Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 11

Zasada Maksimum Pontriagina

Celem ćwiczenia jest omówienie zastosowania zasady maksimum Pontriagina do wyznaczenia sterowania optymalnego ze względu na przyjęte kryterium. Rozważone zostaną dwie funkcje kosztu, tj. minimalizująca energię oraz minimalizująca czas osiągnięcia celu. Obydwa przypadki, dla uproszczenia obliczeń, będą rozważone dla systemu podwójnego integratora. Jednak zaprezentowana technika może być z powodzeniem aplikowana również do bardziej złożonych systemów sterowania.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- wyznaczanie Hamiltonianu systemów liniowych;
- zasada maksimum Pontriagina.

→ Wykonać obliczenia niezbędne do realizacji zadań 2.1, 2.2, 3.1 i 3.2.

1 Wprowadzennie

Zasada maksimum Pontriagina określa warunki konieczne istnienia rozwiązania optymalnego w zadaniach sterowania. Rozwiązanie to dotyczy problemu wyrażonego w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
&J = \min_{u,x} \int_0^T L(t,x,u)\,dt + G(x(T),T) \\
&\text{Przy warunkach} \\
&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\
&x(0) = x_0,\ x(T) = 0 \text{ (lub nieokreślone)},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdzie przez L opisano Lagrangian systemu, G oznacza koszt finalny, macierze $A,\ B$ są odpowiednio macierzami stanu i wejścia. Dla zadań sterowania optymalnego, wygodnie jest zdefiniować Hamiltonian

$$
\mathcal{H}(t,x,u,\lambda) = L(t,x,u) + \lambda^T(Ax + Bu), \tag{2}
$$

gdzie λ oznacza zmienną sprzężoną (dualną, ang. *costate*), która może być interpretowana jako mnożnik Lagrange'a związany z danymi zmiennymi stanu. Równania opisujące system reprezentują ograniczenia dla problemu optymalizacji, a zmienne sprzężone reprezentują marginalny koszt złamania tych ograniczeń.

Twierdzenie 1 (Zasada maksimum Pontriagina)**.** *Zakładając, że $u^\star$ oraz $x^\star$ są optymalną parą rozwiązującą problem (1), wówczas istnieje ciągła funkcja $\lambda(t)$, dla której spełnione są warunki*

1. *Dla całego przedziału czasowego $t \in [0, T]$ zachodzi warunek maksimum hamiltonianu*
$$\mathcal{H}(t, x^\star, u^\star, \lambda) \leq \mathcal{H}(t, x^\star, u, \lambda). \tag{3}$$
2. *Spełnione jest równanie zmiennej sprzężonej*
$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^\star, u^\star, \lambda). \tag{4}$$
3. *Spełniony jest warunek transwersalności*

$\lambda(T) = \dfrac{\partial G(x(T))}{\partial x(T)}$, *gdy $x(T)$ nie jest określony,*

$\lambda(T)$ *musi mieć wartość gwarantującą, że $x(t = T) = x(T)$, gdy $x(T)$ jest określony.*

Najbardziej złożonym warunkiem, jest warunek transwersalności. Określa on jakie kryteria muszą zostać spełnione na końcu horyzontu czasowego (w czasie $t = T$). Warunki te silnie zależą od postawionego problemu. Obecność ograniczeń stanu końcowego może powodować, że sterowanie optymalne jest wyznaczane tylko przez ograniczenia zadania. Przykładowo, dla problemów, w których określona jest zarówno konfiguracja końcowa $x(T)$ jest określona, jak i czas, do wyznaczenia sterowania optymalnego wystarczą warunki brzegowe systemu wraz z punktami (1) i (2) z twierdzenia maksimum Pontriagina.

Wyznaczenie sterowania optymalnego opartego o metodę maksimum Pontriagina, dla systemów liniowych, składa się z następujących etapów:

A. Wyznaczenia Hamiltonianu zgodnie z równaniem
$$\mathcal{H} = L + \lambda^T(Ax + Bu) = L + (\lambda^T A)x + (\lambda^T B)u. \tag{5}$$

B. Wyznaczenia równań zmiennych sprzężonych
$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Ax + Bu, \quad -\dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \tag{6}$$

C. Wyznaczenia sterowania optymalnego $u^\star$ w oparciu o relację $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}$ wykorzystując warunek transwersalności oraz warunki brzegowe (w zależności od rozważanego problemu).

