Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 2

Modelowanie układów liniowych przy pomocy zmiennych stanu.

W ramach niniejszego ćwiczenia student zapozna się z podstawowymi metodami modelowania liniowych układów dynamicznych. Zaprezentowane zostaną trzy podstawowe reprezentacje, tj. zapis w postaci transmitancji, zapis w postaci zmiennych stanu oraz bezpośrednie rozwiązanie równania różniczkowego. W kolejności zostaną przedstawione podstawowe operacje służące do analizy obiektów. Ćwiczenie zostanie przeprowadzone w języku programowania Python.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- opis układów dynamicznych liniowych za pomocą transmitancji;
- podstawowe właściwości transformaty Laplace'a;
- przekształcenie pomiędzy opisem za pomocą transmitancji a zmiennymi stanu.

→ Wykonać obliczenia niezbędne do wykonania polecenia 4.1.

1 Wprowadzenie

Dynamikę liniowego układu można opisać za pomocą liniowego skalarnego równania różniczkowego n-tego rzędu

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

przy czym $m \leq n$ oraz $y(t)$ stanowi wyjście układu, natomiast $u(t)$ stanowi sygnał wejściowy. Rozwiązanie równania (1) jest często złożone obliczeniowo oraz przyjmuje formę zależną od zadanego sygnału $u(t)$. Aby uprościć analizę stosuje się przekształcenie Laplace'a. Wówczas powyższe równanie można opisać w równoważnej formie

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots b_0 U(s). \tag{2}$$

Warto zwrócić uwagę, że równanie (2) nie jest sparametryzowane czasem a zmienną zespoloną s. Takie przekształcenie pozwala wyznaczyć zależność pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym. Transmitancja przyjmuje postać

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \tag{3}$$

Tak zaproponowana reprezentacja układu jest niezależna od typu sygnału zadanego oraz pozwala na bardziej ustrukturyzowaną analizę (analiza stabilności, klasyfikacja, zapasy fazy i modułu, odpowiedzi czasowe).

Innym sposobem opisu układu dynamicznego jest opis przy pomocy zmiennych stanu. Ogólna postać liniowych równań stanu składa się z dwóch równań

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie przez $\boldsymbol{x}(t)$ oznaczono wektor zmiennych stanu, z kolei A oznacza macierz stanu (procesu), B oznacza macierz wejścia, C macierz wyjścia, a D jest macierzą przenoszenia.

Przekształcenie układu (1) do równań stanu można uzyskać bezpośrednio z transmitancji (3) przez wykorzystanie zależności[1]:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{b_0}{a_n} & \frac{b_1}{a_n} & \frac{b_2}{a_n} & \dots & \frac{b_{n-2}}{a_n} & \frac{b_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Z kolei dla systemu opisanego zmiennymi stanu, wyznaczenie transmitancji jest możliwe przez zastosowanie wzoru

$$G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D. \tag{6}$$

Inna metoda wyznaczenia równań stanu (5) dotyczy układów, w których nie występują pochodne sygnału wejściowego $u(t)$. Równanie różniczkowe (1) przyjmuje wówczas postać

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t). \tag{7}$$

Wybór zmiennych stanu jako kolejnych pochodnych $y(t)$, tj.

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2 = \dot{y}(t), \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}(t), \tag{8}$$

prowadzi do następującej postaci równań stanu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 + \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{b}{a_n} u(t) \end{aligned}$$

oraz równania wyjścia $y = x_1$.

2 Układ pierwszego rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$T\dot{y}(t) + y(t) = k_p u(t) \tag{9}$$

gdzie $u(t)$ stanowi wejście układu, a $y(t)$ wyjście. Przyjęto następujące wartości parametrów $k_p = 3$ oraz $T = 2$ oraz zerowe warunki początkowe. Wyznaczenie odpowiedzi systemu w czasie jest możliwe przez zastosowanie operacji całkowania jako

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^{t_f} \left(k_p u(t) - y(t)\right) \, dt, \tag{10}$$

[1] Jest to jedna z kanonicznych postaci równań stanu, tzw. sterowalna.

gdzie jako t_f oznaczono granicę całkowania. Jednak rozwiązanie to jest zależne od rodzaju sygnału wymuszającego, dlatego do analizy układów dynamicznych często stosuje się przekształcenie Laplace'a. Równoważne równanie do (9) przestawiono poniżej.

$$T\,sY(s) + Y(s) = k_p\,U(s). \tag{11}$$

Proste przekształcenia powyższego równania prowadzą do wyznaczenia transmitancji, równoważnej równaniu (9):

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_p}{T\,s+1}. \tag{12}$$

Z kolei, aby uzyskać równania stanu, założono następującą zmienną stanu

$$x(t) = y(t). \tag{13}$$

Ze względu na czytelność zapisu, dla zmiennych zależnych od czasu, parametr ten będzie pomijany. Dla tak przyjętej zmiennej, równanie (9) można zapisać jako

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{k_p}{T}u. \tag{14}$$

Po przyjęciu dodatkowego założenia, że wyjście układu będzie jednoznaczne z jego stanem, można zapisać równania stanu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie macierze degenerują się do pojedynczych wartości i są równe $A = -\frac{1}{T}$, $B = \frac{k_p}{T}$, $C = 1$ oraz $D = 0$.

