



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y PUESTA EN MARCHA DE UN
REGENERADOR DE ENERGÍA PARA EL DESARROLLO Y LA
VALIDACIÓN DE ESTRATEGIAS DE MODELADO MATEMÁTICO

Reporte de quinto semestre

Director de tesis:

Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez

Co-Directora de tesis:

Dra. Maria Guadalupe López López

Comité revisor:

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez

Dr. Jarniel García Morales

Presenta:

M.I.E. Omar Arturo Castillo Méndez

7 de enero de 2025

Índice

1. Introducción	1
2. Revisión de artículos	1
2.1. Conclusión de la revisión del estado del arte	8
2.2. Propuesta de solución	10
2.3. Objetivo general	10
2.4. Objetivos específicos	10
3. Caso de estudio	11
3.1. Consideraciones de modelado	11
3.2. Condiciones de iniciales y frontera	11
3.3. Modelo	11
3.3.1. Desarrollo del modelo	11
3.3.2. Aplicación del método de diferencias finitas	12
3.4. Características del regenerador	14
3.5. Calculo de parámetros para el modelado	16
3.5.1. Propiedades del relleno del regenerador	16
3.6. Propiedades térmicas	17
3.6.1. Coeficiente global de transferencia de calor	17
3.6.2. Coeficiente de transferencia de calor convectivo	18
3.6.3. Coeficiente de transferencia de calor por radiación	18
3.7. Resumen de parámetros	19
4. Conclusión	19
5. Cronograma de actividades	20
A. Código del método numérico	23
B. Ecuación homogénea de calor	25
C. Modelo del sistema de López-Torres	26

1. Introducción

Este reporte presenta una revisión de algunos modelos de regeneradores de lecho empacado, un componente fundamental en diversos procesos industriales como la separación de gases, la purificación de líquidos y la recuperación de calor. Además, presentar una versión de un modelo de regenerador, así como la obtención de los parámetros que son necesarios para el desarrollo del mismo considerando aspectos físicos: las propiedades térmicas de la fase sólida y gaseosa, del gas como el número de Reynolds, porosidad del lecho, etc.

2. Revisión de artículos

Modelado de un regenerador-reactor de calor con propiedades de gas dependientes de la temperatura (Modeling a heat regenerator-reactor with temperature dependent gas properties)

La principal característica de los regeneradores de energía es que, en el mismo espacio, puede contener dos gases de manera alternada. En el espacio vacío del regenerador, el gas más caliente fluye y cede su energía térmica a las partes sólidas (que deben tener una alta capacidad y densidad térmica). Posteriormente, un gas frío recupera ese calor durante un intervalo de tiempo. Para este trabajo, se consideró constante el coeficiente de transferencia de calor, pero se tomó como variable la compresibilidad del gas. Se modeló asumiendo un sistema adiabático, con la conductividad térmica del sólido infinitamente normal al flujo del gas y cero paralelo al flujo, con conexión ideal del gas, asumiendo que no existe dispersión del gas en las conexiones. El modelo se dividió en tres ecuaciones usando balances de energía y masa tradicionales. El sistema se consideró cerrado a la entrada, las variaciones de la velocidad al inicio del regenerador no afectan sus condiciones de entrada, y existe una pequeña acumulación de masa en el regenerador antes o después de completar el cambio de temperaturas. Durante el periodo de calentamiento, la velocidad del gas incrementa y la densidad disminuye (disminución neta de masa). El balance del gas en cualquier posición axial parte de la suma de razón de entalpía de entrada, la razón de salida y la transferida resulta en la razón de acumulación de la entalpía [1].

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon L} \left[u \frac{\partial T_g}{\partial z} + \frac{h a_p L}{\rho u C_p} (T_g - T_s) \right] \quad (1)$$

Donde u es la velocidad del gas en $\frac{m}{s}$, ϵ es la porosidad del regenerador

El balance de energía correspondiente al sólido:

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{h a_p}{(1 - \epsilon) \rho_s C_{ps}} (T_g - T_s) \quad (2)$$

El balance de masa:

$$\frac{du}{dz} = -\frac{Rha_p L}{PM_w C_p} (T_g - T_s) \quad (3)$$

En el balance de masa se esta considerando z como adimensional $z = \frac{x}{L}$

Las condiciones iniciales y de frontera:

$$T_g(0, z) = T_{g\text{ inicial}} \quad T_g(t, 0) = T_{g\text{ entrada}} \quad T_s(0, z) = T_{s\text{ inicial}} \quad u(t, 0) = u_{\text{entrada}}$$

Parámetros del modelo

La ley de los gases ideales:

$$PV = N_m RT \quad (4)$$

Donde: N_m numero total de moles de cualquier gas, R constante de los gases ideales y T la temperatura del gas.

$$a_p = \frac{6(1 - \epsilon)}{d_p} \quad (5)$$

Donde a_p corresponde a la superficie especifica en el empaquetado, d_p es el diámetro del relleno y ϵ a la porosidad del regenerador.

La capacidad calorífica se puede obtener mediante la siguiente expresión, solo considerando que cambia conforme la variación de temperatura del gas[2], en caso contrario se puede considerar como constante:

$$C_p = (0.79)[6.5 + 0.001(T_g)] + (0.21)(8.27 + 0.000258(T_g) - \frac{187700}{T_g^2}) \quad \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \quad (6)$$

Las correlaciones semi-empiricas para el coeficiente de transferencia de calor pueden obtenerse mediante las siguientes expresiones[3]:

$$Nu = 2 - 1.8Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

$$Nu = \frac{hd_p}{k_g} \quad Re = \frac{d_p u \rho}{\mu} \quad Pr = \frac{C_p \mu}{k_g}$$

Solución mediante colocación triple para la operación periódica de regeneradores de calor (Solution by triple collocation for periodic operation of heat regenerators)

El método basado en colocación triple ha sido desarrollado para la simulación de regeneradores de energía mediante un modelo lineal. El problema se reduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. El problema del valor inicial en un regenerador al arranque y durante su operación puede ser resuelto por este método para cualquier modelo de ecuaciones.

Los regeneradores de calor se usan ampliamente en procesos industriales donde el gas está disponible a altas y bajas temperaturas. Algunos ejemplos importantes incluyen la recuperación de calor en centrales termoeléctricas, el precalentamiento de aire, la recuperación de calor de los gases de desperdicio en la fundición del hierro, en la manufactura del vidrio, el almacenamiento de energía solar, etc [4].

Ecuaciones del modelo

Las ecuaciones del modelo en su forma adimensional describen un empaquetado de un regenerador con la siguiente forma:

La primera ecuación representa un balance de energía, como es el cambio de temperatura entre la fase solida y el gas.