Warto wspomnieć, że wartość Hamiltonianu $\mathcal{H}(t, x^\star, u^\star, \lambda) = a$, gdzie $a = 0$ dla czasu swobodnego lub $a = \text{const}$ dla czasu ograniczonego.

2 Sterowanie z minimalną energią

Jednym ze wskaźników jakości dla których poszukuje się optymalnych sterowań jest wskaźnik minimalno-energetyczny. Sterowanie optymalne w sensie takiego wskaźnika jakości charakteryzuje się użyciem minimalnej energii sterowania do osiągnięcia zadanego celu. W ramach niniejszego ćwiczenia rozważany będzie system podwójnego integratora. Wówczas problem sterowania jest zdefiniowany następująco

$$\begin{aligned} J = \min_{u()} \int_0^T \frac{1}{2} u^2(t)\, dt \\ \text{Przy warunkach} \\ \dot{x} = Ax + Bu \\ x_1(0) = 1,\ x_1(T) = 0, \\ x_2(0) = 1,\ x_2(T) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Do rozwiązania postawionego zadania wykorzystano zasadę maksimum Pontriagina, zgodnie z etapami opisanymi we wprowadzeniu.

A. Hamiltonian dla problemu (7) przyjmuje postać

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}u^2 + \lambda^T(Ax + Bu) = \frac{1}{2}u^2 + (\lambda^T A)x + (\lambda^T B)u = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u. \tag{8}$$

B. Równania zmiennych sprzężonych można opisać jako

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{9}$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda \Rightarrow \begin{array}{c} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1 = a_1 \\ \lambda_2 = -a_1 t + a_2, \end{array} \tag{10}$$

C. Sterowanie optymalne jest wyznaczone na podstawie zależności (3). W rozważanym przypadku Hamiltonian jest funkcją kwadratową wyrażenia u, zatem osiąga minimum dla $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0 \ \rightarrow \ u = -\lambda_2. \tag{11}$$

Ze względu na fakt, że czas i konfiguracja końcowa są ograniczone, warunek transwersalności można określić wykorzystując ograniczenia systemu ($x(0) = 1$ i $x(T) = 0$). W tym celu wyprowadzić należy równania opisujące każdą ze zmiennych stanu, tj.

$$x_2(t) = \int u \, dt = \dots \tag{12}$$

$$x_1(t) = \int x_2 \, dt = \dots \tag{13}$$

2.1 Wyznaczyć jawną postać przebiegów x_1 oraz x_2.

2.2 Przyjąć $T = 1$. Wyprowadzić warunek transwersalności, wykorzystując warunki brzegowe $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_1(T) = 0$ oraz $x_1(T) = 0$. Wyznaczyć wartości współczynników w wyrażeniach na $\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2$.

2.3 Wyznaczyć postać sterowania optymalnego $u^\star$ minimalizującego wskaźnik (7).

2.4 Przeprowadzić symulację odpowiedzi układu (7) na wymuszenie $u^\star$. Porównać uzyskane przebiegi z przebiegami wyznaczonymi analitycznie na podstawie (12) oraz (13)

- *Czy konfiguracja zbiega do początku układu współrzędnych w założonym czasie T?*
- *Czy konfiguracja systemu zmienia swoją wartość dla czasu $t > T$? Dlaczego? Jak należy zmodyfikować sygnał sterujący, aby konfiguracja była równa 0?*

2.5 Zmodyfikować czas symulacji na $T = 10$. Ponownie wyznaczyć wartości współczynników a_1, a_2, a_3, a_4 oraz sterowanie $u^\star$. Przeprowadzić symulację dla 10s, przy nowym wymuszeniu $u^\star$.

- *Czy konfiguracja zbiega do początku układu współrzędnych w założonym czasie T?*

3 Sterowanie czaso-optymalne

Jednym z najprostszych zadań optymalizacji dynamicznej jest zadanie wyznaczenia sterowania czaso-optymalnego. Zadanie to polega na wyznaczeniu takiego sygnału sterującego $u^\star(t)$, które przeprowadzi obiekt z konfiguracji początkowej x_0 do konfiguracji końcowej x_T w jak najkrótszym czasie T.

