

Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 8

LINEARYZACJA UKŁADÓW NIELINIOWYCH

W ramach niniejszego ćwiczenia przedstawione zostaną trzy metody linearyzacji ciągłego nieliniowego równania różniczkowego, opisującego dynamikę systemu. Pierwsza opiera się na zmianie układu współrzędnych, z kolei druga wymaga rozwinięcia funkcji opisującej układ nieliniowy w szereg Taylora. Ostatnia metoda polega na doborze macierzy procesu i wejścia tak, aby były zależne od stanu. Zastosowanie omawianych metod będzie zaprezentowane na przykładzie nieliniowych układów mechanicznych.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- rozwinięcie funkcji w szereg Taylora;
- przyczyny nieliniowości w układach dynamicznych;
- właściwości układów nieliniowych.

→ Wykonać obliczenia z punktu 5.5.

1 Wprowadzenie

Stabilność układów liniowych zależy jedynie od ich biegunów, a zatem od składowej swobodnej rozwiązania. W układach nieliniowych nie można zastosować zasady superpozycji, a tym samym nie ma podziału rozwiązania na składowe swobodne i wymuszone. W efekcie bardzo trudno jest znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego nieliniowego. Poza tym, własności dynamiczne mogą zależeć od warunków początkowych i od funkcji wymuszającej na wejściu.

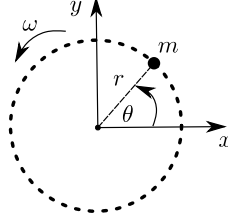
Ze względu na powyższe, analityczne metody badania dynamiki układów nieliniowych są bardzo ograniczone i złożone. Stosuje się więc różne zabiegi, aby sprowadzić problem do przypadku liniowego, czyli przeprowadzić linearyzację. Taki zlinearyzowany opis można stosować w pewnym ograniczonym zakresie zmian wielkości, na przykład w otoczeniu punktu pracy. Do badania modeli liniowych i zlinearyzowanych stosuje się te same metody, jednak wnioski z analizy modelu zlinearyzowanego są poprawne tylko w ograniczonym obszarze.

Warto wspomnieć, że do konstrukcji transformacji przestrzeni stanu linearyzującej dynamiczny układ nieliniowy, konieczne jest zastosowanie teorii geometrii różniczkowej. Dodatkowo, na nieliniowy układ nałożony jest szereg warunków, które musi spełnić, aby możliwe było przeprowadzenie jego linearyzacji. Rozważania te wykraczają poza zakres przedmiotu. W ramach niniejszego ćwiczenia omówione zostaną szczególne przypadki, w których po pierwsze możliwa jest linearyzacja, a po drugie wyznaczenie liniowej formy nie wymaga zastosowania geometrii różniczkowej.

2 Linearyzacja przez zmianę układu współrzędnych

W niektórych przypadkach można uzyskać liniową formę nieliniowego systemu przez zmianę układu współrzędnych, które służą do opisu systemu. W ramach niniejszego ćwiczenia rozważane będą szczególne przypadki, w których możliwe jest uzyskanie liniowej formy jedynie przez inny wybór układu współrzędnych lub zmiennych stanu.

Dla przykładu rozważyć można punkt materialny o masie m , przedstawiony na Rys. 1, poruszający się na płaszczyźnie po okręgu o promieniu r ze stałą prędkością kątową ω .



Rysunek 1: Punkt materialny poruszający się po okręgu.

Trajektorię takiego systemu w układzie kartezjańskim można przedstawić następująco

$$x_1(t) = r \cos(\omega t), \quad x_2(t) = r \sin(\omega t), \quad (1)$$

gdzie t oznacza czas. Powyższe zmienne określają pozycję, zgodnie z równaniem ruchu po okręgu. Dla tak dobranych zmiennych stanu można wyprowadzić prędkości i przyspieszenia

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Uzyskane wyniki mają prostą interpretację fizyczną. Wektor prędkości $\dot{\mathbf{x}}(t)$ jest prostopadły do trajektorii w każdym punkcie $\mathbf{x}(t)$, z kolei wektor przyspieszenia $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ jest skierowany do środka obrotu, stąd nazwa przyspieszenia dośrodkowego. Ta intuicyjna w interpretacji reprezentacja systemu jest nieliniowa.