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_h}{\partial x} - St(\theta_h - \theta_{phs}) = 0 \quad (8)$$

La siguiente corresponde a un balance de energía para indicar la temperatura de la partícula:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \frac{\partial \theta_{ph}}{\partial y}) = \frac{\partial \theta_{ph}}{\partial t} \quad (9)$$

La dirección en x y y se refiere a la posición axial adimensional dentro del regenerador y a la forma esférica de la partícula, respectivamente. θ_h es la temperatura de la masa del gas dentro del regenerador durante el periodo de calentamiento, para una posición en x y un tiempo t . θ_{ph} es la temperatura de la partícula durante el periodo de calentamiento, para una posición x dentro del regenerador y una posición radial en y en el tiempo t . Finalmente, $\theta_{phs} = \theta_{ph}(x, y = 1, t)$ es la temperatura externa de la superficie de la esfera.

Las condiciones de frontera son:

$$x = 0, \quad \frac{1}{Pe} \frac{\partial \theta_h}{\partial x} = \theta_h - \theta_{h,en} \quad (10)$$

$$x = 1, \quad \frac{\partial \theta_h}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$x = 0, \quad \frac{\partial \theta_{ph}}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$x = 1, \quad \frac{1}{Bi} \frac{\partial \theta_{ph}}{\partial y} = \theta_h - \theta_{phs} \quad (13)$$

Donde $\theta_{h,en}$ es la entrada adimensional de la temperatura del gas caliente. Las ecuaciones y condiciones de frontera están basadas en la suposición de que la transferencia de energía ocurre mediante flujo másico. La dispersión es axial en la fase gaseosa, la transferencia de energía entre el fluido, las partículas y su parte interna es por conducción. No se consideró la transferencia de calor por radiación y conducción entre partículas. Las propiedades físicas y los parámetros de transporte se asumen

independientes de la temperatura. La condición inicial para la parte interna de las partículas es la siguiente:

$$t = 0, \quad \theta_{ph} = \theta_{ph0}(y, x) \quad (14)$$

El valor de θ_{ph0} representa la temperatura inicial que se distribuye para el periodo de enfriamiento y la temperatura de distribución al final del periodo de calentamiento, si solo se considera un solo ciclo el valor $\theta_{ph0} = 0$.

Números adimensionales

- Número de Stanton [St] = $\frac{ha_p L}{u_g \rho_g C_{pg}}$
- Número de Biot [Bi] = $\frac{hR}{\lambda_e}$
- Número de Peclet [Pe] = $\frac{u_g \rho_g C_{pg} L}{\lambda_{ax}}$
- Tiempo adimensional [t] = $\frac{t_a \lambda_e}{\rho_s C_{ps} R^2}$ o $\frac{ha_p t_a}{(1-\epsilon_B) \rho_s C_{ps}} = 3(Bi)t$

Modelos matemáticos para la simulación de regeneradores térmicos: Un análisis del estado del arte (Mathematical models for the simulation of thermal regenerators: A state-of-the-art review)

Los regeneradores de lecho fijo pueden clasificarse en dos tipos: rotatorios y de lecho fijo. En un regenerador de lecho fijo, los materiales que almacenan el calor permanecen estáticos en su interior. El uso de válvulas solenoides permite el paso alternado de gas caliente y frío. Durante el periodo de calentamiento, el gas caliente fluye a través del lecho, transfiriendo su calor a los materiales. Posteriormente, un flujo de gas frío pasa a través del lecho, absorbiendo el calor almacenado durante el periodo de calentamiento. Esto corresponde al periodo de enfriamiento. Es común el uso de materiales como aluminio, acero y vidrio para el armado del lecho, debido a sus propiedades térmicas y estructurales [5].

El modelo esta basado según las siguientes consideraciones:

- Las propiedades térmicas y físicas del gas y el sólido son constantes e independientes de la temperatura y posición.
- No existe pérdida de calor del regenerador hacia el ambiente.
- No hay fuentes de energía que ocurran dentro del regenerador ni reacciones químicas internas.

- La capacidad térmica del gas dentro del lecho en cualquier instante es pequeña comparada con el lecho mismo.
- Los coeficientes de flujo másico y de transferencia de calor son constantes.
- La velocidad de entrada y la temperatura para cada fluido son uniformes a través de la sección transversal y constantes en el tiempo.
- La conductividad térmica del sólido es infinitamente mayor en la dirección normal al flujo del gas e infinitamente menor en la dirección paralela al flujo.
- No existe dispersión de flujo dentro del regenerador.
- La transferencia de calor del fluido es insignificante tanto longitudinal como transversalmente.
- El espacio vacío y la superficie de contacto del lecho son uniformes.
- El tiempo de residencia del gas dentro del lecho es insignificante en comparación con el periodo.
- La transferencia de calor por radiación es pequeña en comparación con otros mecanismos de transferencia.

Modelo

El modelo para un regenerador de lecho fijo, para la fase solida:

$$M_s C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} = ha(T - t_h) \quad (15)$$

Para la fase del fluido:

$$\frac{GC_{pg}}{u} \frac{\partial t_h}{\partial \theta} + GC_{pg} \frac{\partial t_h}{\partial x} = ha(T_s - t_g) \quad (16)$$

Las condiciones iniciales y de equilibrio del proceso son:

$$t_h(0, t_h) = t_{h,i} = cte, \quad 0 < t_h < P_h$$

$$t_h(0, t_c) = t_{c,i} = cte, \quad 0 < t_c < P_c$$

Para las condiciones de equilibrio:

$$T_{s,h}(x, t_h = 0) = T_{s,c}(x, t_c = P_c)$$

$$T_{s,h}(x, t_h = 0) = T_{s,c}(x, t_c = P_c)$$

$$0 < x < L$$

Se resolvió el modelo redefiniendo los parámetros de longitud, temperatura y tiempo de manera unidimensional:

$$y = \frac{x}{L}$$
$$z_1 = \frac{(t - \frac{x}{u_1})}{P_1}$$
$$z_2 = \frac{(t - \frac{x}{u_2})}{P_2}$$

Revisión del Diseño y Modelado de Intercambiadores de Calor Regenerativos (Review of Design and Modeling of Regenerative Heat Exchangers)

Los regeneradores de energía son dispositivos que usan de manera indirecta el intercambio de energía con medios fríos y calientes. El uso principal se encuentra en el área de la metalurgia, el tratamiento y precalentamiento del aire, la recuperación del calor residual y en turbinas. En este trabajo se aplicó el método abierto de Willmott, que mostró una gran estabilidad y permitió la inclusión de ecuaciones que describen la transferencia de calor y la caída de presión. La ventaja de los regeneradores sobre los recuperadores es su mayor área de contacto en relación con su capacidad volumétrica. Varios materiales y formas pueden usarse como material de relleno en el regenerador, ya que los sólidos tienen una gran capacidad calorífica en comparación con los gases. Para pequeños regeneradores, pueden usarse rellenos como los de panal de abeja, esferas, monolitos, anillos, monturas, etc. [6]

Modelo

$$M_b C_{p,b} \frac{\partial T_b}{\partial t} = h_t A (T_g - T_b) \quad (17)$$

Donde M_b es la masa del relleno (kg), T_b es la temperatura media del relleno ($^{\circ}C$), h_t es el coeficiente global de transferencia de calor ($\frac{W}{m^2K}$), $C_{p,b}$ es la capacidad calorífica del material de relleno ($\frac{J}{kgK}$), A es la superficie total de transferencia (m^2).

$$m_g C_{p,g} L \frac{\partial T_g}{\partial y} + M_g C_{p,g} \frac{\partial T_g}{\partial y} = h_t A (T_b - T_g) \quad (18)$$

Donde m_g es el flujo másico del gas ($\frac{kg}{s}$), $C_{p,g}$ es la capacidad calorífica del gas y L es la longitud del regenerador (m).