2.1 W języku Python zaimportować biblioteki `numpy`, `scipy.signal`, `scipy.integrate.odeint` i `matplotlib.pyplot`.

2.2 Wprowadzić wartości stałych k_p, T, A, B, C, D.

2.3 Zapisać system w postaci transmitancji (12) wykorzystując przykładowo polecenie `scipy.signal.TransferFunction(num,den)`.

2.4 Wyznaczyć odpowiedź skokową układu (polecenie `scipy.signal.step(sys)`) oraz utworzyć jej wykres, przykładowo poleceniem `matplotlib.pyplot.plot`.

- *Czy odpowiedź skokowa odpowiada teoretycznym założeniom?*

2.5 Zapisać system w postaci fazowych zmiennych stanu wykorzystując polecenie `scipy.signal.StateSpace(A,B,C,D)`. Wyznaczyć i wykreślić odpowiedź skokową układu.

2.6 Utworzyć funkcję `model(t,y)` opisującą dynamikę systemu (10), przyjmującą jako argumenty aktualny czas (t) oraz aktualny stan (y). Przyjąć $u(t) = \mathbb{1}(t)$.

2.7 Utworzyć tablicę wartości czasu $t \in (0, 15)$.

2.8 Wyznaczyć rozwiązanie równania (9) dla horyzontu czasowego z poprzedniego podpunktu i zerowych warunków początkowych. Wykorzystać komendę `odeint` z odpowiednią wartością parametru `t`. Upewnić się, że model z utworzony w podpunkcie, jest zgodny z wymaganiami funkcji `odeint`.

2.9 Wykreślić rozwiązanie równania (10) dla pobudzenia skokiem jednostkowym, wykorzystujące polecenie `matplotlib.pyplot.plot`. Należy pamiętać o ustawieniu takich samych rozmiarów odpowiednich zmiennych (funkcja `reshape`).

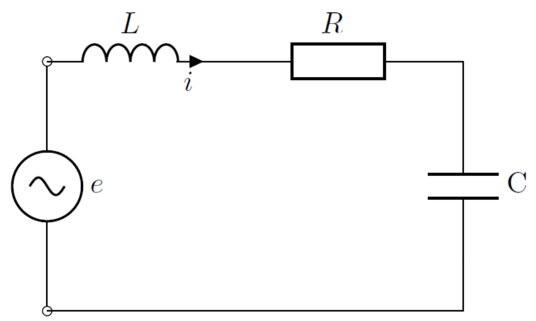
2.10 Porównać odpowiedzi skokowe wszystkich trzech reprezentacji (systemu opisanemu w postaci transmitancji, w postaci zmiennych stanu oraz bezpośredniego rozwiązania równania różniczkowego).

3 Układ elektryczny

W niniejszym ćwiczeniu rozważany będzie układ elektryczny, przedstawiony na rys. 1. Układ składa się z rezystora, cewki oraz kondensatora podłączonych szeregowo do źródła napięcia. Z drugiego prawa Kirchoffa można wyprowadzić następujące równanie opisujące ten obiekt

$$e(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}q(t) = 0, \tag{16}$$

gdzie $i(t)$ oznacza prąd w obwodzie, $q(t) = \int i(t)dt$ stanowi ładunek zgromadzony na jednej z okładek kondensatora, z kolei $e(t)$ stanowi napięcie źródła.



Rysunek 1: Układ elektryczny RLC.

Warto zauważyć, że równanie opisujące układ RLC jest elektrycznym analogiem mechanicznego układu masy-sprężyny-tłumika. Oba równania są drugiego rzędu, a ładunek $q(t)$ odpowiada przesunięciu w układzie mechanicznym. Dodatkowo indukcyjność cewki L odpowiada masie, rezystancja R odpowiada tarciu, a odwrotność pojemności jest analogiem sztywności sprężyny. Takie analogie są zauważalne pomiędzy systemami przepływowymi, cieplnymi, mechanicznymi, elektrycznymi, etc. i pozwalają na lepsze zrozumienie procesów zachodzących w systemach dynamicznych.

Analogicznie do poprzedniego podpunktu, system (16) można zapisać w postaci transmitancji, wykorzystując transformatę Laplace'a jako

$$G_2(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}. \tag{17}$$

Z kolei równania stanu uzyskano przez wybór zmiennych stanu jako ładunku kondensatora oraz prądu w układzie, tj.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Dodatkowo, jeżeli wartość prądu w układzie będzie wybrana jako wyjście systemu, wówczas poprawna jest relacja:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e(t) \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

3.1 W języku Python zamodelować układ dynamiczny przedstawiony na rys. 1 za pomocą transmitancji operatorowej (17) oraz wykreślić jego odpowiedzi skokową i impulsową. Przyjąć następujące wartości zmiennych $R = 12\Omega$, $L = 1H$ oraz $C = 100\mu F$.

