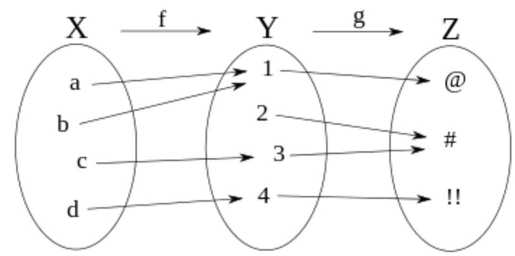
WIKIPEDIA

Función compuesta

En álgebra abstracta, una **función compuesta** es una función formada por la composición o aplicación sucesiva de otras dos funciones. Para ello, se aplica sobre el argumento la función más próxima al mismo, y al resultado del cálculo anterior se le aplica finalmente la función restante.



$g \circ f$, es la aplicación resultante de la aplicación sucesiva de f y de g. En el ejemplo, $(g \circ f)$(a)=@.

Usando la notación matemática, la función compuesta $g \circ f\colon X \to Z$ expresa que $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ para todo x perteneciente a X.

A $g \circ f$ se le llama *composición de f y g, o f compuesta con g*. Nótese que se nombra no siguiendo el orden de escritura, sino el orden en que se aplican las funciones a su argumento.

Índice

Definición

De manera formal, dadas dos funciones:

$$\begin{array}{llll} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{llll} g: & Y & \longrightarrow & Z \\ & y & \longmapsto & z = g(y) \end{array}$$

donde la imagen de f está contenida en el dominio de g, se define la función composición de f y g. (nótese que las funciones se nombran en el orden de aplicación a la variable, no en el orden sucesivo de representación):

$$\begin{array}{rccl} (g \circ f): & X & \longrightarrow & Z \\ & x & \longmapsto & z = g(f(x)) \end{array}$$

A todos los elementos de X se le asocia una elemento de Z según: $z = g(f(x))$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & y = f(x) & \longmapsto & z = g(f(x)) \end{array}$$

También se puede representar de manera gráfica usando la categoría de conjuntos, mediante un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Propiedades

- La composición de funciones es *asociativa*, es decir:

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- La composición de funciones en general *no es conmutativa*, es decir:

  $$(g \circ f) \neq (f \circ g)$$

  Por ejemplo, dadas las funciones numéricas $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2$, entonces $f(g(x))=x^2+1$, en tanto que $g(f(x))=(x+1)^2$.

- El elemento neutro asociado a la composición de funciones es la función identidad.

- Con las tres propiedades anteriores: asociativa, no conmutativa y elemento neutro, las funciones reales de variable real constituyen un monoide para la operación interna de composición de funciones.

- Además, la *inversa de la composición* de dos funciones es:

  $$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Ejemplo

Sean las funciones:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sin(x)$$

La **función compuesta** de g y de f que expresamos:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x^2)) = \sin(x^2)$$

La interpretación de ($f \circ g$) aplicada a la variable x significa que primero tenemos que aplicar g a x, con lo que obtendríamos un valor de paso

$$z = g(x) = \sin(x)$$

y después aplicamos f a z para obtener

$$y = f(z) = z^2 = \sin^2(x)$$

Función bien definida

La función compuesta está bien definida porque cumple con las dos condiciones de existencia y unicidad, propias de toda función:

1. **Condición de existencia:** dado x, conocemos (x, $f(x)$), puesto que conocemos la función f, y dado cualquier elemento y de B conocemos también (y, $g(y)$), puesto que conocemos la función g. Por tanto, (x, $g(f(x))$) está definido para todo x, y así ($g \circ f$) cumple la condición de existencia.
2. **Condición de unicidad:** como f y g son funciones bien definidas, para cada x el valor de $f(x)$ es único, y para cada $f(x)$ también lo es el de $g(f(x))$.

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Composition» (http://mathworld.wolfram.com/Composition.html). Weisstein, Eric W, ed. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- "Composition of Functions (http://demonstrations.wolfram.com/CompositionOfFunctions/)" by Bruce Atwood, the Wolfram Demonstrations Project, 2007.

Obtenido de «https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Función_compuesta&oldid=124137731»

Esta página se editó por última vez el 9 mar 2020 a las 18:42.

El texto está disponible bajo la Licencia Creative Commons Atribución Compartir Igual 3.0; pueden aplicarse cláusulas adicionales. Al usar este sitio, usted acepta nuestros términos de uso y nuestra política de privacidad.
Wikipedia® es una marca registrada de la Fundación Wikimedia, Inc., una organización sin ánimo de lucro.