Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 9

REGULATOR LQR DLA UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Celem ćwiczenia jest prezentacja możliwości zastosowania regulatora LQR dla układów nieliniowych poprzez wykorzystanie liniowej aproksymacji układu. Studenci wyznaczą liniową aproksymację układu dynamicznego, a następnie na jej podstawie dokonają syntezy sterownika LQR. Przedstawione zostaną ograniczenia stosowalności omawianego algorytmu.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- opisu liniowych układów dynamicznych w przestrzeni zmiennych stanu,
- projektowania układów regulacji (pojęcia uchybu, wartości zadanej, sprzężenia, itp.)
- budowy oraz działania regulatora LQR ze skończonym oraz nieskończonym horyzontem czasowym

1 Regulator LQR dla układów nieliniowych

W swojej nominalnej postaci algorytm LQR pozwala na wyznaczenie sygnałów sterujących minimalizujących pewne kryterium jakości dla układów dynamicznych które opisać można przy pomocy liniowych równań różniczkowych. Dotychczas poznany proces syntezy sterownika LQR nie pozwala na jego zastosowanie dla układów nieliniowych, co znacząco zawęża zakres jego stosowalności. Dzięki zastosowaniu aproksymacji liniowej możliwe jest jednak zaprojektowanie sterownika LQR także dla układów nieliniowych. Podkreślić należy, że uzyskane w ten sposób prawo sterowania nie gwarantuje optymalnej jakości regulacji – optymalność nie jest zagwarantowana nawet w pobliżu przyjętego podczas linearyzacji punktu pracy. Regulator LQR zastosowany dla układu nieliniowego zapewnia jedyne lokalne przybliżenie optymalnego rozwiązania problemu sterowania.

Niech dany będzie układ nieliniowy opisany równaniem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $f(x,u), g(x,u)$ stanowią pewne nieliniowe funkcje definiujące dynamikę układu. Przyjmując punkt pracy (x_0, u_0) dla którego $f(x,u) = 0$, wyznaczyć można liniową aproksymację układu jako

$$\dot{\tilde{x}} \approx \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \tilde{x} + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \tilde{u} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \tag{2}$$

gdzie $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{u} = u - u_0$ jest nowym wektorem stanu oraz wejścia liniowej aproksymacji układu nieliniowego. Dla tak zdefiniowanego układu liniowego zaprojektować można regulator

LQR z prawem sterowania

$$\tilde{u} = -K\tilde{x}, \tag{3}$$

co jest równoważne sygnałowi sterującemu układu nieliniowego w postaci

$$u = -K(x - x_0) + u_0. \tag{4}$$

Projektując regulator LQR dla układu nieliniowego, podobnie jak w przypadku układu liniowego, konieczne jest definiowanie optymalizowanego kryterium jakości regulacji. Kryterium to definiuje się dla wyznaczonej liniowej aproksymacji (2) – ponieważ nie opisuje ona precyzyjnie dynamiki układu niemożliwe jest zagwarantowanie, że tak zdefiniowany regulator zapewni optymalną jakość regulacji. Kryterium regulacji zdefiniować można dla skończonego lub nieskończonego horyzontu czasowego.

- Przyjmując nieskończony horyzont czasowy kryterium jakości sterownika LQR ma postać

  $$J = \int_0^\infty \left(\tilde{x}^T Q\tilde{x} + \tilde{u}^T R\tilde{u}\right) dt \tag{5}$$

  i prowadzi do wzmocnień sterownika (4) w postaci

  $$K = R^{-1}B^T P, \tag{6}$$

  gdzie parametr P wyznacza się na postawie algebraicznego równania Riccatiego

  $$PA - PBR^{-1}B^T P + A^T P + Q = 0. \tag{7}$$

- Zastosowanie sterowania ze skończonym horyzontem czasowym t_1 prowadzi do kryterium jakości regulacji w postaci

  $$J = \tilde{x}^T(t_1)S\tilde{x}(t_1) + \int_0^{t_1} \left(\tilde{x}(t)^T Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)^T R\tilde{u}(t)\right) dt \tag{8}$$

  i wzmocnień sterownika (4) danych wzorem

  $$K = R^{-1}B^T P(t), \tag{9}$$

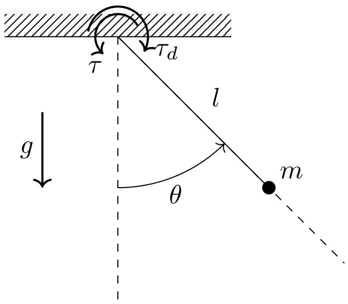
  gdzie zmienną w czasie macierz $P(t)$ wyznacza się stosując różniczkowe równanie Ricattiego

  $$P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + A^T P(t) + Q = -\dot{P}(t), \tag{10}$$

  z warunkiem krańcowym $P(t_1) = S$.

2 Zastosowanie

Przedstawiony regulator może zostać skutecznie zastosowany do każdego układu liniowego, którego liniowa aproksymacja spełnia warunek sterowalności. Niech dany będzie wahadła matematycznego przedstawiony na Rys. 1.



Rysunek 1: Układ wahadła

Dynamika wahadła wyrażona jest poprzez równanie różniczkowe

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau - d\dot{\theta}(t) - mgl\sin(\theta(t)), \tag{11}$$

gdzie $l = 1\text{m}$ stanowi długość wahadła, $m = 9\text{kg}$ określa masę kuli, $J = 1\text{kg}\,\text{m}^2$ określa moment bezwładności układu napędowego, a $d = 0.5\text{N}\,\text{m}\,\text{s}^2$ stanowi współczynnik tarcia. Przyspieszenie grawitacyjne dane jest jako $g = 9.81\text{m/s}^2$.

2.1 Wyznaczyć nieliniowy model układu z Rys 1 w przestrzeni zmiennych stanu przyjmując $x = \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta}\end{bmatrix}^T$.

2.2 Przygotować funkcję `model(x,t)` implementującą dynamikę wahadła. Przeprowadzić symulację pracy wahadła przyjmując warunek początkowy $x(0) = \begin{bmatrix}\frac{\pi}{4} & 0\end{bmatrix}$ i zerowe wymuszenie.

2.3 Wykorzystując zdefiniowany model układu wyznaczyć jego liniową aproksymację w punkcie $x_0 = \begin{bmatrix}\pi, 0\end{bmatrix}, u_0 = 0$.

2.4 Dla wyznaczonej liniowej aproksymacji przeprowadzić proces syntezy sterownika LQR z nieskończonym horyzontem czasu. Wyznaczyć wartości wzmocnień K w równaniu (4).

2.5 Rozszerzyć funkcję `model(x,t)` o implementację sterowania zgodnego z równaniem (4). Przeprowadzić symulację pracy układu. Przyjąć warunki początkowe $x(0) = \begin{bmatrix}\pi - 0.1 & 0\end{bmatrix}^T$.

- Czy zadanie stabilizacji układu realizowane jest poprawnie?

2.6 Powtarzać symulację stopniowo zmniejszając wartość początkową $x_1(0)$ aż do $x_1(0) = 0$.

- Czy zaimplementowany sterownik gwarantuje globalną stabilność układu?
- Czy zależność tak obowiązywać będzie dla dowolnego układu nieliniowego?

2.7 Powtórzyć eksperymenty dla sterownika LQR ze skończonym horyzontem czasu. Przyjąć $t_1 = 1\text{s}$.

□