2018 级高等数学第二学期期末试卷 (A 类)

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 二次积分 $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序交换后的结果为 (　　)

   (A) $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}x$；　(B) $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y\int_0^{\mathrm{e}^y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

   (C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\mathrm{e}^y} f(x,y)\mathrm{d}x$；　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x$。

2. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上满足 $1\le z\le 2$ 的部分曲面的面积为： (　　)

   (A) $2\sqrt{2}\pi$；　(B) $3\sqrt{2}\pi$；　(C) 2π；　(D) 3π。

3. $f(x,y)=xy^3$ 在约束条件 $x^2+y^2=4$ 下的最大值为： (　　)

   (A) $3\sqrt{3}$；　(B) $\sqrt{3}$；　(C) $2\sqrt{2}$；　(D) $\sqrt{2}$。

4. 下列级数中，发散的级数是 (　　)

   (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$；

   (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+3}{n+2}$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$。

5. 下列命题中，正确命题的个数为 (　　)

   ① 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加，且收敛于 0，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛；

   ② 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散；

   ③ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛。

   (A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 函数 $f(x,y,z)=2z+\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的梯度 $\nabla f\,|_{(1,2,-1)}=$____________。

7. $\lim\limits_{r\to 0^+}\left(\dfrac{1}{r^3}\cdot\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} 2\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V\right)=$____________。

8. 设平面曲线 C 是圆周 $x^2+y^2=1$ 的逆时针方向，则曲线积分

   $\oint_C x\mathrm{e}^{2x^2-3y^2}\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^{2x^2-3y^2}\mathrm{d}y=$____________。

9. 微分方程 $y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为：________________________。

10. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln\dfrac{1}{1-x}}$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上能展开成幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，

则 $c_0=$______________。

三、计算题 (本题 8 分)

11. 求曲线 $\begin{cases}x^2-y^2-z=0\\x^2+2y^2+3z^2=3\end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切线方程，并将其表示为标准型方程。

四、应用题 (本大题共 18 分，其中第 12 题 8 分，第 13 题 10 分)

12. 若物质曲线 $L: y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}(0\le x\le 1)$ 的线密度函数 $\rho(x,y)=3x$，求物质曲线 L 的质量。

13. 设有平面力场 $\vec{F}=(2xy^3-y^2\cos x)\vec{i}+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\vec{j}$，求一质点沿曲线 $C: 2x=\pi y^2$，从点 $O(0,0)$ 运动到点 $A(\dfrac{\pi}{2},1)$ 时，场力 $\vec{F}$ 所做的功。

五、计算曲面积分 (本大题共 18 分，其中第 14 题 8 分，第 15 题 10 分)

14. Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上满足 $z\ge\dfrac{a}{2}$ 的那部分球面块，

计算曲面积分：$\iint_{\Sigma}(x-y+5z^3)\mathrm{d}S$。

15. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 S 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 上介于 $z=1$ 和 $z=2$ 之间的部分曲面的下侧。

六、级数题 (本大题共 18 分，其中第 16 题 8 分，第 17 题 10 分)

16. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[4^n+(2+\dfrac{1}{n})^n](2x-1)^n$ 的收敛域。

17. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 9^n}$ 的和。

七、证明题 (本题 8 分)

18. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，其中 $a_n>0$，$n=1,2,3,\dots$。证明：

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 有界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 1；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_n}=0$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 1。