Parámetros del modelo

Espacio vacío

El valor de ϵ es la razón del volumen disponible respecto a el volumen total del relleno:

$$\epsilon = \frac{V_b - V_p}{V_b} \times 100 = \frac{V_m}{V_b} \times 100 \quad (19)$$

Donde V_b es el volumen total del relleno (m^3), V_p es el volumen del material de relleno (m^3) y V_m es el espacio libre del relleno (m^3)

Diámetro de partícula

El diámetro puede definirse como el de una esfera.

$$d_v = \left(\frac{6}{\pi} V_p\right)^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

Coefficiente global de transferencia de calor

Para calcular este coeficiente se puede obtener de la siguiente manera segun Hausen[7]:

$$h_t = \frac{1}{c} + \frac{1}{2(n+2)\lambda_b} \phi H + \frac{1}{h_r} \quad (21)$$

El termino del coeficiente de fricción se obtuvo mediante el numero de Reynolds y usando la relacion de Hicks[8].

La función ϕH llamado factor de Hausen, intenta representar el efecto de la rapidez del cambio de temperatura dentro del empaquetado al inicio de un periodo de calentamiento o enfriamiento[9].

$$\phi H = 1 - \frac{d^2}{4\alpha(n+3)^2 - 1} \left[\frac{1}{P'} + \frac{1}{P''} \right] \quad (22)$$

El coeficiente α es la difusividad térmica, P es el periodo de calentamiento o enfriamiento (s), $\epsilon = 27$ para esferas.

Las consideraciones para el desarrollo del modelo fueron las siguientes:

- El flujo másico es constante en ambos tiempos.
- La capacidad calorífica del gas dentro de los canales es lo suficientemente pequeña en comparación con la del solido, que puede despreciarse.
- Los coeficientes de transferencia y las propiedades térmicas del almacenamiento de calor y del gas no varían a lo largo de un período y son idénticos en todas las partes del regenerador.
- La conductividad en dirección longitudinal es despreciable.

Condiciones de frontera

- Las temperaturas en las entradas de los periodos de enfriamiento o calentamiento son constantes.

- La superficie a lo largo del regenerador y hasta el final de cada periodo es el mismo que al principio seguido del periodo anterior(calentamiento o enfriamiento).

$$T'_b(y, 0) = T''_b(L - y, P'')$$

Transferencia de calor en un lecho fijo para almacenamiento de energía térmica

El modelo abordado por López[10], consideró lo siguiente para desarrollo del modelo. Para el sólido, capacidad de almacenamiento de calor constante, despreciando las variaciones de temperatura en la dirección radial, no existe generación interna de calor. Para el fluido, fluido newtoniano, no hay transferencia de masa, se desprecian los efectos de transferencia por radiación, no hay cambio de fase.

Condiciones iniciales y de frontera

La condición inicial esta en ambas ecuaciones(fluido y sólido), el aire se encuentra a una temperatura inicial y uniforme T_0 ,

$$T = T_0, \quad t = 0 \quad (23)$$

Para la condición de frontera en la entrada del lecho:

$$T = T_{en} \quad (24)$$

En la salida del regenerador, tanto para el sólido como para el fluido, al no existir más lecho, el sólido no puede intercambiar más calor y además el fluido en la salida no intercambia calor con el fluido al frente:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L \quad (25)$$

La ecuación de conservación de energía para la fase sólida del regenerador:

$$\rho_s(1 - \epsilon_a)C_{ps} \frac{\partial \theta}{\partial t} = (1 - \epsilon_a)K_{s,x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - ha_p(\theta - T) \quad (26)$$

Para la fase del fluido que envuelve las partículas del fluido:

$$\rho_a \epsilon_a C_{pa} \frac{\partial T}{\partial t} = \epsilon_a K_{a,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ha_p(\theta - T) - \rho_a \epsilon_a C_{pa} u \frac{\partial T}{\partial x} + Ua_w(T_0 - T) \quad (27)$$

2.1. Conclusión de la revisión del estado del arte

Se observó que las ecuaciones que indican el comportamiento del regenerador son similares a las empleadas en otros procesos de transferencia de calor y masa [6] [1] [5], lo que permite un análisis comparativo y una comprensión más profunda de la dinámica del sistema.

Los modelos que solo se basan en el balance de energía pueden proporcionar una aproximación útil, pero no capturan la complejidad del transporte de masa, lo que puede resultar en predicciones inexactas del comportamiento del regenerador.

Por otra parte, la inclusión del balance de masa en el modelo permite una descripción más completa del proceso, incluyendo la transferencia de masa entre las fases fluida y sólida [4]. De esta manera, se está revisando cómo es un modelo de regenerador que solo involucra balances de energía, debido a que para el cálculo de parámetros como el número de Reynolds, involucra de manera indirecta los efectos de la velocidad del gas dentro del regenerador. Posteriormente, se comparará con modelos que incluyan balances de masa, los cuales expresan de manera directa el efecto de la velocidad en el dispositivo.

2.2. Propuesta de solución

Se propone diseñar una planta de pruebas a partir de consideraciones técnicas y del modelo térmico y de dinámica de fluidos. De tal manera, este sistema servirá como punto de partida para analizar otras técnicas de modelado y compararlas entre sí. Se espera que sirva de referente para el estudio de otro tipo de lechos o empaques para trabajos a futuro.

2.3. Objetivo general

Diseñar, construir, y poner en operación una planta piloto de un regenerador de energía de lecho empacado, que sirva como estación de prueba para validar estructuras matemáticas que representen la dinámica de la planta y que sirvan para la solución de problemas de diseño, optimización y control de estos sistemas.

2.4. Objetivos específicos

- Obtener el modelo del comportamiento del intercambiador de calor mediante las ecuaciones gobernantes para una etapa de calentamiento o enfriamiento.
- Obtener un prototipo de regenerador de energía de doble lecho empacado con un monolito metálico.
- Caracterizar el comportamiento del medio continuo y térmico del regenerador de energía para un periodo de calentamiento o enfriamiento del aire.
- Analizar la dinámica del sistema y caracterizar el comportamiento de un ciclo completo en régimen pseudo-estacionario.
- Modelar el comportamiento térmico de un ciclo completo por identificación de sistemas (técnicas lineales o no lineales).

