Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ФИЗТЕХ-СОЮЗ
ФОНД «ИННОПРАКТИКА»
ФОНД РАЗВИТИЯ ФИЗТЕХ-ШКОЛ

НР
НАУКА В РЕГИОНЫ

Методические материалы по физике. 10 класс.

Смена 17 апреля - 29 апреля 2017 г.

МФТИ
2017

Методические материалы созданы кафедрой общей физики МФТИ. Авторы и составители: преподаватели кафедры общей физики МФТИ:

к.ф.-м.н. В.А. Яворский
к.ф.-м.н. А.Д. Калашников
к.ф.-м.н. С.Д. Кузьмичёв
к.ф.-м.н. И.С. Юдин
д.ф.-м.н. А.В. Максимычев
к.ф.-м.н. В.П. Слободянин
к.ф.-м.н. Л.Д. Колдунов

В данном методическом пособии предлагаются увлекательные теоретические и экспериментальные задачи по физике, которые разбирались преподавателями МФТИ на занятиях со школьниками 10-го класса в рамках образовательной программы «Наука в регионы», имея целью подготовить учеников к олимпиадам и вступительным экзаменам по физике. Данная книга будет полезна учителям, руководителям кружков и факультативов, школьникам старших классов для подготовки к олимпиадам по физике.

Часть I

Механика

Глава 1

Кинематика

1.1 Механическое равномерное движение

Задача 1

(Фольклор) Из магазина и школы навстречу друг другу выходят два ученика, желающие попасть в школу и магазин соответственно. Скорость движения каждого из них постоянная. Первая встреча произошла в 300 м от школы. Поздоровавшись, ученики продолжили движение. Дойдя до пункта назначения, ученики развернулись и направились обратно. Вторая встреча произошла в 180 м от магазина. Найдите расстояние между школой и магазином.

Решение:

Для решения этой задачи многие школьники применяют традиционный способ: вводят скорости учеников и расстояния в качестве неизвестных, составляют и решают систему уравнений. Существует намного более простое «физическое» решение, основанное на свойстве сохранения некоторых параметров системы.

Рассмотрим путь, который прошли оба ученика до момента первой и второй встречи. В первом случае это расстояние S, во втором – $3S$ (каждый ученик дошел до места назначения и частично прошел обратный путь). Поскольку скорость движения каждого ученика постоянная, то для каждого из них времени до второй встречи времени прошло в 3 раза больше, чем до первой. Следовательно, каждый из учеников до второй встречи прошел расстояние в 3 раза больше, чем до первой.

Ученик, вышедший из школы, прошел путь, равный расстоянию от школы до магазина S, плюс еще 180 м по дороге назад. Это расстояние, как было доказано выше, равно утроенному пути, прошедшему им до 1-ой встречи (300 м), т.е. $S + 180$ м $= 3 \cdot 300$ м. Отсюда $S = 720$ м.

Ответ: 720 метров.

Задача 2

(Фольклор) Рыбак плыл на моторной лодке по реке, зацепился шляпой за мост, и она свалилась в воду. Рыбак поплыл дальше, но через полчаса решил повернуть обратно за шляпой. Лодка догнала ее на 4 км от моста. Чему равна скорость течения реки?

Решение:

Перейдем в систему отсчета, в которой шляпа неподвижна. В этой системе модуль скорости не зависит от направления движения моторной лодки, следовательно, на возвращение к шапке рыбак затратил столько же времени, сколько на отдаление от нее – 30 мин. Так как шляпа движется со скоростью течения и за 1 час удалилась от моста на 4 км, то скорость течения равна 4 км/ч.

Ответ: 4 км/ч.

1.2 Равнопеременное движение Ускорение

Задача 3

(Фольклор) Предложите метод определения высоты башни при помощи барометра и *любых других* измерительных приборов.

Решение:

Фольклор приписывает данную задачу датскому физику Нильсу Бору (1885 – 1962), лауреату Нобелевской премии по физике 1922 года.

Общепринятое решение предполагает использование барометра для измерения давления внизу и вверху башни, и последующего применения барометрической формулы:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho g(H - H_0)}{RT}\right),$$

где p - давление на высоте H, p_0 – давление на высоте H_0 (в данной задаче высоты у основания башни можно принять $H_0 = 0$), $\rho = 1{,}29$ кг/м^3 – плотность воздуха, $g = 9{,}81$ м/с^2 – ускорение свободного падения, T – температура среды, выраженная в градусах Кельвина (атмосфера считается изотермической, т.е. при постоянной температуре), $R = 8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$К) – универсальная газовая постоянная.

Уникальность физики состоит в том, что существует множество других способов решения, использующих какое-то физическое явление, для измерения длины какого-то объекта. Вот некоторые из них, предложенные Бором:

- Сбросить барометр с крыши башни и измерить время падения t. Отсюда $H = \frac{gt^2}{2}$.
- Выйти на улицу в солнечный день, измерить высоту барометра и его тени, а также длину тени от башни.

Так как длина тени пропорциональна высоте объекта, из пропорции находим высоту башни.

- Зная размеры барометра, его можно использовать как вторичный эталон длины – подняться по башне, прикладывая барометр к стене и делая отметки.

- Привязать к барометру шнурок, и измерить период колебаний математического маятника внизу и на крыше башни: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Далее учитываем зависимость ускорения свободного падения от высоты над поверхностью Земли:
$$g = \frac{GM}{R_З^2},$$
$$g_H = \frac{GM}{(R_З + H)^2},$$
$$\frac{g_H}{g} = \left(\frac{R_З}{R_З + H}\right)^2,$$
где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) – гравитационная постоянная, $M = 6.10^{24}$ кг – масса Земли, $R_З = 6400$ км – радиус Земли.

- Аналогично предыдущему методу, измерить вес барометра внизу и на крыше башни: $P = mg$.

- Привязать к барометру веревку длиной с башню. Использовать полученную конструкцию как математический маятник. Период колебаний этого маятника однозначно определит высоту башни.

- Измерить время всплывания барометра со дна заполненной водой башни. Скорость всплывания барометра измерить в ближайшем бассейне или ведре (она с какого-то момента будет постоянной из-за сопротивления воды). В случае, если барометр тяжелее воды, привязать к нему воздушный шарик.

- Положить барометр известной массы на башню. Измерить величину деформации сжатия башни. Высота башни находится через закон Гука.

- * Продать барометр смотрителю башни в обмен на информацию о её высоте.

Метод решения задачи может быть взят из любой задачи, в которой есть длина. Например, при стрельбе **барометром** из катапульты под углом к горизонту (смотрите **Задачу 4**):

- Подбираем такой угол и начальную скорость, чтобы максимальная высота подъема барометра равнялась высоте башни.

- Укладываем башню на землю (горизонтально). Подбираем такой угол и начальную скорость, чтобы расстояние от точки выстрела до точки падения барометра равнялось высоте башни.

- С одним углом и начальной скоростью стреляем у подножья башни и с её крыши. Далее замеряем расстояния от точки выстрела до точки падения барометра, и находим высоту башни.

Стоит обратить внимание, что не все идеи решения задачи могут быть осуществлены технически (или могут потребовать значительно более точных приборов и иной конструкции эксперимента). Например, рассмотрим первый метод, в котором необходимо измерить время падения барометра с крыши башни. Для примера возьмем Пизанскую башню (высота

$H = 56{,}7$ м). Определим, с какой максимально допустимой погрешностью надо измерять время, чтобы погрешность измерения высоты составила не более $\Delta H = 1$ м.

$$H = \frac{gt^2}{2},$$

$$H + \Delta H = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2}.$$

Подставляем выражение для H во вторую формулу:

$$\Delta H = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Предполагая, что поправка мала по сравнению с временем полета с верхушки башни, можно пренебречь слагаемым Δt^2.

$$\Delta H \approx \frac{g}{2} 2t\Delta t = gt\Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{\Delta H}{gt} = \frac{\Delta H}{g}\sqrt{\frac{g}{2H}} = \frac{\Delta H}{\sqrt{2gH}} \approx 0.03 \text{ с}.$$

Эту величину надо сравнить со временем реакции человека. Время реакции можно взять из справочных данных (но тогда она получится усредненной величиной для всех-всех экспериментаторов), или измерить экспериментально:

- Первый участник держит линейку длиной 30 – 50 см вертикально, испытуемый держит пальцы недалеко от нулевого значения шкалы. Первый участник *внезапно* отпускает линейку, испытуемый ее ловит пальцами и замеряет расстояние от начала шкалы. Далее по формуле $H = \frac{gt^2}{2}$ определяется время реакции. Обращаем внимание, что эксперимент надо повторить много раз, отбросить промахи (заведомо абсурдные результаты) и затем усреднить полученные значения.

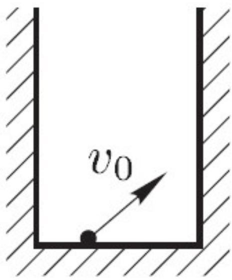
- На современных смартфонах в приложении «Секундомер» есть опция «Круг», которая отображает время между двумя последовательными касаниями. При запущенном отсчете секундомера первый участник внезапно касается кнопки «Отсчет», далее второй участник (испытуемый) должен как можно быстрее коснуться той же кнопки. Эксперимент проводится несколько раз, с последующим усреднением значений.

Измерение времени реакции человека дает величину $0.3 - 0.5$ с, что на порядок больше времени допустимой погрешности по времени. Таким образом, для реализации метода измерения башни необходимо использовать более совершенные методы измерения времени (например, фотофиниш внизу и вверху башни по моменту пересечения барометром светового луча).

Отдельной проблемой является учет сопротивления воздуха. Ее можно решить, например, запуская барометр по трубке, из которой откачан воздух.

Задача 4

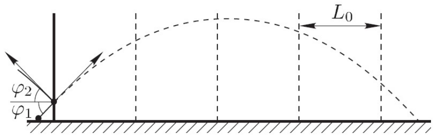
(Муниципальный этап, 2009 год)



На горизонтальной площадке между двумя гладкими стенками установлена катапульта (см. рис). Катапульта выстреливает шариками, начальная скорость которых 0. Какое максимально число ударов может совершить шарик перед тем как упадет на площадку? Удары шарика о стенку считайте абсолютно упругими. Расстояние между стенками равно L_0. Ускорение свободного падения равно g. Положение катапульты и угол вылета шарика можно изменять.

Решение:

Так как удар о стенку абсолютно упругий, то угол отражения φ_2 равен углу падения φ_1. Для упрощения расчета можно сделать «развертку» перемещения шарика (см. рис).



Максимальное число ударов можно получить, если дальность полёта шарика максимальна, то есть равна $L = \frac{v_0^2}{g}$.

При выполнении этого условия, при $L < L_0$, может произойти не более одного столкновения, а при $L_0 < L < 2L_0$ не более двух. По аналогии можно показать, что, если

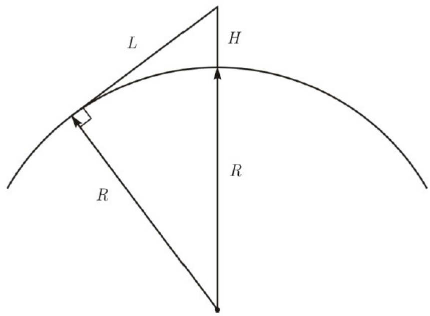
$$(n-1)L_0 < L < nL_0,$$

то может произойти не более n столкновений. Следовательно, максимальное число столкновений равно целой части отношения $\frac{L}{L_0}$ плюс одно столкновение:

$$N = \left[\frac{v_0^2}{gL_0}\right] + 1.$$

Отметим неявные упрощения (идеализации) реальной физической системы, предполагаемые школьниками, которые позволили построить абстрактную математическую модель:

- Не учитывается сопротивление воздуха.
- Катапульта расположена на Земле (планете).
- Не учитывается вращение Земли вокруг оси (ускорение в неинерциальной системе отсчета) и вокруг Солнца.
- Предполагается однородное поле сил тяжести (т.е. Земля считается плоской), а не поле центральных сил, в котором снаряд движется по эллипсу.



- И катапульта, и шарик принимаются за материальные точки.

Ответ: $N = \left[\frac{v_0^2}{gL_0}\right] + 1.$

1.3 Окружность Центробежное ускорение

Задача 5

(Муниципальный этап, 2014 г., Слободянин В.П.)

На море штиль. Отец и сын стоят у самой кромки воды. Расстояние от уровня воды до уровня глаз отца $H = 160$ см, а до уровня глаз сына $h = 80$ см. Во сколько раз горизонт дальше для отца, чем для сына?

Решение:

Пусть радиус Земли равен R (см. рис.). Тогда по теореме Пифагора можно найти расстояние, на котором отец видит горизонт:

$$L_0 = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} = \sqrt{2RH + H^2}.$$

Воспользуемся тем, что радиус планеты во много раз больше роста человека ($R >> H$) и можно пренебречь вторым слагаемым:

$$L_0 \approx \sqrt{2RH}.$$

Аналогично находим расстояние, на котором горизонт видит сын: $L_c \approx \sqrt{2Rh}$. Тогда

$$\frac{L_0}{L_c} = \sqrt{\frac{H}{h}} = \sqrt{2} \approx 1.4\,.$$

Примечание: если не использовать приближение $R >> H$, то в ответ войдёт радиус Земли, который не дан в условии.

Ответ: в 1.4 раза.

Задача 6

(Фольклор) В верхней точке полусферы радиуса R находится небольшое тело. Трением между телом и поверхностью полусферы можно пренебречь. После небольшого толчка, тело начинает соскальзывать под действием силы тяжести. На какой высоте тело оторвется от поверхности полусферы?

Решение:

Рассмотрим тело в системе координат, в которой начало координат совпадает с центром сферы (из которой получена полусфера). Исходно тело находится на высоте R. Для нахождения скорости тела на некоторой высоте $H < R$ воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$E_p + E_k = const,$$

$$mgR = mgH + \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{2g(R-H)}.$$

Пусть φ – угол между вертикалью и радиус-вектором, направленным на тело.

Условием отрыва тела от поверхности полусферы является равенство центробежной силы и радиальной проекции силы тяжести:

$$mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{R}$$

Учитывая, что $\varphi = \frac{H}{R}$ и выражение для скорости, получаем:

$$mg\frac{H}{R} = \frac{m}{R}2g(R-H),$$
$$H = 2(R-H),$$
$$H = \frac{2}{3}R.$$

Ответ: $H = \frac{2}{3}R$.

Глава 2

Статика

2.1 Момент сил

Задача 7

(Фольклор) Прямоугольный брусок высоты a и ширины b стоит на наклонной плоскости, имеющей угол φ с горизонтальной поверхностью. Вес бруска равен P. Какую минимальную силу необходимо приложить к верхней грани бруска, чтобы нижняя грань оторвалась от поверхности и брусок начал наклоняться? При каком коэффициенте силы трения μ это возможно без проскальзывания бруска по поверхности?

Решение:

Рассмотрим сначала частный случай, когда брусок стоит на горизонтальной поверхности.

Пусть точка O – вершина прямоугольника, относительно которой происходит вращение бруска. Запишем правило моментов сил относительно точки O. Сила тяжести (вес) P приложена к центру тяжести бруска, направлена вертикально вниз, плечо силы равно $b/2$. Сила F, приложенная к верхней грани, имеет плечо a, и, для достижения минимального значения, должна быть направлена горизонтально - вдоль ребра верхней грани. Тогда условие равновесия:

$$Fa = P\frac{b}{2} \Rightarrow F = \frac{Pb}{2a}.$$

Условием отсутствия проскальзывания является

$$F \leq F_{\text{тр}} = \mu N = \mu P.$$

$$\frac{Pb}{2a} \leq \mu P \Rightarrow \mu \geq \frac{b}{2a}.$$

В случае с наклонной плоскостью введем систему координат, в которой ось абсцисс направлена вдоль наклонной плоскости, а ось ординат перпендикулярна ей и направлена вдоль стороны длина a бруска.

Запишем правило моментов сил относительно точки О:

$$P_y\frac{b}{2} = P_x\frac{a}{2} + Fa$$

Видно, что вектор веса бруска в данной системе координат имеет 2 компоненты, соответствующие моментам сил разного знака.

$$P\cos\varphi\frac{b}{2} = P\sin\varphi\frac{a}{2} + Fa,$$

$$F = \frac{P}{2}(\frac{b}{a}\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Отметим, что при $\frac{b}{a}\cos\varphi - \sin\varphi < 0$, или $\operatorname{tg}\varphi > \frac{b}{a}$: сила становится отрицательной величиной, т.е. брусок опрокинется сам.

Условие отсутствия проскальзывания можно записать как:

$$P_x + F \leq F_{\text{тр}} = \mu N = \mu P_y.$$

$$P\cos\varphi + \frac{P}{2}(\frac{b}{a}\cos\varphi - \sin\varphi) \leq \mu P\cos\varphi.$$

Отсюда

$$\mu \geq \frac{1}{2}(\frac{b}{a} + \operatorname{tg}\varphi).$$

Видно, что, при $\varphi = 0$, формулы для F и φ переходят в предельный случай горизонтальной поверхности.

Ответ: $F = \frac{P}{2}(\frac{b}{a}\cos\varphi - \sin\varphi)$; $\mu \geq \frac{1}{2}(\frac{b}{a} + \operatorname{tg}\varphi)$.

2.2 Равновесие

Задача 8

(Региональный этап, 2016 г., Замятин М.Ю.)

Куб из однородного материала плавает, погрузившись на глубину h в жидкость. Верхняя грань куба горизонтальна. На какую глубину H в этой же жидкости погрузится куб, имеющий вдвое бóльшую плотность и вдвое бóльшую длину ребра?

Решение:

Предположим, что в обоих случаях верхняя грань куба горизонтальна. Запишем условие плавания куба с длиной ребра a, имеющего плотность ρ, в жидкости с плотностью $\rho_ж$:

$$\rho_ж h a^2 g = \rho a^3 g \text{ или } h = a\frac{\rho}{\rho_ж}$$

Тогда для второго куба

$$\rho_ж H(2a)^2 g = (2\rho)(2a)^3 \text{ или } H = 4a\frac{\rho}{\rho_ж}$$

Из этих уравнений следует, что: $H = 4h$. Но это не окончательный ответ. Дело в том, что если $H = 4h > 2a$, то большой куб утонет. Это накладывает более жесткое условие на плавание маленького куба. Так как $4h > 2a$, то $h < a/2$. Иными словами, глубина погружения маленького куба не должна превышать $a/2$. В противном случае большой куб утонет.

Другое замечание касается того, *как* куб плавает в жидкости. Можно показать, что в некотором диапазоне плотностей ($0.36\rho_ж < \rho < 0.64\rho_ж$) устойчивое положение для плаванья куба — ребром вверх, вне этого диапазона — гранью вверх. Доказательство этого факта выходит за рамки программы 10 класса.

Глава 3

Закон сохранения энергии

Задача 9

(Вступительные экзамены МФТИ)

Шарик для игры в настольный теннис радиусом $r = 15$ мм и массой $m = 5$ г погружен в воду на глубину $h = 30$ см. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $h_1 = 10$ см. Сколько энергии перешло в теплоту вследствие трения шарика о воду? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Указание. Считать, что количество энергии, перешедшей в теплоту, равно работе силы сопротивления воды, взятой с противоположным знаком: $Q = -A_{\text{сопр}}$.

Решение:

Вычислить работу силы сопротивления воды прямым методом затруднительно: зависимость силы сопротивления от скорости шарика в воде весьма непростая и не известна нам. Зато известен экспериментальный факт, что шарик выпрыгнул из воды на высоту $h_1 = 10$ см.