Alternatywnym podejściem jest opis trajektorii systemu z rys. 1 przy pomocy współrzędnych biegunowych, gdzie $r(t)$ oznacza promień wodzący, a $\theta(t)$ wartość kąta. Opis trajektorii wyrażony we współrzędnych biegunowych można uzyskać stosując przekształcenie:

$$r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} = r, \quad \theta(t) = \arctan \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \omega t. \quad (3)$$

Wówczas prędkość i przyspieszenie są wyrażone jako

$$\dot{r}(t) = 0, \quad \dot{\theta}(t) = 1, \quad \ddot{r}(t) = 0, \quad \ddot{\theta}(t) = 0. \quad (4)$$

W tym przypadku, wyraźnie widać, że opisana trajektoria jest liniowa.

2.1 W środowisku Python wyznaczyć odpowiedź skokową ($u(t) = \mathbb{1}(t)$) nieliniowego systemu danego równaniami stanu:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 \ln z_2, \\ \dot{z}_2 &= -z_2 \ln z_1 + z_2 u. \end{aligned} \quad (5)$$

Przyjąć warunki początkowe $z_{1_0} = 1$ i $z_{2_0} = 1$. Wykorzystać funkcję `odeint`.

2.2 Zmienić układ współrzędnych systemu (5) przez podstawienie nowych zmiennych stanu:

$$\begin{aligned}x_1 &= \ln z_1, \\x_2 &= \ln z_2.\end{aligned}\tag{6}$$

Wówczas równania stanu przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{d}{dt} \ln z_1 = \frac{1}{z_1} \cdot \dot{z}_1 = \frac{1}{z_1} \cdot z_1 \ln z_2 = \ln z_2 = x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{z_2} \cdot \dot{z}_2 = -\ln z_1 + u = -x_1 + u.\end{aligned}\tag{7}$$

2.3 Wyznaczyć odpowiedź skokową systemu danego równaniami (7).

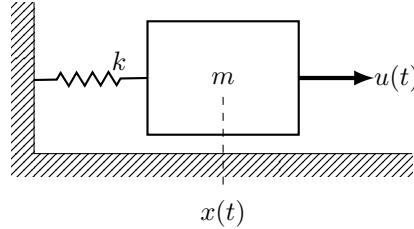
- Czy odpowiedzi obu układów różnią się? Dlaczego?

2.4 Wyznaczyć warunki początkowe liniowego systemu (7) tak, aby pokrywały się z warunkami początkowymi systemu nieliniowego. Skorzystać z przekształcenia (6).

2.5 Wykorzystać odwrotne przekształcenie do (6), aby przekształcić odpowiedź skokową układu liniowego. Wykorzystać polecenie `np.exp`.

- Czy w tym przypadku odpowiedzi obu układów się pokrywają? Czy dotyczy to każdej zmiennej stanu?

Warto zwrócić uwagę, że równania z powyższego przykładu opisują system przedstawiony na rysunku 2. Jest to układ sprężyny o stałej sprężystości k oraz masy m , do których przyłożona jest zewnętrzna siła $u(t)$ naciągająca sprężynę.



Rysunek 2: Schemat układu

Funkcja Lagrange'a w omawianym przypadku wynosi

$$\mathbb{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.\tag{8}$$

Dla wyznaczonego Lagrangianu można wyznaczyć sterowane równanie Eulera-Lagrange'a jako

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x} &= u \\ m\ddot{x} + kx &= u \\ \ddot{x} &= \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}x.\end{aligned}\tag{9}$$

Przyjmując, że masa wynosi $m = 1[\text{kg}]$ a stała sprężystości sprężyny $k = 1[\frac{\text{N}}{\text{m}}]$ można wyznaczyć równania stanu jak podano w równaniu (7). Warto podkreślić, że w omawianym przypadku, wybór zmiennych stanu, a co za tym idzie, również wybór układu współrzędnych, wpływa na to czy system będzie wyrażony w postaci liniowej czy nieliniowej.