3. Caso de estudio

3.1. Consideraciones de modelado

Las suposiciones para el desarrollo del modelo se tomaron como primer exploración lo siguiente: La temperatura del gas solo para el proceso de calentamiento es constante, el flujo másico permanece constante, las propiedades térmicas del gas y del solido son constantes y no varían a lo largo del regenerador.

3.2. Condiciones de iniciales y frontera

La condición inicial muestra que en la fase solida, como en el aire se encuentran a una temperatura inicial y uniforme, suponiendo que es igual a la temperatura ambiente

$$T_b = T_a, \quad t = 0 \quad (28)$$

Para la condición de frontera en la entrada del lecho:

$$T_{g,0} = T_{en} \quad (29)$$

En la salida del regenerador, tanto para el solido como para el fluido, al no existir mas lecho, el solido no puede intercambiar mas calor y ademas el fluido en la salida no intercambia calor con el fluido al frente:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L \quad (30)$$

3.3. Modelo

El modelo de estudio se consideraron dos sistemas de ecuaciones:

$$M_b C_{p,b} \frac{\partial T_b}{\partial t} = h_t A (T_g - T_b) \quad (31)$$

$$m_g C_{p,g} L \frac{\partial T_g}{\partial x} + M_g C_{p,g} \frac{\partial T_g}{\partial t} = h_t A (T_b - T_g) \quad (32)$$

3.3.1. Desarrollo del modelo

Para darle solución a las ecuaciones 30 y 31, se dividió el problema solucionando el modelo sin los parámetros para ver las variables para ver el comportamiento de las ecuaciones, para que posteriormente incluirlos y ver el comportamiento completo del modelo. Se optó por solucionar el modelo usando el método de diferencias finitas que a continuación se mostrará el desarrollo matemático.

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} = (T_g - T_b) \quad (33)$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial x} + \frac{\partial T_g}{\partial t} = (T_b - T_g) \quad (34)$$

3.3.2. Aplicación del método de diferencias finitas

En este método de discretización, se caracteriza por convertir las ecuaciones diferenciales parciales, a un conjunto de ecuaciones por diferencias que sirven para aproximar a las ecuaciones originales. Se utilizó la aproximación de tipo central, porque es con el mecanismo de transferencia de calor, porque cada punto que se discretiza a lo largo del regenerador $0 \leq x \leq L$ se va obteniendo el valor de la temperatura tomando en cuenta el valor del punto anterior y el valor del punto siguiente para obtener el punto que se esta evaluando.

$$\frac{dT_b}{dt} = T_{g_i} - T_{b_i}$$

$$\frac{dT_g}{dt} = (T_{b_i} - T_{g_i}) - \frac{T_{g_{i+1}} - T_{g_{i-1}}}{2\Delta x}$$

Al aplicar las diferencias finitas para indicar la discretización en el espacio se coloca con un subíndice i en cada variable que dependan de x . De tal manera que las ecuaciones que inicialmente era dependiente tanto de x y t ahora solo dependen de t y se indica en una derivada ordinaria.

Posteriormente como también se discretizó en el tiempo los términos del lado izquierdo de las ecuaciones queda de la siguiente manera.

$$\frac{T_{b_i}^{n+1} - T_{b_i}^n}{\Delta t} = T_{g_i}^n - T_{b_i}^n$$

$$\frac{T_{g_i}^{n+1} - T_{g_i}^n}{\Delta t} = (T_{b_i}^n - T_{g_i}^n) - \frac{T_{g_{i+1}}^n - T_{g_{i-1}}^n}{\Delta x}$$

Cuando se discretiza en el tiempo se debe tomar en cuenta el criterio de convergencia Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [11] $\frac{u\Delta t}{\Delta x}$ para mantenerla estabilidad y la precisión de la solución numérica. Con la discretización en el tiempo lo que se busca encontrar los valores en el siguiente instante de tiempo, por eso la derivada en función del tiempo se utiliza su aproximación en diferencias hacia adelante solo para el tiempo.

De tal manera, se iguala al termino con la posición en el tiempo hacia adelante($n + 1$), entonces el sistema de ecuaciones es:

$$T_{b_i}^{n+1} = T_{b_i}^n + \Delta t(T_{g_i}^n - T_{b_i}^n)$$

$$T_{g_i}^{n+1} = T_{g_i}^n + \Delta t(T_{b_i}^n - T_{g_i}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(T_{g_{i+1}}^n - T_{g_{i-1}}^n)$$

Con las ecuaciones anteriores se dio solución usando Python, del cual se obtuvieron las siguientes graficas, el código esta en el anexo A:

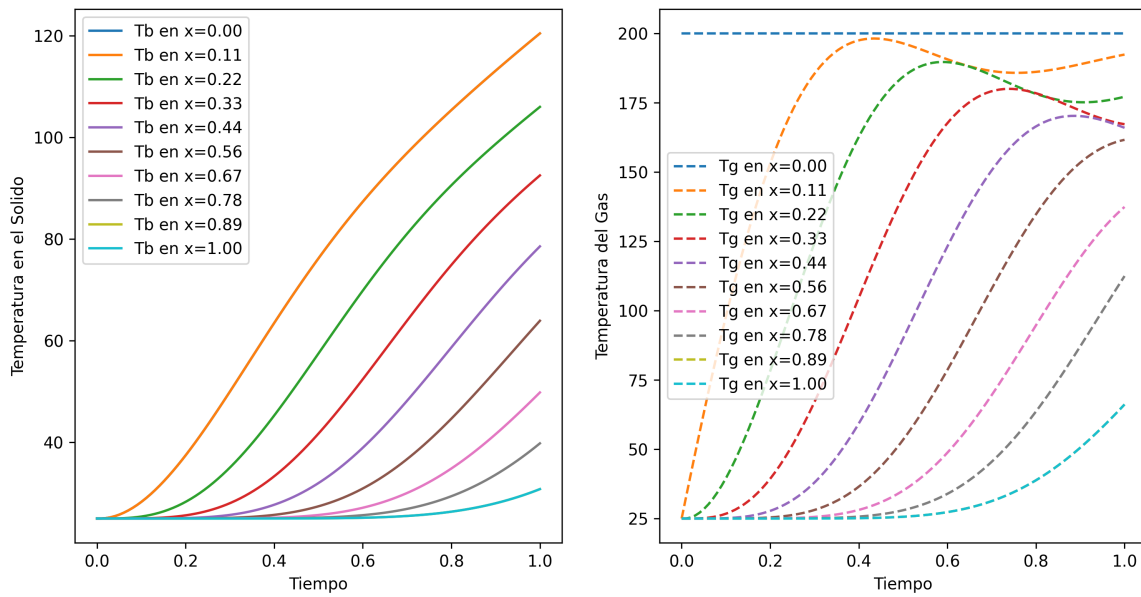


Figura 1: Solución del sistema de ecuaciones

En el gráfico del lado izquierdo, se muestra el comportamiento de cómo sería la temperatura a lo largo del regenerador para un instante de tiempo de $0 \leq t \leq 1$. Las líneas representan cada posición del regenerador, partiendo de una temperatura de 25 grados Celsius, que corresponde a la condición inicial propuesta. La gráfica del lado derecho muestra cómo la energía va cediendo al sólido. Se estableció una condición de tipo Dirichlet en la frontera izquierda, dejando una temperatura fija de 200 grados Celsius en $x = 0$. Por el lado derecho, se estableció una condición de frontera de Neumann $\frac{\partial T_g}{\partial x} = 0$ en $x = L$. Por esa razón, ese extremo va cambiando conforme se va calentando el regenerador. Los parámetros que no se incluyen por el momento solo afectan la forma de las curvas, pero el comportamiento sería similar al mostrado.