W praktycznych zastosowaniach, sygnał sterujący jest ograniczony do wartości u_{max}. W ramach niniejszego ćwiczenia, przyjęto, że $u_{max} = 1$. Ponadto skupiono się na wyznaczeniu sterowania czaso-optymalnego, które prowadzi system z założonego warunku początkowego do początku układu współrzędnych ($x(T) = 0$), Problem wyznaczenia sterowania czaso-optymalnego zapisać można jako:

$$\min_{u()} \; J() := \int_0^T 1\, dt = t_1,$$

Przy warunkach

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \\ &x(t_0) = x_0,\ x(T) = 0, \\ &\dot{x}(t_0) = dx_0,\ \dot{x}(T) = 0, \\ &\forall_t\ |u(t)| < u_{max}. \end{aligned} \tag{14}$$

Intuicyjne rozwiązanie zmniejszające czas regulacji, wymaga ustawienia maksymalnej wartości sygnału sterującego kierującego obiekt w kierunku pozycji końcowej, aż do osiągnięcia punktu krytycznego, gdzie sygnał sterujący zostaje wyłączony tak, aby w ostatniej chwili znaleźć się dokładnie w założonej konfiguracji końcowej.

Twierdzenie 2 (Zasada bang-bang)**.** [1] *Dla przyjętego czasu $t > 0$ oraz warunków początkowych $x(0)$ oraz systemu (14) zawsze istnieje sterowanie dwupołożeniowe $u^\star(t)$, które prowadzi konfigurację początkową $x(0)$ do początku układu współrzędnych w najmniejszym czasie T.*

Powyższe twierdzenie zapewnia, że dla systemów liniowych zawsze istnieje sterowanie czaso-optymalne, sprowadzające system do początku układu współrzędnych. Ponadto sterowanie to jest typu dwupołożeniowego (ang. *bang-bang*), które przyjmuje jedynie wartości graniczne u_{max} oraz $-u_{max}$. Przykładowo, gdyby zadanie sterowania czaso-optymalnego dotyczyło przejechania samochodem do celu w najkrótszym czasie, rozwiązaniem byłoby ustawienie maksymalnej prędkości a następnie hamowanie tak, aby samochód zatrzymał się w dokładnej pozycji celu.

3.1 Wyznaczyć postać Hamiltonianu (2) dla podwójnego integratora.

3.2 Wyznaczyć równania zmiennych sprzężonych (4)-(5) oraz postać analityczną wymuszenia optymalnego $u^\star$. Równania opisujące zmienne λ opisać względem warunków początkowych $\lambda_1(0)$ oraz $\lambda_2(0)$.

- *Jakie wnioski można wyciągnąć z równań opisujących mnożniki Lagrange'a?*
- *Jaka jest relacja pomiędzy optymalnym sterowaniem a wartością mnożników Lagrange'a?*

Na podstawie wyliczonych równań opisujących przebiegi zmiennych sprzężonych λ, można zauważyć, że istnieją jedynie dwa scenariusze ruchu, zależne od warunków początkowych systemu:

1. Sygnał sterujący przyjmuje jedną wartość przez cały horyzont symulacji, tj. $u^\star = 1$ lub $u^\star = -1$, dla $t \in (0, T)$.
2. Następuje dokładnie jedno przełączenie sygnału sterującego
   - $u^\star = 1$, dla $t \in (0, t_s)$ oraz $u^\star = -1$, dla $t \in (t_s, T)$
   - lub $u^\star = -1$, dla $t \in (0, t_s)$ oraz $u^\star = 1$, dla $t \in (t_s, T)$,

gdzie przez t_s oznaczono czas przełączenia pomiędzy wartościami sygnału sterującego. Każdy z tych scenariuszy musi zostać rozpatrzony oddzielnie. W pierwszym przypadku, wartość początkową zmiennej $\lambda_1(0)$ wyznacza się tak, aby nie nastąpiło żadne przełączenie sygnału sterującego. Z kolei wartość początkową $\lambda_2(0)$ wyznacza się przez zastosowanie relacji $\mathcal{H}(0) = 0$ (warunek dla nieokreślonego czasu). Dokładniejszy opis wyprowadzonych relacji znajduje się w pracy[2]. Czas

[1] L. C. Evans, "An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory - Version 0.2", Department of Mathematics, University of California, Berkeley.

[2] M. Romano, F. Curti, "Analytic Solution of the Time-Optimal Control of a Double Integrator from an Arbitrary State to the State-space Origin", 2019.

realizacji ruchu, dla scenariusza bez przełączania sygnału sterującego, można wyznaczyć jako $T = |x_2(0)|$.

