1.解：直接用球坐标代换：

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\cdot r^2dr=\frac{2\pi}{5}$$

从而该题选 D

2.解：偏导是特殊的方向导数，从而该题选 A

3.解：利用基本不等式：

$$x^2+2y^2+2z^2\geqslant 3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}\Rightarrow xyz\leqslant\frac{1}{2}$$

从而该题选 C

4.解：设$x=1+\cos t,y=2+\sin t,ds=1,I=\int_0^{2\pi}(2+\sin t+\cos t)dt=6\pi$，从而该题选 B

5.解：①$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{为完全平方数}\\ \dfrac{1}{n^2}, & others\end{cases}$，从而命题错误

② 当n足够大时，考虑不等式$\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}<|a_n|<\dfrac{2|a_n|}{1+|a_n|}$即可

③ 反证法：假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$收敛，则根据Abel判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cdot na_n$收敛

命题②③ 正确，从而该题选 C

6.解：

$$I=\int_0^1dy\int_0^y\frac{\sin y}{y}dy=1-\cos 1$$

7.解：$I\xlongequal{Green}2\iint_{D_{xy}}dxdy=2\pi ab$

8.解：套公式，答案为 4

9.解：

$$\begin{aligned}(4y+2x\ln y)dx+\left(\frac{x^2}{y}+4x\right)dy&=0\\4(ydx+xdy)+2x\ln ydx+\frac{x^2}{y}dy&=0\\4(ydx+xdy)+\ln ydx^2+x^2d\ln y&=0\\d(4xy+x^2\ln y)&=0\\4xy+x^2\ln y&=C\end{aligned}$$

10.解记分子为p，分母为q，则

$$p-q=\sin\pi=0\Rightarrow\frac{p}{q}=1$$

11.解：分别对x和y求偏导即可：

$$dz=\frac{2F_1+F_3}{e^z(2F_2+F_3)}dx+\frac{4F_1+F_2}{e^z(2F_2+F_3)}dy$$

12.解：$z=\sqrt{x^2+y^2-1}\Rightarrow\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-1}+1}=\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2-1}}$

$$I=\iint_S 5zdS=5\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}r\cdot\sqrt{2r^2-1}\,dr=5\left(9-\sqrt{3}\right)\pi$$

13.解：$F=x^2+y^2+z^2-9\Rightarrow\frac{dydz}{2x}=\frac{dzdx}{2y}=\frac{dxdy}{2z}$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{9}\iint_{D_{xy}}\left[(x^2-y)\cdot\frac{x}{z}+(y^2-z)\cdot\frac{y}{z}+(z^2-x)\right]dxdy,z^2=9-x^2-y^2\\&=\frac{1}{9}\iint_{D_{xy}}(9-x^2-y^2)dxdy\\&=\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}(9-r^2)rdr\\&=\frac{40\pi}{9}\end{aligned}$$

14.解：只需计算：$W=\int_C\frac{-kxdx+k(3-y)dy}{\left[x^2+(3-y)^2\right]^{3/2}}$

引力场无旋有势，即积分与路径无关：

$$W=\int_1^0\frac{-kxdx}{(x^2+3^2)^{3/2}}=k\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

15.解：$|x|\geqslant1$时，则有：

$$\frac{1}{(1+x^2)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)}<\frac{1}{(1+x^2)^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$$

收敛；

$0\leqslant x<1$时，则有：

$$\frac{1-x}{(1-x)(1+x)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)}=\frac{1-x}{1-x^{2^{n+1}}}$$

通项不趋于 0，发散.

综上，收敛域为：$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

16.解：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'+\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$

从而得到：

$$-S\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{8}$$

17.解：从小妈妈就告诉我：

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

分别考虑$e^x,\ln(x+1),\arctan x$在$x=0$处的泰勒展开即可

18.解：必要性：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{a_n}{S_n}}=\lim_{n\to\infty}S_n=S$

充分性：$1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\sim\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$