线性代数综合练习题一

一、选择题 (每题 4 分, 共 40 分)

1. 设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = m$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = n$，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-a_{23} \end{vmatrix} =$（　　）

A. $m+n$　　B. $-(m+n)$　　C. $n-m$　　D. $m-n$

2. 行列式$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$中，元素$-3$的代数余子式为（　　）

A. -10　　B. 2　　C. 10　　D. 以上均不对

3. 设A为 3 阶方阵，且行列式$|A| = 2$，则$|-2A| =$（　　）

A. 16　　B. -4　　C. 4　　D. -16

4. 设A, B均为n阶方阵，则下列各式正确的是（　　）

A. $|AB| = |BA|$　　B. $AB = BA$

C. $|A+B| = |A| + |B|$　　D. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

5. 矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$右乘初等矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$相当于进行(　　)的初等变换

A. 第一行与第二行互换　　B. 第二行与第三行互换

C. 第一列与第二列互换　　D. 第二列与第三列互换

6. 设n阶方阵A与B相似，以下结论正确的是（　　）

A． A与B有相同的特征向量　　B． $|A| \neq |B|$

C． A与B有相同的特征值　　D．A与B的特征值是实数

7. 设矩阵A的特征多项式为$|A-\lambda E| = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$，则$|A| =$(　　)

A. -2　　B. 2　　C． 3　　D. -6

8. 设矩阵 A 的秩是r，则（　　）

A． A 中没有等于零的$r-1$阶子式

B． A 中没有等于零的r阶子式

C.　A 中至少有一个 $\boldsymbol{r}$ 阶子式不等于零

D.　A 中有不等于零的 $\boldsymbol{r}+1$ 阶子式

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & b\\ 3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，且 $A=B^T$，则(　　)

A. $a=1,b=2$　　　　B. $a=3,b=2$

C. $a=3,b=0$　　　　D. $a=-1,b=0$

10. $\boldsymbol{n}$ 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\,(3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是（　　）

A. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 均为非零向量

B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中任何一个向量不能由其余向量线性表示

C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中任何两个向量的分量成比例

D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中有一部分线性无关

二、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 矩阵 $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$=____________________。

2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 6\\ 9 & 25 & 36\end{vmatrix}=$____________ 。

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶方阵，若 $R(A)=3$，则线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数为_______________ 。

4. 若向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ 与向量 $\beta=\begin{pmatrix}2\\k\\0\\-3\end{pmatrix}$ 正交，则 $k=$________________ 。

5. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\,2}+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2\lambda x_2x_3$ 是正定的，则实数 λ 的取值范围是____________ 。

三、（10 分）计算四阶行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$的值。

四、（15 分）解矩阵方程：求 X 满足 $AX=A+2X$，其中 $A=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$.

五、（15 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

线性代数综合练习题一答案

一、选择题 (每题 4 分,共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	D	A	D	C	D	C	B	B

二、填空题 (每题 4 分,共 20 分)

题号	1	2	3	4	5
答案	$\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$	6	2	5	$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

三、（10 分）

解： 从第 2 列开始，依次把每列加至下一列，得

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&0\\3&1&0&1\\3&0&1&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 3\text{ 分}$$

$$=3\begin{matrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{matrix}$$ ………………………… 5 分

$$=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$ ………………………… 8 分

$$=-3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-3$$ ………………………… 10 分

四、（10 分）

解：　由 $AX = A + 2X$ 得

$$(A-2E)X = A$$ ………………………… 3 分

$$\therefore X = (A-2E)^{-1}A$$ ………………………… 5 分

$$A-2E=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$$ ………………………… 6 分

$$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$$ ………………………… 8 分

$$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{bmatrix}.$$ ………………………… 10 分

五、（10 分）

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$ ………… 3 分

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$ ………………… 6 分

(1) $\lambda_1=-1$时， $A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

对应于$\lambda_1=-1$的全部特征向量为$k_1\alpha_1$ $(k_1\neq 0)$ 。。。。。。。。。。。。。 8 分

(2) $\lambda_2=\lambda_3=2$时， $A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得基础解系

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ $(k_2,k_3$不同时为零$)$ 。。。。。。。。 10 分