Fundamentos de Teoría de la Computación (Lógica) T1 – 14 de Julio de 2020

EJERCICIO 1:

Se tienen las siguientes premisas:

1. Bruno viaja al exterior si y sólo si tiene pasaporte y tiene suerte.

2. Si Bruno tiene suerte o termina la pandemia, Bruno tendrá su pasaporte.

3. Si Bruno tiene suerte, termina la pandemia.

Sabiendo que **Bruno tiene pasaporte**, responder:

I. ¿Viajará al exterior Bruno?
II. ¿Terminará la pandemia?

Para determinar si Bruno viajará al exterior o si terminará la pandemia, lo primero que haré será representar las premisas mediante proposiciones.

p: Bruno viaja al exterior
q: Bruno tiene pasaporte
r: Bruno tiene suerte
s: Termina la pandemia

"Bruno viaja al exterior si y sólo si tiene pasaporte y tiene suerte": $p \leftrightarrow (q \land r)$
"Si Bruno tiene suerte o termina la pandemia, Bruno tendrá su pasaporte": $(r \lor s) \rightarrow q$
"Si Bruno tiene suerte, termina la pandemia": $r \rightarrow s$

Una vez hecho esto, para determinar (en el primer caso) si Bruno viajará al exterior, lo que haré será armar una argumentación tal que la conclusión sea falsa ("Bruno no viajará al exterior") y trataré de determinar si es posible asignar valores de verdad a todas las premisas.

Recordar que una argumentación es válida si para cualquier asignación de valores de verdad, si las premisas toman el valor V entonces la conclusión necesariamente debe tomar el valor V. Dicho de otra manera, una argumentación es inválida si se encuentra una asignación de valores tal que las premisas toman el valor V y la conclusión toma el valor F.

Utilizaré esta última definición para determinar si las conclusiones son ciertas o no, teniendo en cuenta que además **Bruno tiene pasaporte**, por lo cual v(q) = V.

i. ¿Viajará al exterior Bruno?

$p \leftrightarrow (q \wedge r)$	$(r \vee s) \rightarrow q$	$r \rightarrow s$	p
F **V** V F F	F V V **V** V	F **V** V	F

Llegamos a la conclusión de que **no es cierto que Bruno viajará al exterior**, ya que pudimos asignar valores de verdad a las variables del enunciado tal que todas las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa.
La valuación de cada variable en la asignación encontrada es:

v(p) = F
v(q) = V
v(r) = F
v(s) = V

ii. ¿Terminará la pandemia?

$p \leftrightarrow (q \wedge r)$	$(r \vee s) \rightarrow q$	$r \rightarrow s$	s
F **V** V F F	F F F **V** V	F **V** F	F

Llegamos a la conclusión de que **no es cierto que terminará la pandemia**, ya que pudimos asignar valores de verdad a las variables del enunciado tal que todas las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa.
La valuación de cada variable en la asignación encontrada es:

v(p) = F
v(q) = V
v(r) = F
v(s) = F

EJERCICIO 2

Sean A,B y C fbfs que cumplen que (A→B) es **contradicción**. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs es **tautología** y cuál **contradicción**. Justificar las respuestas.

A. ((¬A) ∨ B) → C
B. (¬(A→B))→ ((¬A) ∨ B)

Como (A→B) es contradicción, sabemos también que el único valor de verdad que puede tomar A es V y el único valor de verdad que puede tomar B es F (ya que para que una implicación sea falsa, el antecedente debe ser verdadero y el consecuente falso).
Además, sabemos que (A→B) es lógicamente equivalente a ((¬A) ∨ B), por lo tanto esta última *fbf* también será una contradicción.
Dicho esto, comenzamos con los ejercicios:

A. ((¬A) ∨ B) → C
Esta fórmula claramente es una tautología, ya que como mencionamos anteriormente, (A→B) es lógicamente equivalente a ((¬A) ∨ B), por lo cual ((¬A) ∨ B) también será una contradicción. Sabiendo esto, podemos determinar que ((¬A) ∨ B) → C será una tautología ya que no importa el valor que tome el consecuente, si el valor del antecedente es falso, entonces la implicación va a tomar el valor V.

B. (¬(A→B))→ ((¬A) ∨ B)
Está fórmula claramente es una contradicción. Esto es así ya que por lo mencionado anteriormente, el consecuente ((¬A) ∨ B) es una contradicción por lo cual siempre será falso. Sumado a esto, sabemos que (A→B) es una contradicción, y en la fórmula del enunciado la misma se encuentra negada por lo cual se convierte en una tautología.
En conclusión, como el antecedente siempre va a tomar el valor V, y el consecuente siempre va a tomar el valor F, entonces la implicación siempre tomará el valor F y por lo tanto la fórmula será una contradicción.

EJERCICIO 3

3.1. Indicar si las siguientes afirmaciones valen en el sistema formal L
(justificar):

A. $|-_L$ p→q

B. {p} $|-_L$ r→(s→r)

A. Esta afirmación afirma, valga la redundancia, que p→q es teorema en L. Debido a la propiedad de sensatez del sistema deductivo L, sabemos que para que una *fbf* A sea teorema en L, debe necesariamente ser una tautología. Dicho esto, construiré la tabla de verdad de p→q y determinaré si la afirmación es válida o no dependiendo su función de verdad.

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Claramente p→q no es una tautología, por lo cual no puede ser teorema en L. **La afirmación no vale en el sistema formal L**.

