REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA EDUCACIÓN SUPERIOR
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA TERRITORIAL DEL ESTADO PORTUGUESA J.J. MONTILLA
GUANARE-PORTUGUESA

SUCESIONES
Y SERIES

PROF:

MELKICEDE CAMACHO

INTEGRANTES:

27.216.702 ADRIAN MARQUEZ
27.635.379 VICTOR GUDIÑO
27.944.863 NEOMAR RODRIGUEZ

ÍNDICE

DEFINICIÓN

Sucesión

Una sucesión numérica se formaliza como una aplicación de los números naturales sobre otro conjunto numérico X, de manera:

$$\boxed{\begin{aligned} a&: \mathbb{N} \to X \\ n &\to a_n \end{aligned}}$$

Por norma general, la sucesión numérica se formaliza como una aplicación de los números naturales en los números reales. En cualquier caso se denota simplemente como: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Una sucesión **finita** $\{a_n\}$ (de longitud *r*) con elementos pertenecientes a un conjunto *S*, se define como una función $f: \{1,2,\cdots,r\} \to S$, y en este caso el elemento a_n corresponde a $f(n)$. Por ejemplo, la finitud e infinitud, (de longitud 4) de números primos menores que 10 (2, 3, 5, 7) corresponde a la función $f: \{1,2,3,4\} \to \mathbb{P}$ (donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de números primos) definida por $f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 5, \quad f(4) = 7$.

Una sucesión **infinita** $\{a_k\}$ (de longitud *r*) con elementos pertenecientes a un conjunto *S*, se define como una función $f: \mathbb{N} \to S$ en donde, de forma análoga, $\{a_n\}$ corresponde a $f(n)$.

Series

Una serie es la generalización de la suma aplicada a los términos de una sucesión matemática. De manera informal, es el resultado de sumar los términos $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, suele escribirse de forma compacta con el símbolo de sumatorio:

$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$

El estudio de las series consiste en la evaluación de la suma de un número finito n de términos sucesivos, y mediante un paso al límite identificar el comportamiento de la serie a medida que n crece indefinidamente. $\boxed{S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots}$

Una secuencia o cadena «finita», tiene un primer y último término bien definidos; en cambio en una serie infinita, cada uno de los términos suele obtenerse a partir de una determinada regla o fórmula, o por algún algoritmo.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA

Una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales tiene un límite en el espacio considerado.

Criterio de d'Alembert o del cociente

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos estrictamente positivos; si $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \in [0, +\infty]$ entonces el Criterio de d'Alembert establece que si

$L < 1$, la serie converge

$L > 1$, la serie no converge

$L = \infty$, la serie no converge

$L = 1$ el criterio no establece nada respecto a su convergencia.

Criterio de la raíz

Si los términos a_n son estrictamente positivos y si existe una constante $C < 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq C$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

Criterio de Raabe

Sea una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, tal que $a_k > 0$ (serie de términos positivos). Si existe el límite $\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = L$, siendo $L \in (-\infty, +\infty)$ entonces, si $L > 1$ la serie es convergente y si $L < 1$ la serie es divergente. El criterio de Raabe se recomienda sólo si falla el criterio de d'Alembert.

Criterio de Cauchy

Una serie a valores en un espacio vectorial normado completo es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales es de Cauchy:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left\| u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} \right\| < \varepsilon}$$

Criterio de Leibniz

Una serie formada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (con $a_n > 0$) se llama serie alternada. Tal serie converge si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n = 0$ para *n* par y *n* impar.

b) La serie tiene que ser absolutamente decreciente, es decir que: $|a_n| \geq |a_{n+1}|$

Si esto se cumple, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente, de lo contrario la serie es divergente.

TIPOS DE SERIES

Sumas parciales

Para cualquier sucesión matemática $\{a_n\}$ de números racionales, reales, complejos, funciones, etc., la serie asociada se define como la suma formal ordenada:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

La sucesión de sumas parciales $\{S_k\}$ asociada a una sucesión $\{a_n\}$ está definida para cada *k* como la suma de la sucesión $\{a_n\}$ desde a_1 hasta a_k:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

Muchas de las propiedades generales de las series suelen enunciarse en términos de las sumas parciales asociadas.

Serie de Taylor

Es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como $(x-a)^n$ llamados términos de la serie, dicha suma se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto *a* suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie.

A la serie centrada sobre el punto cero $a = 0$, se le denomina también *serie de Maclaurin*.

La **representación de series de Taylor** $T(x)$ de una función $f(x)$ cuando $x = x_0$ puede ser escrito de manera compacta como la suma:

$$\boxed{T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

La **representación de series de Maclaurin** $T(x)$ de una función es la serie de Taylor para cuando $x_0 = 0$:

$$\boxed{M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x_n}$$

En donde:

- *n!* es el factorial de *n*
- $f^{(n)}(a)$ denota la n-ésima derivada de *f* para el valor *a* de la variable de la cual se deriva.