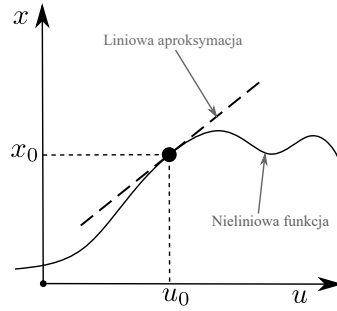
3 Linearyzacja statyczna

Ogólna forma równań stanu nieliniowego systemu może zostać opisana jako

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)), \\ y(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), u(t)),\end{aligned}\tag{10}$$

gdzie x oznacza stan systemu, u jego wejście, a y wyjście. Funkcje f oraz g są nieliniowymi funkcjami opisującymi dynamikę systemu. Ze względu na nieliniową formę, nie jest możliwy zapis równań stanu w postaci macierzowej, tj. nie jest możliwe wyprowadzenie macierzy A , B , C i D .

W wielu przypadkach nieliniowy system można aproksymować modelem liniowym. Jeżeli opis jest różniczkowalny i analityczny to linearyzację można przeprowadzić rozwijając funkcje f i g w szereg Taylora. W pierwszej kolejności należy wybrać punkt pracy (x_0, u_0) , względem którego przeprowadzona zostanie linearyzacja (Rys. 3).



Rysunek 3: Przykładowa charakterystyka statyczna układu nieliniowego wraz z oznaczonym punktem statycznym oraz jego liniową aproksymacją.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na różnicę pomiędzy punktem równowagi układu nieliniowego oraz przyjętym punktem pracy. Punkt równowagi systemu, to konfiguracja układu, którą przyjmie niepobudzony układ, tj. dla $u = 0$. Można go wyznaczyć na podstawie równania statycznego (uzyskanego przez wyzerowanie pochodnych zmiennych wejściowych i wyjściowych). Równania nieliniowe mogą mieć jednak więcej niż jeden punkt równowagi, jeśli równanie statyczne ma więcej niż jedno rozwiązanie. W przypadku układów liniowych, zawsze istnieje jeden punkt równowagi.

Z kolei punktem pracy nazwano konfigurację, którą przyjmie układ, po ustaniu stanów przejściowych, dla pobudzenia konkretnym sygnałem wejściowym. Mówimy zatem wówczas o parze: sygnale sterującym (u_0) oraz wyjściowej konfiguracji (x_0).

Rozwinięcie w szereg Taylora należy przeprowadzić w okolicy punktu (x_0, u_0) . Aby wynikowy model był liniowy należy zaniedbać składniki nieliniowe tego rozwinięcia. Liniową aproksymację można opisać poniższym wzorem

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}, u) &\approx f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (u - u_0), \\ g(\mathbf{x}, u) &\approx g(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (x - x_0) + \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (u - u_0).\end{aligned}\tag{11}$$

Przybliżanie funkcji za pomocą wzoru Taylora ma charakter lokalny, tzn. odnosi się jedynie do otoczenia wybranego punktu pracy. Im bardziej system oddala się od tego punktu, tym mniej dokładna jest liniowa aproksymacja. Idea linearyzacji statycznej może zostać opisana w następujących krokach:

1. Wybór punktu pracy (x_0, u_0) . Warunek równowagi jest określany analitycznie przez wyzerowanie wszystkich pochodnych stanu w równaniu (10). Należy zatem podstawić $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$.

2. Wyznaczenie pochodnych cząstkowych funkcji f i g względem zmiennych stanu oraz wejść systemu. Wartość pochodnych cząstkowych jest wyznaczana w punkcie pracy (x_0, u_0) jak podano poniżej.

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, \quad \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, \quad \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, \quad \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}.$$

3. Wprowadzenie nowych zmiennych

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \tilde{u} = u - u_0, \quad \tilde{y} = y - y_0, \quad (12)$$

dla $y_0 = g(x_0, u_0)$.