Начальная кинетическая энергия шарика K_1 равна нулю (шарик вначале покоился). В момент достижения шариком высоты h_1 его скорость, а значит, и кинетическая энергия K_2 снова равны нулю. Приращение кинетической энергии тоже равно нулю $\Delta K = K_2 - K_1 = 0$.

С другой стороны, приращение кинетической энергии шарика равно сумме работ всех сил, действовавших на шарик. Пока шарик двигался в воде, на него действовали три силы: сила Архимеда, направленная вверх и равная

$$F_A = \rho_{\text{вод}} V_{\text{шар}} g = \rho_{\text{вод}} \frac{4\pi}{3} r^3 g \approx 0.14 \text{ Н}$$

И две силы, действовавшие вниз – сила тяжести $mg = 0.049$ Н и сила сопротивления воды. Пока шарик поднимается (мы рассматриваем только этот этап движения), угол между силой тяжести и перемещением равен 180°, косинус которого равен минус единице.

При движении в воздухе, нужно учесть лишь действие силы тяжести шарика: сила Архимеда в воздухе (с плотностью 1.3 кг/м^3) $F_A^{\text{возд}} = 0.00018$ Н, что примерно в 270 раз меньше силы тяжести.

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\Delta K = \sum_i A_i = (F_A - mg)h - mgh_1 + A_{\text{сопр}},$$

эта величина должна равняться нулю. Отсюда получаем

$$(F_A - mg)h - mgh_1 - Q = 0.$$

Далее находим $Q = (F_A - mg)h - mgh_1 \approx 0.022$ Дж.
Ответ: 0.022 Дж.

Задача 10

(Фольклор) На столе лежит цепочка длиной L, причем ее часть длиной x свисает со стола в небольшое отверстие. Трение между столом и цепочкой очень мало, так что цепочка под действием силы тяжести начинает соскальзывать со стола. Найти скорость цепочки в тот момент, когда она оторвется от стола. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

Рассмотрим движение цепочки в одномерной системе координат, где ось направлена вертикально вниз, а начало координат совпадает с поверхностью стола.

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$E_p + E_k = const,$$

$$-m\frac{x}{L}g\frac{x}{2} = -mg\frac{L}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

$$v^2 = g\left(L - \frac{x^2}{L}\right) = \frac{g}{L}(L^2 - x^2),$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - x^2)}.$$

Отметим, что при решении пренебрегают эффектами на краю отверстия, в частности, конечным размером звена цепи и процессом изгиба. При решении аналогичной задачи, в которой цепочка находится на краю стола, нужно было бы учесть компоненту скорости в горизонтальном направлении. Здесь же горизонтальная компонента «гасится» стенками отверстия.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - x^2)}$.

Глава 4

Импульс Движение центра масс

4.1 Движение ЦМ

Задача 11

(Фольклор) На ледяной поверхности стоит ледяной куб массы M и длиной ребра a. В центре верхней и правой граней поместили маленькие ледяные кубики массы m, соединенные легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок на правом верхнем ребре куба. Силой трения между любыми ледяными поверхностями можно пренебречь. Под действием силы тяжести кубики начинают скользить. Определить расстояние, на которое сместится большой куб к тому моменту, когда маленькие кубики достигнут ребер.

Решение:

Из первого закона Ньютона следует, что если на систему в некотором направлении не действуют силы, то центр масс этой системы покоится (или сохраняет свою начальную скорость, которая в данной задаче равна нулю).

Введем одномерную систему координат, направленную горизонтально (вертикальная компонента нас не интересует). Начало координат, для удобства вычислений, совместим с проекцией центра масс большого куба.

Определим координаты центра масс системы в начальном и конечном состоянии:

$$x_{c1} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M \cdot 0 + m \cdot 0 + m \cdot \frac{a}{2}}{M + m + m} = \frac{m}{M + 2m}\frac{a}{2},$$

$$x_{c2} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M \cdot 0 + m\frac{a}{2} + m\frac{a}{2}}{M + m + m} = \frac{m}{M + 2m}a.$$

Так как координата центра масс не меняется, то разность координат центра масс системы в начальном и конечном состоянии дает смещение большого куба:

$$\Delta x = x_{c2} - x_{c1} = \frac{m}{M + 2m}\frac{a}{2}.$$

Ответ: $\Delta x = x_{c2} - x_{c1} = \frac{m}{M+2m}\frac{a}{2}$.

Задача 12

На гладкой поверхности стоит скейтборд длиной L и массой M. На одном краю доски сидит маленькая лягушка массой m. С какой минимальной скоростью должна прыгнуть лягушка, чтобы попасть точно на противоположный конец доски? На какое расстояние при этом сместится доска? Силой трения и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

Пусть, для определенности, лягушка сидит на левом крае доски. Введем систему координат, где ось абсцисс направлена горизонтально в направлении прыжка лягушки, а ось ординат – вертикально вверх. Начало координат поместим на левый край доски, так что начальные координаты лягушки будут в нуле по обеим осям.

Пусть φ – угол вектора начальной скорости v_0 по отношению к горизонтальной поверхности, под которым произвела прыжок лягушка; u – скорость доски.

Поскольку вдоль оси абсцисс не действуют никакие силы, то можно записать закон сохранения проекции импульса на эту ось для момента времени, когда лягушка совершила прыжок и оторвалась от доски:

$$mv_{0x} + Mu = 0,$$

$$u = -\frac{m}{M}v_{0x} = -\frac{m}{M}v_0 \cos\varphi.$$

Координата по оси абсцисс вектора скорости доски u является отрицательной, что означает движение доски влево.

Перейдем теперь с систему отсчета, связанную с движущейся доской. В ней сама доска неподвижна, а компоненты вектора скорости лягушки равны:

$$v_{1x} = v_{0x} + |u| = v_0\frac{m+M}{M}\cos\varphi,$$

$$v_{1y} = v_{0y} - gt = v_0 \sin\varphi - gt.$$

Движение вдоль оси ординат является равнопеременным с ускорением свободного падения, направленным вниз. Условием приземления лягушки является равенство ординаты нулю:

$$y = v_{0y} - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Один корень равен нулю и соответствует начальному моменту времени, а второй является искомым:

$$t_f = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g}.$$

Длина прыжка равна длине доски:

$$L = v_{1x}t_f = v_0\frac{m+M}{M}\cos\varphi\frac{2v_0\sin\varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g}\frac{m+M}{M}\sin 2\varphi,$$

$$L = \frac{v_{0min}^2}{g}\frac{m+M}{M}.$$

Отсюда находим минимальную скорость:

$$v_{0min} = \sqrt{\frac{MgL}{m+M}}.$$

В предельном случае, когда масса лягушки много меньше массы доски, получаем формулу для «бросания тела под углом к горизонту»:

$$v_{0min} = \sqrt{gL}.$$

После приземления лягушки, вновь можно записать закон сохранения проекции импульса на ось абсцисс, откуда следует, что доска останавливается. Найдем расстояние, на которое сместилась доска:

$$\Delta x = ut_f = -\frac{m}{M}v_0\cos\varphi\frac{2v_0\sin\varphi}{g},$$

$$\Delta x = -\frac{m}{M}\frac{v_{0min}^2}{g} = -\frac{m}{M}L\frac{M}{M+m} = -L\frac{m}{M+m}.$$

Этот же результат можно получить из сохранения проекции центра масс системы:

$$\Delta x = x_{c1} - x_{c2} = \frac{M\cdot\frac{L}{2} + m\cdot 0}{M+m} - \frac{M\frac{L}{2} + m\cdot L}{M+m} = -L\frac{m}{M+m}$$

Таким образом, при отсутствии силы трения и сопротивления воздуха, смещение доски будет одним и тем же вне зависимости от того, перемещается лягушка с одного края доски на другой одним прыжком или серией прыжков.

Ответ: $v_{0min} = \sqrt{\frac{MgL}{m+M}}$; $\Delta x = -L\frac{m}{M+m}$.

4.2 Закон сохранения импульса

Задача 13

(Фольклор) Пуля массой $m = 5$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 500$ м/с, попадает в шар массой $M = 0.5$ кг, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, и застревает в нем. При какой предельной длине нити (расстояние от точки подвеса до центра шара), после удара пули, шар сможет описать четверть окружности? Какая доля кинетической энергии перейдет при этом в тепло? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

Рассмотрим столкновение пули и шара как абсолютно неупругий удар. Из закона сохранения импульса:

$$mv = (m + M)u.$$

где u – скорость шара с застрявшей в нем пулей сразу после столкновения.

После этого шар с пулей движутся по окружности в потенциальном однородном поле сил тяжести, для которого можно записать закон сохранения механической энергии:

$$E_p + E_k = const.$$

Пусть длина нити равна L. Предполагая, что за время столкновения шар сместился на пренебрежимо малую величину, получаем, что за четверть окружности он поднимется на высоту L и там остановится:

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gL,$$

$$L = \frac{u^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m}{m + M}\right)^2 \approx 1.25\text{м}.$$

Найдем долю α кинетической энергии, которая перешла в тепло при неупругом соударении:

$$\alpha = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = 1 - \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{(M+m)u^2}{2}\frac{2}{mv^2},$$

$$\alpha = 1 - \frac{M+m}{m}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 = 1 - \frac{m}{m+M} = \frac{M}{m+M} = 0.99.$$

Таким образом, в тепло перейдет 99% исходной кинетической энергии!

Ответ: 1.25 м, 99%.

Глава 5

Всемирное тяготение

5.1 Законы Ньютона и Кеплера

Задача 14

(Фольклор) Геостационарная орбита — круговая орбита, расположенная над экватором Земли (0° широты), находясь на которой, искусственный спутник обращается вокруг планеты с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. Оценить высоту такой орбиты. Землю можно рассматривать как шар радиуса $R = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g = 9{,}8$ м/с^2.

Решение:

Спутник на геостационарной орбите «висит» в небе неподвижно относительно объектов на поверхности планеты, что позволяет направить на него неподвижную антенну и использовать для получения и передачи различных данных, непрерывного наблюдения за участком поверхности и т.д.

Взаимодействия тел в космосе осуществляется при помощи гравитационных сил, описываемых законом Ньютона:

$$F = G\frac{mM}{x^2}.$$

где G— гравитационная постоянная, m и M — массы объектов, x — расстояние между их центрами масс. Поскольку масса Земли в условии не задана, определим ее из величины ускорения свободного падения на поверхности Земли:

$$P = mg = G\frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда $GM = gR^2$.

На спутник, находящийся на круговой орбите Земли, действуют две уравновешивающие друг друга силы — притяжение к Земле и центробежная сила. Рассмотрим их применительно к орбите на высоте H над поверхностью Земли:

$$G\frac{Mm}{(R+H)^2} = m\frac{v^2}{(R+H)},$$

$$v^2 = \frac{GM}{R+H} = \frac{gR^2}{R+H}.$$

Если спутник висит над одной и той же точкой поверхности экватора, то период его обращения T равен 24 часа:

$$T = \frac{2\pi(R+H)}{v} = \frac{2\pi(R+H)^{\frac{3}{2}}}{R\sqrt{g}},$$

$$R + H = \left(\frac{TR\sqrt{g}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 42354 \text{ км}.$$

Отсюда, вычитая радиус Земли, находим приближенное значение 36 тыс. км (точное значение — 35786 км).

Ответ: 36 тыс. км.

Задача 15

(Фольклор) 2117 год. Школьники в г. Тверь выполняют лабораторную работу по физике, запуская небольшую капсулу с сообщением в тоннель, проложенный через центр Земли. Из тоннеля откачан воздух, стенки тоннеля гладкие, так что капсула движется без трения. Начальная скорость капсулы относительно туннеля равна нулю. Оцените, через какое время получат капсулу на другом конце туннеля? Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно 9,8 м/с^2. Землю можно считать однородным шаром.

Решение:

Рассмотрим движение капсулы в одномерной системе координат, направленной вдоль тоннеля (для простоты расположим его вертикально). Начало координат поместим в центр Земли.

В курсе физики доказывается, что если в центре Земли сделать полость некоторого радиуса, то в любой точке полости сила тяжести будет равна нулю (следует из теоремы Остроградского-Гаусса).

Таким образом, сила тяжести, действующая в тоннеле на капсулу в точке на расстоянии x от центра Земли, будет зависеть только от массы, находящейся внутри шара радиуса x:

$$ma = -G\frac{M(x)m}{x^2} = -G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi x^3 m}{x^2} = -G\frac{4}{3}\pi m x,$$

$$g = G\frac{M}{R^2} = \frac{G}{R^2}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 = G\frac{4}{3}\pi\rho R.$$

Отсюда $a = -\frac{g}{R}x$. Мы получили, что ускорение движения пропорционально расстоянию от точки равновесия и направлено в противоположную сторону – что, собственно, есть свойство гармонических колебаний.

$$\omega^2 = \frac{g}{R}.$$

Время пролета капсулы через туннель будет равно половине периода колебаний:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ мин.}$$

Будет полезным сравнить период колебаний капсулы в тоннеле с периодом обращения спутника вокруг Земли, находящегося на небольшой (почти нулевой) высоте от поверхности:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} = mg \Rightarrow v = \sqrt{gR},$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

то есть периоды совпадают.

Ответ: 42 мин.

Глава 6

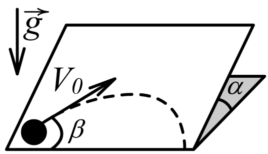
Задачи для самостоятельного решения

1. На дне аквариума длины a и ширины b находится цилиндр длины чуть меньше a и диаметром основания чуть меньше b. В аквариум с цилиндром залита вода так, что цилиндр находится полностью под водой (уровень воды на высоте b). Плотность воды равна $\rho_{\text{в}}$, плотность цилиндра $\rho_{\text{ц}}$ ($\rho_{\text{ц}} > \rho_{\text{в}}$). Найти работу, которую надо выполнить, чтобы поднять цилиндр над водой.

2. Оценить массу Винни Пуха, если он поднялся к пчелиному гнезду, находящемуся на высоте $h = 10$ м, за время $t = 6$ с на шарике радиусом $R = 0.5$ м, надутом гелием. Определить количество меда, которое ему нужно съесть, чтобы за то же время t спуститься вниз.

3. Если водопроводный кран постепенно закрывать (так, чтобы истечение жидкости оставалась ламинарным), то струя жидкости будет становиться все тоньше и тоньше, однако это сужение не бесконечно! На определенном расстоянии от крана струя обрывается, превращаясь в поток капель диаметром около 4 мм. Оценить это расстояние для тонкой струи с расходом воды 200 л/сут.

4. На гладкой наклонной плоскости со скоростью v_0 пускают шарик. Начальная скорость шарика образует угол β с горизонтальным уровнем плоскости. Плоскость наклонена к горизонту под углом α . Какое расстояние по горизонтали он пройдет, прежде чем скатится к тому же горизонтальному уровню на плоскости?



5. Оценить время падения на Солнце Земли, если она остановится на орбите.

Глава 7

Движение и распределённая масса

7.1 Движение тел с распределенной массой (стержни, канаты, трубки с жидкостью).

7.1.1 Кинематика

Теория.

Механическое движение – изменение положение тела в пространстве (положение тела относительно других тел) с течением времени. Кинематика изучает движение тел без исследования причин, вызывающих это движение и определяющих тот или иной его характер.

Материальная точка – это физическое тело, геометрическими размерами которого в условиях задачи можно пренебречь и считать, что вся масса тела сосредоточена в геометрической точке.

При описании движения протяженных тел (стержней, пластин, веревок) часто используется модель *абсолютно твердого тела*, которая предполагает, что в процессе движения форма и размеры тела остаются неизменными. Такая модель означает, что расстояние между любыми двумя точками этого тела остается неизменным в процессе движения. Это означает, что скорости таких двух точек не могут принимать произвольные значения, а связаны между собой некоторым соотношениями. Такие соотношения называются уравнениями кинематических связей, и часто используются для определения скоростей отдельных точек, протяженных тел.

Поступательное движение – движение, при котором все точки тела движутся одинаково при этом любая прямая в теле перемещается параллельно самой себе. Перемещаясь в пространстве вместе с материальной точкой, конец радиуса-вектора $\overrightarrow{r}$ вычерчивает в пространстве линию $r(t)$, называемую *траекторией* точки. Геометрическая форма траектории зависит от выбора системы отсчета, относительно которой ведется наблюдение за движением точки. *Путь*, пройденный точкой за время Δt, – длина участка траектории (расстояние) пройденное точкой за это время.

Вектор мгновенной скорости $\overrightarrow{v}$ направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону направления движения: $\overrightarrow{v} = v \cdot \overrightarrow{\tau}$, $v = |\overrightarrow{v}|$, $\overrightarrow{\tau}$ – единичный вектор, касательный к траектории.

Ускорением $\overrightarrow{a}$ точки называется величина

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}.$$

При прямолинейном движении

$$\overrightarrow{v} = v \cdot \overrightarrow{\tau}, \quad \overrightarrow{\tau} = const, \quad \overrightarrow{a} = a \cdot \overrightarrow{\tau}, \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

При движении точки по окружности радиуса R:

а) Положение точки на окружности можно задавать вектором $\overrightarrow{R}$, составляющим угол φ с некоторым направлением.

б) Угловая скорость определяется выражением

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

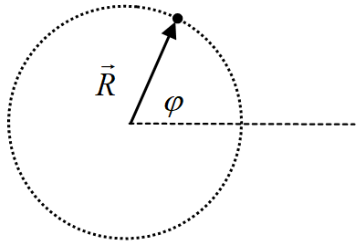


Рис. 1

в) Скорость точки при движении по окружности дается выражением

$$v = \omega R.$$

г) Ускорение точки при криволинейном движении:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_n + \overrightarrow{a}_\tau,$$

$\overrightarrow{a}_\tau = \frac{d\overrightarrow{v}_\tau}{dt}$ – тангенциальное (касательное) ускорение.

$\overrightarrow{a}_n = \frac{d\overrightarrow{v}_\tau}{dt}$ – нормальное (центростремительное) ускорение, направлено к центру окружности.

Скорость тела по определенным правилам преобразуются при переходе от одной системы отсчета к другой. Пусть имеются две произвольные системы отсчета K и K^*, причем система K^* движется поступательно по отношению к K-системе со скоростью $\overrightarrow{V}$. Если скорость точки относительно K-системы равна $\overrightarrow{v}$, а относительно K^*-системы – $\overrightarrow{v}'$, то связь между тремя указанными скоростями определяется соотношением

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{v}'.$$

Если система K^* двигается относительно системы K поступательно с постоянной скоростью $\overrightarrow{v}$, то между ускорениями точки в этих системах выполняется соотношение

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}'.$$

Задачи к семинару.

Задача 16

Найдите скорость центра левого блока в тот момент, когда груз имеет скорость направленую вниз (см. рис.2).

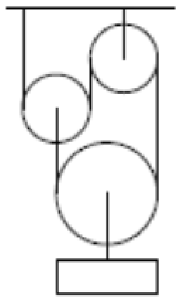


Рис. 2

Решение:

Связь между скоростями груза и центра блока определим из условия, что нить, перекинутая через блоки, является нерастяжимой, т.е. её длина является постоянной величиной. Введем направленную вертикально вниз ось OY с началом координат в точке крепления нити, на которой закреплена ось неподвижного блока. Пусть длина этой нити h. Пусть радиусы малых блоков равны R, тогда радиус большого блока равен $1{,}5R$. Введем координату оси верхнего подвижного блока y_1 и координату оси нижнего подвижного блока y_2. Запишем длину нити через введенные величины:

$$L = y_1 + \pi R + y_1 - h + \pi R + y_2 - h + 1{,}5\pi R + y_2 - y_1 = const.$$

Из условия постоянства длины нити и кинематического определения проекции скорости имеем

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = 0 = \frac{\Delta y_1}{\Delta t} + 2\frac{\Delta y_2}{\Delta t} = v_{1,y} + 2v_{2,y}.$$

С учетом того, что скорость груза равна скорости оси нижнего подвижного блока($v_{2,y} = v$),

для скорости оси центра левого блока получаем…
Ответ: $v_{1,y} = -2v$

Задача 17

Стержень упирается своими концами в стороны прямого угла. Верхний конец стержня поднимают со скоростью v. Найдите, как зависит от времени скорость его нижнего конца. За начало отсчёта времени примите момент, когда верхний конец стержня находился в вершине угла. Длина стержня L. Определите также скорость центра стержня в зависимости от времени и угловую скорость его вращения.