En el anexo C se muestra el código usando otra manera de resolver el modelo de Lopez-Torres usando una biblioteca de Python para resolver ecuaciones diferenciales.

3.4. Características del regenerador

Se tienen los siguientes datos para un relleno de esferas de aluminio 1060, sus propiedades se describen a continuación:

Datos: Esferas		unidades
Diametro	3	mm
Densidad	2705	$kg \cdot m^{-3}$
Capacidad calorífica	900	$J \cdot kg^{-1}K^{-1}$
Conductividad térmica	205	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Emisividad	0,03	
Masa por esfera	1.4×10^{-4}	kg

Propiedades: Aire		unidades
Densidad	1.2754	$kg \cdot m^{-3}$
Capacidad calorífica	1.046	$J \cdot kg^{-1}K^{-1}$
Conductividad térmica	0.025	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Temperatura de entrada de aire caliente	200	$^{\circ}C$
Temperatura ambiental	30	$^{\circ}C$
Viscosidad cinemática* (100°C)	2.3×10^{-5}	$m^2 \cdot s^{-1}$
Viscosidad cinemática* (200°C)	3.45×10^{-5}	$m^2 \cdot s^{-1}$
Viscosidad dinámica* (100°C)	2.17×10^{-5}	$Pa \cdot s$
Viscosidad dinámica* (200°C)	2.57×10^{-5}	$Pa \cdot s$

**Los valores de las viscosidades dinámica y cinemática están definidas a presión atmosférica*

Datos del modelo: Variables		unidades
T_b	Temperatura del relleno (empaquetado)	$^{\circ}\text{C}$
T_g	Temperatura del gas	$^{\circ}\text{C}$
Datos del modelo: Constantes		unidades
M_b	Masa del relleno (empaquetado)	kg
$C_{p,b}$	Capacidad calorífica del relleno	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
h_t	Coefficiente global de transferencia de calor	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
A	Área de contacto	m^2
m_g	flujo másico	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
$C_{p,g}$	Capacidad calorífica del gas	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
L	Longitud del regenerador	m
M_g	Masa acumulada en el regenerador	kg

Datos: Regenerador		unidades
Diámetro	12.7	mm
Longitud	15	cm
Material	cobre	
Capacidad calorífica	385	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Conductividad térmica	385	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

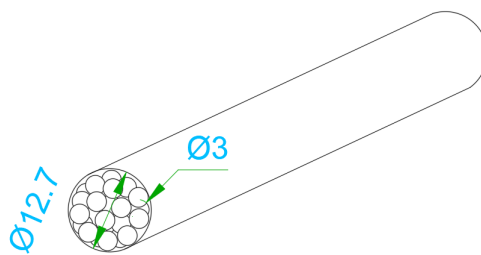


Figura 2: Esquema del regenerador relleno de esferas

3.5. Cálculo de parámetros para el modelado

3.5.1. Propiedades del relleno del regenerador

En este apartado, se obtienen las características necesarias para conocer la porosidad del lecho, a partir del largo del regenerador, las dimensiones del material de relleno y la velocidad del flujo de aire de la fuente.

Volumen total sin relleno: Se calcula el área de la tubería sin rellenar:

$$A_c = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.0127)^2}{4} = 1.26676 \times 10^{-4} m^2$$

Obtenida el área se obtiene el volumen de la tubería:

$$V = A_c \cdot L = 1.90015 \times 10^{-5} m^3$$

Para obtener el volumen del material de empaque (V_p):

$$V_p = \frac{\pi \cdot d_v^3}{6} = 1.41371 \times 10^{-8} m^3$$

La cantidad de esferas que puede contener:

$$n_{esferas} = \frac{V}{V_p} = 1344.083 \text{ esferas}$$

La masa de relleno del regenerador M_b :

$$M_b = n_{esferas} * 1.4 \times 10^{-4} = 0.1882 kg$$

Se trunca a 1344 esferas para el volumen disponible, posteriormente obtener el volumen total del relleno:

$$V_b = n_{esferas} \cdot V = 1.900153 \times 10^{-5} m^3$$

La masa acumulada dentro del regenerador se obtiene de la diferencia de volúmenes y el producto de la densidad del aire:

$$M_g = 0.00015 * 1.2754 = 1.9131 \times 10^{-4} kg$$

Para calcular la porosidad ϵ :

$$\epsilon = \frac{V_b - V_p}{V_b} = 0.99925$$

La esfericidad es $\psi = 1$ para esferas y en caso de que no se obtiene con la siguiente fórmula:

$$\psi = \frac{A_s}{A_p} \quad (35)$$

El área de una esfera se obtiene de la siguiente fórmula:

$$A_s = 4\pi r^2 = 2.82743 \times 10^{-5} m^2$$

El diámetro hidráulico de una esfera corresponde al mismo, en caso de no ser una esfera se obtiene con la siguiente relación:

$$d_h = 3mm$$

$$d_h = \frac{4\epsilon}{a_r(1 - \epsilon)}$$

El parámetro de la superficie absoluta específica, es la razón de la superficie de la partícula y el volumen del relleno:

$$a = \frac{A_s}{V_b} = 1.488m^{-1}$$

Flujo másico

El compresor seleccionado puede proporcionar 3.7585 CFM, suponiendo que tiene retoma la velocidad del flujo de la referencia[6] $v = 3.6 m \cdot s^{-1}$, la sección transversal $S = 0.0127$ y la densidad del aire $\rho_g = 1.2754 kg \cdot m^{-3}$

$$\dot{m} = \rho \cdot S \cdot v = (1.2754)(3.6)(0.0127) = 0.0583kg \cdot s^{-1}$$

3.6. Propiedades térmicas

En esta sección, es de vital importancia el calculo del coeficiente total de transferencia de calor. A partir de las propiedades térmicas de las fases solida y gas del regenerador.