3.2 W języku Python zamodelować ten sam układ przy pomocy zmiennych stanu (19) oraz wykreślić jego odpowiedzi czasowe. Porównać z wykresami z poprzedniego podpunktu.

- *Czy wykresy się pokrywają?*

3.3 Dokonać przekształceń pomiędzy transmitancją a zmiennymi stanu, wykorzystując polecenia `tf2ss(num, den)` oraz `ss2tf(A, B, C, D[, input])`.

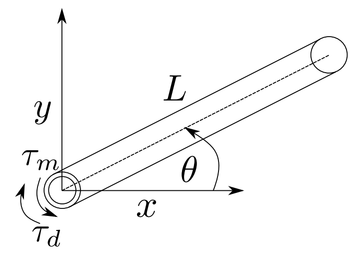
- *Czy wyprowadzone postaci modeli pokrywają się z tymi wyznaczonymi w Pythonie? Dlaczego?*

3.4 Zmienić wartość indukcyjności na $L = 0.15H$. Dokonać przekształceń pomiędzy transmitancją a zmiennymi stanu.

- *Czy wyprowadzone postaci modeli pokrywają się z tymi wyznaczonymi w Pythonie? Dlaczego?*

4 Manipulator planarny o jednym stopniu swobody

Ostatnim rozważanym obiektem dynamicznym jest manipulator o jednym stopniu swobody przedstawiony na rys. 2. Manipulator porusza się w płaszczyźnie poziomej, zatem siła grawitacji nie wpływa znacząco na dynamikę obiektu.



Rysunek 2: Manipulator planarny o jednym stopniu swobody.

Zakłada się, że manipulator jest napędzany momentem napędowym równym τ_m, który stanowi wejście systemu. Przeciwnie do momentu napędowego manipulatora działa moment tarcia wiskotycznego $\tau_d = d\dot{\theta}$, przy czym d jest współczynnikiem tarcia. Ramię manipulatora stanowi jednorodny pręt o długości L i masie m. Aktualna pozycja manipulatora jest dana jego pozycją kątową θ.

W celu wyznaczenia równania dynamicznego opisującego ten obiekt, można wyprowadzić funkcję Lagrange'a, która jest równa różnicy między energią kinetyczną a potencjalną układu. Ponieważ manipulator jest planarny, zatem energia potencjalna jest równa zero. Z kolei energię kinetyczną w ruchu po okręgu można wyznaczyć jako analog ruchu prostoliniowego. Zatem funkcja Lagrange'a w omawianym przypadku wynosi

$$\mathbb{L} = E_k = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \text{(analogicznie do } E_k = \frac{1}{2}mv^2 \text{ w ruchu prostoliniowym)} \tag{20}$$

Dla wyznaczonego Lagrangianu można wyznaczyć sterowane równania Eulera-Lagrange'a jako

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \theta} &= \tau_m - \tau_d \\ J\ddot{\theta} - 0 &= \tau_m - d\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{J}\tau_m - \frac{d}{J}\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{21}$$

Przyjąć następujące wartości parametrów: $m = 1$kg, $L = 0.5$m, $d = 0.1$Nms, przy czym moment bezwładności dla pręta obracającego się względem jednego ze swoich końców wynosi $J = \frac{1}{3}mL^2$.

4.1 Zakładając następujące zmienne stanu $x_1 = \theta$ i $x_2 = \dot{\theta}$, wejście $u = \tau_m$ oraz wyjście $y = x_1$ wyznaczyć równania stanu dla obiektu przedstawionego na rys 2.

4.2 Wyznaczyć odpowiedź skokową obiektu wykorzystując polecenie `signal.step(sys2)`.

- *Jaki jest charakter odpowiedzi skokowej obiektu?*

4.3 Wyznaczyć odpowiedzi obiektu dla różnych sygnałów wejściowych (sygnał τ_m liniowo narastający dla wartości początkowej równej 0, sygnał τ_m liniowo odpadający dla wartości początkowej równej 1) wykorzystując polecenie `scipy.signal.lsim2`. Do poprawnego wykonania zadania konieczna jest wcześniejsza deklaracja wektorów czasu i zadanego sygnału wejściowego.

- *Jaki jest charakter odpowiedzi obiektu?*

4.4 Wyznaczyć charakterystykę Bodego dla obiektu przedstawionego na rys. 2 wykorzystując polecenie `scipy.signal.bode`. Wykreślić charakterystykę w skali logarytmicznej wykorzystując polecenie `plt.semilogx`.

- *Czy wykresy Bodego odpowiadają typowi obiektu?*

□