Решение:

Пусть A – точка на верхнем конце стержня, B – на нижнем. Ведем систему координат XOY, направив ось OX горизонтально вправо, ось OY – вертикально вверх. Тогда координаты точек A и B в момент времени t таковы:

$$x_A = 0, \quad x_B = \sqrt{L^2 - (vt)^2},$$

$$y_A = vt, \quad y_B = 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{v},$$

$$\sin\alpha = \frac{y_A}{L}, \quad \cos\alpha = \frac{x_B}{L}.$$

Условие постоянства длины стержня (кинематическая связь между координатами точек A и B) в данной ситуации можно сформулировать следующим образом: проекции скоростей векторов скоростей верхнего и нижнего концов стержня на его ось должны быть равны:

$$v_B \cdot \cos\alpha = v_A \cdot \sin\alpha.$$

Отсюда для скорости нижнего конца стержня получаем:

$$v_B = v_A \cdot tg\alpha = v \cdot \frac{vt}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}} = \frac{vt}{\sqrt{(L/v)^2 - t^2}}.$$

Пусть C – точка в центре стержня. Тогда справедливы соотношения

$$x_C = 0{,}5x_B = 0{,}5\sqrt{L^2 - (vt)^2}, \quad y_C = 0{,}5y_A = 0{,}5vt,$$

$$v_{C,\,x} = \frac{\Delta x_C}{\Delta t} = 0{,}5\frac{\Delta x_B}{\Delta t} = -\frac{0{,}5v^2 t}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}},$$

$$v_{C,\,y} = \frac{\Delta y_C}{\Delta t} = 0{,}5\frac{\Delta y_C}{\Delta t} = 0{,}5v,$$

$$v_C = \sqrt{(v_{C,\,x})^2 + (v_{C,\,y})^2} = \frac{0{,}5v}{1 - (vt/L)^2}.$$

Движение точки A относительно центра стержня C представляет собой вращение с некоторой угловой скоростью ω по окружности радиуса $L/2$. Следовательно скорость точки A относительно центра стержня можно записать так: $v_{A,\,\text{отн}} = 0{,}5\omega \cdot L$. Найдем ω

$$v_{A,\,x,\,\text{отн}\,C} = v_{A,\,x} - v_{C,\,x} = \frac{0{,}5v^2 t}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}};\, v_{A,\,y,\,\text{отн}\,C} = v_{A,\,y} - v_{C,\,y} = 0{,}5v,$$

$$v_{A,\,\text{отн}\,C} = \sqrt{v^2_{A,\,x,\,\text{отн}\,C} + v^2_{A,\,y,\,\text{отн}\,C}} = \frac{0{,}5vL}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}} = 0{,}5L\omega,$$

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}}.$$

Движение точки A относительно точки B представляет собой вращение с некоторой угловой скоростью ω' по окружности радиуса L. Следовательно скорость точки A относительно центра стержня можно записать так: $v_{A\,\text{отн}\,B} = \omega' \cdot L$.

Найдем ω'

$$v_{A,\,x,\,\text{отн}\,B} = v_{A,\,x} - v_{B,\,x} = \frac{v^2 t}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}};\, v_{A,\,y,\,\text{отн}\,B} = v_{A,\,y} - v_{B,\,y} = v,$$

$$v_{A,\,\text{отн}\,B} = \sqrt{v^2_{A,\,x,\,\text{отн}\,B} + v^2_{A,\,y,\,\text{отн}\,B}} = \frac{vL}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}} = L\omega',$$

$$\omega' = \frac{v}{\sqrt{L^2 - (vt)^2}}.$$

Таким образом, $\omega' = \omega$.

Задача 18

Колесо радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной дороге с постоянной скоростью $\overrightarrow{v}_0$ (см. рисунок 3). Найти угловую скорость вращения колеса, горизонтальную компоненту v_x линейной скорости движения произвольной точки A на ободе колеса и вертикальную компоненту v_y этой скорости. Определить модуль и направление вектора ускорения точки A. Выразить все искомые величины через v_0, R и угол φ.

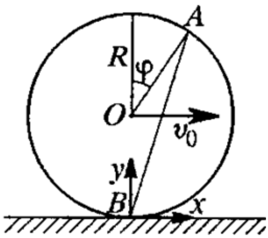


Рис. 3

Решение:

Согласно закону сложения скоростей скорость $\overrightarrow{v_A}$ любой точки A на ободе колеса можно представить в следующем виде:

$$\overrightarrow{v}_A = \overrightarrow{v}_{A,\,\text{отн}} + \overrightarrow{v}_0,$$

где $\overrightarrow{v}_0$ - скорость центра колеса, $\overrightarrow{v}_{A,\,\text{отн}}$ - скорость точки обода колеса относительно центра. Так как колесо можно рассматривать как абсолютно твердое тело, то движение точки A относительно центра колеса O представляет собой вращение по окружности радиуса R. При этом вектор относительной скорости $\overrightarrow{v}_{A,\,\text{отн}}$ перпендикулярен радиусу-вектору $\overrightarrow{OA}$ и составляет с горизонталью угол φ. Пусть вращение происходит с угловой скоростью ω. Тогда для модуля $\overrightarrow{v}_{A,\,\text{отн}}$ можно записать: $\overrightarrow{v}_{A,\,\text{отн}} = \omega R$. Определим ω. Для этого воспользуемся тем фактом, что колесо движется по поверхности без проскальзывания, т.е. мгновенная скорость точки колеса, которая в данный момент касается поверхности, равна нулю. На изображенном рисунке такой точкой является точка B.

Из закона сложения скоростей имеем

$$\overrightarrow{v}_B = \overrightarrow{v}_{B,\,\text{отн}} + \overrightarrow{v}_0, \quad v_B = 0, \quad \overrightarrow{v}_{B,\,\text{отн}} = \omega R.$$

Отсюда для угловой скорости вращения колеса получаем

$$\overrightarrow{v}_{B,\,\text{отн}} = -v_0, \quad \overrightarrow{v}_{B,\,\text{отн}} = \omega R = v_0, \quad \omega = \frac{v_0}{R}.$$

Теперь для горизонтальной и вертикальной компонент линейной скорости движения точки A на ободе колеса получаем:

$$v_{A,\,x} = v_{A,\,\text{отн},\,x} + v_{0,\,x}, \quad v_{A,\,\text{отн},\,x} = \omega R\cos\varphi = v_0\cos\varphi,$$

$$v_{0,\,x} = v_0, \quad v_{A,\,x} = v_0\cos\varphi + v_0 = v_0(1+\cos\varphi);$$

$$v_{A,\,y} = v_{A,\,\text{отн},\,y} + v_{0,\,y}, \quad v_{A,\,\text{отн},\,y} = -\omega R\sin\varphi = -v_0\sin\varphi,$$

$$v_{0,\,y} = 0, \quad v_{A,y} = -v_0\sin\varphi.$$

Из закона сложения скоростей следует закон сложения ускорений:

$$\overrightarrow{a}_A = \overrightarrow{a}_{A,\,\text{отн}} + \overrightarrow{a}_0$$

Здесь $\overrightarrow{a}_A$ - искомый вектор ускорения точки A, $\overrightarrow{a}_0$ - ускорение центра колеса относительно поверхности дороги, $\overrightarrow{a}_{A,\,\text{отн}}$ - вектор ускорения точки A относительно центра колеса.

Так как центр колеса двигается прямолинейно и равномерно, то $a_0 = 0$. Следовательно $\overrightarrow{a}_A = \overrightarrow{a}_{A,\,\text{отн}}$.

Так как движение точки A относительно центра колеса O представляет собой равномерное вращение с угловой скоростью $\omega = v_0/R$ по окружности радиуса R, то вектор $\overrightarrow{a}_{A,\,\text{отн}}$ направлен к центру колеса, а его модуль равен: $a_{A,\,\text{отн}} = v_0^2/R$.

Ответ: $v_{A,\,x} = v_0(1+\cos\varphi)$, $v_{A,\,y} = -v_0\sin\varphi$, $a_A = v_0^2/R$.

7.1.2 Динамика

Теория.

При применении *второго закона Ньютона* к описанию движения тел с распределенной массой (протяженных тел, которые нельзя рассматривать как материальные точки), следует помнить, что соотношение

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F_{\text{равн}}}}{m},$$

определяет ускорение *центра масс* тела.

Центр масс системы, состоящей из n тел (материальных точек) с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, положение которых задается радиус-векторами $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — это точка, положение которой задается формулой

$$\overrightarrow{r_{\text{ЦМ}}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{r_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Для протяженных однородных тел, таких как стержни, шары, диски, центр масс находится в геометрическом центре тела.

Импульс $\overrightarrow{p}$ протяженного тела массой m, центр масс которого движется со скоростью $\overrightarrow{v_c}$, определяется выражением

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v_c}.$$

Второй закон Ньютона для тела записывают в виде

$$\Delta\overrightarrow{p} = \overrightarrow{F} \cdot \Delta t,$$

где $\overrightarrow{F}$ - равнодействующая всех сил, действующих на тело. Произведение силы на время ее действия называется *импульсом силы.* Такая форма записи позволяет рассматривать динамику движения тел с переменной массой.

Задачи к семинару.

Задача 19

Груз поднимают с некоторым ускорением, направленным вертикально вверх, прикладывая силу $F = 40$ Н к привязанному к грузу массивному однородному канату. Масса груза равна массе каната. Найдите силу натяжения каната в его середине.

Решение:

При движении массивного каната вверх он деформируется (его длина увеличивается), причем в верхней его части деформации больше, чем в нижней. Будем считать, что к рассматриваемому в задаче моменту времени в канате прекратились все колебания, которые могли возникнуть после начале движения, и его длина уже не изменяется. Предположение о малости деформации каната означает, что по-прежнему можно считать однородным. Запишем уравнение второго закона Ньютона для груза с канатом в проекции на направление движения:

$$2ma = F - 2mg.$$

здесь a - ускорение каната, m - масса каната.

Пусть T - сила натяжения каната в его середине. Именно такая по модулю сила действует вертикально вверх со стороны верхней половины каната на нижнюю половину каната и груз. Так как груз и нижняя половина каната двигаются вертикально вверх с ускорением a, то уравнение второго закона Ньютона для них можно записать так

$$\left(\frac{m}{2} + m\right) \cdot a = T - \left(\frac{m}{2} + m\right) g.$$

Из полученной системы уравнений для силы натяжения T получаем:

Ответ: $T = \dfrac{3}{4}F = 30$ Н.

Задача 20

Однородный канат длиной l и массой m с прикреплённым к одному концу грузом массой $m/3$ находятся на гладкой горизонтальной поверхности стола и вращаются с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через другой конец каната. Размер груза мал по сравнению с длиной каната. Найдите силу натяжения каната на расстоянии $1/3$ от оси вращения.

Решение:

Будем считать, что к рассматриваемому в задаче моменту времени в канате прекратились все колебания, которые могли возникнуть после начала движения, и его длина уже не изменяется. Предположение о малости деформации каната означает, что по-прежнему можно считать однородным, а его длину считать равной l. При движении массивного каната он деформируется (его длина увеличивается), причем участки каната, расположенные ближе к оси вращения, деформированы сильнее, чем участки, расположенные дальше от оси вращения.

Сила натяжения T каната на расстоянии $l/3$ от оси вращения «обеспечивает» движение отрезка каната длиной $2l/3$ и прикрепленного к его концу груза, направлена вдоль каната к оси вращения и является единственной силой, действующей на систему отрезок каната + груз. Второй закон Ньютона, при его применении к описанию вращательного движения протяженного тела, позволяет определить движение одной точки – центра масс тела. Центр масс отрезка каната длиной $2l/3$ и прикрепленного к его концу груза находится от оси вращения на расстоянии

$$x = \frac{\frac{2}{3}m \cdot \frac{2}{3}l + \frac{m}{3} \cdot l}{\frac{2}{3}m + \frac{m}{3}} = \frac{7}{9}l.$$

Тогда, применяя второй закон Ньютона к движению центра масс, получаем

$$m_{\text{общ}}a_{\text{ц.м.}} = T, \quad m = \frac{2}{3}m + \frac{m}{3} = m,$$

$$a_{\text{ц.м.}} = \omega^2 x = \frac{7}{9}\omega^2 l, \quad T = \frac{7}{9}\omega^2 lm.$$

Ответ: $T = \frac{7}{9}\omega^2 lm$.

Задача 21

Тонкая Г-образная трубка постоянного внутреннего сечения полностью заполнена ртутью (см. рисунок 4). Горизонтальное колено трубки закрыто с одного конца. Вертикальное колено высотой $H = 8$ мм открыто в атмосферу. Атмосферное давление $P_0 = 752$ мм. рт. ст.. Ртуть начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением не меньшим, чем $a_0 = 0{,}8g$. При движении трубки с некоторым ускорением a, большим a_0, выливается столбик ртути длиной $L_1 = 19$ см. Найдите длину горизонтального колена и ускорение a.

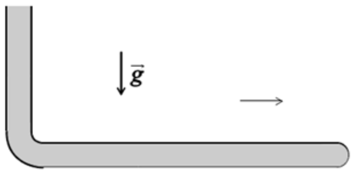


Рис. 4

Решение:

Мысленно выделим горизонтальный столбик ртути от правого (закрытого) конца горизонтального колена трубки до места изгиба трубки.

В состоянии равновесия на правый (закрытый) конец горизонтального колена трубки ртуть создает давление $P = P_0 + \rho g H$, где ρ - плотность ртути (предполагается, что диаметр трубки значительно меньше высоты H). В свою очередь со стороны правого конца горизонтального колена на ртуть действует горизонтальная направленная влево сила $\vec{N}$.

В месте изгиба трубки на левый торец столбика ртути действует горизонтальная сила, модуль которой равен $F = PS = (P_0 + \rho g H)S$, где S - площадь поперечного сечения трубки. При горизонтальном движении трубки с ускорением $a_1 = a_0$, ртуть из трубки не выливается. Тогда из второго закона Ньютона имеем:

$$m_1 a_1 = F - N, \quad m_1 = \rho L S,$$

$$N = F - m_1 a_1 = n(P_0 + \rho g H)S - \rho L S a_1.$$

Из выражения для N видно, что увеличением ускорения трубки модуль этой силы уменьшается. Условием для начала выливания ртути из трубки является обращение в ноль силы N. По условию задачи это произойдет при $a_0 = 0{,}8g$. Тогда для длины L горизонтального участка получаем

$$P_0 = \rho g H_0, \quad H_0 = 752 \text{ мм}.$$

$$L = \frac{P_0 + \rho g H}{\rho a_0} = \frac{H_0 + H}{0{,}8} = 95 \text{ см}.$$

Пусть, при горизонтальном движении трубки с ускорением $a > a_0$, из трубки выливается столбик ртути длиной $L_1 = 19$ см. При этом вертикальное колено останется целиком заполненным ртутью, а горизонтальный столбик ртути не касается закрытого конца трубки ($N = 0$). Тогда из второго закона Ньютона для этой ситуации имеем:

$$m_2 a = F - N, \quad m_2 = \rho(L - L_1)S, \quad N = 0,$$

$$F = (P_0 + \rho g H)S, \quad a = \frac{F}{m_2} = \frac{H_0 + H}{L - L_1} g = g.$$

Ответ: $L = 95$ см, $a = g$.

Задача 22

На сколько вытягивается однородная пружина длиной l, жесткостью k и массой m, подвешенная за один конец, под влиянием собственного веса?

Решение:

Разобьем пружину на бесконечно малые пружинки длинами dx. Определим жесткость k' каждой такой пружинки. Для этого воспользуемся законом Гука

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow F = \frac{ES}{l}\Delta l = k\Delta l, \quad k = \frac{ES}{l}$$

Из выражения для жесткости k видно, что данная величина обратно пропорциональна длине пружины. Следовательно, для малой пружинки длиной dx жёсткость определится выражением

$$k' = \frac{k}{dx}l.$$

Рассмотрим такую пружинку, находящуюся на расстоянии x от точки подвеса. Она растянута весом P оставшейся части пружины

$$P = \frac{mg}{l}(l - x),$$

на величину

$$\Delta(dx) = \frac{P(x)}{k'} = \frac{mg(l - x)}{l^2 k}dx.$$

Сложив удлинения всех таких пружинок, можно получить полное удлинение пружины под действием собственного веса. В данном случае суммирование заменяется интегрированием, которое даёт следующий окончательный результат

$$\Delta l = \int_l^0 \frac{mg(l - x)}{kl^2}dx = \frac{mg}{2k}.$$

Этот результат можно получить иначе, не прибегая к интегрированию. Разделим недеформированную пружину на некоторое большое число N маленьких одинаковых пружинок.

Длина каждой такой пружинки равна $\Delta l_0 = l/N$, масса равна m/N, а жесткость равна kN (вспомните о законе Гука и о зависимости жесткости пружины от её длины).

При подвешивании таких пружинок в вертикальном положении, каждая маленькая пружина растянется, причем величина растяжения будет зависеть от места расположения пружинки. Пружинки в верхней части будут растянуты сильнее пружинок в нижней части.

Пронумеруем пружинки, считая от самой нижней. Пренебрежем растяжением самой нижней пружинки. Рассмотрим пружинку с номером n (n>1). На неё действует вес $n-1$ пружин, расположенных ниже неё. Допустим, что длина этой пружины в растянутом состоянии равна Δl_n.

Тогда можно записать условие равновесия $n-1$ пружин, расположенных ниже пружины с номером n следующим образом:

$$F_{\text{тяж},\,n-1} = \frac{m}{N}(n-1)g = F_{\text{упр},\,n} = kN(\Delta l_n - \Delta l_0).$$

Отсюда для удлинения пружинки с номером n получаем

$$\Delta l_n - \Delta l_0 = \frac{mg}{kN^2}(n-1).$$

Теперь, чтобы найти удлинение всей пружины нужно сложить удлинения всех маленьких пружинок:

$$\Delta l = \sum_{n=1}^{n=N}(\Delta l_n - \Delta l_0) = \frac{mg}{kN^2}\sum_{n=1}^{n=N}(n-1) =$$

$$= \frac{mg}{kN^2}\left[\frac{0+(N-1)}{2}\right]N = \frac{mg}{2kN^2}N^2\left[1-\frac{1}{N}\right] = \frac{mg}{2k}\left[1-\frac{1}{N}\right].$$

Если число пружинок велико ($N >> 1$), то предел полученного выражения равен

$$\Delta l = \frac{mg}{2k}.$$

Ответ: $\Delta l = \dfrac{mg}{2k}$.

Задача 23

На гладком закрепленном бревне радиусом R висит однородный канат массой m и длиной $l = 7R$, прикрепленный к бревну в точке E (см. рис. 5). Точка E и ось бревна O находятся в одной горизонтальной плоскости. Найти силу натяжения каната в точке A. Найти силу натяжения каната в точке B такой, что угол EOB равен α ($\sin\alpha = 2/3$).

