$ olur ya da R değişmelidir.

Artık Teorem (4.7)'yi ispatlayabiliriz.

Teorem 4.7

I bir asal halkanın ideali olsun. Eğer $G : I \times I \to R$ bir genelleştirilmiş bitürev ise her $x, y \in I$ için

$$G(x, y) = xay + ybx$$

olacak şekilde $a, b \in Q_s$ vardır.

İspat

G ilk değişken için genelleştirilmiş türev olduğundan her $y \in I$ için

$$G(x,y) = g_1(y)x + xg_2(y), \exists g_1(y), g_2(y) \in R$$

olur. O halde

$$G(x, y_1 + y_2) = g_1(y_1 + y_2)x + xg_2(y_1 + y_2)$$

olur. Ayrıca G ikinci değişken için toplamsal olduğundan

$$\begin{aligned} G(x, y_1 + y_2) &= G(x, y_1) + g(x, y_2) \\ &= g_1(y_1)x + xg_2(y_1) + g_1(y_2)x + xg_2(y_2) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$(g_1(y_1+y_2) - g_1(y_1) - g_1(y_2))x + x(g_2(y_1+y_2) - g_2(y_1) - g_2(y_2)) = 0, \forall x, y_1, y_2 \in I$$

elde edilir.

İspat (Devam)

Lemma (4.6) ile

$$g_1(y_1+y_2)-g_1(y_1)-g_1(y_2)=-(g_2(y_1+y_2)-g_2(y_1)-g_2(y_2))\in C$$

ilişkisi elde edilir. O halde $g_1,g_2\colon I\to R$ toplamsal modulo C olur.
G ikinci değişken için genelleştirilmiş türev olduğundan $g_3,g_4\colon I\to R$ toplamsal modulo C olmak üzere

$$G(x,y)=g_3(x)y+yg_4(x), x,y\in I$$

olur. O halde

$$g_3(x)y-xg_2(y)-g_1(y)x+yg_4(x)=0, \forall x,y\in I$$

olur.

İspat (Devam)

Lemma (4.5) ile $\exists a, b \in Q_s, \lambda\mu : I \to C$,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= xb - \lambda(x), \\ g_2(x) &= ax + \lambda(x), \\ g_3(x) &= xa + \mu(x), \\ g_4(x) &= bx - \mu(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$G(x, y) = g_3(x)y + yg_4(x) = xay + ybx$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.8

R değişmeli olmasın ve $G : I \times I \to R$ bir genelleştirilmiş bitürev olsun.

1. Eğer G simetrik ise $(G(x,y) = G(y,x), x, y \in I)$ $G(x,y) = xay + yax, x, y \in I$ olacak şekilde $a \in Q_s$ vardır.
2. Eğer G anti-simetrik ise $(G(x,y) = -G(y,x), x, y \in I)$ $G(x,y) = xay - yax, x, y \in I$ olacak şekilde $a \in Q_s$ vardır.

Artık commuting ve skew-commuting dönüşümler üzerindeki giriş bölümünde bahsi geçen sonuçları genelleyebiliriz.
İlk olarak Sonuç (4.9) ile başlayalım.

Sonuç 4.9

Diyelim ki $f, g \colon I \to R$ toplamsal dönüşümleri her $x \in I$ için

$$f(x)x = xg(x)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman her $x \in I$ için

$$f(x) = xa + \zeta(x), g(x) = ax + \zeta(x)$$

olacak şekilde $a \in Q_s$ ve bir $\zeta \colon I \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.

Sonuç 4.10

R değişmeli olmasın. Diyelim ki bir $f : I \to R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in I$ ve en az biri sıfırdan farklı $c_1, c_2, c_3, c_4 \in Z$ için

$$c_1 f(x)y + c_2 x f(y) + c_3 f(y)x + c_4 y f(x) = 0$$

eşitliğini sağlasın. O zaman f, $\lambda \in C$ ve $\zeta : I \to C$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere $f(x) = \lambda x + \zeta(x)$ formundadır. Üstelik eğer $\lambda \neq 0$ ise $c_1 = -c_2$ ve $c_3 = -c_4$, eğer $\zeta \neq 0$ ise $c_1 = -c_4$ ve $c_2 = -c_3$ olur.