3.6.1. Coeficiente global de transferencia de calor

El coeficiente total de transferencia de calor es:

$$\frac{1}{h_t} = \frac{1}{h_{lum}} + \frac{1}{h_r}$$

La difusividad térmica se puede obtener de la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_{p,b}} = \frac{205}{2705 \cdot 900} = 8.42062 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$$

Factor de Hausen para el calculo del coeficiente global de transferencia de calor, el valor de $\epsilon_H = 27$ para esferas, $n = 3$:

$$\phi H = \frac{\pi(n+2)}{\sqrt{\epsilon_H + 18[5(\frac{n+1}{2})]}} = 1.09177$$

Para la siguiente expresión el diámetro de la esfera de relleno $d = 0.03m$ y la conductividad térmica del aluminio $\lambda_b = 205 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

$$\frac{1}{h_{lum}} = \frac{1}{h_c} + \frac{d}{2(n+2) \cdot \lambda_b} \cdot \phi H$$

3.6.2. Coeficiente de transferencia de calor convectivo

La ecuación para un relleno de un regenerador aleatorio puede obtenerse con la siguiente expresión que se obtuvo de manera experimental según la referencia[12], sin embargo para geometrías esféricas se puede igualar a una expresión según lo reportado por Baldwin[13]:

$$Nu = \frac{h_c d_p}{\lambda_g} = 0.584 Re^{0.7} Pr^{1/3}$$

Es necesario calcular el numero de Reynolds del regenerador producido por el relleno con la siguiente expresión:

$$Re_m = \frac{Re}{(1 - \epsilon)}$$

De tal manera que el numero de Reynolds para el regenerador sin relleno, donde v es la velocidad del flujo ($m \cdot s^{-1}$), D el diámetro hidráulico (D) y ν la viscosidad cinemática ($m^2 \cdot s^{-1}$)[14]:

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{3 \cdot 0.0127}{2.3 \times 10^{-5}} = 1656.5217$$

Por lo tanto el Reynolds para el relleno es:

$$Re_m = \frac{1656.5217}{1 - 0.99925} = 2.2087 \times 10^6$$

La caída de presión viene definido por la siguiente ecuación:

$$\lambda_k = \frac{150}{Re_m} + 1.75 = \frac{150}{2.2087 \times 10^6} + 1.75 = 1.7501$$

Con los datos obtenidos, se puede obtener el numero de Nusselt:

$$Nu = 0.584 Re^{0.68} Pr^{1/3} = 0.584 (1656.5217)^{0.68} (0.8)^{1/3} = 83.7845$$

El coeficiente de transferencia de calor por convención a partir del numero de Nusselt

$$h_c = \frac{Nu \cdot \lambda_g}{d_p} = \frac{83.7845(0.025)}{0.003} = 698.2040 W \cdot m^{-1} K^{-1}$$

3.6.3. Coeficiente de transferencia de calor por radiación

La ecuación para obtener el valor de la transferencia de calor por radiación:

$$\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$$

$$h_r = 4\sigma\epsilon_b T_b^3 = 4(5.6697 \times 10^{-8})(0.03)(373.15)^3 = 0.3535 W \cdot m^{-1} K^{-1}$$

Por lo tanto, el coeficiente total de transferencia de calor es:

$$h_t = h_{lum} + h_r = 698.2040 + 1.5977 \times 10^{-5} + 0.3535 = 698.5575 W \cdot m^{-1} K^{-1}$$

3.7. Resumen de parámetros

Los parámetros obtenidos están basados según en el trabajo realizado por Kilkovsky[6], en la siguiente tabla se muestran todos los coeficientes necesarios para las ecuaciones (31) y (30):

Datos del modelo: Constantes		cantidad	unidades
M_b	Masa del relleno (empaquetado)	0.1882	kg
$C_{p,b}$	Capacidad calorífica del relleno	900	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
h_t	Coeficiente global de transferencia de calor	698.5575	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
A	Área de contacto	0.1703	m^2
m_g	flujo másico	0.0583	$kg \cdot s^{-1}$
$C_{p,g}$	Capacidad calorífica del gas	1.046	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
L	Longitud del regenerador	0.15	m
M_g	Masa acumulada en el regenerador	1.9131×10^{-4}	kg

4. Conclusión

En conclusión, la verificación de los parámetros de un modelo matemático es una etapa crítica que garantiza la precisión y validez del mismo. A través de esta verificación, se asegura que los parámetros empleados reflejan fielmente las condiciones reales del sistema estudiado, lo cual es esencial para obtener resultados confiables.

De tal manera, la solución del modelo mediante métodos numéricos ya ha sido abordada con éxito, proporcionando una base sólida para la simulación y análisis del comportamiento del sistema. Sin embargo, este proceso no es definitivo, ya que se contempla una continua mejora y optimización de los métodos numéricos empleados. Esto permitirá una mayor precisión y eficiencia en la resolución del modelo.

5. Cronograma de actividades

Avance	Actividades	2022				2023				2024				2025											
		A	S	O	N	D	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	E	F	M	A	M	J	J
P	Revisión del Estado del Arte																								
R																									
P	Propuesta conceptual																								
R																									
P	Desarrollo de modelo matemático																								
R																									
P	Diseño en CAD del regenerador																								
R																									
P	Simulación del modelo con software CFD																								
R																									
P	Implementación del modelo																								
R																									
P	Instrumentación del prototipo																								
R																									
P	Pruebas de concepto																								
R																									
P	Análisis de resultados																								
R																									
P	Presentación de resultados																								
R																									
P	Elaboración de Artículo																								
R																									
P	Escritura de la tesis																								
R																									
P	Requisitos administrativos para titulación																								
R																									
P	Presentación de examen de grado																								
R																									

Referencias

- [1] M. S. Kulkarni, “Modeling a heat regenerator-reactor with temperature dependent gas properties.”
- [2] D. Green and M. Southard, *Perry’s Chemical Engineers’ Handbook, 9th Edition*. McGraw Hill LLC, 2018.
- [3] O. Levenspiel, “Design of long heat regenerators by use of the dispersion model,” *Chemical Engineering Science*, vol. 38, no. 12, pp. 2035–2045, 1983.
- [4] P. Ramachandran and M. Dudukovi, “Solution by triple collocation for periodic operation of heat regenerators,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. 8, no. 6, pp. 377–388, 1984.
- [5] S. Sadrameli, “Mathematical models for the simulation of thermal regenerators: A state-of-the-art review,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 58, pp. 462–476, 2016.
- [6] B. Kilkovský, “Review of design and modeling of regenerative heat exchangers,” *Energies*, vol. 13, no. 3, 2020.
- [7] H. Hausen, *Regeneratoren*, pp. 259–426. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1976.
- [8] R. E. Hicks, “Pressure drop in packed beds of spheres,” *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, vol. 9, pp. 500–502, 1970.
- [9] C. Hinchcliffe and A. Willmott, “Lumped heat-transfer coefficients for thermal regenerators,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 24, no. 7, pp. 1229–1236, 1981.
- [10] J. I. López Torres, “Transferencia de calor en un lecho fijo para almacenamiento de energía térmica.”
- [11] D. G. Zill and M. R. Cullen, *Matemáticas avanzadas para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales*. McGraw-Hill Interamericana, 2008.
- [12] M. Amelio and P. Morrone, “Numerical evaluation of the energetic performances of structured and random packed beds in regenerative thermal oxidizers,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 27, no. 4, pp. 762–770, 2007. Energy: Production, Distribution and Conservation.
- [13] D. E. Baldwin, R. B. Beckman, R. R. Rothfus, and R. I. Kermode, “Heat transfer in beds of oriented spheres,” *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, vol. 5, pp. 281–284, 1966.
- [14] S. Ergun, “Fluid flow through packed columns,” 1952.