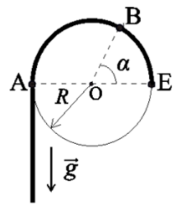


Рис. 5

Решение:

Вертикально висящий участок каната имеет массу

$$m_a = m\frac{l - \pi R}{l}.$$

Так как этот участок находится в равновесии, то действующая на него вертикально вниз сила тяжести $m_a g$ уравновешивается направленной вертикально вверх силой натяжения T_a каната в точке A:

$$T_A = m_A g = mg\frac{l - \pi R}{l} = \frac{7 - \pi}{7}mg.$$

Для определения силы натяжения в точке B воспользуемся методом виртуальных (мысленно возможных) перемещений.

Выделим участок AB каната. В состоянии равновесия в точке B на этот участок действует сила T_B со стороны участка каната BE, направленная по касательной к поверхности бревна точке B. Мысленно переместим участок AB на малое расстояние x (точка A перемещается вверх, а точка B - по касательной к поверхности бревна). При этом обе силы совершают работы, а у участка AB изменяется потенциальная энергия. Так как поверхность бревна гладкая, то закон об изменении механической энергии для этой ситуации можно записать так:

$$\Pi_2 - \Pi_1 = A_{\text{внеш. сумм}}, \quad \Pi_2 - \Pi_1 = m\frac{x}{l}gR\sin\alpha,$$

$$A_{\text{внеш. сумм}} = A_{T_A} + A_{T_B}, \quad A_{T_A} = -T_A x, \quad A_{T_B} = T_B x,$$

$$T_B x - T_A x = m\frac{x}{l}gR\sin\alpha.$$

Отсюда для силы натяжения T_B получаем

$$T_B = T_A + \frac{2}{21}mg = \frac{23-3\pi}{21}mg.$$

Ответ: $T_A = \dfrac{7-\pi}{7}mg$, $T_B = \dfrac{23-3\pi}{21}mg$.

Задача 24

Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной l, массой m и жесткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.

Решение:

Рассмотрим малый участок вращающегося кольца, видимый из центра кольца под углом $\Delta\alpha$ и имеющий массу $\Delta m =$

$= m \cdot \Delta\alpha/2\pi$. На данный участок действуют две силы упругости $\overrightarrow{T_1}$ и $\overrightarrow{T_2}$, направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю ($|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_1}| = T$). Запишем второй закон Ньютона для этого участка в виде

$$\Delta m \overrightarrow{a} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}.$$

Поскольку рассматриваемый участок равномерно движется по окружности, то его ускорение направлено к центру окружности и по модулю равно $a = \omega^2 R$. Это ускорение сообщается равнодействующей сил $\overrightarrow{T_1}$ и $\overrightarrow{T_2}$, модуль которой можно найти из геометрических соображений:

$$|\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}| = 2T \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx T \cdot \Delta\alpha.$$

Здесь использована малость угла $\Delta\alpha$. Таким образом, второй закон Ньютона в проекциях сил и ускорения на радиальное направление выглядит следующим образом:

$$\Delta m \omega^2 R \approx T \Delta\alpha.$$

Удлинение кольца, вызванное силой натяжения T, можно найти из закона Гука:

$$T = k\Delta l, \quad \Delta l = 2\pi R - l, \quad 2\pi R - = \frac{T}{k}.$$

Таким образом, получаем

$$dm\omega^2 R = \frac{m}{2\pi}\Delta\alpha\omega^2 R = (2\pi R - l)k\Delta\alpha.$$

Отсюда для радиуса вращающегося кольца получим:

$$R = \frac{2\pi k l}{4\pi^2 k - \omega^2 m}.$$

Из полученного выражения следует, что при приближении величины угловой скорости ω к значению $\omega = 2\pi\sqrt{k/m}$ кольцо должно неограниченно растягиваться. Однако в действительности этого не случится, так расчеты были построены на применимости закона Гука к описанию растяжения жгута, который «перестает работать» при относительно небольших удлинениях.

Задача 25

С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью u? Масса змеи m, длина l.

Решение:

Будем считать змею однородным гибким цилиндром. Пусть кобра начала подниматься в момент времени $t = 0$. Тогда её вертикальный импульс в момент времени $t > 0$ определяется выражением

$$p_y = \frac{m}{l}ut \cdot u = \frac{mu^2t}{l}.$$

Отсюда для изменения вертикальной компоненты импульса за малый промежуток времени Δt получаем

$$\Delta p_y = \frac{mu^2\Delta t}{l}.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на направленную вертикально вверх ось OY

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = F_{\text{равн},y} = N - mg,$$

где N - сила нормальной реакции со стороны земли, mg - действующая на змею сила тяжести. Используя полученное выше выражение для изменения проекции импульса, для силы N находим

$$N = mg + \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = mg + \frac{mu^2}{l}.$$

По третьему закону Ньютона, змея давит на землю с такой же по модулю силой. **Ответ:** $N = mg + \frac{mu^2}{l}$

7.1.3 Работа и Энергия

Теория.

Если на тело, движущееся по прямой, действует постоянная сила F, то механической работой A этой силы на перемещении s называется произведение $A = Fs\cos\alpha = f_s s$, где α - угол между векторами $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{s}$, а F_s - проекция силы на перемещение.

Довольно часто на тело одновременно действует несколько сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}$. Для каждой силы можно вычислить свою работу. Работой всех сил называется алгебраическая сумма работ всех сил (работа – величина аддитивная, т.е. получаемая сложением отдельных работ):

$$A_{\sum} = A_1 + a_2 + \dots + A_n.$$

При движении тела по криволинейной траектории или изменении силы в процессе движения, для расчета величины работы, можно пользоваться графическим методом (работа силы численно равна площади под кривой зависимости проекции силы на перемещение F_s от пути l).

Изменение кинетической энергии тела на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на тело на том же перемещении

$$\Delta K = K_2 - K_1 = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = A.$$

Сила называется консервативной, если её работа A, при перемещении тела из точки B в точку C, не зависит от траектории движения тела, а определяется только начальным и конечным его положениями. Примеры консервативных сил – сила тяжести и сила упругости. Пример неконсервативной силы – сила трения.

Любой консервативной силе соответствует потенциальная энергия, зависящая только от расположения тела в пространстве (или от относительного расположения его частей).

Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести для тела массой m определяется выражением

$$\Pi = mgh,$$

где g - модуль ускорения свободного падения, h отсчитывается от произвольно выбранного «нулевого уровня». Для протяженного тела h — высота центра тяжести над нулевым уровнем.

Потенциальная энергия силы упругости для пружины с жесткостью k равна

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

где x - деформация пружины.

Механическая энергия системы тел определяется как сумма кинетической энергии системы и потенциальной энергии взаимодействия всех тел системы

$$\mathrm{E} = \mathrm{K} + \Pi.$$

Механическая энергия замкнутой консервативной системы тел сохраняется.

Изменение механической энергии системы тел под действием внешних сил и внутренних неконсервативных сил равно суммарной работе этих сил

$$\Delta E = E_{\text{внеш}} + E_{\text{неконс}}.$$

Если система является замкнутой, то работа неконсервативных сил приводит к изменению внутренней энергии тел. При действии диссипативных сил (трение, неупругий удар) происходит увеличение внутренней энергии (выделяется теплота Q) за счет убыли механической энергии $E_1 = E_2 + Q$, $Q > 0$.

Задачи к семинару.

Задача 26

На земле лежит однородная цепь длиной $L = 4$ м и массой $m = 10$ кг. Цепь поднимают за один из концов так, что она отрывается от земли. Какую минимальную работу A при этом нужно совершить?

Решение:

Величину работы по поднятию цепи можно найти из закона о сохранении механической энергии, согласно которому изменение механической энергии системы под действием внешних сил и внутренних неконсервативных сил равно суммарной работе этих сил $\Delta E = A_{\text{внеш}} + A_{\text{неконс}}$. В рассматриваемой ситуации $A_{\text{внеш}} = A$ – искомая величина, а $A_{\text{неконс}} = 0$, так как силы трения и иные неконсервативные силы отсутствуют.

Механическая энергия цепи определяется её кинетической энергией K и потенциальной энергией Π.

Если нулевой уровень потенциальной энергии выбрать на уровне земли и учесть, что в исходном положении цепь покоилась, то её начальная механическая энергия равна нулю: $E_1 = K_1 + \Pi_1 = 0$.

В конечном положении цепь располагается вертикально, а её нижний конец едва касается поверхности земли. Её центр тяжести расположен выше уровня земли на $l/2$. А поскольку потенциальная энергия протяженных тел в поле тяжести определяется положением центра тяжести, то для потенциальной энергии цепи в конечном положении получаем

$$\Pi_2 = mg \cdot \frac{l}{2}.$$

Пусть кинетическая энергия цепи в конечном положении K_2. Тогда из закона сохранения энергии для работы $A_{\text{внеш}} = A$ получаем:

$$A = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mgl + K_2.$$

Из полученного выражения видно, что минимальная работа совершается в случае, когда $K_2 = 0$. Окончательно, для минимальной работы находим

$$A_{\text{мин}} = \frac{mgL}{2} = 200 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_{\text{мин}} = \dfrac{mgL}{2} = 200$ Дж.

Задача 27

На горизонтальном столе некоторая прямая линия разделяет две области: по одну сторону от этой линии стол гладкий, а по другую — шероховатый. На столе лежит однородная доска длиной L. Она расположена перпендикулярно линии и целиком находится на гладкой поверхности. К концу доски прикреплён один конец невесомой пружины, имеющей жёсткость k. Другой конец пружины начинают медленно тянуть в горизонтальном направлении вдоль доски так, что она перемещается через линию в сторону шероховатой поверхности. Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы полностью перетащить доску на шероховатую поверхность. Пружина не касается шероховатой поверхности, коэффициент трения доски об эту поверхность μ постоянная величина.

Решение:

В рассматриваемой ситуации механическая энергия не сохраняется, так в системе действуют силы трения. Совершенная работа A складывается из работы против сил трения (равной количеству выделившейся теплоты), работы по изменению потенциальной энергии Π пружины и изменению кинетической энергии K доски:

$$A = Q + \Delta\Pi + \Delta K.$$

Пусть x - расстояние от начала шероховатого участка до конца доски, к которому прикреплена пружина. Сила трения зависит от веса въехавшей на шероховатую поверхность части доски и определяется выражением

$$F_{\text{тр}}(x) = \mu m g \frac{x}{L}.$$

Так как сила трения линейно увеличивается в зависимости от величины x, то для расчета величины работы против силы трения нужно взять её среднее значение и умножить на расстояние, на которое переместилась доска:

$$Q = F_{\text{тр.ср.}} L = \frac{\mu m g L}{2}.$$

После перемещения всей доски на шероховатую поверхность пружина растянется под действием максимальной силы трения $F_{\text{тр.ср.макс.}} = \mu mg$ на величину $\Delta x = \mu mg/k$. Работу, которую необходимо совершить для растяжения пружины можно определить из соотношения

$$A_{\text{раст}} = \Delta\Pi_{\text{пр}} = \frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{(\mu mg)^2}{2k}.$$

Таким образом, величина работы, которую нужно совершить, чтобы полностью перетащить доску на шероховатую поверхность, определяется выражением

$$A = \frac{\mu mgL}{2} + \frac{(\mu mg)^2}{2k} + \Delta K.$$

Из данного соотношения видно, что минимальная величина работы A получается при $\Delta K = 0$.

Ответ: $A = \dfrac{\mu mgL}{2} + \dfrac{(\mu mg)^2}{2k}$.

Глава 8

Задачи для самостоятельного решения

Задача 28

Стержень AB длины L движется в плоскости чертежа (см. рисунок 6) так, что в данный момент времени скорость его конца A направлена под углом α, а скорость конца B – под углом β к оси стержня. Модуль скорости конца A равен v. Определите скорость конца B, угловую скорость вращения стержня.

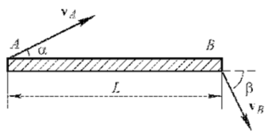


Рис. 6

Ответ: $v_B = v_A \cos\alpha / \cos\beta$; $\omega = \dfrac{v \cdot \sin(\alpha+\beta)}{L\cos\beta}$.

Задача 29

Жесткий стержень шарнирно закреплен так, что может свободно вращаться в плоскости рисунка вокруг оси, проходящей через точ-

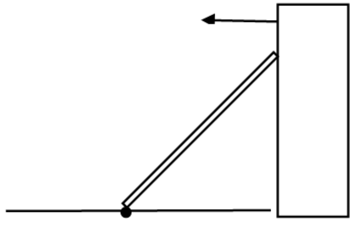


Рис. 7

ку A. Второй конец стержня упирается в гладкую вертикальную стенку, двигающуюся перпендикулярно своей поверхности со скоростью $\overrightarrow{V}$ (см. рисунок 7). Определите скорость конца стержня упирающегося в стенку в тот момент, когда стержень составляет с горизонталью угол α.

Ответ: $v = V\sqrt{1 + ctg^2\alpha}$.

Задача 30

Груз поднимают с некоторым ускорением, направленным вертикально вверх, прикладывая силу $F = 32$ Н к привязанному к грузу массивному однородному канату. Масса груза в три раза больше массы каната. Найдите силу натяжения каната в его середине.

Ответ: 28 Н.

Задача 31

Брусок массой m прикреплен к концу однородной веревки длиной l и массой $5m$. Другой конец веревки прикреплен к вертикальной оси. Брусок с верёвкой вращаются вокруг оси с постоянной угловой скоростью, скользя по гладкой горизонтальной поверхности стола. Размер груза мал по сравнению с длиной верёвки. Скорость бруска v. Найдите силу натяжения веревки на расстоянии $3l/5$ от оси вращения.

Ответ: $\dfrac{13mv^2}{5l}$.

Задача 32

Тонкая U-образная трубка постоянного внутреннего сечения с горизонтальным коленом длиной L и двумя одинаковыми вертикальными коленами, открытыми в атмосферу, заполнена водой не полностью (см. рисунок 8). В каждом вертикальном колене остается слой воздуха. Вода начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением не меньшим, чем $a_0 = 0{,}1g$. Найдите длину H слоя воздуха в одном вертикальном колене, когда трубка покоится. Найдите длину l вылившегося слоя воды при движении с ускорением $a_1 = g/8$. Горизонтальное колено остается всегда заполненным водой.

Рис. 8

Ответ: $H = L/20$; $l = L/40$.

Задача 33

На гладком закрепленном бревне радиусом R висит массивный однородный канат массой m и длиной $l = 3R$, прикрепленный к бревну в точке E (см. рисунок 9.). Точка E и ось бревна O находятся в одной горизонтальной плоскости. Найти силу натяжения каната в точке A. Найти силу натяжения каната в точке B такой, что угол AOB равен α ($\sin\alpha = 5/6$).

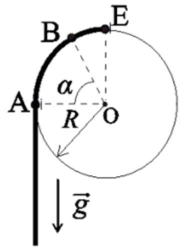


Рис. 9

Ответ: $T_A = \dfrac{6-\pi}{6}mg$; $T_B = \dfrac{23-3\pi}{18}mg$.

Задача 34

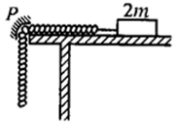


Рис. 10

Однородный гибкий канат массой m и длиной $L = 75$ см прикреплён к бруску массой $2m$, находящемуся на горизонтальной поверхности стола (см. рисунок 10). Со стола свешивается половина длины каната. Коэффициент трения скольжения бруска о стол $\mu = 0{,}15$. Трением каната о стол и направляющий жёлоб P пренебречь. Брусок удерживают в покое, а затем отпускают. Найти ускорение бруска в начале движения и скорость бруска в момент, когда канат соскользнёт со стола.

Ответ: $a = 0{,}65$ м/с^2; $V \approx 1$ м/с.

Часть II

Термодинамика

Глава 9

Понятие термодинамической системы

Наука термодинамика зародилась как самостоятельная дисциплина, после изобретения паровых машин. Паровые машины представляют собой частный случай тепловых двигателей. Необходимость в изучении закономерностей происходящего внутри тепловых двигателей превращения теплоты в работу привела к термодинамике.

Основной объект термодинамики — термодинамические системы. Термодинамическая система — это отделенная реальными или мысленными границами область пространства, содержащая достаточно большое количество частиц. Число частиц в термодинамических системах настолько велико, что становится невозможным (или бессмысленным) следить за параметрами каждой частицы в отдельности. Вместо этого термодинамические системы характеризуются параметрами, описывающими их в целом. О некоторых таких параметрах мы поговорим далее. Пока же отметим, что:

- параметры, описывающие термодинамическую системы в целом, называются макроскопическими;
- любой макроскопический параметр, в принципе, может быть получен из параметров отдельных частиц, составляющих термодинамическую систему.

В качестве частиц, составляющих термодинамические системы, могут выступать атомы, молекулы, электроны, фотоны и т.д.

Важно, что любая термодинамическая система имеет окружение, которое называется окружающей средой. При этом между термодинамической системой и ее окружающей средой может происходить обмен энергией и веществом. По характеру такого обмена термодинамические системы принято делить на:

- изолированные — не обмениваются ни энергией, ни веществом;
- адиабатически изолированные — отличаются от изолированных только тем, что могут обмениваться с окружающей средой энергией исключительно путем совершения механической работы;
- закрытые — обмениваются с окружающей средой энергией, но не могут обмениваться веществом;
- открытые — обмениваются с окружающей средой и энергией, и веществом.

Глава 10

Равновесное состояние и внутренняя энергия термодинамической системы. Уравнение состояния

Через достаточно большое время, термодинамическая система, будучи предоставлена самой себе, приходит в состояние, когда в ней прекращаются любые необратимые процессы и ее макроскопические параметры перестают меняться со временем (с точностью до флуктуаций). Такие состояния называются равновесными. В равновесном состоянии термодинамическая система описывается своими макроскопическими параметрами. Выбор конкретных параметров произволен и обычно зависит от решаемой задачи. Наиболее распространенными макроскопическими параметрами являются: температура, давление, объем. В случае термодинамических систем, состоящих из частиц разного сорта, используют массовые, объемные, мольные доли этих частиц, а также их концентрации. Макроскопических параметров у термодинамической системы может быть сколь угодно много, однако существует минимальное количество макроскопических параметров, полностью описывающих ее равновесное состояние.

Полную энергию термодинамической системы в системе отсчета, в которой ее центр масс покоится, можно рассматривать как сумму кинетической энергии ее частиц, потенциальной энергии взаимодействия частиц между собой, энергии внешних полей, энергии электронов в атомах, энергии нуклонов в ядрах, энергии элементарных частиц, составляющих нуклоны и т.д. Это очень большое число, и в большинстве задач все указанные слагаемые остаются неизменны, за исключением кинетической энергии частиц и потенциальной энергии их взаимодействия между собой. Поэтому принято следующее определение внутренней энергии термодинамической системы: это часть полной энергии системы, изменение которой в рамках рассматриваемых задач равно изменению полной энергии системы. Таким образом, внутренняя энергия термодинамической системы отличается от ее полной энергии на постоянную величину (очень-очень большую).

Пусть термодинамическая система описывается набором макроскопических параметров $x_1, x_2, ...$, и в любом равновесном состоянии выполняется соотношение

$$\varphi(x_1, x_2, ...) = 0,$$

где φ — это некоторое выражение, содержащее переменные $x_1, x_2, ...$, тогда это соотношение называется уравнением состояния. Зная уравнение состояния, мы можем предсказать, как изменится состояние системы, при изменении ее макроскопических параметров.