Giriş bölümünde gördüğümüz üzere Lanski [15] ve [16]'da benzer durumları incelemiştir. Ancak orada f bir türev ve $c_i \in C$ olarak alınmıştır. Yine de Sonuç (4.10) $c_i \in C$ olması durumunda da doğrudur.

Sonuç 4.11

Diyelim ki bir $f : I \to R$ toplamsal dönüşümü her $x \in I$ ve en az biri sıfırdan farklı $c_1, c_2 \in Z$ için $c_1 f(x)x = c_2 x f(x)$ eşitliğini sağlasın. O zaman f, $\lambda \in C$ ve $\zeta : I \to C$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere $f(x) = \lambda x + \zeta(x)$ formundadır. Üstelik $f \neq 0$ ise $c_1 = c_2$ olur.

Sonuç (4.11)'in direkt bir sonucu olarak Sonuç (4.12)'yi verebiliriz. Benzer bir sonuç [8]'de farklı yoldan elde edilmiştir.

Sonuç 4.12

$f : I \to R$ bir toplamsal skew-commuting dönüşüm olsun. Eğer R'nin karakteristiği 2 değilse $f = 0$ olur.

Sonuç (4.13) elde edilen verilerin türevler üzerine bir uygulamasıdır.

Sonuç 4.13

$f_1, f_2, f_3, f_4 : I \to R$ toplamsal dönüşümleri ve her $x, y \in I$ için

$$f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x) = 0$$

eşitliği sağlansın. Eğer bir $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için f_i sıfırdan farklı bir türev ise R değişmelidir.

Bundan sonraki amaç $f_, : I \to R$ dönüşümlerinin $f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x) \in Z, \forall x, y \in I$ durumunu incelemektir.

Bir $r \in R$ elemanının Q_r içindeki merkezleyeni $C(r)$ ile gösterilecektir. Yani

$$C(r) = \{x \in Q_r | [x, r] = 0\}$$

olacaktır.

Lemma 4.14

Diyelim ki $g_1, g_2 : I \to Q_r$ dönüşümleri ve $r \in R$ için aşağıdaki koşullardan biri sağlansın:

1. $xg_1(y) + yg_2(x) \in C(r), \forall x, y \in I$,
2. $g_1(x)y + g_2(y)x \in C(r), \forall x, y \in I$.

O zaman ya $g_1 = g_2 = 0$ olur ya da $\lambda, \mu \in C$ olmak üzere $r^2 = \lambda r + \mu$ olur.

Lemma 4.15 (Standard PI Theory)

Aşağıdakiler denktir:

1. R halkası S_4'ü sağlar,
2. R ya değişmelidir ya da F cisim olmak üzere $M_2(F)$ içine gömülür,
3. R halkası C üzerinde ikinci dereceden sınırlı ve cebirseldir $(\forall r \in R, \exists \lambda, \mu \in C, r^2 = \lambda r + \mu)$,
4. $[[r^2, s], [r, s]] = 0, \forall r, s \in R$.

Lemma 4.16

$g_1, g_2 : I \to Q_r$ dönüşümleri için aşağıdaki koşullardan biri sağlansın:

1. $xg_1(y) + yg_2(x) \in C, \forall x, y \in I$,
2. $g_1(x)y + g_2(y)x \in C, \forall x, y \in I$.

O zaman ya $g_1 = g_2 = 0$ olur ya da R halkası S_4'ü sağlar.

Lemma 4.17

G, H toplamsal gruplar ve $\Gamma\colon G \times G \times G \to H$ ile $\Omega\colon G \times G \to H$ dönüşümleri her değişken için toplamsal olsun. Bir $x \in G$ için ya $\Gamma(x, x, x) = 0$ ya da $\Omega(x, x) = 0$ olsun. H grubu 2-burulmasız ve 3-burulmasız ise ya $\Gamma(x, x, x) = 0, \forall x \in G$ ya da $\Omega(x, x) = 0, \forall x \in G$ olur.

