

# Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska  
Instytut Automatyki i Robotyki

## ĆWICZENIE 5

### DOBÓR OPTYMALNYCH NASTAW REGULATORA PID

*Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z problemem doboru nastaw regulatora PID pozwalających na optymalizację wybranego kryterium jakości sterowania. W ramach zajęć student utrwali wiedzę na temat znanych technik doboru parametrów regulatora PID oraz samodzielnie przeprowadzi proces strojenia sterownika.*

**W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:**

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- analizy układów liniowych,
- struktury i strojenia regulatora PID.

## 1 Wprowadzenie

Regulator PID jest jednym z podstawowych rozwiązań stosowanych w dziedzinie automatyki. Zyskał on szczególne uznanie wśród praktyków ze względu na intuicyjną konstrukcję, łatwość implementacji i prostotę działania. Na podstawie pomiaru sygnału wyjściowego z układu pozwala on wyznaczyć sygnał sterujący zapewniający zbieżność błędu sterowania, przy czym ewolucja błędu sterowania wynika z kompromisu między szybkością zbieżności, a oscylacyjnością przebiegu.

Niech dany będzie dynamiczny układ liniowy w postaci

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{1}$$

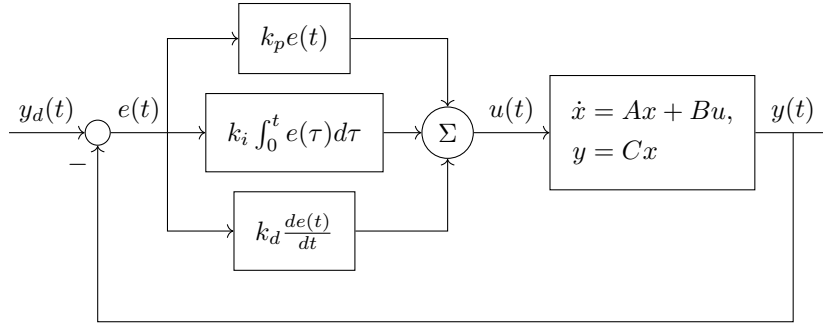
gdzie  $x$  jest wektorem stanu,  $u$  wektorem sygnałów sterujących, natomiast  $A$  oraz  $B$  stanowią odpowiedni macierz stanu oraz macierzy wejścia. Wartość  $y$  jest skalarnym wyjściem układu. Sterownik PID mający zapewnić zbieżność sygnału wyjściowego  $y$  do pewnej wartości pożądanej  $y_d$  przyjmuje dla takiego układu postać

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{d}{dt} e(t),\tag{2}$$

gdzie  $e = y_d - y$ , natomiast  $k_p, k_i, k_d$  stanowią dodatnie wzmocnienia regulatora. Alternatywnie równanie (2) może zostać wyrażone w postaci

$$u(t) = k_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right),\tag{3}$$

gdzie  $T_i = \frac{k_p}{k_i}$  jest stałą całkowania, natomiast  $T_d = \frac{k_d}{k_p}$  jest stałą różniczkowania. Układ regulacji ze sterownikiem PID został w sposób schematyczny przedstawiony na Rys. 1. Dobór param-

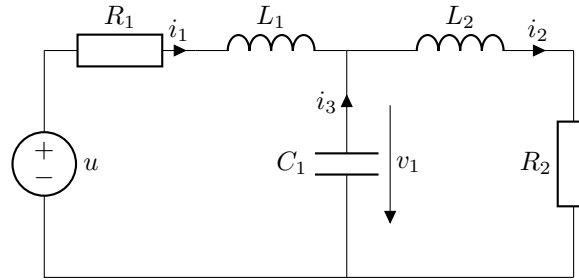


Rysunek 1: Schemat blokowy układu z regulatorem PID.

trów  $k_p$ ,  $k_d$  oraz  $k_i$  regulatora przeprowadzany jest często w sposób empiryczny. Metodą prób i błędów dobiera się zestaw nastaw umożliwiający uzyskanie satysfakcjonującej jakości regulacji w konkretnym rozważanym przypadku. Z tego powodu regulator PID często nie zapewnia zadowalającej odporności na zewnętrzne zaburzenia lub zmiany warunków pracy.

## 2 Zastosowanie

W celu zilustrowania działania regulatora PID rozważyć można prosty układ elektryczny przedstawiony na Rys. 2. Przyjęto następujące wartości parametrów  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 5\Omega$ ,  $C_1 = 0.5F$ ,



Rysunek 2: Układ elektryczny

$L_1 = 2H$ ,  $L_2 = 0.5H$ . Przyjmując wektor zmiennych stanu w postaci  $x = [i_2 \ i_1 \ v_1]^T$  uzyskuje się reprezentację w przestrzeni zmiennych stanu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & -\frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (4)$$

Przyjęcie prądu  $i_2$  jako sygnału wyjściowego pozwala zapisać

$$y = [1 \ 0 \ 0] x. \quad (5)$$

- 2.1** Przygotować funkcję `model(x,t)` implementującą model dynamiki układu otwartego zgodnie z równaniem (4). Funkcja powinna przyjmować na wejściu stan układu  $x$  oraz aktualną chwilę czasu  $t$ .
- 2.2** Przeprowadzić symulację odpowiedzi obiektu na wymuszenie skokowe w czasie  $t \in (0, 5)$  s wykorzystując funkcję `odeint`. Wykreślić przebieg sygnału wyjściowego.
- 2.3** Zmodyfikować funkcję `model(x,t)` tak, by sygnał wejściowy wyznaczany był zgodnie z algorytmem regulatora PID danym równaniem (2). W celu implementacji regulatora konieczne jest rozszerzenie stanu  $x$  w funkcji `model(x,t)` o dodatkową zmienną reprezentującą całkę błędów regulacji. Pochodną błędów regulacji w danej chwili czasu wyznaczyć można wprost z ostatniego wiersza równania (4).

