Układy Sterowania Optymalnego

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 4

PODSTAWY OPTYMALIZACJI MATEMATYCZNEJ

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie z matematycznymi podstawami optymalizacji. W ramach ćwiczenia student zdobędzie umiejętność odnajdywania ekstremum wybranej funkcji przy pomocy gotowych narzędzi programistycznych.

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- analizy matematycznej
- operacji algebraicznych na macierzach.

1 Wprowadzenie

Optymalizacja matematyczna to poszukiwanie elementu, który uznać można za najlepszy w odniesieniu do pewnego kryterium. W szczególności, problem optymalizacji określa się jako poszukiwanie ekstremum (tj. wartości maksymalnej lub minimalnej) danej funkcji lub funkcjonału celu przy uwzględnieniu określonych ograniczeń. Funkcja celu definiuje zatem kryterium oceny poszukiwanego elementu, a element dla którego funkcja celu przyjmuje ekstremum jest uznawany za optymalny. Wyróżnia się problemy optymalizacji statycznej oraz dynamicznej. Optymalizacja statyczna obejmuje problemy, w których poszukiwanym elementem jest pewna wartość argumentu funkcji celu. Rozwiązanie problemu optymalizacji statycznej jest zatem niezmienne w czasie i ma postać pewnej stałej wartości dla której funkcja celu przyjmuje pożądane ekstremum. Dana jest zatem funkcja określona na dziedzinie A i posiadająca zbiór wartości $\mathbb{R}$

$$f(x) : A \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

gdzie $x \in A \subset \mathbb{R}^n$. Zadanie optymalizacji polega na odnalezieniu takiego x_o, że dla każdego $x \in A$ zachodzi

- $f(x_o) \geq f(x)$ (zadanie znalezienia maksimum) lub,
- $f(x_o) \leq f(x)$ (zadanie znalezienia minimum).

Zakres dziedziny A określającej dopuszczalne wartości x wynika z przyjętych ograniczeń. Zadanie optymalizacji statycznej zapisuje się jako

$$\begin{gathered} f(x) \to min(max) \\ \text{Przy ograniczeniach} \\ x \in A. \end{gathered} \tag{2}$$

W celu rozwiązania problemu optymalizacji matematycznej stosuje się metody pozwalające na odnalezienie globalnych lub lokalnych ekstremów danej funkcji celu. Wyróżnia się m.in. poszukujące lokalnych ekstremów iteracyjne techniki oparte na analizie gradientu lub Hessianu funkcji oraz algorytmy heurystyczne (np. algorytm symulowanego wyżarzania) poszukujące ekstremów globalnych, nie dające jednak gwarancji zbieżności.

Poprzez optymalizację dynamiczną rozumie się natomiast problemy, dla których rozwiązaniem jest pewna zmienna w czasie funkcja, natomiast funkcjonał celu opisany jest pewnym wyrażeniem całkowym zależnym od poszukiwanej funkcji. Rozważa się zatem wyrażenie całkowe wyznaczane w horyzoncie od chwili t_0 do chwili t_1

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots)dt \tag{3}$$

z pewnymi warunkami początkowymi i końcowymi określonymi dla $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$, itd. Zadanie optymalizacji polega na odnalezieniu takiej funkcji $x_o(t)$, że dla każdego $x(t)$ spełniającego założone warunki początkowe i końcowe zachodzi

- $J(x_o(t)) \geq J(x(t))$ (zadanie znalezienia maksimum) lub,
- $F(x_o(t)) \leq J(x(t))$ (zadanie znalezienia minimum).

Problem optymalizacji dynamicznej zapisać zatem można jako

$$\begin{aligned} & J(x(t)) \to min(max) \\ \text{Przy warunkach} & \\ & x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ & \dot{x}(t_0) = dx_0, \dot{x}(t_1) = dx_1, \\ & \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Do rozwiązywania problemów optymalizacji dynamicznej wykorzystuje się m.in. techniki wynikające z rachunku wariacyjnego czy programowania dynamicznego.