Artık Teorem (4.18)'i verebiliriz.

Teorem 4.18

R bir asal halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon I \to R$ toplamsal dönüşümleri için

$$\pi(x,y) = f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x)$$

eşitliği sağlansın.

1. Her $x, y \in I$ için $\pi(x,y) \in Z$ olur. Üstelik R'nin karakteristiği 2 veya 3'ten farklı ise ya R halkası S_4'ü sağlar ya da her $x, y \in I$ için $\pi(x,y) = 0$ olur.
2. $\pi(x,y) = 0, \forall x, y \in I$ ise her $x \in I$ için

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -xa + \mu(x), \\ f_2(x) &= ax - \lambda(x), \\ f_3(x) &= -xb + \lambda(x), \\ f_4(x) &= bx - \mu(x) \end{aligned}$$

olacak şekilde $a, b \in Q_s$ ve $\lambda, \mu \colon I \to C$ toplamsal dönüşümleri vardır.

İspat

Lemma (2.5) ile her $x, y \in I, r \in R$ için

$$g_1(y) = [r, f_2(yr) - f_2(y)r],$$
$$g_2(x) = [r, f_4(xr) - f_4(x)r]$$

olmak üzere

$$xg_1(y) + yg_2(x) = \pi(x,y)r^2 - (\pi(xr,y) + \pi(x,yr))r + \pi(xr,yr)$$

olduğu görülür. Yani $r \in R$ için

$$xg_1(y) + yg_2(x) \in C(r), x, y \in I$$

olur. Lemma (4.14) ile ya $g_1 = g_2 = 0$ ya da $r^2 = \lambda r + \mu, \exists \lambda, \mu \in C$ olur. R, S_4'ü sağlamasın. O zaman Lemma (4.15) ile

$$[[r_0^2, s_0], [r_0, s_0]] \neq 0, \exists r_0, s_0 \in R$$

olur.

İspat (Devam)

Şimdi $\Gamma\colon R\times R\times R\to R$, $\Gamma(r,s,t)=[[rs,s_0],[t,s_0]]$ ve bir $y\in I$ için $\Omega_y\colon R\times R\to R$, $\Omega_y(r,s)=[r,f_2(ys)-f_2(y)s]$ dönüşümlerini tanımlayalım.
Lemma (4.17)'nin ispatı ile bir $r\in R$ için ya $\Gamma(r,r,r)=0$ ya da $\Omega_y(r,r)=0, y\in I$ olduğu görülür.
Kabulden $\Gamma(r_0,r_0,r_0)\neq 0$ olur.
Eğer R'nin karakteristiği 2 veya 3 değilse Lemma (4.17) ile

$$\Omega_y(r,r)=0,\forall r\in R, y\in I$$

yani

$$[r,f_2(yr)-f_2(y)r]=0,\forall r\in r, y\in I$$

olur. Benzer şekilde

$$[r,f_4(yr)-f_4(y)r]=0,\forall r\in R, y\in I$$

bulunur.

İspat (Devam)

Lemma (4.3) ile $y \in I$ olmak üzere $a, b \in Q_r$ ve $\lambda, \mu \colon I \to C$ toplamsal dönüşümleri için,

$$f_2(y) = ay - \lambda(y),$$
$$f_4(y) = by - \mu(y)$$

olduğu görülür. O halde

$$\pi(x, y) = (f_1(x) + xa - \mu(x))y + (f_3(y) + yb - \lambda(y))x$$

olur. $\pi(x, y) \in Z$ olduğundan Lemma (4.16) ile

$$\pi(x, y) = 0, x, y \in I$$

olur. Böylece (i) şıkkı görülür.
Diğer şık ise Lemma (4.5) ile görülür.

5. Sağ İdealler Üzerine Sonuçlar

Bu bölümde T, R asal halkasının bir sağ ideali olacaktır.
$T \to R$ toplamsal dönüşümleri için 4. bölümdeki $I \to R$ toplamsal dönüşümleri ile benzer sonuçlar elde edilecektir.

