REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA EDUCACIÓN SUPERIOR
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA TERRITORIAL DEL ESTADO PORTUGUESA J.J. MONTILLA
GUANARE-PORTUGUESA

Límites

PROF:

MELKICEDE CAMACHO

INTEGRANTES:

27.944.863 NEOMAR RODRIGUEZ
27.216.702 ADRIAN MARQUEZ
30.637.496 JOSE SERENO
27.635.379 VICTOR GUDIÑO

Límite

Un límite es una magnitud a la que se acercan progresivamente los términos de una secuencia infinita de magnitudes. Un límite matemático, por lo tanto, expresa la tendencia de una función o de una sucesión mientras sus parámetros se aproximan a un cierto valor.

Límite de Un Punto Finito

El límite de una función está designado por $f(x) \to L$ cuando $x \to a$ si la función toma valores cada vez más cercanos a L cuando x toma valores cada vez más cercanos al punto a. Esto se expresa mediante la notación:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^2$. Para calcular su límite cuando x = 2, daremos valores cercanos a 2 desde abajo y desde arriba.

Desde abajo:

$$\boxed{\begin{gathered} f(1{,}9) = 3{,}61 \\ f(1{,}95) = 3{,}8025 \\ f(1.99) = 3{,}9601 \end{gathered}}$$

Desde arriba:

$$\boxed{\begin{gathered} f(2{,}2) = 4{,}84 \\ f(2{,}1) = 4{,}41 \\ f(2{,}01) = 4{,}04 \end{gathered}}$$

Como se puede observar, la función tiende a 4 por ambos lados de 2. Por lo tanto su límite es 4, esto se expresa:

$$\boxed{\lim_{x \to 2} x^2 = 4}$$

Límite de Un Punto Infinito

Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito $(+\infty)$ es L si la función toma valores cada vez más cercanos a L cuando x crece indefinidamente. Esto se expresa mediante:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$$

De igual manera, el límite de $\mathrm{f(x)}$ cuando x tiende a menos infinito $(-\infty)$ es L si la función toma valores cada vez más cercanos a L cuando x decrece indefinidamente. Se expresa:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L}$$

Propiedades de Los Límites

Sean $\mathrm{f(x)}$ y $\mathrm{g(x)}$ dos funciones definidas en un mismo intervalo en donde está el valor a del límite.

Ley de la Suma

Según esta ley el límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites:

$$\boxed{\lim_{x \to a}[f(x) + \mathrm{g(x)}] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)}$$

Ley de la Resta

El límite de la resta de dos funciones es igual a la resta de sus límites:

$$\boxed{\lim_{x \to a}[f(x) - \mathrm{g(x)}] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)}$$

Ley del Producto

El límite del producto de dos funciones es el producto de sus límites (si existen):

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot \mathrm{g(x)}] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Ley del Factor Constante

El límite del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por el límite de la función:

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Ley del Cociente

El límite de un cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, con la condición de que el denominador sea distinto de cero:

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \qquad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Ley de Potencia

El límite de una potencia es igual a la potencia del límite:

$$\lim_{x \to a} f(x)^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

Ley de la Raíz

El límite de la raíz de una función es igual a la raíz del límite de la función:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Límite de una Constante

El límite de una constante es la misma constante:

$$\boxed{\lim_{x \to a} c = c}$$

Límite de Potencia

El límite de una potencia es la potencia del límite elevado al exponente:

$$\boxed{\lim_{x \to a} x^n = a^n}$$

Límite de Logaritmo

El límite del logaritmo de una función es el logaritmo del límite de la función:

$$\boxed{\lim_{x \to a} [\log_b f(x)] = \log_b \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]}$$

Teorema del Emparedado

Se emplea para determinar el límite de una función. Este teorema enuncia que si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en el punto. El teorema se expone formalmente como:

Sea I un intervalo que contiene al punto a, y sean f, g y h funciones definidas en I, exceptuando quizás el mismo punto a. Supongamos que, para todo x en I y diferente de a, tenemos: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Y supongamos también que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L}$$

Entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Continuidad de una Función

Se dice que una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel.

Continuidad en un Punto

Formalmente, la función f es continua en el punto c si

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

Continuidad en un Intervalo

Intervalo Abierto

Un valor c pertenece a un intervalo abierto I, de extremo izquierdo a y extremo derecho b, representado $I = (a, b)$ si $a < c < b$.

Una función f es continua en un intervalo abierto $I = (a, b)$ si y solo si la función es continua en todos los puntos del intervalo, es decir:

$$\boxed{\forall \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{I} = (a, b) \colon \lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

Intervalo Cerrado

Un valor c pertenece a un intervalo cerrado I, de extremo izquierdo a y extremo derecho b, representado $I = [a, b]$ si $a \leq c \leq b$.

Una función f es continua en un intervalo cerrado [a,b] si la función es continua en el intervalo abierto (a,b) y es continua por la derecha de a y continua por la izquierda de b:

$$\boxed{\forall \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{I} = [a, b] \colon \lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

Entre las funciones continuas podemos nombrar las polinomiales, las trigonométricas como el seno y el coseno; las funciones exponenciales y logarítmicas, etc.

Ejercicios

Ejercicio 1:

Se descomponen el numerador y el denominador en factores, se simplifica y sustituye la *x* por *-1*:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x-1} =$$

$$-\frac{3}{2}$$

Ejercicio 2

Se descomponen el numerador y el denominador en factores, se simplifica y sustituye la *x* por *5*:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{x+5} =$$

$$\frac{1}{10}$$

Ejercicio 3

Se racionaliza, simplifica y sustituye *x* por *3*.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$\frac{1}{4}$$

Ejercicio 4

Se racionaliza, simplifica y sustituye *x* por *0*.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ejercicio 5

Se descomponen el numerador y el denominador en factores, se simplifica y sustituye la *x* por 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4x}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)}=$$
$$\pm\infty$$

Ejercicio 6

Se realizan las operaciones en el numerador, se simplifica y se sustituye la *h* por 0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{x^3 3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=$$
$$3x^2$$

Ejercicio 7

Dividir numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x}}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}}=$$
$$2$$

Ejercicio 8

En primer lugar, se racionaliza:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

Después, se dividen el numerador y el denominador por *x*, con lo cual se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}\right)}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 9

Dividir el numerador y el denominador por $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}} =$$

$$1$$

Ejercicio 10

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} =$$

$$\left[\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} =$$

$$e^{3}$$