2 Programowanie liniowe

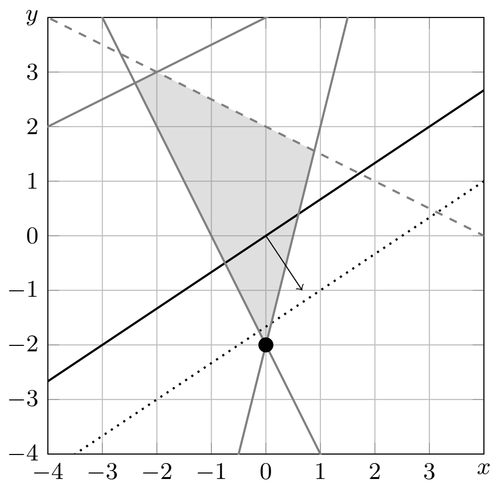
Ze względu na charakter funkcji celu oraz ograniczeń problemy optymalizacji statycznej podzielić można na liniowe (w których zarówno funkcja celu jak i ograniczenia mają charakter liniowy) oraz nieliniowe (w tym kwadratowe). Problem optymalizacji liniowej zapisać można jako

$$\begin{aligned} & c^T x \to min(max) \\ \text{ogr.} & \\ & Ax = a \\ & Bx \leq b, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $c \in \mathbb{R}^n$ stanowi wektor stałych współczynników, natomiast $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stanowią stałe macierze definiujące ograniczenia problemu. Ze względu na liniowy charakter funkcji celu, istnieje nieskończenie wiele wartości x, dla których $c^T x$ jest równe tej samej wartości. Tylko ze względu na występujące ograniczenia ten zbiór może zostać zawężony do pewnego zbioru wartości.

Przykład 1. *Dany jest problem optymalizacji*

$$
\begin{aligned}
& 2x - 3y \to max \\
ogr.\ & x + 2y < 4 \\
& \frac{1}{2}x - y \geq 4 \\
& 12x - 3y \leq 6 \\
& 2x + y \geq -2
\end{aligned}
$$



Zadanie polega zatem na znalezieniu maksimum funkcji $2x - 3y$ przy uwzględnieniu podanych ograniczeń. Narzucone ograniczenia wyznaczają pewien zamknięty obszar A na płaszczyźnie (x, y). Funkcja celu na tej płaszczyźnie przyjmuje postać prostej której położenie określa uzyskiwana dla danej prostej wartość funkcji (tzn. dla każdego punktu na tej prostej funkcja $2x - 3y$ przyjmuje tę samą wartość). Rozwiązaniem problemu jest wierzchołek obszaru A o współrzędnych $(0, -2)$ dla którego funkcja celu przyjmuje najmniejszą wartość $f(x) = 6$.

2.1 Dany jest problem optymalizacji

$$
\begin{aligned}
& -y \to max \\
\text{ogr. } & 2x - y \leq 4 \\
& y + x > 3 \\
& y + 4x \geq -2.
\end{aligned}
$$

Wyznaczyć na płaszczyźnie (x, y) obszar dopuszczalny ze względu na ograniczenia.

2.2 Zaznaczyć prostą wynikającą z funkcji celu. Wyznaczyć rozwiązanie problemu optymalizacji.

2.3 Rozwiązać problem optymalizacji przy pomocy narzędzi programistycznych (wykorzystać na przykład `scipy.optimize.minimize`).

3 Programowanie nieliniowe

W wielu przypadkach nie jest możliwe zapisanie problemu optymalizacji w postaci wyrażeń liniowych. Problem optymalizacji przyjmuje wtedy postać

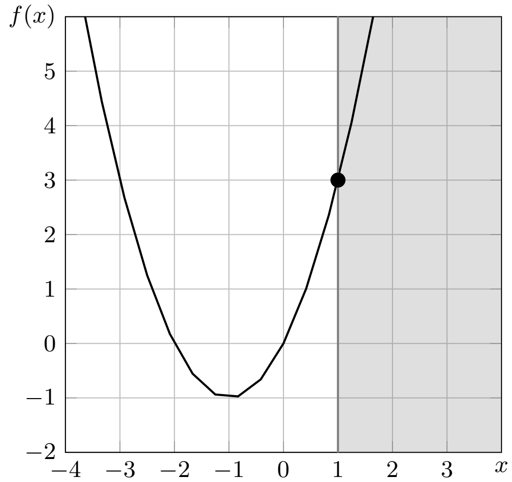
$$
\begin{aligned}
& f(x) \to min(max) \\
\text{ogr.} & \\
& g_1(x) = 0 \\
& g_2(x) \leq 0.
\end{aligned}
$$

gdzie $f(x)$ opisuje nieliniową funkcję celu, a $g_1(x), g_2(x)$ stanowią nieliniowe funkcje definiujące ograniczenia w problemie. Szczególnym przypadkiem problemu nieliniowego jest tzw. programowanie kwadratowe, w którym funkcja celu przyjmuje postać $f(x) = x^T Qx + q^T x$ (gdzie Q jest stałą macierzą, a q stałym wektorem), natomiast ograniczenia mają postać liniową.