W przypadku warunku początkowego, który wymaga przełączenia sygnału sterującego, wartość $\lambda_1(0)$ wyznacza się przez wyznaczenie $\mathcal{H}(t = t_s) = 0$ oraz podstawienie $u^\star(t_s) = 0$. Z kolei $\lambda_2(0)$ można uzyskać przez wykorzystanie relacji $u^\star(t_s) = 0$. Czas realizacji całego ruchu, dla scenariusza z jednym przełączeniem sygnału sterującego, można opisać jako

$$\begin{aligned} T &= t_s + \sqrt{\Sigma_0 x_1(0) + \frac{x_2^2(0)}{2}}, \text{ gdzie} \\ t_s &= \sqrt{\Sigma_0 x_1(0) + \frac{x_2^2(0)}{2}} + \Sigma_0 x_2(0), \\ \Sigma_0 &= \operatorname{sign}\left(x_1(0) + \operatorname{sign}(x_2(0))\frac{x_2^2(0)}{2}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

3.3 W języku Python utworzyć wektor wartości sygnału sterującego $u^\star$ zależny od warunków początkowych systemu. Wykorzystać wyznaczone z opracowaniu wartości czasu przełączania i symulacji.

3.4 Zaimplementować w języku Python sterowanie czaso-optymalne dla podwójnego integratora. Przeanalizować wartości sygnałów sterujących dla następującego zbioru wartości początkowych: $\{x_1(0), x_2(0)\} = \{5, -10\}\,,\ \{50, -10\}\,,\ \{-50, 10\}\,,\ \{10, 10\}$.

- *Które warunki początkowe odpowiadają sterowaniu z przełączeniem, a które nie?*
- *Czy zaproponowane sterowanie wykorzystuje sprzężenie od stanu?*

3.5 Przeanalizować odpowiedzi układu dla różnych warunków początkowych w przestrzeni fazowej.

- *Jaki jest charakter przebiegów?*

3.6 Wyznaczyć warunki początkowe $\lambda_1(0)$ i $\lambda_2(0)$ oraz wyznaczyć równianie opisujące zmienne sprzężone (wykorzystać obliczenia z zadania 3.2).

3.7 W języku Python utworzyć wektor wartości sygnału sterującego $u^\star(t)$ zależny od wartości zmiennych sprzężonych $\lambda(t)$. Wyznaczyć odpowiedź systemu podwójnego integratora dla optymalnego sygnału sterującego wyznaczonego w oparciu o mnożniki Lagrange'a.

- *Czy przebiegi porywają się z tymi wyznaczonymi w podpunkcie 3.5? Dlaczego?*

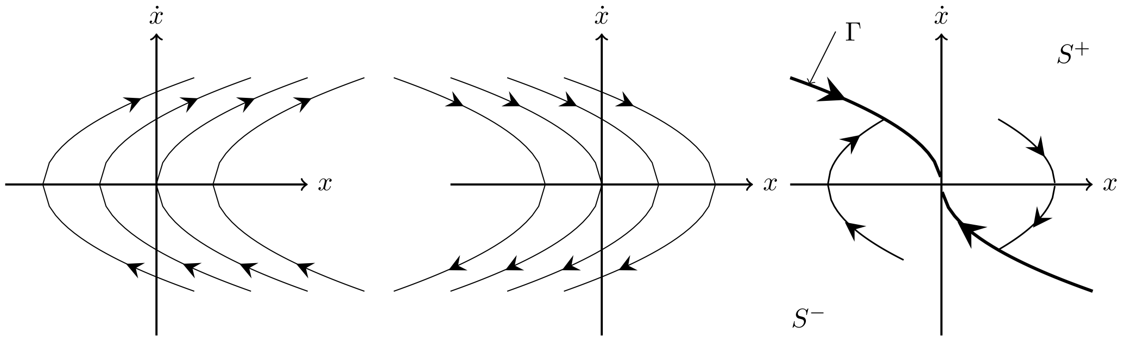
4 Graficzna interpretacja sterowania czaso-optymalnego*

Ze względu na prostotę i intuicyjność rozwiązania, w ramach niniejszego ćwiczenia zostanie zaprezentowane alternatywne rozwiązanie do problemu postawionego w poprzednim rozdziale. Rozwiązanie to jest oparte o graficzną reprezentację możliwych scenariuszy ruchu. Minimalizacja czasu doprowadzenia stanu systemu podwójnego integratora do początku układu współrzędnych oznacza ustawienie sygnału sterującego na wartości maksymalnej. Rozważane będą zatem dwa przypadki, gdy $u = 1$ i gdy $u = -1$. Wówczas trajektorie i prędkości ruchu można opisać jako

$$\begin{array}{lll} \ddot{x} = u = -1 & \ddot{x} = u = 1 & \\ \dot{x} = \dot{x}(0) - t & \dot{x} = \dot{x}(0) + t & \Rightarrow \quad t = \dot{x} \pm \dot{x}(0) \\ x = x(0) + \dot{x}(0)t - \frac{1}{2}t^2 & x = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}t^2 & \quad\hookleftarrow \\ x = -\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{x(0) + \frac{1}{2}\dot{x}^2(0)}_{\mathrm{c}} & x = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{x(0) - \frac{1}{2}\dot{x}^2(0)}_{\mathrm{c}}. & \end{array} \tag{16}$$