B. Esta afirmación afirma, valga la redundancia, que vale {p} $|-_L$ r→(s→r) en el sistema formal L. Utilizando el metateorema de la deducción, decir que {p} $|-_L$ r→(s→r) vale en el sistema formal L es equivalente a decir que vale $|-_L$ p→(r→(s→r)) (es decir, que p→(r→(s→r)) es teorema en L). Además, sabemos que para que una *fbf* sea teorema en L, debe necesariamente ser una tautología (propiedad de la sensatez como dije antes). Dicho esto, construiré la tabla de verdad de p→(r→(s→r)) y determinaré si la afirmación es válida o no dependiendo su función de verdad.

p	r	s	$p \to (r \to (s \to r))$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Claramente $p \to (r \to (s \to r))$ es una tautología, por lo cual es teorema en L. **La afirmación vale en el sistema formal L**.

Otra forma de demostrar esto es mediante una demostración que, en este caso puntual, nos llevará un único paso. Esto es así ya que instanciando el axioma L_1 $(A \to (B \to A))$ nos alcanza para deducir $r \to (s \to r)$.

Demostración de $\{p\} \vdash_L r \to (s \to r)$:

1. $r \to (s \to r)$ **por L_1, siendo A = r y B = s.**

3.2. Indicar si la siguiente cadena de pasos es una **demostración de teorema en L**. En caso afirmativo indicar qué axiomas y reglas se usan en cada paso. En caso negativo justificar.

(1) $(\neg p \to ((q \to p) \to \neg p))$
(2) $((\neg p \to ((q \to p) \to \neg p)) \to ((\neg p \to (q \to p)) \to (\neg p \to \neg p)))$
(3) $((\neg p \to (q \to p)) \to (\neg p \to \neg p))$

Si, **efectivamente la cadena de pasos es una demostración en L**.
En (1) se instanció L_1 con $A = \neg p$ y $B = (q \to p)$.
En (2) se instanció L_2 con $A = \neg p$, $B = (q \to p)$ y $C = \neg p$.
En (3) se aplicó MP (Modus Ponens) entre (1) y (2).

EJERCICIO 4

Dar una interpretación y traducir las fórmulas presentadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural. El universo o dominio de la interpretación dada deben ser los **números enteros**. Indicar para cada fbf si es **verdadera** o **falsa** en esa interpretación y justificar.

Funciones = {f(x)}

Predicados = $\{A_1^1, A_1^2\}$

1. $\forall(x)(A_1^1(x) \rightarrow A_1^1(f(x)))$
2. $\forall(x)\forall(y)\ (A_1^2(x, y) \rightarrow A_1^2(y, x))$

La interpretación será la siguiente, bajo el dominio de los **números enteros**:

I(f(x)) = "multiplica x por 1"
$I(A_1^1(x))$ = "x es positivo"
$I(A_1^2(x, y))$ = "x es igual a y"

1. Para todo número entero x, si x es positivo entonces la multiplicación de x por 1 también será positivo.
Esta *fbf* es verdadera en esta interpretación ya que si un número entero (llamemos n_1) es positivo, entonces el mismo número multiplicado por 1 (da como resultado el mismo número) también será positivo, para cualquier número entero.
Por otro lado, si x no es positivo, entonces la implicación (y en consecuencia la *fbf*) siempre tomará valor V sin importar el valor que tome $A_1^1(f(x))$.

2. Para todo par de números enteros x e y, si x es igual a y entonces y es igual a x.
Esta *fbf* es verdadera en esta interpretación ya que si un número entero (llamemos n_1) es igual a otro número entero (llamemos n_2), entonces n_2 también será igual a n_1. Esto se cumple para cualquier número entero.

EJERCICIO 5:

Indicar si las siguientes fórmulas son **lógicamente válidas** y justificar la respuesta en cada caso:

1. $\forall(x)\ A_1^2(x, x)$
2. $A_1^1(x) \rightarrow A_1^1(x)$

1. **Esta fórmula no es lógicamente válida**. Para que una fórmula en la lógica de predicados sea **lógicamente válida**, **debe ser verdadera para cualquier interpretación**. Además, para que una fórmula sea **verdadera en una interpretación**, **debe satisfacerse bajo todas las**

valoraciones bajo esa interpretación. En este caso, claramente podemos definir una interpretación en la cual la fórmula no se satisfaga con cierta valoración, por lo cual al no ser verdadera bajo esa interpretación, tampoco será lógicamente válida.

Utilizaré el dominio de los naturales, y además $I(A_1^2)$ = "x es distinto de x".
Claramente, $\forall(x)\ A_1^2(x, x)$ no se cumple, ya que en este caso ningún número es distinto de sí mismo. Dicho esto, concluimos en que efectivamente esta fórmula **no es lógicamente válida**.

2. **Esta fórmula es lógicamente válida**. Esto es así ya que como podemos ver, se tiene la misma *fbf* en ambos lados de la implicación. Dicho esto, por las propiedades de la implicación, sabemos que si el antecedente y el consecuente toman el valor V, entonces la implicación toma el valor V, y si el antecedente y el consecuente toman el valor F, entonces la implicación toma el valor F. Dicho de otra manera, cuando el antecedente y el consecuente tienen el mismo valor de verdad, la implicación toma el valor V.
En conclusión, cuando $A_1^1(x)$ tome el valor V, la implicación tomará el valor V ya que tanto el antecedente como el consecuente toman el valor V (son iguales), y cuando $A_1^1(x)$ tome el valor F, la implicación tomará el valor V ya que tanto el antecedente como el consecuente toman el valor F (son iguales). Esto será así para cualquier interpretación, por lo tanto la fórmula **es lógicamente válida**.