Przykład 2. *Dany jest problem optymalizacji*

$$x^2 - 2x \to min$$
$$ogr.\ x \in [1, \infty]$$

Dla zbioru $A = [1, \infty]$ funkcja $x^2 - 2$ jest funkcją monotoniczne rosnącą, zatem najmniejszą wartość przyjmuje dla najmniejszej wartości argumentu. Stąd, rozwiązaniem problemu jest $x_o = 1$ dla którego $f(x) = 3$.



3.1 Dany jest problem optymalizacji nieliniowej

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \to min$$
ogr.
$$x \in [0, \infty)$$

Korzystając ze znanych narzędzi matematycznych znaleźć lokalne ekstrema funkcji celu.

3.2 Uwzględniając dane ograniczenia wyznaczyć rozwiązanie problemu optymalizacji.

3.3 Wykorzystać narzędzia programistyczne do rozwiązania zadania optymalizacji (wykorzystać na przykład `scipy.optimize.minimize` oraz `scipy.optimize.dual_annealing`).

- *Czym różnią się zaproponowane metody rozwiązania programistycznego?*
- *Czy w poprzednim zadaniu również wyniki tych metody mogłyby być różne?*

4 Programowanie dynamiczne

Chociaż rozwiązanie problemów optymalizacji dynamicznej wymaga często zaawansowanego aparatu matematycznego, rozważać można pewne proste przykłady takich problemów[1].

Przykład 3. *Dany jest problem optymalizacji dynamicznej*

$$\int_0^1 24x(t)t + 2\dot{x}(t)^2 - 4t\,dt \to min$$
$$war.\ x(0) = 1,\ x(1) = 3$$

Korzystając z równania Eulera stwierdzić można, że warunkiem koniecznym wystąpienia ekstremum funkcjonału $F(t, x(t), \dot{x}(t))$ jest spełnienie zależności

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}},$$

zatem wyznacza się

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 24t, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 4\dot{x}(t).$$

Podstawiając powyższe pochodne cząstkowe do równania Eulera uzyskuje się

$$24t = \frac{d}{dt}4\dot{x}(t),$$
$$24t = 4\ddot{x}(t).$$

[1] Todorova, Tamara (2010) : Introduction to Dynamic Optimization: The Calculus of Variations, In: Tamara Todorova, Problems Book to Accompany Mathematics for Economists

W celu wyznaczenia funkcji $x(t)$ całkuje się obustronnie uzyskując

$$4t^3 + c_1 t + c_2 = 4x(t),$$
$$y = t^3 + \frac{1}{4}tc_1 + \frac{1}{4}c_2,$$

gdzie c_1, c_2 są stałymi całkowania. Na podstawie warunków początkowych i końcowych wyznaczyć można wartości c_1, c_2 i uzyskać

$$x(t) = t^3 + t + 1$$

jako potencjalne rozwiązanie problemu optymalizacji.

4.1 Znaleźć rozwiązanie problemu optymalizacji dynamicznej przedstawionego w przykładzie z wykorzystaniem narzędzi Pythona. W tym celu:

(a) Przyjmując, że poszukiwana funkcja ma postać $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, przygotować funkcję `model(y,t,a0,a1,a2,a3)` wyznaczającą wyrażenie podcałkowe.

(b) Przygotować funkcję `problem_dyn(a)` wyznaczającą końcową wartość całki w horyzoncie $t \in [0, 1]$ dla zadanego zestawu parametrów $a_0, \ldots, a_3$ (wykorzystać funkcję `scipy.integrate.odeint`.

(c) Zdefiniować ograniczenia nałożone na wartości parametrów $a_0, \ldots, a_3$ na podstawie warunków zdefiniowanych w przykładzie dla $x(0), x(1)$ (wykorzystać `scipy.optimize.LinearConstraint`.

(d) Przeprowadzić optymalizację wartości parametrów $a_0, \ldots, a_3$ tak jak w zadaniu optymalizacji nieliniowej (wykorzystać `scipy.optimize.minimize` z metodą `trust-constr`). Zbadać wpływ dokładności wyznaczania rozwiązania przez funkcję `problem_dyn` na jakość przeprowadzonej optymalizacji.

□