Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 7

MODELOWANIE UKŁADÓW NIELINIOWYCH.

W ramach niniejszego ćwiczenia przedstawione zostaną przykłady obiektów nieliniowych wraz z nakreśleniem źródeł tych nieliniowości. Każdy z przypadków zostanie dokładnie opisany i zostanie zaproponowany sposób implementacji rozwiązania równań różniczkowych opisujących dane obiekty.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- funkcja Lagrange'a dla systemów mechanicznych
- wyznaczanie równania Eulera-Lagrange'a
- wyznaczanie transmitancji układu zamkniętego

→ Wyznaczyć wzór wyznaczający $\frac{d}{dt}y(t)$ dla schematu blokowego przedstawionego na rys. 1.

→ Wykonać przekształcenia opisane w zadaniu 5.1.

1 Wprowadzenie

Układ liniowy to taki, dla którego zachowana jest właściwość **superpozycji** (addytywności) oraz własność **skalowania** (jednorodności). Zasada superpozycji jest spełniona, gdy sumie sygnałów wejściowych $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, doprowadzonych do danego elementu, odpowiada suma sygnałów wyjściowych $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, przy czym sygnał wyjściowy $y_1(t)$ jest wywołany sygnałem wejściowym $u_1(t)$, a sygnał wyjściowy $y_2(t)$ jest wywołany sygnałem wejściowym $u_2(t)$. Z kolei zasada skalowania jest spełniona gdy dla dowolnej wartości skalarnej α, sygnał wejściowy $\alpha x_1(t)$ odpowiada sygnałowi wyjściowemu $\alpha y_1(t)$.

Zachowanie układu liniowego w odpowiedzi na złożony sygnał wejściowy można więc opisać za pomocą sumy odpowiedzi na prostsze sygnały wejściowe. W przypadku układów nieliniowych taka własność nie jest zachowana. Ta matematyczna własność sprawia, że znalezienie rozwiązania równań opisujących układ liniowy jest znacznie prostsze niż w przypadku równań, które opisują układ nieliniowy.

Warto nadmienić, że układy liniowe faktycznie nie istnieją. W szczególności analizując powyższe warunki liniowości można zauważyć, że zakładają one nieograniczoność zmiennych. W układach sterowania często można spotkać ograniczenia dotyczące wartości, przykładowo ograniczenie sygnału sterującego, ograniczenie przestrzeni roboczej, ograniczenie prędkości obiektu wykonawczego. W każdym z tych przypadków nie można stwierdzić liniowości układu. Zatem oprócz pojawienia się nieliniowości w parametrach modelu, przyczyn nieliniowości należy poszukiwać również w **ograniczeniach** zmiennych opisujących dany system.

Nie należy zupełnie odrzucać liniowych modeli, jako że stanowią pewne uproszczenie bardziej złożonego układu. Charakteryzują się prostszymi w analizie własnościami i dla pewnych określonych przedziałów wartości zmiennych model liniowy może nie odbiegać znacząco od nieliniowego układu fizycznego. Możliwa jest tzw. linearyzacja modelu nieliniowego, aby uzyskać jego liniowe uproszczenie, ale to zagadnienie będzie tematem kolejnego ćwiczenia.

W ramach niniejszego ćwiczenia omówiony zostanie sposób modelowania układów, które mają charakter nieliniowy. Wyjście systemu rozumiane będzie jako rozwiązanie równania różniczkowego opisującego system, numeryczne lub analityczne. Modele pozostaną nieliniowe, nie będą wykorzystywane ich liniowe uproszczenia.

2 Równanie nieliniowe pierwszego rzędu

Niech dany będzie układ dany równaniem różniczkowym pierwszego rzędu

$$\frac{d}{dt}y(t) = t^2, \tag{1}$$

gdzie $y(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego. W tym konkretnym przypadku, sygnał wejściowy jest dany w sposób jawny ($u(t) = t^2$), zatem możliwe jest wyznaczenie rozwiązania równania (1) w sposób analityczny. I tak, po zastosowaniu operacji całkowania można otrzymać

$$y(t) = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3 + c, \tag{2}$$

gdzie c stanowi stałą całkowania.

2.1 Zaimportować biblioteki `numpy`, `scipy.integrate.odeint` oraz `matplotlib.pyplot`.

2.2 Utworzyć model wyznaczający wartość $\frac{d}{dt}y(t)$, na podstawie równania (1).

2.3 Utworzyć wektor czasu $t \in (0, 10)s$. Dla tak opisanych chwili czasowych wyznaczyć numerycznie rozwiązanie równania (1), dla zerowych warunków początkowych ($c = 0$). Wykorzystać polecenie `odeint`.

