

Deducción natural

Elegir 10 ejercicios del libro de Falguera y Vidal, de las páginas 318, 319, 320 y 321; y hacer su prueba con deducción natural.

1. pg. 318, ejercicios VI, I. 1)

This is written using ded-nat-boxed. The coloring of the text is done by wrapping that function with `text(content, weight: "bold", fill: gradient.linear(red, blue))`, and the color of the box stroke is done with `stcolor: gradient.linear(red, blue)`.

		$\forall x(Px) \wedge \forall x(Qx),$	
		$\forall x(Px \rightarrow Rx)$	
		$\vdash \forall x(Rx)$	
1	1.	$\forall x(Px) \wedge \forall x(Qx)$	PR
2	2.	$\forall x(Px \rightarrow Rx)$	PR
1	3.	$\forall x(Px)$	S 1
1	4.	Pa	IU 3
2	5.	$Pa \rightarrow Ra$	IU 2
1,2	6.	Ra	MP 4, 5
1,2	7.	$\forall x(Rx)$	GU 6

This is using ded-nat, and it is a repetition of the last one but without the boxing and without dependencies (inputting an array of 3 items).

1. $\forall x(Px) \wedge \forall x(Qx)$ PR
2. $\forall x(Px \rightarrow Rx)$ PR
3. $\forall x(Px)$ S 1
4. Pa IU 3
5. $Pa \rightarrow Ra$ IU 2
6. Ra MP 4, 5
7. $\forall x(Rx)$ GU 6

This is using ded-nat-boxed, without dependencies (inputting an array of 3 items) and without the premises and conclusion of the deduction automatically put over the lines.

- | | | |
|----|--------------------------------------|----------------|
| 1. | $\forall x(Px) \wedge \forall x(Qx)$ | PR |
| 2. | $\forall x(Px \rightarrow Rx)$ | PR |
| 3. | $\forall x(Px)$ | S 1 |
| 4. | Pa | IU 3 |
| 5. | $Pa \rightarrow Ra$ | IU 2 |
| 6. | Ra | MP 4, 5 |
| 7. | $\forall x(Rx)$ | GU 6 |

2. pg. 321, ejercicios VI, I. 62)

		$\forall x(Sxb) \wedge \neg \forall y(Py \rightarrow Qby),$	
		$\forall x \forall y(Qxy \rightarrow \neg Qyx)$	
		$\vdash \neg(\neg \forall x(\neg Px) \rightarrow \forall y(Syb \rightarrow Qby))$	
1	1.	$\forall x(Sxb) \wedge \neg \forall y(Py \rightarrow Qby)$	PR
2	2.	$\forall x \forall y(Qxy \rightarrow \neg Qyx)$	PR
3	3.	$\neg \forall x(\neg Px) \rightarrow \forall y(Syb \rightarrow Qby)$	Sup. RAA
1	4.	$\neg \forall y(Py \rightarrow Qby)$	S 1
1	5.	$\exists y \neg (Py \rightarrow Qby)$	EMC 4
6	6.	$\neg (Pa \rightarrow Qba)$	Sup. IE 5
7	7.	$\neg (Pa \wedge \neg Qba)$	Sup. RAA
7	8.	$\neg Pa \vee \neg \neg Qba$	DM 7
9	9.	$\neg Pa$	Sup. PC
9	10.	$\neg Pa \vee Qba$	Disy. 9
	11.	$\neg Pa \rightarrow (\neg Pa \vee Qba)$	PC 9-10
12	12.	$\neg \neg Qba$	Sup. PC
12	13.	Qba	DN 12
12	14.	$\neg Pa \vee Qba$	Disy. 13
	15.	$\neg \neg Qba \rightarrow (\neg Pa \vee Qba)$	PC 12-14
7	16.	$\neg Pa \vee Qba$	Dil. 8,11,15
7	17.	$Pa \rightarrow Qba$	IM 16
6,7	18.	$(Pa \rightarrow Qba) \wedge \neg (Pa \rightarrow Qba)$	Conj. 6, 17
6	19.	$Pa \wedge \neg Qba$	RAA 7-18
6	20.	Pa	S 19
6	21.	$\exists x(Px)$	GE 20
6	22.	$\neg \forall x(\neg Px)$	EMC 21
3,6	23.	$\forall y(Syb \rightarrow Qby)$	MP 3, 22
3,6	24.	$Sab \rightarrow Qba$	IU 23
1	25.	$\forall x(Sxb)$	S 1
1	26.	Sab	IU 25
1,3,6	27.	Qba	MP 24, 25
6	28.	$\neg Qba$	S 19
1,3,6	29.	$Qba \vee \neg \exists y \neg (Py \rightarrow Qby)$	Disy. 27
1,3,6	30.	$\neg \exists y \neg (Py \rightarrow Qby)$	MTP 28, 29
1,3	31.	$\neg \exists y \neg (Py \rightarrow Qby)$	IE 5, 6, 30
1,3	32.	$\neg \exists y \neg (Py \rightarrow Qby) \wedge \exists y \neg (Py \rightarrow Qby)$	Conj. 5, 31
1	33.	$\neg(\neg \forall x(\neg Px) \rightarrow \forall y(Syb \rightarrow Qby))$	RAA 3-32