Ostatnie równania ze wzoru (16) uzyskano przez podstawienie wartości t z drugiego równania, do równania trajektorii. W zależności od wartości sygnału sterującego stan obiektu przemieszcza się po paraboli, jak podano na rys. 1(a) oraz (b). Warto zwrócić szczególną uwagę na te parabole, które przechodzą przez początek układu współrzędnych, a zatem te dla których $c = 0$, oznaczone na rys. 1(c). Jeżeli konfiguracja początkowa znajduje się na jednej z tych orbit, wówczas system podwójnego integratora osiągnie cel, którym jest początek układu współrzędnych, przez ustawienie jednej wartości sygnału sterującego dla całego horyzontu symulacji.

Gdy warunek początkowy nie pokrywa się z parabolą przechodzącą przez początek układu współrzędnych, wówczas konieczne jest zrealizowanie scenariusza z przełączeniem sygnału sterującego. Początkowo sygnał sterujący prowadzi układ względem paraboli, na której znajduje się punkt konfiguracji początkowej, do momentu gdy parabola ta nie przetnie paraboli, która przechodzi przez początek układu współrzędnych. Wówczas następuje przełączenie sygnału sterującego na przeciwny znak (rys. 1(c)) i dalej konfiguracja zmienia się zgodnie z parabolą przechodzącą przez początek układu współrzędnych, aż nie osiągnie celu.



(a) Trajektoria dla $u = 1$. (b) Trajektoria dla $u = -1$. (c) Trajektoria dla sterowania czaso-optymalnego.

Rysunek 1: Graficzna reprezentacja trajektorii dla podwójnego integratora.

Dla warunków początkowych, dla których orbity przechodzą przez początek układu współrzędnych współczynnik $c = 0$. Orbitę tą można nazwać krzywą przełączeń. Zatem przestrzeń konfiguracji można podzielić na zbiory powyżej krzywej (S^+), poniżej krzywej (S^-) oraz na krzywej przełączeń (Γ). Zatem sterowanie przyjmuje wartość dodatnią gdy konfiguracja początkowa jest poniżej krzywej przełączeń, i ujemne gdy jest powyżej. W momencie gdy orbita konfiguracji zetknie się z Γ wówczas następuje przełączenie sygnału sterującego.

$$\Gamma := \left\{x_1 = -\tfrac{1}{2}x_2^2, x_2 \geq 0\right\} \cup \left\{x_1 = \tfrac{1}{2}x_2^2, x_2 \leq 0\right\} = \left\{x : x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\,|x_2| = 0\right\},$$

$$\begin{aligned} S^- &:= \left\{x : x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\,|x_2| < 0\right\}, \\ S^+ &:= \left\{x : x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\,|x_2| > 0\right\}. \end{aligned}$$

$$u^\star = \begin{cases} 1, & \text{dla } (\dot{x} < 0 \text{ i } x <= \tfrac{1}{2}\dot{x}^2) \text{ lub } (\dot{x} >= 0 \text{ i } x < -\tfrac{1}{2}\dot{x}^2) \\ 0, & \text{dla } x = 0 \text{ i } \dot{x} = 0 \\ -1, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{17}$$

4.1 Zmodyfikować kod wyznaczający optymalną postać sterowania tak, aby uwzględniał sprawdzenie, do którego zbioru należy warunek początkowy konfiguracji systemu. Przyjąć warunek początkowy tak, aby należał do zbioru Γ.

4.2 Przeanalizować wartości sygnałów sterujących dla następującego zbioru wartości początkowych: $\{x_1(0), x_2(0)\} = \{5, -10\}$, $\{50, -10\}$, $\{-50, 10\}$, $\{10, 10\}$.

- *Jakim zbiorom (S^+, S^-, Γ) odpowiadają przyjęte warunki początkowe?*

4.3 Wykreślić przebiegi portretów fazowych dla tego samego zbioru wartości początkowych.