Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 3

Sterowalność Układów Liniowych

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z pojęciem sterowalności układów liniowych. Ćwiczenie zapozna z definicją sterowalności oraz praktycznym kryterium jej badania. Student pozna i przeanalizuje przykłady rzeczywistych układów sterowalnych oraz niesterowalnych.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- modelowania układów liniowych,
- reprezentacji układu w postaci zmiennych stanu,
- operacji algebraicznych na macierzach.

→ Wyznaczyć modele układów z Rys. 1-4

1 Układy sterowalne

Definicja 1 (Sterowalność) *Jeśli dla dowolnych warunków początkowych $x_1(t_1)$ oraz dowolnej wybranej konfiguracji końcowej $x_2(t_2)$ znaleźć można sygnał wejściowy $u_0(t)$ pozwalający przeprowadzić układ ze stanu $x_1(t_1)$ do stanu $x_2(t_2)$ w skończonym czasie $\Delta t = t_2 - t_1$ to układ jest układem sterowalnym.*

Zatem sterowalność jest własnością układu określającą możliwość dowolnego wpływania na stan układu wykorzystując sygnały wejściowe. Brak sterowalności oznacza, że istnieją takie konfiguracje układu, których nie da się osiągnąć przy pomocy sygnałów sterujących. Sterowalność lub jej brak jest immanentną cechą układu - nie wpływa na nią przyjęta reprezentacja, dobór zmiennych stanu lub równanie wyjścia oraz przyłożone sterowanie.

Sterowalność układu liniowego zbadać można na podstawie jego opisu w przestrzeni zmiennych stanu. Niech układ opisany będzie równaniami różniczkowymi

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ stanowi stan układu, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ będzie sygnałem sterującym, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ stanowi wyjście układu, natomiast $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ są stałymi macierzami stanu, wejścia, wyjścia oraz przenoszenia.

Twierdzenie 1 (Kryterium macierzy Kalmana) *Układ* (1) *jest sterowalny wtedy, i tylko wtedy, gdy macierz Kalmana zdefiniowana jako*

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{2}$$

ma pełen rząd (tj. $\operatorname{rank}(\mathcal{K}) = n$*).*

Warto podkreślić, że rząd macierzy nie jest równoznaczny jej wymiarowi. Rząd określa wymiar obrazu odwzorowania danego tą macierzą i jest równy liczbie niezależnych wierszy (lub kolumn).

Biorąc pod uwagę powyższe, określenie czy układ jest sterowalny sprowadza się do wyznaczenia macierzy Kalmana oraz ocenienia jej rzędu. Poniżej zawarto przykłady układu sterowalnego i niesterowalnego.

Przykład 1 (Układ sterowalny) *Niech dany będzie układ liniowy oraz wyznaczona na jego podstawie macierz Kalmana*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \rightarrow \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

zatem $\operatorname{rank}(\mathcal{K}) = 3 = n$*, a układ jest układem sterowalnym.*

Przykład 2 (Układ niesterowalny) *Niech dany będzie układ liniowy oraz wyznaczona na jego podstawie macierz Kalmana*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \rightarrow \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

zatem $\operatorname{rank}(\mathcal{K}) = 2 \neq n$*, a układ jest układem niesterowalnym.*

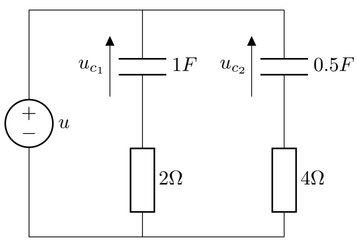
1.1 Wyznaczyć modele układów z Rys. 1-4. Przedstawić modele w przestrzeni zmiennych stanu zgodnie z opisem rysunków.

- *Czy możliwe jest uzyskanie innych modeli w przestrzeni zmiennych stanu?*

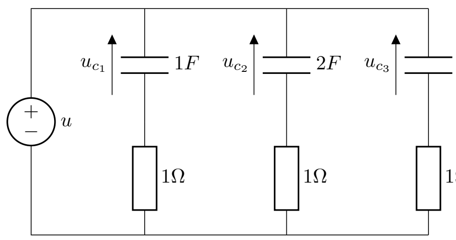
1.2 Wyznaczyć macierze Kalmana i formalnie zbadać sterowalność układów (wykorzystać na przykład `numpy.linalg.matrix_rank`).

1.3 Zaimplementować przedstawione układy i zbadać ich odpowiedzi na wybrane wymuszenia (np. wymuszenie skokowe, wymuszenie sinusoidalne, wykorzystać na przykład `scipy.signal.lsim` lub `scipy.signal.lsim2`).

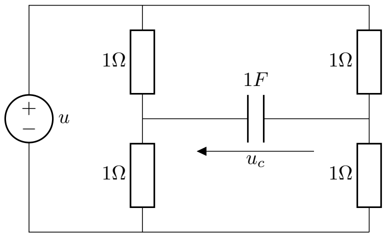
- *Które przebiegi pozwalają zauważyć wpływ sterowalności na odpowiedzi układów?*
- *Jakie są różnice między różnymi funkcjami symulującymi układy w Pythonie?*



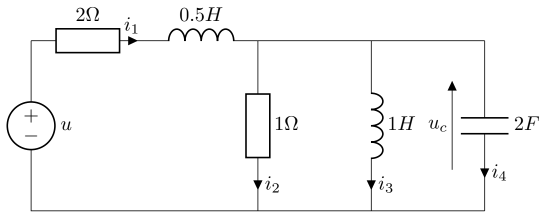
Rysunek 1: Przyjąć: $x_1 = u_{c_1}$, $x_2 = u_{c_2}$.