- [15] M. S. Gockenbach, *Partial Differential Equations: Analytical and Numerical Methods*. SIAM, 2010.

A. Código del método numérico

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # Parámetros
5  Mb = 1.0 # Masa del sólido
6  Cp_b = 1.0 # Capacidad calorífica del sólido
7  mg = 1.0 # Masa del gas por unidad de longitud
8  Cp_g = 1.0 # Capacidad calorífica del gas
9  ht = 1 # Coeficiente de transferencia de calor
10 A = 1.0 # Área de intercambio
11 L = 1.0 # Longitud del dominio
12 N_x = 10 # Número de puntos espaciales
13 N_t = 100 # Número de puntos temporales
14 dx = L / (N_x - 1) # Paso espacial
15 dt = 0.01 # Paso temporal
16
17 # Inicialización de matrices
18 Tb = np.zeros((N_t, N_x))
19 Tg = np.zeros((N_t, N_x))
20
21 # Condiciones iniciales
22 Tb[0, :] = 25 # Temperatura inicial del sólido
23 Tg[0, :] = 25 # Temperatura inicial del gas
24
25 # Condición de frontera: temperatura constante de 200°C en el extremo
    izquierdo del gas
26 Tg[:, 0] = 200
27
28 # Iteración temporal
29 for n in range(0, N_t-1):
30     for i in range(1, N_x-1):
31         # Ecuación (1)
32         Tb[n+1, i] = Tb[n, i] + dt * ht * A * (Tg[n, i] - Tb[n, i]) / (Mb *
            Cp_b)
33
34         # Ecuación (2)
35         dTg_dx = (Tg[n, i+1] - Tg[n, i-1]) / (2 * dx)
```

```
36     dTg_dt = (ht * A * (Tb[n, i] - Tg[n, i]) - mg * Cp_g * L * dTg_dx) /  
          (Mb * Cp_g)  
37     Tg[n+1, i] = Tg[n, i] + dt * dTg_dt  
38  
39     # Condición de frontera de Neumann en el extremo izquierdo del solido  
40     Tb[:, 0] = Tb[:, 1]  
41     # Condición de frontera de Neumann en el extremo derecho del solido  
42     Tb[n+1, -1] = Tb[n+1, -2]  
43     # Condición de frontera de Neumann en el extremo derecho del gas  
44     Tg[n+1, -1] = Tg[n+1, -2]  
45  
46     # Graficar la solución  
47     plt.figure(figsize=(12, 6))  
48  
49     plt.subplot(1, 2, 1)  
50     for i in range(N_x):  
51         plt.plot(np.linspace(0, dt*N_t, N_t), Tb[:, i], label=f'Tb en  
          x={i*dx:.2f}')  
52     plt.xlabel('Tiempo')  
53     plt.ylabel('Temperatura en el Solido')  
54     plt.legend()  
55     plt.subplot(1, 2, 2)  
56     for i in range(N_x):  
57         plt.plot(np.linspace(0, dt*N_t, N_t), Tg[:, i], '--', label=f'Tg en  
          x={i*dx:.2f}')  
58     plt.xlabel('Tiempo')  
59     plt.ylabel('Temperatura del Gas')  
60     plt.legend()  
61     plt.savefig('solucion.png', dpi=300)  
62     plt.show()
```

B. Ecuación homogénea de calor

Ejemplo 6.1: Considere una barra de hierro de longitud de 50 cm con un calor específico de $c = 0.437 \text{ J/g K}$, densidad $\rho = 7.88 \text{ g/cm}^3$ y conductividad térmica $k = 0.836 \text{ W/cm K}$. Se asume que la barra esta aislada[15].

```

1      '''
2      Ecuacion homogenea de calor
3      Ejemplo 6.1 (Mark S. Gockenbach) p.214
4      Considere una barra de hierro de longitud de 50 cm con un calor
5          especifico de c = 0.437 J/g K,
6          densidad rho= 7.88 g/cm3 y conductividad termica k = 0.836 W/cm K.
7          Se asume que la barra esta aislada
8      '''
9
10     from scipy.integrate import solve_ivp
11     import numpy as np
12     import matplotlib.pyplot as plt
13     #Definir parametros
14     rho=7.88
15     c=0.437
16     k=0.836
17     #Definir las ecuaciones diferenciales como funciones
18     def diff_xx(u,dx,k,c,rho):
19         f = (k/(rho*c))*(np.roll(u, 1)- 2*u +np.roll(u, -1))/dx
20         return f
21
22     #Condiciones de frontera
23     def cdf(u):
24         u[0] = 0 #Condicion frontera del lado izquierdo tipo de dirichlet
25         u[-1] = 0 #Condicion de frontera del lado derecho tipo dirichlet
26         return u
27
28     #Discretizacion del dominio
29     N = 20 # Numero de puntos discretos
30     L = 50 #Longitud de la barra de metal
31     dx = L/(N-1)
32     x = np.linspace(0,L,N) #Paso discreto de la longitud de la barra
33
34     #Definicion de las condiciones iniciales
35     u0 = 5 - (1/5)*np.abs(x-25)
36     #Definicion de sistema completo de la ecuacion diferencial

```

```

33     def sistema(t,Y,dx,rho,c,k): #Los argumentos de la funcion deben ir
        en el mismo orden
34     N=len(Y)
35     u=Y
36     u[0] = 0 #Condicion frontera del lado izquierdo tipo de dirichlet
37     u[-1] = 0 #Condicion de frontera del lado derecho tipo dirichlet
38     du_dt = diff_xx(u,dx,k,c,rho)
39     return du_dt
40     #Solucion de la ecuacion diferencial
41     t_span = (0,10)
42     sol = solve_ivp(sistema, t_span, u0, args=(dx,rho,c,k), method =
        'RK45')
43     print(sol)
44     u_sol = sol.y # La solucion del sistema de ecuaciones diferenciales
45     plt.plot(x,u_sol[:N])
46     plt.xlabel('Longitud de la barra')
47     plt.ylabel('Temperatura')
48     plt.show()

```

C. Modelo del sistema de López-Torres