Простой термодинамической системой называется система, любое состояние которой описывается минимум двумя макроскопическими параметрами, а для уравнения состояния достаточно только трех переменных. Именно такими системами мы и будем в основном интересоваться.

10.1 Идеальный газ Уравнение Клапейрона–Менделеева Внутренняя энергия Теплоемкость

10.1.1 Теория

Термодинамическая система, температура T, давление p и объем V которой находятся в соотношении

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где m — полная масса термодинамической системы, а M — молярная масса составляющих ее частиц, называется идеальным газом. Уравнение состояния идеального газа также называют уравнением Клапейрона–Менделеева. Коэффициент R, входящий в уравнение Клапейрона–Менделеева, называется универсальной газовой постоянной, так как он одинаков для всех газов. Численно $R = 8.314$ Дж/(моль·К).

Уравнение Клапейрона–Менделеева было получено обобщением трех газовых законов, полученных экспериментальным путем в разное время европейскими физиками Робертом Бойлем, Эдмом Мариоттом, Жозефом Луи Гей-Люссаком и Жаком Шарлем:

- $T = const \Rightarrow pV = const$ — закон Бойля–Мариотта;
- $P = const \Rightarrow \dfrac{V}{T} = const$ — закон Гей-Люссака;

- $V = const \Rightarrow \dfrac{p}{T} = const$ — закон Шарля;

Уравнение Клапейрона–Менделеева может быть также получено из рассмотрения идеального газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

В качестве внутренней энергии идеального газа принято рассматривать кинетическую энергию всех его молекул в системе отсчета, где центр масс всей системы покоится. Остальные слагаемые полной энергии газа считаются не зависящими от его макроскопических параметров. Кинетическая энергия одной молекулы в газе складывается из энергии поступательного движения ее центра масс молекулы относительно центра масс всего газа и энергии вращательного движения относительно центра масс молекулы. Вкладом вращения одноатомных молекул во внутреннюю энергию газа можно пренебречь. Внутреннюю энергию одного моля газа в зависимости от структуры его молекул можно вычислить по формуле:

$$E_m = \begin{cases} \frac{3}{2}RT, & \text{одноатомные} \\ \frac{5}{2}RT, & \text{линейные} \\ \frac{6}{2}RT, & \text{нелиненые} \end{cases}$$

Соответственно, теплоемкость одного моля газа при постоянном давлении c_V равна: $3/2R$ для одноатомных молекул, $5/2R$ для линейных молекул, $6/2R$ для нелинейных молекул. По формуле Майера $c_p - c_V = R$ теплоемкость одного моля газа при постоянном давлении c_p : $5/2R$ для одноатомных молекул, $7/2R$ для линейных молекул, $8/2R$ для нелинейных молекул.

Линейными являются все двухатомные молекулы, такие как N_2 и O_2 в воздухе вокруг нас. Кроме того, есть небольшое количество трехатомных молекул, обладающих линейной структурой, например, молекула углекислого газа.

$$\mathrm{O = C = O}$$

Можно даже обнаружить линейные четырехатомные молекулы, например, ацетилен.

$$\mathrm{H-C\equiv C-H}$$

10.1.2 Задачи

Задача 35

Найти массу природного газа, объемом 64 м^3. Считать, что объем указан при нормальных условиях, а молярная масса природного газа примерно равна молярной массе метана CH_4.

Решение:

Обозначим искомую массу m, молярную массу метана $M = 16 \times 10^{-3}$ кг/моль, объем при нормальных условиях $V = 64$ м^3. Нормальными будем считать условия при давлении $p = 1$ атм $= 101325$ Па и температуре $T = 20$ °C $= 293.15$ K (в соответствии с правилами расчетов, принятых в газовой отрасли РФ).

Из уравнения Клапейрона–Менделеева $pV = \frac{m}{M}RT$ находим массу газа:

$m = \frac{pVM}{RT} = \frac{101325\cdot 64\cdot 16\cdot 10^{-3}}{8.314\cdot 293.15} = 42.571$ кг ≈ 42.6 кг.

Ответ: 42.6 кг.

10.2 Термодинамические процессы. Диаграммы процессов

10.2.1 Теория

При изменении параметров своей окружающей среды, термодинамическая система вынуждена перейти в новое состояние равновесия. Это явление называется термодинамическим процессом. Термодинамический процесс называется равновесным (квазистатическим), если система бесконечно медленно проходит непрерывный ряд близких термодинамических равновесных состояний. Разумеется, никакие реальные процессы не могут быть в точности равновесными. Мы можем считать некоторые термодинамические процессы равновесными лишь приблизительно.

Для простых систем важную роль играют так называемые изопроцессы:

- изотермические — при постоянной температуре $T = const$;
- изохорические — при постоянном объеме $V = const$;
- изобарические — при постоянном давлении $P = const$.

Вместе с ними рассматриваются также адиабатические процессы, происходящие без теплообмена с окружающей средой. Так как любое промежуточное состояние термодинамической системы в равновесном процессе считается равновесным, оно удовлетворяет уравнению состояния. В случае простых систем для описания равновесного состояния достаточно двух переменных. Это позволяет строить диаграммы равновесных процессов. Для этого на координатной плоскости выбранных

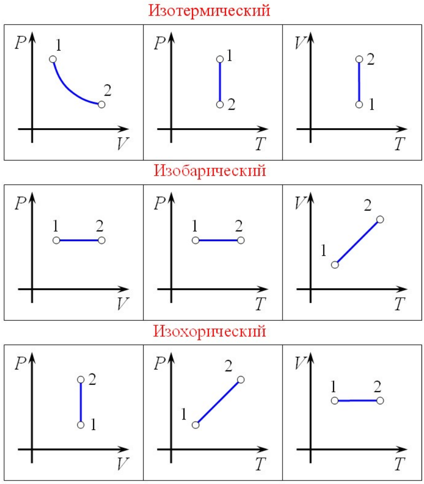


Рис. 11: Диаграммы изопроцессов.

двух переменных строят точки, соответствующие состояниям, через которые проходит система в равновесном процессе. Диаграммы некоторых изопроцессов показаны на рис. 11

10.2.2 Задачи

Задача 36

Газ при температуре 24 °C и атмосферном давлении занимает объем 10 л. Затем его изобарно нагревают до 90 °C. Какой объем займет газ?

Решение:

Обозначим атмосферное давление P_0, начальную температуру $T_0 = 24$ °C $= 297$ K, начальный объем $V_0 = 10$ л, конечную температуру $T = 90$ °C $= 363$ K, искомый конечный объем V. По закону Гей-Люссака $\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$, отсюда $V = V_0\frac{T}{T_0} = 10 \cdot \frac{363}{297} = 12.2$ л. (Получить соотношение для $\frac{V}{T}$ можно и с помощью уравнения Клапейрона–Менделеева, дважды записав его для каждого из состояний.)

Ответ: 12.2 л.

Задача 37

Газ находится в сосуде с жесткими стенками. При увеличении давления в 1,4 раза, температура изменилась на 40 °K. Найти начальную температуру газа.

Решение:

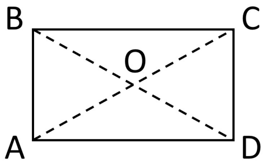
Обозначим начальное давление p_0, начальную температуру T_0, конечное давление p, конечную температуру T, разность температур $T - T_0 = \Delta T = 40$ °K. Так как газ находится в постоянном объеме, то выполняется закон Шарля $\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T}$ отсюда $\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0}$. Следовательно, $T_0 = \Delta T \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^{-1} = 40 \left(\frac{1}{0.4}\right) = 100$ °K.

Ответ: 100 K.

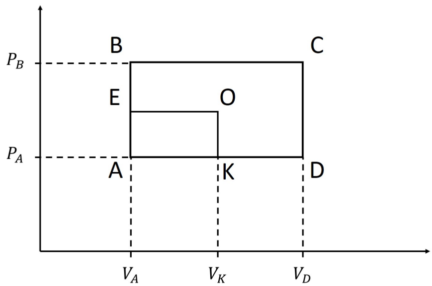
Задача 38

(Региональный этап, 2003 г.)

Идеальный газ совершает циклический процесс ABCDA, состоящий из изохор AB и CD и изобар AC и BD, как показано на рисунке. Известны температуры в точках A, B, C, они равны T_A, T_B, T_C соответственно. Найти температуру T_D в точке D и температуру T_O в точке O — пересечении диагоналей прямоугольника ABCD.



а)



б)

Рис. 12: К задаче 4.

Решение:

Точки A–C и B–D лежат на изобарах, поэтому к ним можно применить закон Гей-Люссака $\frac{V_A}{V_C} = \frac{T_A}{T_C}$. и $\frac{V_B}{V_D} = \frac{T_B}{T_D}$. Так как $V_A = V_B$ и $V_C = V_D$, то $\frac{T_A}{T_C} = \frac{T_B}{T_D}$, отсюда $T_D = \frac{T_B T_C}{T_A}$.

Для того чтобы найти температуру T_O, рассмотрим середины отрезков AB и AC, точки E и K, показанные на рисунке:

По построению $V_K = \frac{1}{2}(V_A + V_C)$, тогда из уравнения Клапейрона–Менделеева $T_K = \frac{p_K V_K}{\nu R}$. Так как $p_A = p_K = p_C$, то

$$T_K = \frac{1}{2}\frac{p_A V_C + p_B V_C}{\nu R} = \frac{1}{2}(T_A + T_C)\,.$$

Аналогично, пользуясь тем, что $V_A = V_B = V_E$ и $p_E = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$, находим

$$T_E = \frac{p_E V_E}{\nu R} = \frac{1}{2}\frac{p_A V_A + p_B V_B}{\nu R}.$$

Теперь T_O находим из прямоугольника AEOK так же, как мы находили T_D из прямоугольника ABCD:

$T_O = \frac{T_E T_K}{T_A}$. Подставим найденные ранее T_E и T_K

$$T_O = \frac{1}{4}\frac{(T_A + T_B)(T_A + T_C)}{T_A}$$

$$T_O = \frac{1}{4}\frac{T_A^2 + T_A T_B + T_A T_C + T_B T_C}{T_A}$$

$$T_O = \frac{1}{4}\left(T_A + T_B + T_C + T_D\right).$$

Ответ: $T_O = \frac{1}{4}\left(T_A + T_B + T_C + T_D\right)$.

Глава 11

Работа в циклическом процессе. Коэффициент полезного действия

11.1 Теория

При отсутствии внешних полей и превращений вещества внутри термодинамической системы, первое начало термодинамики можно записать следующим образом:

$$Q = \Delta U + A,$$

где ΔU равно изменению внутренней энергии в некотором термодинамическом процессе, Q — это количество теплоты, переданное системе (если теплота от системы отбирается, то $Q < 0$), A — механическая работа, совершенная системой над ее окружающей средой (если работу совершает окружающая среда, то $A < 0$).

На диаграмме равновесного процесса механическая работа, совершаемая термодинамической системой, равна площади криволинейной трапеции под графиком. Работа в изохорическом процессе ($V = const$) равна нулю. В изобарическом процессе $A_p = p\Delta V$. Пользуясь уравнением состояния, можно найти работу в изобарическом процессе идеального газа массы m и молярной массы M:

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T.$$

Если термодинамическая система совершает циклический процесс, т.е. конечное состояние системы совпадает с начальным, то изменение ее внутренней энергии равно нулю. В некоторых процессах, составляющих цикл, теплота передается системе, а в других она отбирается от нее. Если принять передаваемую системе теплоту положительной, а отбираемую от нее — отрицательной, то первое начало термодинамики приводит нас к тому, что $\sum Q = Q_{\text{перед}} - Q_{\text{отобр}} = A$, т.е. механическая работа, совершаемая термодинамической системой в циклическом процессе, равна количеству переданной теплоты минус количество отобранной. Количество теплоты, передаваемое термодинамической системе в том или ином процессе, можно узнать по изменению температуры, зная ее теплоемкость в этом процессе.

Прямым циклом называется круговой процесс, в котором термодинамическая система совершает работу над своим окружением. Обратным циклом называется круговой процесс, в котором работа совершается над термодинамической системой.

Второе начало термодинамики запрещает циклические процессы, в которых теплота только передается термодинамической системе: обязательно в цикле должны быть процессы, в которых теплота от системы отбирается. По этой причине, совершаемая в циклическом процессе работа всегда меньше переданной системе теплоты.

Для того чтобы охарактеризовать качество циклического процесса с точки зрения совершаемой в нем механической работы, вводят понятие коэффициента полезного действия КПД:

$$\text{КПД} = \frac{A}{Q_{\text{перед}}} = \frac{Q_{\text{перед}} - Q_{\text{отобр}}}{Q_{\text{перед}}} = 1 - \frac{Q_{\text{отобр}}}{Q_{\text{перед}}}.$$

11.2 Задачи

Задача 39

В вертикально расположенном цилиндре с площадью основания 1 дм^2, под поршнем массой 10 кг, скользящим без трения, находится воздух. При изобарном нагревании воздуха поршень поднялся на 20 см. Какую работу совершил воздух, если наружное давление равно 100 кПа?

Решение:

Обозначим наружное давление $p_0 = 10^5$ Па, массу поршня $m = 10$ кг, площадь основания цилиндра $S =$ $= 0.01$ м^2, высоту подъема поршня $h = 0.2$ м. Работа, совершенная воздухом под поршнем, равна $A = p\Delta V$, $\Delta V = hS =$ $= 0.2 \cdot 0.01 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3. Итак, $A = 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 200$ Дж.

Ответ: 200 Дж.

Задача 40

При подведении к идеальному газу количества теплоты 125 кДж газ совершает работу 50 кДж против внешних сил. Насколько при этом изменилась внутренняя энергия газа?

Решение:

Обозначим подведенное к газу количество теплоты $Q =$ $= 125$ кДж, совершённую им работу $A = 50$ кДж, искомое изменение внутренней энергии газа ΔU.

Согласно первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

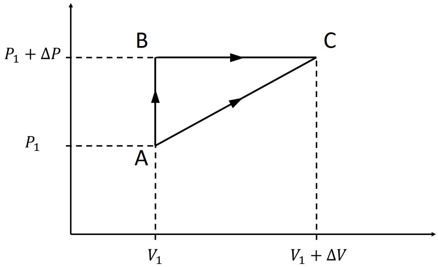


Рис. 13: К задаче 41.

отсюда находим

$$\Delta U = Q - A = 125 - 50 = 75 \text{ кДж}.$$

Ответ: 75 кДж.

Задача 41

(Региональный этап, 2000 г.)

Найти максимально возможное значение КПД показанного на рис.13 цикла, в котором участвует идеальный одноатомный газ. Указание: для достижения максимального КПД можно менять положение треугольника на диаграмме.

Решение:

Необходимо заметить, что теплота передается газу на изобаре и изохоре, обозначим количества теплоты соответственно Q_p и Q_V. Совершенная газом в цикле работа равна площади треугольника на диаграмме

$$A = \frac{1}{2}\Delta P \Delta V.$$

Количества теплоты найдем по определению теплоемкости $Q_V = \nu c_V \Delta T_1$, $Q_p = \nu c_p \Delta T_2$. Чтобы найти изменения температур, используем уравнение Клапейрона–Менделеева $pv = \nu RT$. Для изохоры: $P_1V_1 = \nu RT_{V1}$, $(P_1 + \Delta P)V_1$, отсюда

$$\Delta T_1 = T_{V2} - T_{V1} = \frac{\Delta P V_1}{\nu R}.$$

Для изобары: $P_2V_1 = \nu RT_{p1}$, $P_2(V_1 + \Delta V) = \nu RT_{p2}$, где $P_2 = P_1 + \Delta P$, отсюда

$$\Delta T_2 = T_{p2} - T_{p1} = \frac{P_2 \Delta V}{\nu R}.$$

По определению,

$$\text{КПД} = \frac{A}{Q_V + Q_p}$$

$$\text{КПД} = \frac{1}{2} \frac{\Delta P \Delta V}{\frac{c_v}{R}\Delta P V_1 + \frac{c_p}{R} P_2 \Delta V} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_V}{R}\frac{V_1}{\Delta V} + \frac{c_P}{R}\frac{P_2}{\Delta P}\right)^{-1}.$$

Чтобы КПД был максимальным, выражение в скобках, которое зависит от V_1 и P_2, должно быть минимальным. Минимальное значение $V_1 = 0$, а минимальное значение $P_2 = \Delta P$. Таким образом, $\text{КПД}_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_p}{R}\right)^{-1} \frac{R}{2c_p} = \frac{R}{2\cdot\frac{5}{2}R} = \frac{1}{5} = 0.2$.

Ответ: 0.2 .

11.3 Цикл Карно

Цикл Карно был предложен Сади Карно в 1824 году. Он представляет собой циклический процесс, состоящий из двух изотерм при температурах $T_2 < T_1$, переход между которыми осуществляется в адиабатических процессах. Диаграмма цикла Карно в координатах давление–температура показана

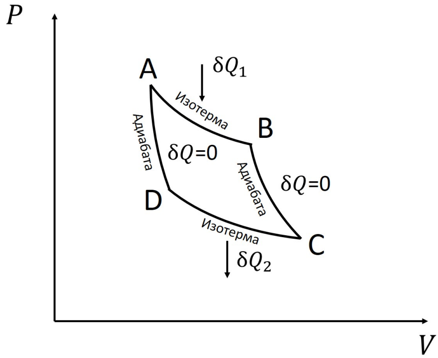


Рис. 14: Цикл Карно.

на рис. 14. Температура T_1 называется температурой нагревателя, а T_2 — температурой холодильника. Цикл Карно обладает двумя важными свойствами, сформулированными в виде двух теорем Карно.

Первая теорема Карно: КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, не зависит от рабочего тела и определяется только температурами нагревателя и холодильника, при этом КПД выражается следующей формулой:

$$\text{КПД} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Вторая теорема Карно: максимальный КПД любой тепловой машины, работающей при тех же температурах нагревателя и холодильника, не может превышать КПД цикла Карно.

11.4 Задачи

Задача 42

Температура нагревателя идеальной тепловой машины 127 °C, а холодильника 27 °C. Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за 1 с, равно 60 кДж. Вычислить КПД машины, количество теплоты, отдаваемое холодильнику в 1 с, и мощность машины.

Решение:

Обозначим температуру нагревателя $T_H = 127\,^\circ\text{C} = 400$ K, температуру холодильника $T_X = 27\ ^\circ\text{C} = 300$ K, количество теплоты от нагревателя $Q_H = 60$ кДж, искомую теплоту на холодильник Q_X, искомую мощность машины N, время работы $t = 1$ с.

По теореме Карно

$$\text{КПД} = 1 - \frac{T_X}{T_H} = 1 - \frac{300}{400} = 0.25.$$

Работа, совершаемая машиной,

$$A = Q_H - Q_X.$$

По определению $\text{КПД} = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}$, отсюда

$$Q_X = Q_H(1 - \text{КПД}) = 60 \cdot (1 - 0.25) = 45 \text{ кДж}.$$

По определению мощность $N = \frac{A}{t} = \frac{Q_H - Q_X}{t} = \frac{60-45}{1} = 15$ кВт.

Ответ: 0.25, 45 кДж, 15 кВт.

Задача 43

Идеальная тепловая машина поднимает груз массой $m = 400$ кг. Рабочее тело машины получает от нагревателя с температурой $T = 200$ °C количество теплоты, равное $Q_1 = 80$ кДж. Определить КПД двигателя и количество теплоты, переданное холодильнику Q_2. На какую максимальную высоту поднимет груз эта тепловая машина? Трением пренебречь. В качестве холодильника выступает окружающий воздух, находящийся при нормальных условиях.

