1.该题选 $\mathbf{D}$（yysy，这题真没啥要说的。。。）

2.首先画个图发现是圆锥，因为这个是选择第二题，不能花太长时间，所以采用高中知识来解决：曲面面积$S=\pi\times2\times2\sqrt{2}-\pi\times1\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}\pi$，选 B

P. S. 圆锥侧面积公式为$S=\pi rl$，l为母线长度。

3. 解：根据均值不等式有：

$$x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{y^2}{3}\geqslant4\sqrt[4]{\frac{x^2y^6}{27}}$$

解该不等式得：

$$xy^3\leqslant3\sqrt{3}$$

该题选 A

4. 解：对于 ABC 考虑每个级数的等价形式，对于 D 考虑$Leibniz$判别法：

A. $n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}\sim\frac{n}{2^{n+1}}$收敛

B. $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\sim\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛

C. $\ln\frac{n+3}{n+2}=\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\sim\frac{1}{n+2}$发散

D. 记$a_n=\frac{n!}{n^n}$，则有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<1$收敛

该题选 C

5. 解：

①由$Leibniz$判别法，显然收敛，命题正确。

②考虑交错p级数：$a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，满足题干要求，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，命题错误。

③解法一：考虑欧拉常数：

$$\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)=C$$

则可以进一步考虑原级数的等价形式：

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n(n+1)}\sim\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}+\frac{C}{n(n+1)}$$

其中：$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{\ln(n+1)}{n(n+1)}=0,\dfrac{C}{n(n+1)}$显然收敛，故原级数收敛，命题正确。

解法二：由定积分的定义与图像容易知道：

$$\frac{1}{k}<\int_{k-2}^{k-1}\frac{1}{x+1}dx=\ln\frac{k}{k-1}\,(k\geqslant 2)$$

令$k=2,3,4\cdots,n,n+1$,并将这些不等式相加：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)$$

从而对于原级数：

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n(n+1)}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$$

根据比值审敛法，容易知道：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$$

两个级数都是收敛的，所以原级数收敛

解法三：

设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$,则原式$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{a_n}{n+1})=$

$$\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+1})=\lim_{n\to\infty}[a_1+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{a_n}{n+1}]=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

在解法三中我们直接暴力求解级数的和，可以直观的看出级数收敛，③正确。

综上命题①③正确，命题②错误，正确命题的个数为 2，该题选 C.

6.$\nabla f=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},2\right)$，将(1,2,-1)代入即可得到$\nabla f|_{(1,2,-1)}=\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5},2\right)$

7.采取球坐标：

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{r\to0^+}\frac{\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2}2\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV}{r^3}\\
&=\lim_{r\to0^+}\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r}2\rho^2\sin\varphi\cos\rho\,d\rho}{r^3}\\
&=\lim_{r\to0^+}8\pi\frac{\displaystyle\int_0^{r}\rho^2\cos\rho\,d\rho}{r^3}\\
&=\lim_{r\to0^+}\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{r^2\cos r}{r^2}=\frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

。

8.发现满足 Green 公式使用的条件（这一步必不可少，要看是否涉及“打洞”的问题），因此由 Green 公式得

$$\text{积分}I=\iint_{x^2+y^2\leqslant1}10xye^{2x^2-3y^2}dxdy=0(\text{奇偶对称性})$$

9. 解：考虑凑微分

$$
\begin{aligned}
ydx+(y-x)dy&=0\\
ydx-xdy+ydy&=0\\
\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{1}{y}dy&=0\\
d\left(\frac{x}{y}\right)+d(\ln y)&=0\\
\frac{x}{y}+\ln y&=C
\end{aligned}
$$

P.S.可能有人会问为什么没有考虑 y=0 这一情况（确实成立），注意题中所求的是通解，并不需要考虑某些特定情况，y=0 是一个特解。当然如果把通解和特解都写上也不会算错的。

10. 解：直接对$f(x)$进行展开

$$f(x)=\frac{x}{-\ln(1-x)}=\frac{x}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}}=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right)^{-1}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}+\cdots$$