Lemma 5.1

$T \neq 0$ olsun. $[T, T]T = 0$ olur ancak ve ancak $TC \trianglelefteq_r R_c$ minimaldir ve $TC = eR_c$, $eR_ce = Ce$ olacak şekilde $e \in R_c$ idempotenti vardır.

Teorem 5.2

R asal ve $T \trianglelefteq_r R$ olsun.

1. Her $D\colon T \times T \to R$ bitürevi bir $\lambda \in C$ için $D(x, y) = \lambda[x, y], x, y \in T$ formundadır.
2. Her $f\colon T \to R$ commuting toplamsal dönüşümü bir $\lambda \in C$ ve $\zeta\colon T \to C$ toplamsal dönüşümü için $f(x) = \lambda x + \zeta(x), x \in T$ formundadır.
3. Bir $f\colon T \to R$ toplamsal dönüşümü her $x \in T$ için $xf(x) = 0$ eşitliğini sağlıyorsa $f = 0$ olur.
4. R'nin karakteristiği 2'den farklı olmak üzere $f\colon T \to R$ toplamsal skew-commuting dönüşümü için ya $f = 0$ olur ya da $TC \trianglelefteq_r R_c$ minimaldir ve $TC = eR_c$, $eR_ce = Ce$ olacak şekilde $e \in R_c$ idempotenti vardır.

Sonuç 5.3

$f : T \to T$ toplamsal dönüşüm olsun.

1. f commuting ise her $x \in T$ için $f(x) = \lambda x + \zeta(x)$ olacak şekilde $\lambda \in C$ ve $\zeta : T \to C$ toplamsal dönüşümü vardır.
2. Her $x \in T$ için $xf(x) = 0$ ise $f = 0$ olur.
3. R'nin karakteristiği 2'den farklı ve f skew-commuting ise $f = 0$ olur.

Kaynaklar Dizini

[1] P. ARA VE M. MATHIEU, An application of local multipliers to centralizing mappings of C^*-algebras, *Quart J. Math. Oxford* **44** (1993), 129-138.

[2] M. BREŠAR, Semiderivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 859-860.

[3] M. BREŠAR, Centralizing mappings on von Neumann algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (1991), 501-510.

[4] M. BREŠAR, On a generalization of the notion of centralizing mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 641-649.

[5] M. BREŠAR, Centralizing mappings and derivations in prime rings, *J. Algebra* **156** (1993), 385-394.

Kaynaklar Dizini

[6] M. BREŠAR, Commuting traces of biadditive mappings, commutativity preserving mappings, and Lie mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), 525-546.

[7] M. BREŠAR, On certain pairs of functions of semiprime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **120** (1994), 709-713.

[8] M. BREŠAR, On skew-commuting mappings of rings, *Bull. Austral. Math. Soc.* **47** (1993), 291-296.

[9] M. BREŠAR, W. S. MARTINDALE VE C. R. MIERS, Centralizing maps in prime rings with involution, *J. Algebra* **161** (1993), 342-357.

[10] M. BREŠAR VE C. R. MIERS, Commutativity preserving mappings of von Neumann algebras, *Canad. J. Math.* **45** (1993), 695-708.

Kaynaklar Dizini

[11] C.-L. CHUANG, *-Differential identities of prime rings with involution, *Trans. Amer. Math. Soc.* **316** (1989), 251-279.

[12] N. JACOBSON, "Structure of Rings," Colloq. Publ. Vol. 37, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1956.

[13] C. LANSKI, A note on GPIs and their coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), 17-19.

[14] C. LANSKI, Differential identites, Lie ideals, and Posner's theorems, *Pacific J. Math.* **134** (1988), 275-297.

[15] C. LANSKI, Lie ideals and central identites with derivation, *Canad. J. Math.* **44** (1992), 553-560.

Kaynaklar Dizini

[16] C. LANSKI, Quadratic central polynomials with derivation and involution, *Pacific J. Math.* **155** (1992), 111-127.

[17] W. S. MARTINDALE, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra* **12** (1969), 576-584.

[18] D. PASSMAN, "Infinite Crossed Products," Academic Press, San Diego, 1989.

[19] E. C. POSNER, Derivations in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 1093-1100.