2.4 Utworzyć zmienną, która odpowiada analitycznemu rozwiązaniu (2). Porównać na wykresie rozwiązanie równania uzyskane numerycznie (`odeint`) i analitycznie.

- *Czy rozwiązania się pokrywają? Jaki rodzaj numerycznego wyznaczania rozwiązania równania różniczkowego został użyty?*

3 Równanie nieliniowe drugiego rzędu

W niniejszym przykładzie rozważane będzie nieliniowe równanie drugiego rzędu

$$\omega^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega\frac{dy(t)}{dt} + \omega\sqrt{y(t)} = k_p\, u\,(t)\,, \tag{3}$$

gdzie $y(t)$ stanowi rozwiązanie równania, natomiast $u(t)$ stanowi jego wejście. Źródłem nieliniowości równania jest operacja pierwiastkowania. Równania (3) nie można zapisać ani w postaci transmitancji ani w postaci liniowych równań stanu. Uzyskanie rozwiązania równania w sposób analityczny jest bardzo złożone obliczeniowo, nawet dla danego $u(t)$. Rozwiązanie można uzyskać numerycznie, przez podział równania drugiego rzędu na dwa równania pierwszego rzędu. W tym celu należy wprowadzić zmienne pomocnicze:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t). \tag{4}$$

Dla tak zdefiniowanych zmiennych, równanie (3) można zapisać jako układ dwóch równań:

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t), \tag{5}$$
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -\frac{2\zeta}{\omega}x_2(t) - \frac{1}{\omega}\sqrt{x_1(t)} + \frac{k_p}{\omega^2}\,u\,(t)\,. \tag{6}$$

W omawianym przypadku funkcja opisująca równania różniczkowe powinna operować na tablicy dwóch zmiennych, zarówno na poziomie parametrów wejściowych jak i wyjściowych. Przykładowa i niepełna implementacja takiej funkcji została przedstawiona poniżej

```
def model(t,x):
    y = x[0]
    dydt = x[1]
    dy2dt2 = ...
    return [dydt,dy2dt2]
```

3.1 Zaimportować biblioteki `numpy`, `scipy.integrate.odeint` oraz `matplotlib.pyplot`.

3.2 Przyjąć następujące wartości zmiennych $k_p = 2$, $\omega = 4$, $\zeta = 0.25$, $u(t) = \mathbb{1}(t)$.

3.3 Utworzyć model wyznaczający wartość $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$, zgodnie z równaniami (5) i (6).

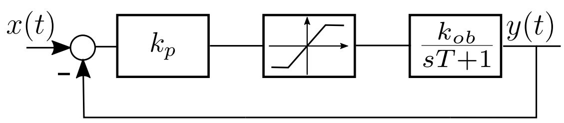
3.4 Utworzyć wektor czasu $t \in (0, 50)s$. Dla tak opisanych chwili czasowych wyznaczyć numerycznie rozwiązanie równania (3) wykorzystując polecenie `odeint`.

3.5 Wyświetlić rozwiązanie równania (3) w funkcji czasu.

- *Jaki jest charakter odpowiedzi układu na wymuszenie skokowe?*

4 Układ z ograniczeniami

W przykładzie tym zostanie omówiony układ, którego przyczyną nieliniowości są nałożone ograniczenia sygnału sterującego, natomiast sam obiekt jest liniowy. Niech dany będzie schemat blokowy przedstawiony na rys. 1.



Rysunek 1: Schemat blokowy układu regulacji z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu, regulatorem proporcjonalnym i ograniczeniem sygnału sterującego.

Układ składa się z obiektu inercyjnego pierwszego rzędu, przedstawionego za pomocą transmitancji, regulatora proporcjonalnego o wzmocnieniu k_p oraz bloku saturacji (ograniczenia) wartości sygnału sterującego. Sygnał sterujący wyznaczony przez regulator, tj. $u(t) = k_p(x(t) - y(t))$ przed przekazaniem go na obiekt, jest ograniczony do wartości $(-0.1, 0.1)$.