4. Utworzenie nowego opisu systemu

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = f(\mathbf{x}, u) &\approx \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u} = \underbrace{A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{u}}_{\text{opis liniowy}} \\ \tilde{y} = g(\mathbf{x}, u) - y_0 &\approx \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u} = \underbrace{C\tilde{\mathbf{x}} + D\tilde{u}}_{\text{opis liniowy}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Przeprowadzenie powyższej procedury prowadzi do liniowego opisu dla nieliniowego systemu. Należy jednak pamiętać, że liniowa aproksymacja przybliża rzeczywisty nieliniowy charakter systemu tylko dla pewnego otoczenia punktu pracy, co przedstawiono schematycznie na Rys. 3. Aby zachować przyjętą dokładność modelu przy rozszerzaniu obszaru pracy należy zmieniać punkt linearyzacji wraz ze zmianą punktu pracy.

Warto podkreślić relacje, które zachodzą pomiędzy liniową aproksymacją a nieliniowym modelem. Aby wyznaczyć macierze modelu zlinearyzowanego można posłużyć się następującymi przekształceniami:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, & B &= \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, \\ C &= \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}, & D &= \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}. \end{aligned} \quad (14)$$

4 Parametryzacja SDC

Rozszerzona linearyzacja, znana także jako linearyzacja pozorna lub parametryzacja SDC stanowi proces przekształcenia dynamiki układu nieliniowego do formy zbliżonej do opisu układu liniowego, którego macierze A, B, C oraz D zależne są od stanu układu¹. Niech dany będzie układ nieliniowy w postaci (10). Jeśli spełnione są następujące warunki:

- funkcja $f(\mathbf{x}, u)$ jest przynajmniej jednokrotnie różniczkowalna,
- punkt $x_0 = 0, u_0 = 0$ jest punktem równowagi, tj. $f(0, 0) = 0$,

to możliwe jest przedstawienie układu (10) w postaci SDC jako

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A(\mathbf{x})\mathbf{x} + B(\mathbf{x})u, \\ y &= C(\mathbf{x})\mathbf{x} + D(\mathbf{x})u, \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie $A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x}), C(\mathbf{x})$ oraz $D(\mathbf{x})$ są pewnymi macierzami zależnymi od stanu układu. Układ (15) zapisany jest w postaci zbliżonej do opisu układów liniowych. Dla tak sformułowanej dynamiki układu możliwe jest podjęcie próby zastosowania klasycznych sterowników przeznaczonych dla układów liniowych.

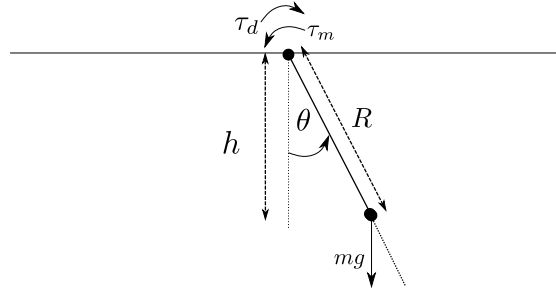
¹T. Cimen, “Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method”, Annual Reviews in Control, 2010, vol. 34(1), p. 32-51

Parametryzacja SDC jest unikalna dla układów skalarnych (tj. układów o pojedynczej zmiennej stanu, $n = 1$) – dla nieliniowego skalarnego układu dynamicznego $\dot{x} = f(x)$ parametryzacja SDC przyjmuje postać $\dot{x} = [f(x)/x] x$. W przypadku układów o większej liczbie zmiennych stanu zaproponować można nieskończoną ilość różnych parametryzacji SDC. Właściwość ta pozwala na wprowadzenie do projektu sterowania dodatkowego stopnia swobody i wpływ na odpowiedź układu zamkniętego poprzez dobór preferowanej parametryzacji dynamiki obiektu.

5 Przykład 1: Wahadło

W niniejszym przykładzie rozważane będzie napędzane wahadło, opisane dokładnie w Ćwiczeniu 7 oraz przedstawione na rys. 4. Jak pokazano w poprzednim ćwiczeniu, równania wahadła przyjmują postać

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}\tau_m - \frac{d}{J}\dot{\theta}(t) - \frac{mg}{J}R \sin \theta(t). \quad (16)$$



Rysunek 4: Napędzane wahadło.