Решение:

Примем температуру холодильника равной комнатной и обозначим ее $T_2 = 293$ K. По теореме Карно

$$\text{КПД} = 1 - \frac{T_2}{T} = 1 - \frac{293}{473}.$$

Работа, совершаемая машиной, $A = Q_1 - Q_2$. По определению

$$\text{КПД} = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

Отсюда $Q_2 = Q_1\,(1 - \text{КПД}) = 80 \cdot (1 - 0.38) = 49.6$ кДж. $A = 80 - 49.6 = 30.4$ кДж $= 30.4 \cdot 10^3$ Дж.Совершенная работа пошла на подъем тела, потому, если пренебречь потерями, $A = mgH$, значит $H = \frac{A}{mg} = \frac{30.4 \cdot 10^3}{400 \cdot 10} = 7.6$ м.

Ответ: 0.38, 49.6 кДж, 7.6 м.

Задача 44

Рабочее тело теплового двигателя совершает цикл Карно, в котором температура нагревателя вдвое больше температуры холодильника. Найти КПД. Каким будет КПД, если в качестве рабочего тела выступает двухатомный идеальный газ.

Решение:

Обозначим температуру нагревателя T_H, а температуру холодильника T_X. По теореме Карно

$$\text{КПД} = 1 - \frac{T_X}{T_H} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5\,.$$

КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела, поэтому для двухатомного идеального газа КПД останется тем же.

Ответ: $0.5\,$.

Глава 12

Задачи для самостоятельного решения

1. Пузырек воздуха всплывает со дна водоёма. На глубине 2 м он имел объем 1 мм^3. Какой объем приобрел пузырек у поверхности воды?

2. В баллоне объемом 40 л при комнатной температуре, под давлением 15 МПа находится водород. Найти максимальное изменение внутренней энергии водорода, если при переходе его в объем 4 м^3 давление упало до 1 МПа.

3. Какую работу A совершает газ, количество вещества которого ν, при изобарном повышении температуры на ΔT?

4. В вертикально расположенном цилиндре с площадью основания 1 дм^2 под поршнем массой 10 кг, скользящим без трения, находится воздух. При изобарном нагревании воздуха поршень поднялся на 20 см. Какую работу совершил воздух, если наружное давление равно 100 кПа?

5. При подведении к идеальному газу количества теплоты 125 кДж газ совершает работу 50 кДж против внешних сил. Насколько при этом изменилась внутренняя энергия газа?

6. (Региональный этап, 2006 г.) Имеется два подъёмных устройства одинаковой конструкции, показанной на рисунке. Подъем осуществляется за счет расширения при нагревании идеального газа в цилиндре. В первом устройстве используется метан (CH_4), а во втором — азот (N_2). Найти отношение КПД двух подъемных устройств.

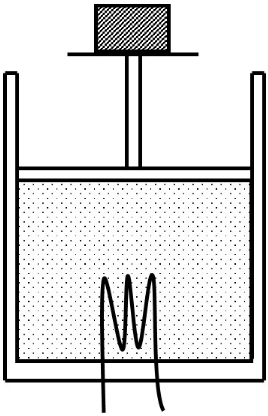


Рис. 15: К задаче 6.

7. Для нагревания идеального газа массой 1 кг на 7 °C при постоянном давлении потребовалось на 1820 Дж теплоты больше, чем при постоянном объеме. Что это за газ? *Указание: найдите молярную массу газа.*

8. Трубка постоянного внутреннего сечения в форме кольца расположена в вертикальной плоскости, как показано на рисунке. Неподвижная стенка A и свободно перемещающийся по трубке маленький столбик ртути B делят

всё пространство внутри трубки на две неравные части. Каждая из них заполнена идеальным газом, причем в большей из частей трубки находится вдвое больше молей газа, чем в меньшей. Исходно температура газа в меньшей части трубки была $T_1 = 260$ K, а в большей — $T_2 = 410$ K. При этом ртуть расположена так, что радиус, проведенный к ней из центра кольца составляет с горизонтом угол $\alpha_1 = 30°$. До какой одинаковой температуры нужно довести газ в обеих частях трубки, чтобы ртуть оказалась в положении C, которому соответствует угол $\alpha_2 = 60°$? Протяженность столбика ртути внутри трубки и диаметр внутреннего сечения трубки много меньше радиуса кольца. Давление паров ртути не учитывать.

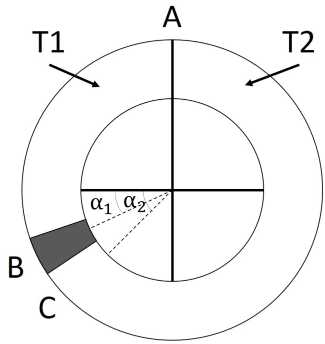


Рис. 16: К задаче 8.

Часть III

Электричество

Глава 13

Электростатика

13.1 Закон Кулона

Теория.

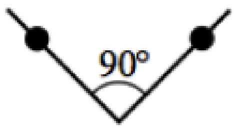
Основой электростатики является закон Кулона, описывающий силу взаимодействия двух зарядов q_1 и q_2, который имеет вид

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon^3}\vec{r},$$

где r – расстояние между зарядами, k – константа, которая зависит от выбора системы единиц измерения, ε - диэлектрическая проницаемость. В системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость.

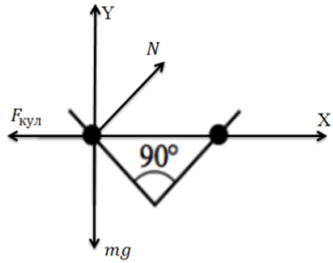
Задача 45

(Росатом)



Две маленьких бусинки массой m заряжены зарядами Q и Q. Бусинки надеты на спицы, которые расположены в вертикальной плоскости симметрично по отношению к вертикали, и угол между которыми равен 90° (см. рисунок). Каково расстояние между бусинками в положении равновесия?

Решение:



На каждый шарик действует три силы. Сила тяжести, сила Кулона и сила реакции опоры. Проецируя силы на оси, которые введены так, как показано на рисунке и записывая условие равновесия получаем:

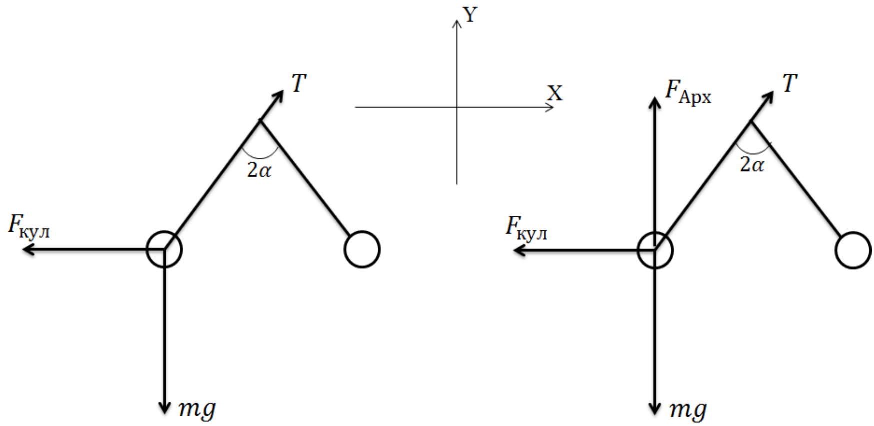
$$OY : N \cdot \sin 45 = mg,$$
$$OX : N \cdot \cos 45 = F_{кул}.$$

где $F_{кул} = k\frac{Q^2}{l^2}$, l - расстояние между шариками. Разделив одно уравнение на другое, получаем, что расстояние между шариками равно $l = \sqrt{\frac{lQ^2}{mg}}$.

Ответ: $l = \sqrt{\frac{lQ^2}{mg}}$.

Задача 46

Два одинаково заряженных шариков одного размера и массы подвешены на нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке. Опуская шарики в жидкий диэлектрик, заметили, что угол отклонения нитей от вертикали в воздухе и диэлектрике остается одним и тем же. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если его плотность в 1,25 раза меньше плотности материала шариков.



Решение:

В первом случае на заряженные шарики действует три силы: сила Кулона, сила натяжения нити, а также сила тяжести. Спроецируем силы на вертикальную и горизонтальную оси.

$$OY : T_1 \cos(\alpha) = mg, \tag{13.1}$$

$$OX : T_1 \sin(\alpha) = k\frac{Q^2}{l^2}. \tag{13.2}$$

Во втором случае сила Кулона в ε раз меньше, а также необходимо учесть силу Архимеда. Спроецируем силы на вертикальную и горизонтальные оси:

$$OY : T_2 \cos(\alpha) = mg - F_{Apx}, \tag{13.3}$$

$$OX : T_2 \sin(\alpha) = k\frac{Q^2}{\varepsilon l^2}. \tag{13.4}$$

Разделим уравнение 13.1 на 13.2, а также 13.3 на 13.4, воспользовавшись условием того, что углы в первом и втором случае одинаковые получаем

$$\frac{mgl^2}{kQ^2} = \frac{(mg - F_{Apx})\varepsilon l^2}{kQ^2}.$$

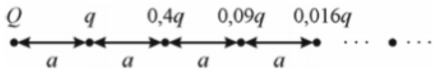
Сила Архимеда равна $\rho_Д V$, $\rho_Д$ – плотность диэлектрика. Выражая из последнего уравнения диэлектрическую проницаемость получаем, что она равна 5.

Ответ: $\varepsilon = 5$.

Среди задач на силу Кулона часто встречаются задачи на цепочки зарядов. Обычно такие задачи решаются выделение некоторой последовательности и ее суммированием (например, сумма геометрической прогрессии).

Задача 47

(МФО)



Найдите модуль электростатической силы, действующей на точечный заряд Q в бесконечной системе точечных зарядов, изображённой на рисунке. Все заряды закреплены в вакууме на одной прямой, имеют одинаковый знак, расстояния между соседними зарядами одинаковы и равны a.

Решение:

Сила, действующая на заряд Q, равна

$$F = \frac{kQq}{a^2} + \frac{0{,}4kQq}{4a^2} + \frac{0{,}09kQq}{9a^2} \dots = \\ = \frac{kQq}{a^2}(1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \dots) = \frac{9}{10}\frac{kQq}{a^2}.$$

т.к. сумма геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, при $|q| < 1$.

Ответ: $F = \frac{9}{10}\frac{kQq}{a^2}$.

Задача 48

(Фольклор) Тонкое проволочное кольцо радиуса R несет электрический заряд q. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q, причем $Q \gg q$. Определить силу растягивающую кольцо.

Решение:

Так как $Q \gg q$, то взаимодействием между отдельными элементами кольца можно пренебречь. Рассмотри малый элемент кольца длинной $\Delta\alpha$. Между этим элементом кольца и точечным зарядом действует сила кулона $F = k\frac{Q\Delta q}{R^2}$, где $\Delta q = \frac{q}{2\pi}\Delta\alpha$ – заряд элемента кольца. Силы натяжения, действующие на элемент кольца, направлены по касательным к элементу и в сумме дают силу противоположную силе Кулона, равную $T\Delta\alpha$. Приравнивая эти силы получаем $T = k\frac{Qq}{2\pi R^2}$.

Ответ: $T = k\frac{Qq}{2\pi R^2}$.

13.2 Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции

Теория.

Сила взаимодействия двух точечных зарядов определяется законом Кулона

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r} = k\frac{q_1}{r^3}\vec{r}q_2 = \vec{E}q_2,$$

где введено обозначение $\vec{E} = k\frac{q_1}{r^2}\vec{r}$. Величину E называют напряженностью электростатического поля точечного заряда.

Если мы рассмотрим систему из $N+1$ точечных зарядов и найдем силу действующую на $N+1$-й заряд со стороны N других точечных зарядов, то мы получим, что

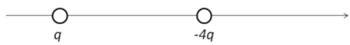
$$\vec{F} = q_{N+1}(\vec{E_1} + ... + \vec{E_N}) = q_{N+1}\vec{E}.$$

Мы видим, что для того, чтобы найти значение силы можно сначала найти суммарное поле E, которое равняется векторной сумме полей от отдельных зарядов, т.е. мы получаем **принцип суперпозиции электрических полей.**

Задача 49

Два разноименных точечных заряда q и $-4q$ закреплены на расстоянии a друг от друга. Каким должен быть заряд Q и где следует его расположить, чтобы вся система находилась в равновесии?

Решение:



Найдем точки, лежащие на линии соединяющей заряды, такие, что напряженность поля в них равна нулю. Начало координат поместим в ту же точку, в которой расположен заряд q. Тогда напряженность поля на оси x в произвольной точке равна

$$E = \frac{kq}{x^2} - \frac{4kq}{(a-x)^2}.$$

Приравнивая напряженность поля к нулю, получаем, что точки, в которые можно поместить заряд Q таким образом, чтобы на него электростатическая сила была равна нулю будут иметь координаты $-a$ и $a/3$. Очевидно, что последний вариант не подходит, т.к. если мы поместим туда положительный (отрицательный) заряд, то заряд $-4q$ (q) не будет находится в равновесии. Если же мы поместим в точку с координатами $-a$ заряд Q и определим его величину таким образом, чтобы оба заряда находили в равновесии, то получим, что его значение должно ровняться $-4q$.

Ответ: $Q = -4q$; $x = -a$.

13.3 Потенциал электростатического поля

Теория.

Работа по перемещение точечного заряда в электрическом поле не зависит от формы пути. Для сил, обладающих таким свойством, можно ввести понятие потенциала. Разностью потенциалов между точками и называется работа по перемещению единичного заряда из точки A в точку B. Потенциал точечного заряда Q на расстоянии r определяется выражением

$$\varphi = \frac{kQ}{r}.$$

В последнем выражении мы предполагаем, что потенциал точечного заряда на бесконечности равен 0.

Кроме потенциала точечного заряда, для решения задач, необходимо знать разность потенциалов между двумя точками, находящимися на одной силовой линии однородного электрического поля E на расстоянии l. Она определяется выражением

$$\Delta\varphi = El.$$

Стоит отметить, что при перемещении в направлении перпендикулярном силовым линиям величина потенциала не изменяется, так как работа при перемещении заряда в этом направлении равна 0. Величина потенциала вдоль силовой линии уменьшается.

Задача 50

(Фольклор) Найти потенциал электрического поля создаваемого на оси кольца радиуса R и заряда Q на расстоянии L.

Решение:

Рассмотрим элемент кольца $\Delta\alpha$. В точке на оси кольца он создает потенциал равный $\Delta\varphi = k\frac{\Delta q}{\sqrt{L^2+R^2}}$. Заметим, что значение потенциала одинаково для любого элемента кольца, откуда получаем, что суммарный потенциал равен

Ответ: $\varphi = \frac{qk}{\sqrt{L^2+R^2}}$.

Задача 51

Пирамида $SABCD$ высотой H равномерно заряжена по объему. Потенциал в точке S равен φ_0. От этой пирамиды плоскостью, параллельно основанию, отрезают пирамиду $SA'B'C'D'$ высотой h и удаляют ее на бесконечность. Найдите потенциал φ в той точке, где находилась вершина S исходной пирамиды.

Решение:

Пусть V, V', Q, Q' – объемы и заряды пирамид $SABCD$ и $SA'B'C'D'$. Т.к. пирамиды подобны и их заряды пропорциональны их объему, а объем – кубу высоты, то $V/V' = Q/Q' = H^3/h^3$. До того, как часть исходной пирамиды отрезали, потенциал φ_0 в точке S складывался из потенциала φ' пирамиды $SA'B'C'D'$ и потенциала φ'' оставшейся части $ABCDA'B'C'D'$, т.е. $\varphi_0 = \varphi' + \varphi''$.

Заметим, что потенциал, создаваемый в точке S каждой из пирамид, прямо пропорционален их заряду и обратно пропорционален их характерному линейному размеру. Например, если мы рассмотрим заряд на середине высоты пирамиды, то его расстояние до вершины в одном и другом случае будет относиться как h/H. Поэтому:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi'} = \frac{\frac{Q}{H}}{\frac{Q'}{h}} = \frac{H^2}{h^2} \text{ получаем:}$$

Ответ: $\varphi'' = \varphi_0 - \varphi' = (1 - \frac{h^2}{H^2})\varphi_0$.

Задача 52

(Соболев М. Всероссийская олимпиада 2008, 4ipho.ru)

Тонкое кольцо радиусом 5 см однородно заряжено зарядом 10^{-8} Кл. Какую минимальную скорость нужно сообщить протону, находящемуся вдали от кольца, чтобы он пролетел по оси кольца через его центр? Пусть теперь заряд равномерно распределен по поверхности тонкого диска такого же радиуса. В центре диска имеется небольшое отверстие. Какую минимальную скорость нужно сообщить протону, находящемуся вдали от диска, чтобы он пролетел через это отверстие. Заряд $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, масса протона $1{,}672\cdot10^{-27}$ кг.

Решение:

По принципу суперпозиции потенциал φ_a в центре кольца равен $\varphi_a = kQ/R$. Потенциальная энергия W_a протона в центре кольца $W_a = kQe/R$. По закону сохранения энергии $W_a = mv^2/2$, где m – масса протона.

Тогда

$$v + a_{min} = \sqrt{\frac{2kQe}{Rm}} = 5{,}9\cdot 105 \text{ м/с}.$$

Найдем потенциал $\varphi_б$ в центре равномерно заряженного диска. Поверхностная плотность заряда на диске $\sigma = Q/S = Q/(\pi R^2)$. Рассмотрим элементарное кольцо радиусом r и толщиной dr. Заряд этого кольца равен

$$dq = \sigma 2\pi\cdot dr = \frac{2Qrdr}{R^2}.$$

Потенциал, создаваемый элементарным кольцом в его центре, равен

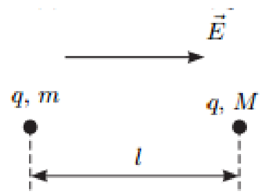
$$d\varphi_б = k\frac{dq}{r} = 2k\frac{Qdr}{R^2}.$$

Так как потенциал отдельного кольца не зависит от его радиуса, то потенциал в центре диска равен $\varphi_б = 2kQ/R$, и, так как $\varphi_б = 2\varphi_а$, то $W_б = 2W_а$, следовательно $v_{б\,\min} = \sqrt{2}v_{а\,\min} = 8{,}3 \cdot 105$ м/с.

Ответ: $v_{б\,\min} = \sqrt{2}v_{а\,\min} = 8{,}3 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 53

(Воробьев И., 4ipho.ru)



Две материальные точки с массами m и M ($M \gg m$) и одинаковыми положительными зарядами q находятся на расстоянии l друг от друга в однородном электрическом поле E, направленном от m к M. В начальный момент скорости точек равны 0. Найдите максимальное расстояние между точками при их дальнейшем движении. Считайте, что точки всё время движутся вдоль одной прямой.