Rysunek 2: Przyjąć: $x_1 = u_{c_1}$, $x_2 = u_{c_2}$, $x_3 = u_{c_3}$.



Rysunek 3: Przyjąć: $x_1 = u_c$.



Rysunek 4: Przyjąć $x_1 = i_1$, $x_2 = i_3$, $x_3 = u_c$.

2 Postać sterowalna układu

Szczególnym przypadkiem liniowego modelu obiektu jest tzw. postać sterowalna lub normalna regulatorowa, opisana równaniem

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_s &= \boldsymbol{A}_s \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y}_s &= \boldsymbol{C}_s \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie macierz stanu oraz wejścia ma postać

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

gdzie $a_0, \dots, a_{n-1}$ są pewnymi stałymi współczynnikami. Istotną cechą takiej reprezentacji obiektów dynamicznych jest łatwość projektowania układów regulacji - zmienne stanu mają postać fazową (tzn. każda kolejna zmienne stanu jest pochodną poprzedniej), natomiast wszystkie nietrywialne parametry obiektu znajdują się bezpośrednio w torze wejścia, co pozwala na ich łatwą kompensację. Dla dowolnego sterowalnego układu liniowego (1) współczynniki macierzy stanu sterowalnej postaci równania stanu wyznaczyć można na podstawie wielomianu charakterystycznego $\phi(s)$ macierzy $\boldsymbol{A}$ poprzez zależność

$$\phi(s) = \det(\boldsymbol{I}s - \boldsymbol{A}) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \tag{7}$$

w której uzyskane współczynniki a_i odpowiadają współczynnikom z równania (6). Dla tak przyjętej macierzy $\boldsymbol{A}_s$ spełniona jest zależność

$$\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \tag{8}$$

gdzie macierz przekształcenia $\boldsymbol{P}$ dana jest jako

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_s & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{b}_s & \boldsymbol{A}_s^2\boldsymbol{b}_s & \dots & \boldsymbol{A}_s^{n-1}\boldsymbol{b}_s \end{bmatrix}^{-1}. \tag{9}$$

W oparciu o macierz przekształcenia $\boldsymbol{P}$ zapisać można ogólną zależność między dowolną ogólną postacią równania stanu (1), a postacią normalną regulatorową (5)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_s &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y}_s &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{10}$$

2.1 Dla układów sterowalnych z poprzednich zadań wyznaczyć postać sterowalną równań dynamiki. Do wykonania obliczeń wykorzystać poznane wcześniej biblioteki Pythona.

- *Czy dla układów niesterowalnych można wyznaczyć postać normalną regulatorową dynamiki? Dlaczego?*

2.2 Dla wybranego przypadku przeprowadzić symulację obiektu dla obu reprezentacji (tj. wyznaczonej samodzielnie w zadaniu 1.2 oraz normalnej regulatorowej).

- *Czy obie reprezentacje opisują te same obiekty w sposób równoważny?*
- *Czy przebiegi dla obu reprezentacji są jednakowe? Dlaczego? Jakie będzie miało to znaczenie przy projektowaniu układu regulacji w oparciu o postać sterowalną?*

3 Lokowanie biegunów

Dla układu liniowego postaci (1) biegunami układu są pierwiastki równania charakterystycznego (7). Bieguny odpowiadają bezpośrednio wartościom własnym układu (modom), które kształtują odpowiedź układu. W przypadku gdy układ jest w postaci sterowalnej (6) możliwe jest ustalenie dowolnej wartości biegunów układu zamkniętego, przez zastosowanie sprzężenia od stanu. Pełne sprzężenie od stanu dla układów wyrażonych za pomocą zmiennych stanu jest realizowane przez

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \tag{11}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{K}$ oznacza macierz wzmocnień. Podstawienie tej formy sygnału wejściowego prowadzi do równań stanu układu zamkniętego

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{12}$$

Dla tak określonego układu zamkniętego można wyznaczyć pierwiastki układu zamkniętego stosując równanie charakterystyczne

$$|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})| = 0. \tag{13}$$

Metoda lokowania biegunów polega na ustaleniu a'priori wartości pożądanych biegunów układu zamkniętego. W kolejności należy porównać współczynniki równania opisującego układ (13) do współczynników równania charakterystycznego idealnego (dla założonych wartości biegunów).

3.1 Dla sterowalnej postaci układu z Rys. 2 wyznaczyć równanie charakterystyczne układu zamkniętego ze sprzężeniem od stanu (11). W tym celu można skorzystać z relacji (13).

3.2 Wyznaczyć takie wartości wektora K, aby bieguny układu zamkniętego wynosiły odpowiednio $s_1 = -1$, $s_1 = -2$, $s_3 = -5$. Uwaga: równanie charakterystyczne dla przyjętych biegunów wynosi $s^3 + 8s^2 + 17s + 10$.

3.3 Przeprowadzić symulację odpowiedzi obiektu na wymuszenie (11).

- *Jaki jest charakter odpowiedzi układu zamkniętego?*
- *Jak poszczególne wartości wektora* $\boldsymbol{K}$ *wpływają na pozycje biegunów układu zamkniętego?*

□

 R. Patelski, M. Drążkowska