W niniejszym ćwiczeniu przyjęto następujące wartości zmiennych: długość ramienia $R = 1[m]$, masa kuli $m = 9[kg]$, moment bezwładności układu napędowego $J = 1[kg \cdot m^2]$, $g = 10[m/s^2]$ oraz współczynnik modelu tarcia $d = 0.5[Nm \cdot s^2/rad^2]$.

Równanie wahadła można sprowadzić do postaci ogólnej (10) przez podział na dwa równania różniczkowe pierwszego rzędu. Należy wprowadzić zatem dwie zmienne stanu tj. $x_1(t) = \theta(t)$ i $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$. Wówczas równanie (16) można zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(\mathbf{x}(t), u(t)) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(\mathbf{x}(t), u(t)) = \frac{1}{J}u(t) - \frac{d}{J}x_2(t) - \frac{mg}{J}R \sin(x_1(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

Linearyzacja statyczna będzie przeprowadzona zgodnie z punktami opisanymi we wprowadzeniu. Przyjęto, że rozważane będą dwa punkty pracy, jednak obliczenia zostaną przeprowadzone jedynie dla jednego z nich.

1. Wyznaczenie punktu pracy (x_0, u_0) , przez pominięcie wszystkich pochodnych:

$$\begin{aligned} 0 &= x_{2_0}(t) \\ \frac{1}{J}u_0(t) &= -\frac{d}{J}x_{2_0}(t) + \frac{mg}{J}R \sin(x_{1_0}(t)) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{2_0}(t) &= 0 \\ u_0(t) &= mgR \sin(x_{1_0}(t)). \end{aligned} \end{aligned}$$

Dla rozważanego systemu istnieje wiele punktów pracy i są one zależne od wartości sygnału wejściowego. W ramach niniejszego ćwiczenia rozważane będą dwa punkty pracy:

- punkt $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}) = (0, 0)$, $u_0 = 0$, odpowiadający wahadłu w pozycji pionowej² (dla tego punktu zostaną przedstawione kolejne kroki linearyzacji),

²Punkt jest jednocześnie punktem równowagi systemu. Można zauważyć, że w tym przypadku istnieje tylko jeden punkt równowagi, tj. gdy wahadło nie będzie napędzane, wówczas $x_{1_0} = x_{2_0} = 0$.

- punkt $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}) = (\frac{\pi}{4}, 0)$, $u_0 = 45\sqrt{2}$ (linearyzacja statyczna dla tego punktu będzie wynikiem samodzielnej pracy studenta, zgodnie z zad. 5.5.)³.

2. Wyznaczenie poszczególnych pochodnych cząstkowych oraz odpowiadających im macierzy:

$$A = \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, u_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0, u_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_0, u_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0, u_0)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgR}{J} \cos(x_1) & -\frac{d}{J} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgR}{J} & -\frac{d}{J} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$B = \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} = \frac{\partial}{\partial u} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}.$$

3. Wprowadzenie nowych zmiennych stanu $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$ oraz wejścia $\tilde{u}(t)$ na podstawie (12):

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad \tilde{u} = u. \quad (19)$$

4. Wynikowa liniowa aproksymacja systemu ma postać:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{u}. \quad (20)$$

- 5.1** Wyznaczyć numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego opisującego dynamikę wahadła (17). Wykorzystać polecenie `odeint`.
- 5.2** Utworzyć liniowy model wahadła dla punktu równowagi $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}) = (0, 0)$, $u_0 = 0$, opisany macierzami (18). Wykorzystać polecenie `signal.StateSpace`.
- 5.3** Wyświetlić na wspólnym wykresie odpowiedzi układów: nieliniowego i liniowego dla następujących wymuszeń: $u(t) = \{0, 5, 20, 45\sqrt{2}, 70\}$.
- Czy model zlinearyzowany wiernie odzwierciedla zachowanie nieliniowego obiektu dla wszystkich wymuszeń?
 - Jaka jest interpretacja wartości wymuszenia, w odniesieniu do punktu równowagi?
- 5.4** Określić czy układ zlinearyzowany jest sterowalny.
- Jaką metodą do badania sterowalności można się posłużyć w przypadku liniowej aproksymacji?
- 5.5** Przeprowadzić procedurę linearyzacji dla punktu równowagi $x_0 = (\frac{\pi}{4}, 0)$, $u_0 = 45\sqrt{2}$. **Należy pamiętać o wprowadzeniu nowych zmiennych stanu \tilde{x} oraz nowego sygnału sterującego \tilde{u} .**
- Jaka jest fizyczna interpretacja tego punktu równowagi?
- 5.6** Ustawić warunek początkowy w punkcie równowagi $x_0 = (\frac{\pi}{4}, 0)$, $u_0 = 45\sqrt{2}$ i wyświetlić na wspólnym wykresie odpowiedzi układów: nieliniowego i zlinearyzowanego, dla następujących wymuszeń: $u(t) = \{45\sqrt{2}, 45\sqrt{2} + 2, 45\sqrt{2} + 10, 45\sqrt{2} + 30\}$.
- Dlaczego w niektórych przypadkach odpowiedź układu nie zmienia się w czasie?
 - Czy odpowiedzi obu układów się pokrywają? Dlaczego?