Решение:

Из второго закона Ньютона найдем ускорение точки массы m

$$a_1 = -k\frac{q^2}{mr^2} + \frac{qE}{m},$$

и ускорение точки массы M

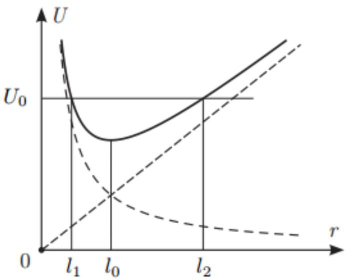
$$a_1 = -k\frac{q^2}{Mr^2} + \frac{qE}{M}.$$

Здесь r – расстояние между точками, за положительное выбрано направление от m к M. Найдем относительное ускорение точек:

$$a_{отн} = a_2 - a_1 = k\frac{q^2}{r^2}\frac{M+m}{mM} - qE\frac{M-m}{Mm}.$$

Таким же уравнением описывается движение точечного заряда q массой $\mu = mM/(m+M)$, находящегося в поле неподвижного точечного заряда q и в однородном поле $E_1 = -E(M-m)/(M+m)$. Будем рассматривать эту эквивалентную задачу. Потенциальная энергия заряда:

$$U(r) = k\frac{q^2}{r} + qE_1 r.$$



Из графика зависимости $U(r)$ видим, что движение заряда происходит в ограниченной области $l_1 \le r \le l_2$, l_1 и l_2 – корни уравнения

$$U_0 = k\frac{q^2}{r} + qE_1 r$$

$$r^2 - \frac{U_0}{qE_1}r + \frac{kq}{E_1} = 0.$$

По теорема Виета произведение корней не зависит от U_0 и равно $l_1 l_2 = l_0^2$, где $l_0 = \sqrt{kq/E_1}$. Таким образом, получаем, что если начальное расстояние l меньше чем l_0, то расстояние между зарядами будет увеличиваться до максимального значения l_0^2/l, а затем уменьшаться. Если же $l < l_0$, то начальное расстояние и будет максимальным. При $l = l_0$ расстояние между зарядами меняться не будет.

Ответ: $l = l_0$.

13.4 Теорема Гаусса

Теория.

Потоком вектора E через площадь S мы будем называть величину равную

$$\Phi = ES\cos\varphi,$$

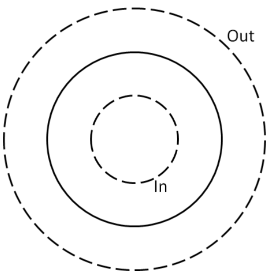
где φ – угол между вектором E и нормалью к площади S.

Электрическое поле точечных зарядов обладает двумя важными свойствами. Его величина убывает пропорционально квадрату расстояния, и оно является центральным (т.е. направленным по линии соединяющей заряд и точку, в которой измеряется величина электрического поля). Эти два свойства приводят к теореме Гаусса: *поток через любую* ***замкнутую*** *поверхность S не зависит от формы этой поверхности и равен Q/ε_0, где Q – суммарный заряд* ***внутри*** *этой поверхности.*

Для вычисления напряженности электрического поля теорема Гаусса используется, когда в задаче есть симметрия. Поток электрического поля вычисляется двумя способами - по определению и через теорему Гаусса, в результате получается уравнение, через которое можно найти напряженность электрического поля E.

Задача 54

Найти напряженность электрического поля внутри и вне равномерно заряженной сферы с суммарным зарядом Q.



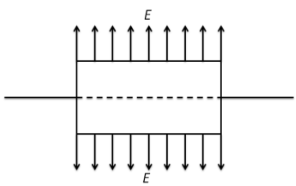
Решение:

Задача обладает сферической симметрией. Поэтому выделим две сферические поверхности – внутри проводящей сферы и снаружи. Сначала рассмотрим внешнюю сферу. Величина напряженности электрического поля на ее поверхности имеет одну и ту же абсолютную величину в любой ее точке и направлена перпендикулярно к ее поверхности. Поэтому величина потока по определению будет равна $\varPhi = 4\pi E_{out}$, где E_{out} – величина напряженности электрического поля на внешней сфере. По теореме Гаусса величина потока будет $\varPhi = Q/\varepsilon_0$. Из последних двух выражений получаем, что напряженность электрического поля вне сферы совпадает с напряженностью электрического поля точечного заряда и равна $E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$. Аналогично рассуждая, получаем, что напряженность поля внутри сферы равна нулю, т.к. поток через внутреннюю сферу по теореме Гаусса будет равен 0 (внутри этой сферы нет электрического заряда).

Ответ: внутри сферы $E_{in} = 0$; снаружи $E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$.

Задача 55

Найти напряженность электрического поля равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ.



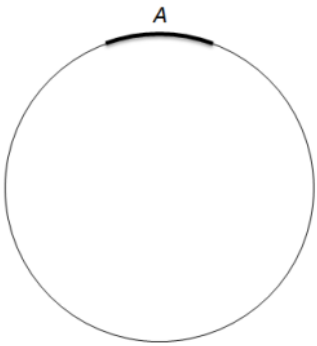
Решение:

Выделим цилиндр таким образом, чтобы равномерно заряженная плоскость проходила через середину боковой поверхности параллельно основания цилиндра. В этом случае величина напряженности электрического поля будет одинаковая на каждом из оснований цилиндра. Вычислим поток непосредственно по определению. Поток через боковую поверхность цилиндра в силу симметрии равен нулю (так как плоскость бесконечна, то напряженность электрического поля везде направлена вертикально вверх и не имеет горизонтальной составляющей). Поток через основания цилиндра будет равен $2ES$. Вычислим поток электрического поля, используя теорему Гаусса. Суммарный заряд внутри цилиндра находится на круге, обозначенный на рисунке штриховой линией. Величина заряда равна σS, откуда получаем, что поток равен $\sigma S/\varepsilon_0$. Таким образом получаем, что величина напряженности электрического поля равна

Ответ: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Задача 56

(Фольклор) По сфере радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определить давление изнутри на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.



Решение:

Найдем силу, действующую на элементарную площадку со стороны остальных зарядов сферы. Для этого необходимо найти величину электрического поля, создаваемого остальными зарядами. Рассмотрим точку, расположенную непосредственно над элементарной площадкой . Напряженность электрического поля в этой точке равна напряженности электрического поля создаваемого равномерно заряженной сферой $\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, где σ – поверхностная плотность электрического заряда. С другой стороны величина напряженности электрического поля в этой точке равна сумме полей от элементарной площади и остальной части сферы E_1:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + E_1.$$

Откуда получаем, что $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Тогда сила, действующая на элементарную площадь , равна

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}$$

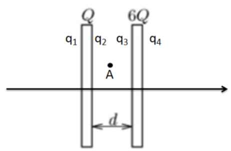
Откуда получаем, что давление равно
Ответ: $p = F/S = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

Задача 57

(Олимпиады МФТИ)

Две проводящие пластины с положительными зарядами Q и $6Q$ расположены параллельно и напротив друг друга (см. рисунок). Площадь каждой пластины S, размеры пластин велики по сравнению с расстоянием d между ними, и можно считать, что заряды распределены по каждой поверхности пластин равномерно. Найдите разность потенциалов правой и левой пластин.

Решение:



В таком типе задач, как правило, достаточно найти заряды на всех поверхностях каждой пластины, после чего будет достаточно просто получить ответ. Обозначим заряды на поверхностях пластин как q_1, q_2, q_3 и q_4. Для того, чтобы получить значения этих зарядов необходимо воспользоваться законом сохранения заряда, а также тем фактом, что напряженность электрического поля внутри проводящих пластин равна нулю.

Закон сохранения заряда нам дает, что:

$$q_1 + q_2 = Q,$$

$$q_3 + q_4 = 6Q.$$

Запишем условие, что напряженность электрического поля внутри левой пластины равна нулю. В силу принципа суперпозиции, величина напряженности электрического поля будет равна сумме напряженностей четырех заряженных плоскостей.

$$\frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0.$$

Аналогично для правой проводящей пластины

$$\frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0.$$

Таким образом, мы получаем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными, решая которую находим, что

$$q_1 = q_4 = 3{,}5Q,$$

$$q_3 = -q_2 = 2{,}5Q.$$

После того как мы нашли заряды можно найти разность потенциалов правой и левой пластин. Для этого достаточно найти напряженность электрического поля в точке . Она будет равна

$$E_A = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_4}{2\varepsilon_0 S}.$$

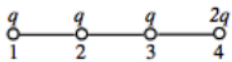
Подставляя значения зарядов и пользуясь тем фактом, что в однородном электрическом поле разность потенциалов равна $\Delta\varphi = El$ получаем:

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{5Qd}{2S\varepsilon_0}$.

Глава 14

Задачи для самостоятельного решения

1. Четыре маленьких одинаковых шарика, связанных нерастяжимыми, непроводящими нитями одинаковой длины, заряжены зарядами q, q, q и $2q$. Сила натяжения нити, связывающей первый и второй шарики, равна T. Найти силу натяжения нити, связывающей второй и третий шарики.



2. Три одинаковых маленьких шарика с массами 0,1 г подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной $l = 20$ см. Какие одинаковые заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $30°$.

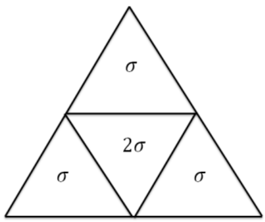
3. Точечный заряд q внесли в однородное электрическое поле напряженностью E_0. Найдите радиус окружности,

на которой напряженность результирующего электрического поля равна $E_0/2$ и ориентирована перпендикулярно вектору E_0.

4. Найти напряженность поля, создаваемого на оси кольца радиуса R и заряда Q на расстоянии L.

5. Тонкое равномерно заряженное кольцо согнуто по диаметру на 90°. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в середине диаметра, если весь заряд кольца равномерно распределить по одной из половин кольца?

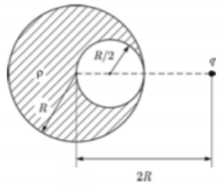
6. Тонкая непроводящая пластина в форме правильного треугольника со стороной a заряжена неравномерно. Внутренняя часть пластины в виде правильного треугольника со стороной $a/2$ заряжена с поверхностной плотностью 2σ, а внешняя часть – с поверхностной плотностью σ. Во сколько раз изменится потенциал в центре пластины, если исходный заряд распределить по ней равномерно.



7. Найти величину электрического поля во всем пространстве для случаев равномерно заряженного бесконечного стержня; равномерно заряженного слоя толщиной d и с плотностью заряда ρ.

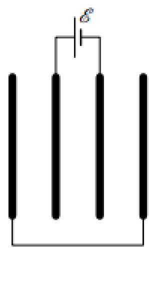
8. Найдите силу, с которой равномерно заряженный шар со сферической полостью будет действовать на подне-

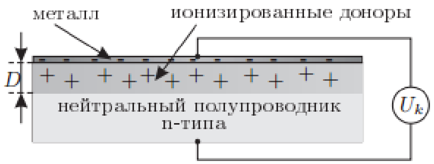
сённый к нему точечный заряд q. Радиус шара R, полости — $R/2$ (см. рисунок). Объёмная плотность заряда шара ρ. Точечный заряд находится на расстоянии $2R$ от центра шара на оси, соединяющей центры шара и полости. Будет заряд притягиваться или отталкиваться?



9. Найдите силу притяжения пластин плоского конденсатора друг к другу. Заряд конденсатора равен q, площадь пластин S.

10. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях d друг от друга (см. рисунок). Площадь каждой из пластин равна S. Крайние пластины соединены между собой, средние пластины подсоединены к батарее с ЭДС E. Найдите заряды средних пластин. Расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами.





11. Можно считать, что при комнатной температуре в полупроводнике n-типа (с электронной проводимостью) все атомы донорной примеси ионизированы (каждый отдал по 1 электрону). Электроны этих атомов являются свободными носителями заряда (основные носители), а ионизированные доноры «закреплены» в узлах кристаллической решетки. При напылении на поверхность такого полупроводника металлического контакта, все основные носители из прилегающей к металлу области полупроводника шириной D переходят в металл, а непосредственно под контактом образуется область объемного заряда ионизированных доноров (барьер Шоттки). Между металлическим контактом и объемом полупроводника возникает контактная разность потенциалов U_k (см. рис).

    Вычислите толщину D барьера Шоттки, если донорная примесь распределена в полупроводнике однородно с концентрацией $N_d = 10^{-16}$ см$^{-3}$, контактная разность потенциалов 0,7 В, а диэлектрическая проницаемость полупроводникового кристалла 13. Заряд электрона $1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85{\cdot}10^{-12}$ Ф/м.

Часть IV

Экспериментальная физика

Глава 15

Экспериментальная физика (10 класс)

15.1 Введение

Физический эксперимент в школе является важной частью учебного процесса. Традиционно эксперименты делятся на демонстрационные, качественно показывающие изучаемое явление, и практические работы, целью которых является измерение какой-либо физической величины. Среди практических работ можно выделить те, целью которых является выработка практических навыков использования измерительных приборов; обычно в этих работах ход работы ясно описан и не вызывает больших трудностей. Другой тип практических работ призван выработать творческий подход к проведению эксперимента и глубокое понимание физических явлений.

Общие требования к оформлению отчётов и записи были описаны в предыдущей части сборника [1]. В этой части остановимся на описании общих правил оформления графиков.

15.2 Графики

Для графического представления результатов используются графики, которые позволяют не только «одним взглядом» проанализировать результаты измерения или расчёта, но и помогают провести производные расчёты. График может показать характер исследуемой зависимости, особые точки, наглядно продемонстрировать полученные экспериментальные данные. По линейному графику можно найти коэффициент углового наклона и точки пересечения с осями, площадь под графиком. Если график не линейный, то можно определить угловой коэффициент наклона касательной[1], провести интерполяцию и экстраполяцию.

Как же строить график экспериментального тура? Приведем небольшой список общих требований:

- сам график, оси и единицы измерения осей должны быть подписаны,
- масштаб осей необходимо выбирать таким образом, чтобы график занимал большую часть площади,
- цена деления[2] выбирается из делителей 10, т.е. хорошей ценой деления являются: 1, 2, 2.5, 5 и т.д.,
- подписи значений на осях не должны содержать большое количество нулей, степенной множитель необходимо выносить к подписи оси,
- точки нужно ставить как можно аккуратнее, рисуя крест ошибок, если он очень мал, то каждая точка выделяется символом (квадратик, треугольник, кружок),

[1] Графическое дифференцирование

[2] Точнее, мантисса - множитель перед степенью в стандартной записи чисел с плавающей, запятой.

- если на график наносится несколько зависимостей, то точки разных зависимостей выделяются разными символами,

- экспериментальный график не обязан проходить через каждую точку - не надо строить ломанную кривую!,

- график желательно делать на миллиметровке.

Строя график в эксперименте, можно снимать зависимость физических величин "как она есть"(например, снимать ВАХ нелинейного элемента, не проводя манипуляций с формулами), или можно проверять предположение, модель, и для этого стоит проводить линеаризация. Линеаризация заключается в том, что, с помощью подходящих преобразований, исходные физические величины приводят в такой вид, что исследуемая зависимость представляет собой линейную функцию. Если модель верна, то в линеаризованных координатах экспериментальные точки ложатся на прямую, если не верна, то линейная зависимость не получится.

Суть — определить, ложатся ли точки на прямую существенно проще, чем проверить соответствие точек нелинейной зависимости, например, параболе или гиперболе. Для иллюстрации вышесказанного решим задачу:

Задача 1. Определение скорости тела

Определить скорость шарика, при его вылете из наклонной трубы с заданного угла наклона.

Оборудование: штатив, линейка, трубка, металлический шарик, копировальная бумага, скотч.

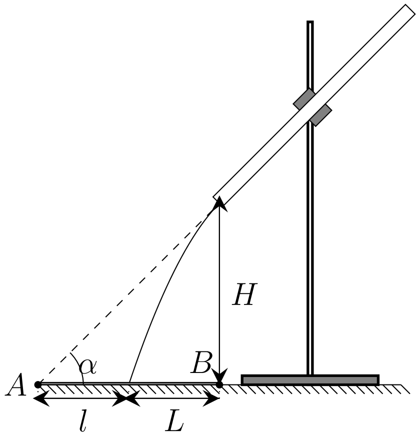


Схема эксперимента по определению скорости полета шарика

Задание. Соберите установку аналогичную приведенной на схеме. Зафиксируйте угол трубки с помощью лапки штатива. После, в верхний конец трубки запустите шарик без начальной скорости. В месте падения шарика на стол положите лист и копировальную бумагу, чтобы шарик оставил отпечаток на листе при падении. Отметим точку A пересечения оси трубки и поверхности падения, для этого определяем «на глаз» место, где предположительно должна быть точка A и рисуем крест. Глядя через трубку, ориентируемся относительно нарисованного креста, где должна быть точка A и отмечаем ее на бумаге. Отметьте точку, над которой осуществляется вылет шарика из трубки B. Измерьте расстояние l от точки падения до точки пересечения A, и расстояние L до точки B. Варьируя высоту закрепления трубки, но сохраняя при этом угол наклона, найдите зависимость l от квадрата расстояния между точкой B и местом падения: $l(L^2)$. Найдите как эта зависимость связана со скоростью вылета шарика из трубки. Найдите скорость вылета шарика из трубки.

Решение

Найдем связь между l и L. Воспользуемся векторным представлением. При равноускоренном движении, перемещение шарика можно представить, как сумму двух векторов $\vec{v}t$ и $\frac{\vec{g}t^2}{2}$. При этом горизонтальная проекция вектора $\vec{v}t$ равна горизонтальному перемещению

$$vt\cos\alpha = L,$$

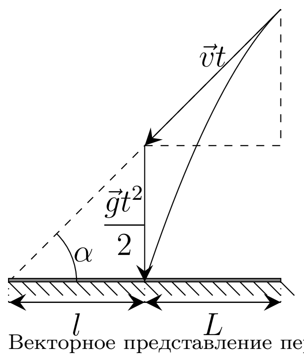
это можно увидеть из прямоугольного треугольника с катетами обозначенными штриховыми линиями, а длина вектора $\frac{\vec{g}t^2}{2}$ равна вертикальному отклонению от прямолинейной траектории

$$\frac{gt^2}{2} = l\operatorname{tg}\alpha,$$

это можно увидеть из треугольника, гипотенуза которого обозначена пунктирной линией. Избавляясь от времени и используя тригонометрические преобразования, можно получить искомое:

$$l = \frac{g(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)}{2v^2}L^2.$$

Как видно из полученного выражения, зависимость l от L^2 представляет собой линейную зависимость в силу выбора подходящих осей, т.е. мы провели линеаризацию. Остальные величины, входящие в это выражение, легко измеряемые. На этом примере можно видеть, что выводя закон описывающий физический



Векторное представление перемещения.

процесс в эксперименте, необходимо его привести в такой вид, что входящие в него величины были бы легко измеримы. Этот эксперимент можно было бы перестроить следующим образо: измерять высоту H вместо нахождения точки A, но в таком случае появится разность вида $H \operatorname{ctg} \alpha - L$ (выведите формулу самостоятельно), эта разность по сути и есть l, но в эксперименте надо стремиться к непосредственному измерению величины, а не находить ее как разность других величин, так как относительная погрешность будет больше.

При этом коэффициент наклона графика зависит от угла[3] и скорости, очевидно, если в процессе эксперимента изменить угол, то изменится и скорость, поэтому при перемещении лапки штатива по вертикали угол наклона необходимо сохранять.

Скорость вылета шарика зависит не только от угла наклона, но и от начальной скорости, с которой мы поместили шарик в верхнюю часть трубы, поэтому необходимо стараться запускать его с нулевой скоростью. Запустим шарик несколько раз в одном и том же положении трубки и убедимся, что шарик попадает в разные точки поверхности; это связано с тем, насколько мы аккуратно запускаем шарик, и, при должном старании, можно добиться того, чтобы разброс точек удара шарика был не больше 2 мм.

Для нахождении точки пересечения, необходимо посмотреть вскользь к нижней части внутренней поверхности трубки и отметить видимую точку на поверхности листа. При первом взгляде, может показаться, что надо учитывать размеры шарика, но, при таком подходе, мы ошибемся всего на $r \operatorname{tg}(\alpha/2)$ (это предлагается вывести читателю), где r - радиус шарика.