```

1     #Datos del modelo : Constantes y variables
2     import numpy as np
3     T_0          =      24          #Temperatura inicial del lecho
4     T_e          =      100         #Temperatura de entrada del gas
5     rho_s        =      2600        #Densidad del material del lecho
6     rho_g        =      1.18        #Densidad del gas
7     epsilon      =      0.4         #Porosidad del lecho
8     K_sx         =      1.28        #Conductividad termica efectiva del
        solido
9     K_gx         =      0.02624     #Conductividad termica efectiva del
        gas
10    h            =      354.4538    #Coeficiente de transferencia de
        calor
11    a_p          =      6000         # Area superficial de las particulas
        por unidad de volumen
12    a_w          =      20           #Area superficial interior del lecho
13    u            =      0.6433      #Velocidad del flujo
14    Cp_s         =      920         #Calor especifico del lecho

```

```

15 Cp_g      =      1012      #Calor especifico del gas
16 U         =      1.9843    #coeficiente de transferencia
    referido al Área del lecho , entre el interior del lecho y el
    exterior
17 # Coeficientes A, B, C, D, E
18 A = 1#K_sx/(rho_s*Cp_s)
19 B = 1#h*a_p/(rho_s*(1-epsilon)*Cp_s)
20 C = 1#K_gx/(rho_g*Cp_g)
21 D = 1#h*a_p/(rho_g*epsilon*Cp_g)
22 E = 1#U*a_w/(rho_g*epsilon*Cp_g)
23 #Definicion de las funciones de las EDP
24 #-----Ecuacion
    (1)-----
25 #-----
26 def diff_Ts_xx(Ts,dx):
27 f = (np.roll(Ts,-1) -2*Ts + np.roll(Ts, 1) )/dx**2
28 return f
29
30 #-----
31 #-----Ecuacion
    (2)-----
32 def diff_Tg_xx(Tg,dx):
33 f_1 = (np.roll(Tg,-1) -2*Tg + np.roll(Tg, 1) )/dx**2
34 return f_1
35
36 def diff_Tg_x(Tg,dx):
37 f_2 = (np.roll(Tg, -1)-np.roll(Tg, 1))/(2*dx)
38 return f_2
39
40 #-----
41 #-----Definicion de sistema
    completo-----
42 def sistema (t, ci, A, B, C, D, E, dx):
43 N =len(ci)//2
44 Ts = ci[:N]
45 Tg = ci[N:]
46 T0 = np.ones(N)*25
47 #Se define el sistema de ecuaciones simultaneas
48 dTs_dxx = diff_Ts_xx(Ts,dx)
49 dTg_dx   = diff_Tg_x(Tg,dx)

```

```

50     dTg_dxx = diff_Tg_xx(Tg,dx)
51     dTs_dt  = A*dTs_dxx - B*(Ts - Tg)
52     dTg_dt  = C*dTg_dxx + D*(Ts - Tg) - u*dTg_dx + E*(T0 - Tg)
53     #Condiciones de frontera de Neumann
54     dTs_dt[0]=0 #CF-izquierda
55     dTs_dt[-1]=0 #CF-derecha
56     #-----
57     dTg_dt[0]=0 #CF-izquierda
58     dTg_dt[-1]=0 #CF-derecha
59     #Condiciones de frontera de dirichlet
60     Tg[0] = 200
61     dT_dt = np.concatenate([dTs_dt,dTg_dt])
62     return dT_dt
63     #-----
64     #-----Discretizacion del dominio-----
65     N = 20
66     L = 1
67     dx = L/(N-1)
68     x = np.linspace(0,L,N)
69     #Definicion de las condiciones iniciales
70     Ts_0 = np.ones(N)*T_0
71     Tg_0 = np.ones(N)*T_0
72     #Tg_0[0] = T_e
73     print(Tg_0)
74     ci = np.concatenate([Ts_0,Tg_0]) #Vector de condiciones
       iniciales
75     #-----Solucion del sistema de EDP
76     from scipy.integrate import solve_ivp
77     t_span = (0, 10)
78     t_eval = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 100)
79     sol = solve_ivp(sistema, t_span, ci, args=(A, B, C, D, E, dx),
       t_eval=t_eval, method='RK45')
80     import matplotlib.pyplot as plt
81     #-----Vectores de
       solucion-----
82     Ts_sol = sol.y[:N, :]
83     Tg_sol = sol.y[N:, :]
84     plt.plot(sol.t, Tg_sol.T)
85     plt.xlabel('Tiempo')
86     plt.ylabel('Temperatura del gas')

```

```

87     plt.show()
88     plt.plot(sol.t, Ts_sol.T)
89     plt.xlabel('Tiempo')
90     plt.ylabel('Temperatura del solido')
91     plt.show()

```

A continuación se presentan las graficas de solución, para el gas y para el solido después de 10 segundos.

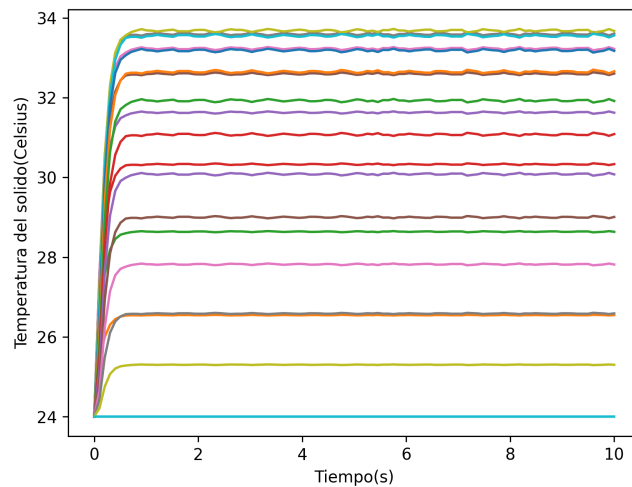


Figura 3: Resultados para el solido del modelo usando Python

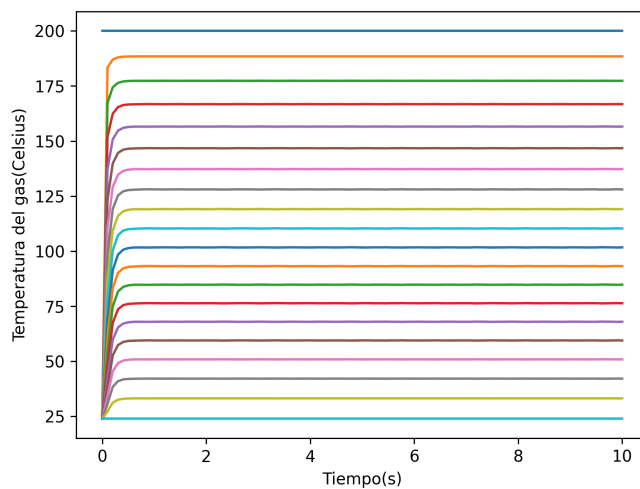


Figura 4: Resultados para el gas del modelo usando Python