³Punkt nie jest punktem równowagi systemu. Należy to uwzględnić przy wyznaczaniu nowych zmiennych stanu \tilde{x} oraz nowego sygnału sterującego \tilde{u} dla układu zlinearyzowanego.

Parametryzacja SDC Dla tak zdefiniowanego układu wahadła zaproponować można parametryzację SDC w postaci

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgR}{J} \frac{\sin(x_1)}{x_1} & -\frac{d}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u = A(x)x + B(x)u. \quad (21)$$

Warto zauważyć, że $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\sin(x_1)}{x_1} = 1$ zatem poszczególne współczynniki macierzy $A(x)$ pozostają ograniczone dla dowolnych wartości zmiennych stanu x .

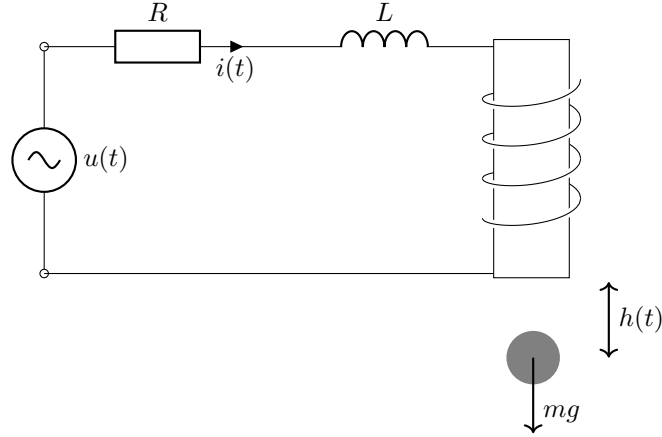
- 5.7** Wywołać funkcję implementującą dynamikę wahadła (17), dla warunku początkowego $x(0) = [\frac{\pi}{4} \ 0]$ oraz zerowego wymuszenia. Zwrócić uwagę na zgodność wyników symulacji z fizyczną interpretacją układu.
- 5.8** Zaimplementować funkcję wyznaczającą w każdej chwili czasowej (dla każdego elementu wektora czasu) macierze SDC: $A(x)$ oraz $B(x)$ zgodnie z parametryzacją SDC z równania (21).
- 5.9** Wygenerować odpowiedź systemu sparametryzowanego SDC dla tych samych warunków początkowych i porównać z odpowiedzią oryginalnego systemu.
- Czy uzyskane wykresy się pokrywają?
 - Jakie są potencjalne ograniczenia (implementacyjne i teoretyczne) metody SDC?