4.1 Przyjąć następujące wartości zmiennych $k_p = 2$, $T = 2$, $k_{ob} = 4$, $x(t) = \mathbb{1}(t)$.

4.2 Utworzyć funkcję `feedback(t,y)` opisującą rozważany schemat blokowy. Kolejne kroki realizowane przez funkcję:

- powinna wyznaczać wartość sygnału sterującego zgodnie z prawem sterowania regulatora proporcjonalnego.
- powinna ograniczać wartość sygnału sterującego do wartości granicznych; można wykorzystać polecenie `numpy.clip(a, a_min, a_max,...)`.
- powinna zwracać wartość $\frac{d}{dt}y(t)$ na podstawie transmitancji obiektu i wartości sygnału sterującego $u(t)$.

4.3 Wyznaczyć odpowiedź układu zamkniętego przez zastosowanie funkcji `odeint`. Wykreślić jej przebieg w funkcji czasu.

4.4 Zmieniać wartość sygnału zadanego $x(t) = \{1, 2, 3\} \cdot \mathbb{1}(t)$ i obserwować stany ustalone odpowiedzi układu.

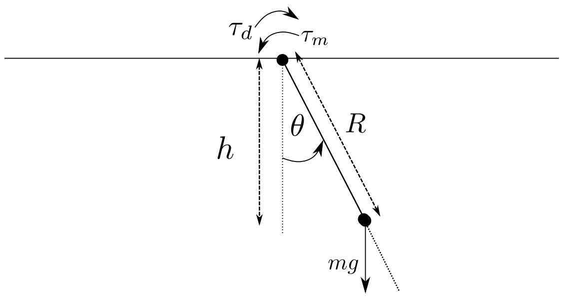
- *Czy zachowana jest zasada superpozycji i skalowania?*
- *Czy układ ma charakter liniowy?*

4.5 Zmienić postać funkcji `feedback(t,y)` tak, aby sygnał sterujący nie był ograniczony. Wyświetlić odpowiedzi układu dla różnych stałowartościowych sygnałów zadanych $x(t)$.

- *Czy układ ma charakter liniowy?*

5 Napędzane wahadło*

Ostatnim rozważanym nieliniowym układem jest wahadło napędzane zewnętrznym momentem napędowym τ_m, przedstawione na rys. 2. Zakłada się, że na lince o długości R zamontowana jest jednorodna kulka o masie m (masa linki jest pomijalna). Przeciwnie do momentu napędowego wahadła działa moment tarcia wiskotycznego $\tau_d = d\frac{d}{dt}\theta$, przy czym d jest współczynnikiem tarcia. Aktualna pozycja wahadła jest dana jako θ.



Rysunek 2: Schematyczny rysunek napędzanego wahadła.

W celu wyznaczenia równania dynamicznego opisującego ten obiekt, można wyprowadzić funkcję Lagrange'a, która jest równa różnicy między energią kinetyczną a potencjalną układu. Energia potencjalna jest zależna od wysokości uniesienia kulki. Wysokość tą można wyrazić jako funkcję pozycji kątowej wahadła, tj. $h = R\cos\theta$. Z kolei energię kinetyczną w ruchu po okręgu można wyznaczyć jako analog ruchu prostoliniowego. Zatem funkcja Lagrange'a w omawianym przypadku wynosi

$$\mathbb{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2}J\frac{d}{dt}\left(\theta^2(t)\right) - mgR\cos\theta(t). \tag{7}$$

Dla wyznaczonego Lagrangianu można wyznaczyć sterowane równania Eulera-Lagrange'a jako

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)}\right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial\theta(t)} &= \tau_m - \tau_d \\ J\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + mgR\sin\theta(t) &= \tau_m - d\frac{d}{dt}\theta(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\theta(t) &= \frac{1}{J}\tau_m - \frac{d}{J}\frac{d}{dt}\theta(t) - \frac{mg}{J}R\sin\theta(t).\end{aligned} \tag{8}$$

Analogicznie do rozważań przedstawionych w rozdziale poświęconym równaniom nieliniowym drugiego rzędu, w przypadku rozpatrywanego wahadła, równanie należy rozdzielić na dwa równania pierwszego rzędu.

5.1 Przedstawić równanie opisujące wahadło (8) w postaci dwóch równań pierwszego rzędu. Jako wzór wykorzystać przekształcenie zaprezentowane w równaniach (5) i (6).

5.2 Utworzyć funkcję wyznaczającą $\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)$. Jako sygnał wejściowy przyjąć $\tau_m = A\cos(\omega t)$, gdzie $A = 1.5$ a $\omega = 0.65$. Wartość współczynnika tłumienia ustawić jako $d = 0.5$.

5.3 Wyznaczyć i wykreślić rozwiązanie równania różniczkowego (8).

- *Jaki jest charakter odpowiedzi układu na sygnał zadany równy funkcji trygonometrycznej?*

□