- 2.4** Przyjąć wartość zadaną  $y_d = 3$  i przeprowadzić symulację układu zamkniętego dla różnych wartości nastaw regulatora zaczynając od  $k_p = 1, k_d = 0, k_i = 0$ . Zbadać wpływ poszczególnych nastaw na przebieg odpowiedzi układu.

### 3 Strojenie metodą Zieglera-Nicholsa

W celu uproszczenia procesu strojenia regulatora PID w literaturze zaproponowano liczne metody doboru nastaw  $k_p, k_d$  oraz  $k_i$ . Jedną z pierwszych i najbardziej rozpoznawalnych metod strojenia regulatora jest metoda Zieglera-Nicholsa. Dobór nastaw według tej metody oparty jest na odnalezieniu krytycznej wartości wzmocnienia  $k_p$  dla której układ znajduje się na granicy stabilności (tj. wykazuje niegasnące oscylacje o stałej amplitudzie). Rzeczywiste wartości nastaw dobiera się następnie na podstawie odnalezionej wartości krytycznej. Procedura strojenia zgodnie z metodą Zieglera-Nicholsa jest następująca.

1. Przyjąć zerowe wartości wszystkich nastaw regulatora.
2. Stopniowo zwiększać wzmocnienie  $k_p$  aż do osiągnięcia przez układ granicy stabilności.
3. Wartość wzmocnienia dla której układ znajduje się na granicy stabilności oznaczyć jako  $k_u$ , okres oscylacji oznaczyć jako  $T_u$ .
4. Przyjąć nastawy wybranego typu regulatora zgodnie z Tabelą 1.

Regulator	$k_p$	$k_i$	$k_d$
P	$0.5k_u$	-	-
PI	$0.45k_u$	$0.54k_uT_u^{-1}$	-
PD	$0.8k_u$	-	$0.1k_uT_u$
PID	$0.6k_u$	$1.2k_uT_u^{-1}$	$0.075k_uT_u$

Tabela 1: Dobór nastaw regulatora PID według metody Zieglera-Nicholsa.

- 3.1** Przeprowadzić proces strojenia regulatora PID zgodnie z regułą Zieglera-Nicholsa. Zapiścić uzyskane wartości nastaw regulatora.

### 4 Optymalizacja kryterium regulacji

Empiryczny dobór nastaw regulatora lub jego strojenie w oparciu o metodę Zieglera-Nicholsa pozwala uzyskać satysfakcjonującą jakość regulacji, jednak w wielu zastosowaniach pożądaną jest ilościowe określenie skuteczności regulacji. W tym celu stosuje się tzw. całkowite kryteria regulacji pozwalające określić miarę błędu regulacji. Do najczęściej stosowanych kryteriów regulacji zalicza się następujące wskaźniki.

- Integral Squared Error - kryterium kładące większą wagę na błędy o większej wartości

$$I_{ISE} = \int_0^t e^2(t) dt \quad (6)$$

- Integral of Time multiplied by Squared Error - kryterium kładące większą wagę na błędy o większej wartości występujące w końcowej fazie regulacji

$$I_{ITSE} = \int_0^t te^2(t) dt \quad (7)$$

- Integral Absolute Error - kryterium kładące równą wagę na błędy każdej wartości

$$I_{IAE} = \int_0^t |e(t)| dt \quad (8)$$

- Integral of Time multiplied by Absolute Error - kryterium kładące większą wagę na błędy występujące w końcowej fazie regulacji

$$I_{ITAE} = \int_0^t t |e(t)| dt \quad (9)$$

Ponadto, w rozważaniach nad optymalizacją jakości regulacji często stosuje się kryterium w postaci

$$I_{OPT} = \int_0^t e^2(t) + u^2(t) dt, \quad (10)$$

którego minimalizacja zapewnia utrzymanie kompromisu między kompensacją błędów regulacji, a zapobieganiem nadmiernemu wzrostowi wartości sygnałów sterujących.

- 4.1** Zmodyfikować kod symulacji tak, by wyznaczyć wartości wszystkich całkowych kryteriów regulacji. Wyznaczanie całki można przeprowadzić online poprzez dalsze rozszerzanie stanu  $x$  lub poprzez zsumowanie próbek symulacji po zakończeniu eksperymentu.
- 4.2** Wyznaczyć wartości kryteriów całkowych dla nastaw uzyskanych metodą Zieglera-Nicholsa.
- 4.3** Empirycznie dobrać nastawy regulatora które można uznać za optymalne w kontekście minimalizacji kryterium  $I_{ISE}$  oraz  $I_{OPT}$ . Zwrócić uwagę na wpływ minimalizacji sygnału sterującego w drugim przypadku.

## Rozwiązania

Wyznaczenie dynamiki układu z Rys. 2. Pamiętając, że  $u_L = L \frac{d}{dt} i_L$  oraz  $i_C = C \frac{d}{dt} v_C$  zapisać można

$$\begin{aligned} v_1 &= -i_2 R_2 - L \frac{d}{dt} i_2 \\ v_1 &= -u_1 + i_1 R_1 + L_1 \frac{d}{dt} i_1 \\ C_1 \frac{d}{dt} v_1 &= i_2 - i_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Dla takiego systemu wzmacnienie krytyczne  $k_u \approx 75.5$ ,  $T_u \approx \frac{5}{3}$ , co wg. metody Zieglera-Nicholsa prowadzi do nastaw  $k_p \approx 45.3$ ,  $k_i \approx 54.36$ ,  $k_d \approx 9.4375$ .