Uwagi implementacyjne do zadania 5.9:

- Wartości macierzy SDC są różne dla różnych wartości aktualnego stanu. W związku z tym tworzenie macierzy $A(x)$, $B(x)$, definiowanie systemu danego równaniami stanu (polecenie `signal.StateSpace`) oraz wyznaczenie aktualnego wyjścia (polecenie `lsim2`) powinno odbywać się iteracyjnie w każdej chwili czasowej.
 - Ze względu na iteracyjny charakter wywoływania funkcji `lsim2`, należy ustawić stan x jako parametr wyjściowy i nadpisywać wartości stanu początkowego `X0` dla kolejnej iteracji.
 - Funkcja `lsim2` zakłada, że podany warunek początkowy `X0` odpowiada chwili $t = 0$, a nie chwili określonej przez parametr wejściowy `T[0]`. Aby wygenerować poprawną odpowiedź należy jako parametr wejściowy funkcji `lsim2` podać wektor czasu `[0 t_inc]`, gdzie `t_inc` jest parametrem określającym krok pomiędzy dwoma chwilami czasowymi. Aby poprawnie wyznaczyć wykres odpowiedzi konieczne jest ponowne przesunięcie wartości czasu danej próbki na `T[0]`.
- 5.10** Ustawić warunek początkowy na $x_0 = (0,0)$ i przeprowadzić ponowne porównanie działania oryginalnego wahadła i sparametryzowanego za pomocą SDC.
- Co jest przyczyną pojawiającego się błędu/ostrzeżenia?

6 Przykład 2: Lewitująca kulka*

W kolejnym przykładzie rozważona zostanie magnetycznie podtrzymywana kulka, przedstawiona na Rys. 5. Układ elektryczny złożony jest z rezystancji R , uzwojenia L oraz źródła napięcia $u(t)$. Prąd przepływający przez uzwojenie generuje siłę magnetyczną, która jest w stanie przeciwdziałać sile grawitacji. Stalowa kulka o masie m umieszczona pod uzwojeniem może zatem zostać zawieszona w powietrzu, oddalona od uzwojeń o $h(t)$ w zależności od wartości wytworzonej siły magnetycznej. Warto zwrócić uwagę na fakt, że indukcyjność elektromagnesu jest nieliniowo zależna od odległości od kulki.



Rysunek 5: Schemat układu z „lewitującą”kulką.

Układ jest nieliniowy i przy założeniu zerowego sterowania niestabilny. Równania opisujące system są podzielone na część elektryczną i część mechaniczną. Do wyznaczenia siły magnetycznej posłużono się prawem Biot-Savarta⁴. Równania dynamiki rozważanego układu można opisać następująco:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{d}{dt} (L(h)i(t)) + Ri(t) \\ m \frac{d}{dt} h(t) &= mg - \underbrace{k_m \frac{i^2(t)}{h^2(t)}}_{\text{Siła magnetyczna}}, \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie k_m oznacza stałą magnetyczną, zależną od parametrów danego układu (wysokości kulki w pozycji równowagi (h_0) oraz indukcyjności przy maksymalnym oddaleniu kulki L_0). Przyjęto, że indukcyjność uzwojeń w omawianym przypadku można uprościć do formy

$$L(h) = L_1 + \frac{L_0 h_0}{h}. \quad (23)$$

Wówczas równania układu (22) można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} u(t) &= L_1 \frac{di(t)}{dt} - \frac{L_0 h_0 i}{h(t)^2} \frac{dh(t)}{dt} + Ri(t), \\ m \frac{d}{dt} h(t) &= mg - k_m \frac{i^2(t)}{h^2(t)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Z prawa zachowania energii można pokazać, że prawdziwa jest relacja⁵:

$$k_m = \frac{L_0 h_0}{2}. \quad (25)$$

Przyjmując zmienne stanu jako $x_1 = h$, $x_2 = \frac{d}{dt}h$, $x_3 = i$ oraz sygnał wejściowy jako u , można zapisać równania lewitującej kulki w postaci zmiennych stanu:

⁴Wyznaczenie siły magnetycznej dla lewitującej kuli można znaleźć przykładowo w pracy A. Nayak: „Controller Design for Magnetic Levitation System”, 2015.

⁵W. Barie, J. Chiasson: Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation, 1996, International Journal of Systems Science 27(11):1153-1163.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k_m}{m} \cdot \frac{x_3^2}{x_1^2}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{2k_m}{L_1} \cdot \frac{x_2 x_3}{x_1^2} - \frac{R}{L_1} x_3 + \frac{u}{L_1}.\end{aligned}\tag{26}$$

W dalszej części ćwiczenia przyjęto następujące wartości parametrów układu:
 $m = 0.01187[kg]$, $k_m = 1.16 \cdot 10^{-4}[Nm^2A^2]$, $L = 0.65[H]$, $R = 27.7[\Omega]$, $g = 9.81 [m/s^2]$.