$$\neg(Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb)),$$

$$\neg(\neg\exists xQx \vee \forall x\neg Rabx)$$

$$\vdash \forall x((Sa \wedge Sb) \rightarrow (Rabx \rightarrow \neg Qx))$$

1	1.	$\neg(Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb))$	PR
2	2.	$\neg(\neg\exists xQx \vee \forall x\neg Rabx)$	PR
3	3.	$\neg(Mab \wedge \neg(Sa \wedge Sb))$	Sup. RAA
3	4.	$\neg Mab \vee \neg\neg(Sa \wedge Sb)$	DM 3
5	5.	$\neg Mab$	Sup. PC
5	6.	$\neg Mab \vee (Sa \wedge Sb)$	Adj. 5
5	7.	$Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb)$	IM 6
	8.	$\neg Mab \rightarrow (Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb))$	PC 5-7
9	9.	$\neg\neg(Sa \wedge Sb)$	Sup. PC
9	10.	$Sa \wedge Sb$	DN 9
9	11.	$\neg Mab \vee (Sa \wedge Sb)$	Adj. 10
9	12.	$Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb)$	IM 11
	13.	$\neg\neg(Sa \wedge Sb) \rightarrow (Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb))$	PC 9-12
3	14.	$Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb)$	Dil. 4, 8, 13
1,3	15.	$\neg(Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb)) \wedge (Mab \rightarrow (Sa \wedge Sb))$	Conj. 1, 14
1	16.	$Mab \wedge \neg(Sa \wedge Sb)$	RAA 3-15
17	17.	$S \wedge Sb$	Sup. PC
17	18.	$(S \wedge Sb) \vee (Rabc \rightarrow \neg Qc)$	Adj. 17
1	19.	$\neg(S \wedge Sb)$	S 16
1,17	20.	$Rabc \rightarrow \neg Qc$	MTP 18, 19
1	21.	$(Sa \wedge Sb) \rightarrow (Rabc \rightarrow \neg Qc)$	PC 17-20
1	22.	$\forall x((Sa \wedge Sb) \rightarrow (Rabx \rightarrow \neg Qx))$	GU 21