Точку B можно получить, вдвинув шарик в трубку с нижнего конца и быстро убрав палец: он упадет вертикально вниз

[3] От тригонометрических функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$

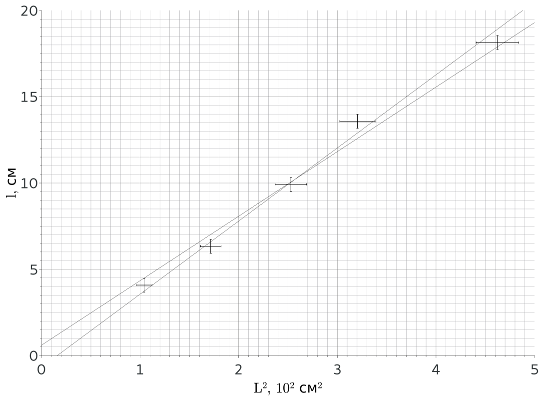


График зависимости $l(L^2)$

и отметит точку на поверхности стола.

Чтобы в процессе эксперимента листочки не двигались по столу, их можно закрепить скотчем, копировальную бумагу можно перекладывать в те точки, где должен падать шарик.

Проведем несколько экспериментов и запишем результаты в таблицу:

l, см	4.1±0.4	6.3±0.4	9.9±0.4	13.6±0.5	18.1±0.5
L, см	10.2±0.4	13.1±0.4	15.9±0.05	17.9±0.5	21.5±0.5
L^2, $\cdot 10^{-2}$ см^2	1.05±0.08	1.72±0.11	2.53±0.16	3.2±0.2	4.6±0.2

Таблица 15.1: Зависимость l от L^2

По полученным данным строим график, каждую точку на графике отмечаем в виде креста ошибок. Для определения коэффициента углового наклона проводим две прямые, проходящие через кресты ошибок с минимально возможным наклоном и максимально возможным наклоном, таким образом мы определяем границы значений углового коэффициента.

$$k_{min} = 3.74 \text{ м}^{-1},\ k_{max} = 4.23 \text{ м}^{-1},\ k = (4.0 \pm 0.3) \text{ м}^{-1}.$$

Для нахождения скорости найдем остальные члены, входящие в выражение для углового коэффициента. Тангенс угла находим как отношение высоты к общей длине:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{l+L} = \frac{(31.7 \pm 0.2)\text{см}}{(39.4 \pm 0.5)\text{см}} = 0.805 \pm 0.015,$$

далее находим котангенс и их сумму:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 1.24 \pm 0.02,\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2.04 \pm 0.03.$$

Окончательно находим скорость вылета шарика:

$$v = \sqrt{\frac{9.8 \text{ м/с}^2 \cdot 2.04}{2 \cdot 4.0 \text{ м}^{-1}}} = 1.58 \text{ м/с},$$

основной вклад в ошибку скорости вносит определение углового коэффициента

$$\Delta v = 1.58 \text{ м/с}\frac{0.3}{2 \cdot 4.0} = 0.06 \text{ м/с},$$

тогда окончательный результат имеет вид:

$$v = (1.58 \pm 0.06) \text{ м/с}.$$

Задачи для самостоятельной работы.

1. Исследовать зависимость скорости вылета шарика от угла наклона трубки. Найти зависимость кинетической

поступательной энергии $E_k = mv^2/2$ от изменения потенциальной энергии, при движении шарика внутри трубки $\Delta\Pi = mgl_t \operatorname{tg}\alpha$, где l_t - длина трубки. По этой зависимости можно указать, при каком угле наклона шарик катится, а при каком скользит, и найти коэффициент трения. Исследовать как изменится результат, если трубку заменить на уголок.

Оборудование: Штатив, линейка, трубка, металлический шарик, копировальная бумага, скотч.

2. (Всероссийская олимпиада, финал 2011 г., Стройнов Е.)

Магнитное торможение.

Сила сухого трения скольжения $(F_{\text{тр}})_{max} = \mu N$, где N - сила нормального давления, практически не зависит от относительной скорости соприкасающихся тел.

Сила вязкого трения F_v возникает при движении твердого тела в жидкости или газе. Эта сила при малых скоростях пропорциональна скорости тела $\vec{F_v} = -\beta\vec{v}$ и направлена противоположно относительной скорости. Этой же закономерности подчиняется сила «магнитного торможения», возникающая при движении намагниченного тела по проводящей поверхности. Сила магнитного торможения возникает из-за токов, индуцируемых в проводящей поверхности магнитным полем движущегося тела. Эту силу условно называют силой вязкого трения. Исследуйте скольжение намагниченной шайбы известной массы по алюминиевой балке, покрытой бумагой, при различных углах наклона балки. По углу, при котором шайба начинает соскальзывать, определите коэффициент сухого трения. При больших углах наклона измерьте установившуюся скорость и определите коэффициент пропорциональности β.

Оборудование: Штатив, алюминиевая балка с наклеенной полоской бумаги и измерительной лентой, магнит с известной массой, линейка, секундомер, миллиметровая бумага.

15.3 Мультиметр

В качестве основного прибора при выполнении экспериментальных работ, связанных с электричеством в экспериментальном туре, используют мультиметр.

Мультиметр — это прибор, включающий в себя несколько функций, чаще всего из которых используют вольтметр и омметр – амперметр используют редко.

Мультиметр состоит из индикаторного табло для считывания результатов измерений, переключателя, который может перевести мультиметр в режим работы вольтметра постоянного напряжения (DCV), омметра (Ω), режим работы проверки диодов и транзисторов, амперметра постоянного тока (10 DCA), миллиамперметра постоянного тока (DCA), вольтметра переменного напряжения (ACV) и выключить его (OFF). У разных моделей режимы могут отличаться друг от друга, но основные режимы (DCV, ACV, DCA, Ω) присутствуют в подавляющем большинстве.

Также стоит озаботиться разъемами мультиметра: самый нижний - общий разъем (COM), к нему традиционно подключается черный щуп, средний разъем VΩmA - разъем для всех режимов, кроме амперметра, верхний - разъем для подключения амперметра, к последним двум подключается красный щуп в зависимости от режима работы.

В режиме вольтметра и омметра можно выставить разные пределовы измерений, для вольтметра 1000 - от 0 до 999 вольт, 200 - от 0 до 199 вольт, 20 - от 0 до 20.0 вольт, 2000m от 0 до 1999 милливольт, 200m - от 0 до 199 милливольт, как видно, каждый предел имеет свой диапазон измеряемого напряжения и свою точность.

15.3.1 Вольтметр

При измерении напряжения, если онное заранее не известно, то хорошим тоном является начинать измерение с наибольшего предела, переключаясь вниз по пределам по мере необходимости. Если измеряемое напряжение выходит за пределы диапазона, то на индикаторе высвечивается 1 в старшем разряде, а в младших разрядах ничего не показывается, это говорит о том, что необходимо переключиться на больший предел измерения.

Работая с вольтметрами, надо учитывать наличие внутреннего сопротивления: оно может сыграть существенную роль при прозвоне цепей с высокими сопротивлениями.

Распространенные мультиметры в режиме вольтметра имеют внутреннее сопротивление 1 *МОм.*

Упражнение.

Подумайте, в каких случаях вольтметр можно использовать в качестве амперметра?

Упражнение.

Как имея вольтметр и резистор с малым сопротивлением, использовать их в качестве амперметра?

Упражнение.

В режиме вольтметра на самом чувствительном пределе измерьте напряжение, вырабатываемое между пальцами, ладонью и предплечьем, в расслабленном состоянии и при напряжённых мышцах.

15.3.2 Омметр

Режим омметра, в отличии от режима вольтметра, необходимо использовать аккуратно, дело в том, что мультиметр в режиме омметра является активным прибором, т.е. он является источником, вольтметром и амперметром в одном лице. Омметр подает питание в цепь, измеряет напряжение, ток и в вычисляет величину подключенного сопротивления. Если омметр подключить к активной цепи с напряжением и токами на элементах, то показания омметра будут некорректными. В некоторых задачах омметр может использоваться в качестве источника. При знакомстве с омметром полезно измерить сопротивление кожи, измерив омметром сопротивление между двумя пальцами одной руки и разных рук. Оказывается, что сопротивление кожи составляет порядка нескольких сотен кОм, зависит от состояния кожи.

Упражнение.

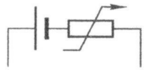
С помощью двух мультиметров найдите внутреннее сопротивление мультиметра в режиме вольтметра при разных пределах. Напряжение выдаваемое омметром при разных пределах.

Упражнение.

Можно ли браться руками непосредственно за металлические части щупов, При выполнении предыдущего упражнения?

Упражнение.

При помощи батарейки и известных сопротивлений исследуйте зависимость напряжения на клеммах U омметра от тока через него. Постройте ее график. Мультиметр в режиме омметра можно рассматривать как совокупность батарейки и нелинейного сопротивления.



Задача 2. Определение теплоемкости терморезистора

(Всероссийская олимпиада, финал 2017 г.)

Терморезистором называется полупроводниковый элемент, сопротивление которого зависит от температуры. Для выданного вам терморезистора зависимость имеет вид

$$R(T) = R_0 \exp(-a(T - T_0)),$$

где R_0 сопротивление при температуре T_0, коэффициент $a = 3.1 \cdot 10^{-2}\ K^{-1}$. Найдите теплоёмкость выданного терморезистора. Погрешность оценивать не требуется! Значение комнатной температуры T_k считайте известным.

Приборы и оборудование: Секундомер, мультиметр (пользоваться амперметром запрещено, он отключен), провода «крокодил», две батарейки, батарейный отсек, резистор, терморезистор, миллиметровая бумага.

Примечание. В качестве терморезисторов в этой задаче необходимо использовать пусковые терморезисторы, имеющие достаточно большой размер и теплоемкость.

Решение

Измеряем с помощью омметра сопротивление терморезистора при комнатной температуре T_k: $R_k = 10.5$ Ом. Заметим, что терморезистор, при измерении омметром, не греется. С помощью омметра определяем сопротивление постоянного резистора $r = 5.4$ Ом. Так как показания сопротивления малы, порядка единиц Ом, то необходимо учесть сопротивление соединительных проводов и контактные сопротивления. Для оценки этих сопротивлений можно померить сопротивление ножки терморезистора, мультиметр покажет $r_p = 0.3$ Ом, это означает, что надо вычесть эту поправку из показаний мультиметра.

Подключим последовательно резистор, терморезистор и батарейку. Терморезистор нагреется до некоторой установившейся температуры T_y. В этом случае подводимая мощность равна мощности тепловых потерь. С помощью вольтметра находим напряжение на резисторе $U_r = 1.94$ В и терморезисторе $U_R = 1.26$ В. Считая, что мощность тепловых потерь пропорциональна разнице температур, запишем уравнение теплового баланса:

$$P - \beta(T - T_k) = 0,\ U_R I = \beta(T - T_k),\ \frac{U_R U_r}{r} = \beta\frac{\ln(R_y/R_k)}{-a},$$

находим коэффициент пропорциональности при тепловых потерях

$$\beta = \frac{-aU_R U_r}{r\ln((U_R r)/(U_r R_k))} = 1.3 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж/К}.$$

Отключим терморезистор и будем измерять его сопротивление омметром, фиксируя время, тем самым получаем зависимость температуры от времени при охлаждении терморезистора.

t, сек	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
R, Ом	3.7	4.1	4.5	4.8	5.2	5.5	5.8	6.1	6.4	6.7	7.0	7.2
T, °C	56	53	51	48	46	44	42	41	40	38	37	36

Таблица 15.2: Остывание терморезистора: зависимость сопротивления от времени

Строим график зависимости температуры терморезистора от времени. Для некоторого малого момента времени $\Delta\tau$ запишем уравнение теплового баланса

$$-\beta(T - T_k)\Delta\tau = C\Delta T,\ C = \frac{-\beta(T - T_k)}{\Delta T/\Delta\tau},$$

где $\Delta T/\Delta\tau$ - коэффициент наклона касательной, проведен-

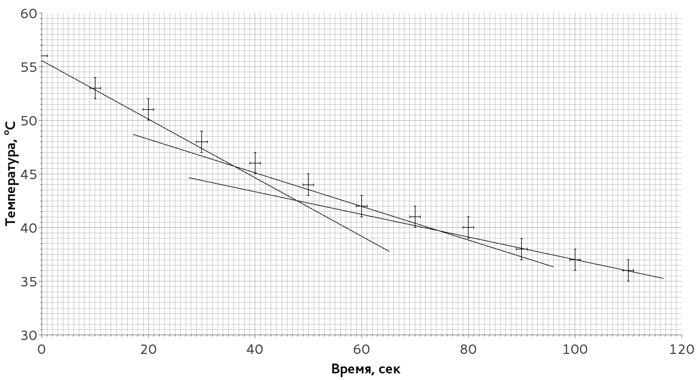


График остывания терморезистора

ной к графику в точке с температурой T. Для построенного графика получаем теплоёмкости в трех разных точках:

$$C_1 = \frac{1.3\cdot 10^{-2}\ \text{Дж/К}\ (55-25)\ \text{К}}{-0.297\text{К/сек}} = 1.3\ \text{Дж/К},$$

$$C_2 = \frac{1.3\cdot 10^{-2}\ \text{Дж/К}\ (43-25)\ \text{К}}{-0.153\ \text{К/сек}} = 1.5\ \text{Дж/К},$$

$$C_3 = \frac{1.3 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/К } (36 - 25) \text{ К}}{-0.105 \text{ К/сек}} = 1.4 \text{ Дж/К},$$

Получаем окончательный результат

$$C = (1.4 \pm 0.1) \text{ Дж/К}.$$

15.4 Про теплообмен

В задачах на теплообмен, обычно, предполагается, что количество теплоты, отдаваемое горячим телом в единицу времени, прямо пропорционально разности температур между горячим и холодным телом. Следовательно, можно записать следующее выражение:

$$C\Delta T = \alpha(T_b - T_i)\Delta t,$$

где C - теплоемкость тела, ΔT - изменение температуры тела за мало время, T_b - температура тела, T_i - температура окружающей среды, α - коэффициент пропорциональности остывания. Этот коэффициент зависит от многих факторов: свойств вещества окружающей среды (это может быть воздух, вода), от вида конвективных потоков, от свойств поверхности тела, от геометрии тела. Например, конвективные потоки могут быть естественными, которые вызваны разностью плотности холодного и горячего вещества, а могут быть вынужденными: например, поток воздуха от вентилятора, от веера. При малых перепадах температуры этот коэффициент обычно постоянен, но при большой разнице температур он может зависеть от температуры, делая этот закон приближенным. В следующей задаче предлагается исследовать явление теплообмена на примере остывания воды.

Задача 3. Остывание воды

Задание. Исследуйте процесс остывания стаканчика воды. Снимите зависимость температуры от времени. Графическим способом определите коэффициент остывания для разных температур. Сделайте вывод о справедливости предположения постоянства коэффициента остывания.

Приборы и оборудование: алюминиевый стакан с горячей водой, крышка к стакану, мерный стакан, термометр, секундомер, комнатный термометр.

Решение

Мерным стаканом отмеряем 100 мл воды и ставим отметку. Выливаем холодную воду, заливаем горячую воду до поставленной отметки. Таким образом теплоемкость $C = c_{\text{В}} m_{\text{В}} = 420$ Дж/К. Далее снимаем зависимость температуры от времени (см. таблицу).

Коэффициент наклона касательной можно искать по ближайшим точкам, но при этом существенную роль будут играть измерительные и случайные ошибки, т.к. они будут сравнимы с разностью между соседними точками. Для уменьшения влияния ошибок необходимо касательную проводить сразу по нескольким точкам, а для этого необходимо построить график. Касательные проводятся по нескольким близлежащим точкам, при этом сама касательная проводится как можно шире, от оси до оси, чтобы точнее вычислить ее наклон, т.е. уменьшить вычислительную ошибку. Достоверность ка-

t, мин	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16
T, °C	86	82	79.5	77	75	73.5	71	68	65	62	59.5	57
t, мин	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	
T, °C	55	53	51	49	48	46	45	44	43	42	41	

Таблица 15.3: Остывание воды.

сательной зависит от качества точек и искусства экспериментатора.

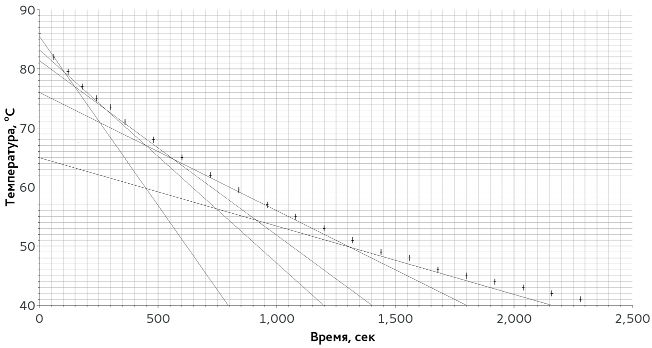


График остывания воды

Найдем наклон касательной в разных точках и поделим на разность температуры воды и температуры окружающей среды, тем самым мы оценим α при разных температурах.

$$\alpha_{82} = 420\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-0.057\ ^\circ\text{C/сек}}{(82-25)\ ^\circ\text{C}} = 0.42\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}\cdot\text{сек}},$$

$$\alpha_{77} = 420\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-0.036\ ^\circ\text{C/сек}}{(77-25)\ ^\circ\text{C}} = 0.29\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}\cdot\text{сек}},$$

$$\alpha_{72} = 420\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-0.029\ ^\circ\text{C/сек}}{(72-25)\ ^\circ\text{C}} = 0.26\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}\cdot\text{сек}},$$

$$\alpha_{60} = 420\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-0.020\ ^\circ\text{C/сек}}{(60-25)\ ^\circ\text{C}} = 0.24\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}\cdot\text{сек}},$$

$$\alpha_{47} = 420\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-0.012\ ^\circ\text{C/сек}}{(47-25)\ ^\circ\text{C}} = 0.23\ \frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}\cdot\text{сек}}.$$

Видно, что для температур выше $75^\circ C$, коэффициент существенно увеличивается с ростом температуры, и, при более низких, он остается постоянным. Отсюда можно сделать вывод, что, при высоких температурах, существенную роль начинают играть нелинейные процессы, например, изменение вида конвективного потока, испарение жидкости: скорость которого существенно зависит от температуры. Можно предположить, что в нашем случае это связано наличием испарения, и, при низких температурах, его мощность падает быстрее, чем у остальных механизмов охлаждения.

Литература

[1] Калашников А.Д. Кузьмичёв С.Д. Колдунов Л.М. Юдин И.С. Яворский В.А. Методические материалы по физике. М.: МФТИ, 2017.

[2] Л. П. Баканина В. Е. Белонучкин С. М. Козел; под ред. С. М. Козела. Сборник задач по физике: 10—11 кл. с углубл. изуч. физики. М.: Просвещение, 2009.

[3] Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями: учебное пособие. М.: КДУ, 2009.

[4] Рымкевич А.П. Сборник задач по физике для 10-11 классов. М.: Дрофа, 2011.

[5] Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 10-11 кл. М.: Дрофа, 2011.

[6] С.Ю. Куклин А.С. Овчинников В.И. Плис И.В. Федоренко. Задачи по элементарной физике. Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Азбука-2000, 2013.

Оглавление

[2] [3] [4] [5] [6] [1]

ФИЗИКА

Редакторы: И.В. Вовченко
Корректоры: И.Л.Киндяк, А.Д. Рыбаков, И.В. Вовченко
Компьютерная верстка: И.В. Вовченко, А.Д. Рыбаков, И.Л. Киндяк,
А.О. Светличный, К.Р. Гизатулин