- 6.1 Wyznaczyć punkt równowagi układu (26) dla oddalenia kulki równego $h_0 = 0.1m$.
- 6.2 Do skryptu w języku Python wprowadzić wartości parametrów układu z lewitującą kulką. Wyznaczyć numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego opisującego dynamikę lewitującej kulki (26). Wykorzystać polecenie `odeint`. Uwaga: funkcja, którą stanowi parametr wejściowy `odeint` powinna zwracać 3 wartości.
- 6.3 Ustawić warunek początkowy równy punktowi równowagi z zadania 5.1. Wyznaczyć odpowiedź nieliniowego układu.
 - Jaki jest charakter odpowiedzi układu na wymuszenie u_0 ?
 - Jaką odpowiedź układu można uzyskać dla warunku początkowego $i_0 = 0A$? Dlaczego?
- 6.4 Przeprowadzić linearyzację statyczną układu (26) względem punktu równowagi wyznaczonego w podpunkcie 5.1.
- 6.5 Wyświetlić na wspólnym wykresie odpowiedzi układów: nieliniowego i liniowego dla wymuszenia u_0 .
 - Jaka jest fizyczna interpretacja uzyskanych przebiegów?
 - Jaka jest interpretacja wartości wymuszenia, w odniesieniu do punktu równowagi?
- 6.6 Określić czy zlinearyzowany układ jest sterowalny.

□

Rozwiązanie

Zadanie 3.1

Linearyzacja w punkcie równowagi $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}) = (\frac{\pi}{4}, 0)$, $u_0 = 45\sqrt{2}$:

$$A = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{mgR}{J} \cos(x_1) & -\frac{d}{J} \end{array} \right] \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{mgR}{J} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{d}{J} \end{array} \right],$$

$$B = \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} = \frac{\partial}{\partial u} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Zadanie 4.6

Uwaga implementacyjna:

- układ nieliniowy inicjalizujemy warunkami początkowymi:

```
x10=np.pi/4
y0=[x10,0]
```

i pobudzamy sygnałem sterującym u :

```
u_ster = 0
u = 45*np.sqrt(2)+u_ster
```

- układ zlinearyzowany inicjalizujemy zerowymi warunkami początkowymi, czyli ich nie dodajemy a pobudzamy sygnałem sterującym $u_ster = \{0, 2, 10, 30\}$:

```
t3 = np.linspace(0,10,100)
u3 = u_ster*np.ones_like(t3) # skokowa
tout, y3, x = signal.lsim2(sys2, u3, t3)
```

Z kolei zmianę zmiennych stanu wprowadzamy już podczas wyświetlania:

```
plt.plot(tout,y3+x10,'g--',linewidth=2,label='lsim2')
```

Zadanie 5.1

Wyznaczenie punktu równowagi przez wyzerowanie pochodnych:

$$\begin{aligned} 0 &= x_{2_0}, \\ 0 &= g - \frac{k_m}{m} \cdot \frac{x_{3_0}^2}{x_{1_0}^2}, \\ 0 &= \frac{2k_m}{L_1} \cdot \frac{x_{2_0}x_{3_0}}{x_{1_0}^2} - \frac{R}{L_1}x_3 + \frac{u_0}{L_1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Dla założonej wysokości kulki $h_e = x_{1_0} = 0.02m$ można wyznaczyć punkt równowagi jako

$$x_{1_0} = 0.1, \quad x_{2_0} = 0, \quad x_{3_0} = x_{1_0} \sqrt{\frac{mg}{k_m}} = 3.16, \quad u_0 = 87.76. \quad (29)$$

Macierze zlinearyzowanego modelu:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2kmx_{30}^2}{mx_{10}^3} & 0 & \frac{-2kmx_{30}}{mx_{10}^2} \\ 0 & \frac{2kmx_{30}}{Lx_{10}^2} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \\
 C &= [1 \quad 0 \quad 0], \\
 D &= 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$