4. pg. 320, ejercicios VI, I. 41)

$$\forall x \forall y ((Qyx \wedge Ryx) \rightarrow \neg Qxy),$$

$$Qab \wedge Pb$$

$$\vdash Rba \rightarrow \exists x (\neg Qbx \wedge Pb)$$

1	1.	$\forall x \forall y ((Qyx \wedge Ryx) \rightarrow \neg Qxy)$	PR
2	2.	$Qab \wedge Pb$	PR
3	3.	Rba	Sup. PC
1	4.	$\forall y ((Qya \wedge Rya) \rightarrow \neg Qay)$	IU 1
1	5.	$(Qba \wedge Rba) \rightarrow \neg Qab$	IU 4
2	6.	Qab	S 2
2	7.	$\neg \neg Qab$	DN 6
1,2	8.	$\neg (Qba \wedge Rba)$	MT 5, 7
1,2	9.	$\neg Qba \vee \neg Rba$	DM 8
3	10.	$\neg \neg Rba$	DN 3
1,2,3	11.	$\neg Qba$	MTP 9, 10
2	12.	Pb	S 2
1,2,3	13.	$\neg Qba \wedge Pb$	Conj. 11, 12
1,2,3	14.	$\exists x (\neg Qbx \wedge Pb)$	GE 13
1,2	15.	$Rba \rightarrow \exists x (\neg Qbx \wedge Pb)$	PC 3-14

5. pg. 319, ejercicios VI, I. 30)

		$\neg\exists x\exists y(\neg Txy \wedge \neg Tyx),$	
		$\forall x(Txa \rightarrow (Qa \wedge Ra)),$	
		$\neg\forall x(Tax)$	
		$\vdash \exists x(Qx \wedge Rx)$	
1	1.	$\neg\exists x\exists y(\neg Txy \wedge \neg Tyx)$	PR
2	2.	$\forall x(Txa \rightarrow (Qa \wedge Ra))$	PR
3	3.	$\neg\forall x(Tax)$	PR
3	4.	$\exists x\neg(Tax)$	EMC 3
5	5.	$\neg Tab$	Sup. IE 4
1	6.	$\forall x\neg\exists y(\neg Txy \wedge \neg Tyx)$	EMC 1
1	7.	$\neg\exists y(\neg Tby \wedge \neg Tyb)$	IU 6
1	8.	$\forall y\neg(\neg Tby \wedge \neg Tyb)$	EMC 7
1	9.	$\neg(\neg Tba \wedge \neg Tab)$	IU 8
1	10.	$\neg\neg Tba \vee \neg\neg Tab)$	DM 9
5	11.	$\neg\neg\neg Tab$	DN 5
1,5	12.	$\neg\neg Tba$	MTP 10, 11
1,5	13.	Tba	DN 12
2	14.	$Tba \rightarrow (Qa \wedge Ra)$	IU 2
1,2,5	15.	$Qa \wedge Ra$	MP 13, 14
1,2,5	16.	$\exists x(Qx \wedge Rx)$	GE 15
1,2,3	17.	$\exists x(Qx \wedge Rx)$	IE 4, 5, 16

6. pg. 319, ejercicios VI, I. 20)

$$\neg \exists x(Sx) \vee (Qa \wedge Ta),$$

$$\exists x(Qx \wedge Tx) \rightarrow \forall x(Rx),$$

$$Sa$$

$$\vdash Rb$$

1	1.	$\neg \exists x(Sx) \vee (Qa \wedge Ta)$	PR
2	2.	$\exists x(Qx \wedge Tx) \rightarrow \forall x(Rx)$	PR
3	3.	Sa	PR
3	4.	$\exists x(Sx)$	GE 3
3	5.	$\neg \neg \exists x(Sx)$	DN 4
1,3	6.	$Qa \wedge Ta$	MTP 1, 5
1,3	7.	$\exists x(Qx \wedge Tx)$	GE 6
1,2,3	8.	$\forall x(Rx)$	MP 2, 7
1,2,3	9.	Rb	IU 8