从而看出$c_0=1$

另解：直接考虑$x\to0^+$的极限即可：

$$c_0=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{-\ln(1-x)}=1$$

11. 解：

对于曲面$x^2-y^2-z=0$,它的法向量为$(2x,-2y,-1)$,将点$(1,-1,0)$代入可得法向量为$(2,2,-1)$，

对于曲面$x^2+2y^2+3z^2=3$,它的法向量为$(2x,4y,6z)$,将点$(1,-1,0)$代入可得法向量为$(2,-4,0)$，

因此切线的方向向量$\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}=(-4,-2,-12)$，所以标准型方程为

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{6}$。

12.解：

曲线质量$m=\int_L \rho(x,y)ds$,其中$\rho(x,y)=3x, ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\sqrt{1+\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}}dx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}dx$

所以原式$=\int_0^1 3x\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\dfrac{3}{2}\left[(x-1)e^x|_0^1+(-x-1)e^{-x}|_0^1\right]=3\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

13.解：由场力做功定义，做功$J=\int_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$

打眼一看，这么麻烦的式子，曲线积分八成和路径无关，一通计算猛如虎发现确实如此，那么题干里说的沿曲线 C 运动卵用没有!!!

所以原式$=\int_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{2},0\right)}\sim+\int_{\left(\frac{\pi}{2},0\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}\sim$，在第一项中$y=0$，$dy=0$，所以$\int_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{2},0\right)}\sim=0$

在第二项中$x=\dfrac{\pi}{2}$，$dx=0$，所以$\int_{\left(\frac{\pi}{2},0\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}\sim=\int_0^1\left(1-2y+\dfrac{3\pi^2}{4}y^2\right)dy=\dfrac{\pi^2}{4}$

14. 解：看完题我们会立刻发现这个立体图形具有很好的对称性，那么再来看这个积分式，发现它就是个弟弟，$\iint_\Sigma xdS$和$\iint_\Sigma -ydS$都是0，那么最后积分式就只有$5\iint_\Sigma z^3dS$，

根 据 第 一 类 曲 面 积 分 的 计 算 公 式 ，

由于$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,所以$z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

所以$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，原式$=$

$$5\iint_\Sigma z^3dS=5\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{3a^2}{4}}(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma=5a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}}r(a^2-r^2)dr=\frac{75}{32}\pi a^5$$

15. 解：首先发现这是一个第二类曲面积分，取下侧，因此最后点乘的向量为$(2x, 2y, -1)$.

所以积分式$=\iint_{D_{xy}}[2xy^2-(x^2+y^2)^2-1]dxdy$,由奇偶对称性，$\iint_{D_{xy}}2xy^2dxdy=0$

所以原式$=-\iint_{D_{xy}}[(x^2+y^2)^2+1]dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}r(r^4+1)dr=-\frac{10\pi}{3}$。

P.S.发现没有，2018 年的题奇偶对称性都考滥了。。。。。

16. 解：记$t=2x-1$

$$原式=\sum_{n=1}^{\infty}\left[4^n+\left(2+\frac{1}{n}\right)^n\right]t^n=\sum_{n=1}^{\infty}4^nt^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^nt^n$$

对于$\sum_{n=1}^{\infty}4^nt^n$，其收敛半径：

$$R_1=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n}}=\frac{1}{4}$$

$|t|=\frac{1}{4}$时，显然发散

即$t\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^nt^n$，其收敛半径：

$$R_2=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$$

综上：$t\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，即$x\in\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$

17. 解：考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$，则有：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{2n-2}dx=x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}dx=x\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

其中，$x\in(-1,1)$

$$原式=S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\ln 2}{6}$$

18. 证明：（1）不妨设$0 < a_n < M$ 恒成立。由已知，显然收敛半径小于等于 1.

考虑绝对收敛，对于任意的$|x| = q \in [0,1)$,有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

根据比较审敛法知，幂级数收敛。
综上，命题得证。

（2）由已知，显然收敛半径小于等于 1，记$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$

由已知极限可以得到：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1(※)$$

原级数可以改写为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n+1}$$

由※式可以知道：

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n+1}$$

收敛半径均为 1，所以原幂级数收敛半径为 1.
综上，命题得证。