7. pg. 318, ejercicios VI, I. 10)

$$\forall x(Tx \rightarrow Qx),$$

$$\forall x \neg (Px \vee \neg Tx)$$

$$\vdash \exists x(\neg Px \wedge Qx)$$

1	1.	$\forall x(Tx \rightarrow Qx)$	PR
2	2.	$\forall x \neg (Px \vee \neg Tx)$	PR
2	3.	$\neg (Pa \vee \neg Ta)$	IU 2
2	4.	$\neg Pa \wedge \neg \neg Ta$	DM 3
2	5.	$\neg \neg Ta$	S 4
2	6.	Ta	DN 5
1	7.	$Ta \rightarrow Qa$	IU 1
1,2	8.	Qa	MP 6, 7
2	9.	$\neg Pa$	S 4
1,2	10.	$\neg Pa \wedge Qa$	Conj. 8, 9
1,2	11.	$\exists x(\neg Px \wedge Qx)$	GE 10

8. pg. 318, ejercicios VI, I. 5)

		$\forall x(Px) \rightarrow \forall x(Qx),$	
		$\neg Qa$	
		$\vdash \neg \forall x(Px)$	
1	1.	$\forall x(Px) \rightarrow \forall x(Qx)$	PR
2	2.	$\neg Qa$	PR
2	3.	$\exists x \neg(Qx)$	GE 2
2	4.	$\neg \forall x(Qx)$	EMC 3
1,2	5.	$\neg \forall x(Px)$	MT 1, 4

9. pg. 318, ejercicios VI, I. 6)

		$\forall x(Px \rightarrow Qx),$	
		$\forall x(\neg Sx \rightarrow \neg Qx),$	
		$\neg \forall x(Sx)$	
		$\vdash \exists x(\neg Px)$	
1	1.	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	PR
2	2.	$\forall x(\neg Sx \rightarrow \neg Qx)$	PR
3	3.	$\neg \forall x(Sx)$	PR
3	4.	$\exists x \neg(Sx)$	EMC 3
5	5.	$\neg Sa$	Sup. IE 4
2	6.	$\neg Sa \rightarrow \neg Qa$	IU 2
2,5	7.	$\neg Qa$	MP 5, 6
1	8.	$Pa \rightarrow Qa$	IU 1
1,2,5	9.	$\neg Pa$	MT 7, 8
1,2,5	10.	$\exists x(\neg Px)$	GE 9
1,2,3	11.	$\exists x(\neg Px)$	IE 4, 5, 10

$$\begin{aligned} &\forall x(Tx \rightarrow Mx), \\ &\forall x\neg(Mx \wedge Rx), \\ &\forall x(Tx \rightarrow (Px \rightarrow Rx)) \\ &\vdash \forall x(Tx \rightarrow \neg(Mx \rightarrow Px)) \end{aligned}$$

1	1.	$\forall x(Tx \rightarrow Mx)$	PR
2	2.	$\forall x\neg(Mx \wedge Rx)$	PR
3	3.	$\forall x(Tx \rightarrow (Px \rightarrow Rx))$	PR
4	4.	Ta	Sup. PC
1	5.	$Ta \rightarrow Ma$	IU 1
1,4	6.	Ma	MP 4,5
2	7.	$\neg(Ma \wedge Ra)$	IU 2
2	8.	$\neg Ma \vee \neg Ra$	DM 7
1,4	9.	$\neg\neg Ma$	DN 6
1,2,4	10.	$\neg Ra$	MTP 8, 9
3	11.	$Ta \rightarrow (Pa \rightarrow Ra)$	IU 3
3,4	12.	$Pa \rightarrow Ra$	MP 4, 11
1,2,3,4	13.	$\neg Pa$	MT 10, 12
14	14.	$Ma \rightarrow Pa$	Sup. RAA
1,4,14	15.	Pa	MP 6, 14
1,2,3,4,14	16.	$Pa \wedge \neg Pa$	Conj. 13, 15
1,2,3,4	17.	$\neg(Ma \rightarrow Pa)$	RAA 14-16
1,2,3	18.	$Ta \rightarrow \neg(Ma \rightarrow Pa)$	PC 4-17
1,2,3	19.	$\forall x(Tx \rightarrow \neg(Mx \rightarrow Px))$	GU 18