1.解：利用极坐标换元易得：

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr=\pi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,dr^2=\frac{2\pi}{3}$$

从而该题选 C

2.解：其几何意义为点$(1,0)$到直线$2x+y=1$的距离。

根据高中学过的点到直线距离公式得：

$$d=\frac{|2\times1-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

故该题选 A

3.解：利用轮换对称性易得：

$$I=\oiint_S 2(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=2\cdot4\pi\cdot1^2=8\pi$$

从而该题选 B

4.解：对所求级数进行等价变形，再利用常见幂级数计算可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}=e^{\frac{1}{2}}-1$$

故该题选 D

5.解：①考虑广义p级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\leqslant1\end{cases}$,显然命题错误。

②对$f(x)$进行泰勒展开：

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,\xi位于0与x之间$$

再考虑原级数的绝对值：

$$\left|(-1)^{n-1}f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{|f''(\xi)|}{2n^2}\leqslant\frac{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}f''}{2n^2}$$

根据比较审敛法，原级数绝对收敛。命题得证。

③设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R_1$,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}a_nx^n$的收敛半径为$R_2$

则对于任意一点$x_0\in(0,R_1)$,都有$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛

又因为$\frac{n}{n+1}|a_n|\,|x_0|^n<|a_n|\,|x_0|^n$,故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}a_nx^n$在$x=x_0$处也绝对收敛

即$R_1\geqslant R_2$,同理可得$R_1\leqslant R_2$

综上，$R_1=R_2$,即命题得证。原命题正确

综上，命题①错误，②③正确，正确个数为 2，该题选 B

6.解：由于z为初等复合函数，满足 Clairaut 定理，交换偏导次序对结果无影响：

$$z_{xy}=z_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2ye^{3x+y^2}\right)=6ye^{3x+y^2}$$

7.解：利用算子性质，逐个计算即可：

$$\operatorname{div}(\nabla u)=\operatorname{div}(4x,4y,-2z)=4+4-2=6$$

8.解：根据对称性易得：

$$I=0$$

9.解：考虑凑微分法：

$$2xdx+\frac{ye^x dx-e^x dy}{y^2}=0$$

$$d(x^2)+d\left(\frac{e^x}{y}\right)=0$$

$$x^2+\frac{e^x}{y}=C$$

10.解：将分子进行幂级数展开后再积分：

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

11.解：方程两边$F(x+6y-3z,x-e^z)=0$同时对x,y求偏导：

$$F_1(1-3z_x)+F_2(1-e^z\cdot z_x)=0\Rightarrow z_x=\frac{F_1+F_2}{3F_1+e^zF_2}$$

$$F_1(6-3z_y)+F_2(-e^z\cdot z_y)=0\Rightarrow z_y=\frac{6F_1}{3F_1+e^zF_2}$$

从而最终求得全微分：

$$dz=\frac{(F_1+F_2)dx+6F_1dy}{3F_1+e^zF_2}$$

12.解：拆分为两个曲面分别计算：$\varSigma=\varSigma_1+\varSigma_2$

其中：$\varSigma_1:z=1,x^2+y^2\leqslant 1,\varSigma_2:z=\sqrt{x^2+y^2},0\leqslant z\leqslant 1$

对于第一个曲面易得：

$$\iint_{\varSigma_1}3z^2\mathrm{d}S=3\iint_{\varSigma_1}\mathrm{d}S=3\pi\cdot 1^2=3\pi$$

对于第二个曲面得：

$$\iint_{\varSigma_2}3z^2dS=\iint_{D_{xy}}3(x^2+y^2)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy=3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{3\sqrt{2}\,\pi}{2}$$

其中：$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$

从而得到最终结果：

$$\oiint_{\Sigma} 3z^2 \mathrm{d}S = 3\pi + \frac{3\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{3\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{2}$$

13. 解：对题干所给积分进行改写：

$$\begin{aligned}
F(a,b) &= (a^2+b^2)\int_C ds - 2a\int_C xds - 2b\int_C yds + \int_C (x^2+y^2)ds \\
&= \int_C ds \cdot \left[\left(a - \frac{\int_C xds}{\int_C ds}\right)^2 + \left(b - \frac{\int_C yds}{\int_C ds}\right)^2\right] + \int_C (x^2+y^2)ds - \frac{\left(\int_C xds\right)^2 + \left(\int_C yds\right)^2}{\int_C ds} \\
&\geqslant \int_C (x^2+y^2)ds - \frac{\left(\int_C xds\right)^2 + \left(\int_C yds\right)^2}{\int_C ds}
\end{aligned}$$

当且仅当$a = \dfrac{\int_C xds}{\int_C ds}, b = \dfrac{\int_C yds}{\int_C ds}$时取等号，此时点$(a,b)$为曲线$C$的形心

14.解：先利用凑微分计算一部分：

$$I = \int_L e^{2x}dx + 3xdy - ydy = \int_L d\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}y^2\right) + \int_L 3xdy = \frac{1-e^4}{2} + \int_L 3xdy$$

对于余下部分，考虑参数方程组：

$$x = 1+\cos\theta, y = \sin\theta, \theta: 0 \to \pi$$

从而得到：

$$\int_L 3xdy = \int_0^{\pi} 3(1+\cos\theta)\cos\theta d\theta = 3\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

从而得到最终结果：

$$I = \frac{1-e^4+3\pi}{2}$$

15.解：好玩的高斯散度公式题目：

(1)记S围成的封闭空间为Ω.由高斯散度公式易得：

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} \sum_{cyc} \frac{(x^2+4y^2+9z^2)^{3/2} - 3(x^2+4y^2+9z^2)^{1/2} \cdot x^2}{(x^2+4y^2+9z^2)^3} dV \\
&= \iiint_{\Omega} \sum_{cyc} \frac{(x^2+4y^2+9z^2)^2 - 3(x^2+4y^2+9z^2) \cdot x^2}{(x^2+4y^2+9z^2)^{7/2}} dV \\
&= \iiint_{\Omega} \frac{3(x^2+4y^2+9z^2)^2 - 3(x^2+4y^2+9z^2) \cdot (x^2+3y^2+9z^2)}{(x^2+4y^2+9z^2)^{7/2}} dV \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2)存在奇点，所以开始“打洞”。构造曲面S'：$x^2+4y^2+9z^2 = \varepsilon^2(\varepsilon \to 0)$,取其外侧为正，记

其封闭的空间为Ω'.

则:

$$\begin{aligned}I&=\oiint_{S+S'^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+9z^2)^{3/2}}\mathrm{d}S+\oiint_{S'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+9z^2)^{3/2}}\mathrm{d}S\\&=\oiint_{S'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\varepsilon^3}\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega'}3dV\\&=\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot 3\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}\\&=\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

16.解：记$t=-2(2x-3)$,则原级数化为幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}(2x-3)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$$

由收敛半径公式容易知道：$R=1$

$t=1$时，显然发散；$t=-1$时，根据$Leibniz$判别法，收敛

综上，只需要:

$$-1\leqslant-2(2x-3)<1$$

$$\frac{5}{4}<x\leqslant\frac{7}{4}$$

17.解：将原函数拆开后再展开:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{[1+(x-1)]^2}\\&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x-1}{2}\right]^{-1}-[1+(x-1)]^{-2}\\&=\frac{1}{2}\times\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(-1)\times(-1-1)}{2!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)\times(-1-1)\times\cdots\times(-1-n+1)}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n+\cdots\right]\\&\quad-\left[1-2(x-1)+\frac{(-2)\times(-2-1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{(-2)\times(-2-1)\times\cdots\times(-2-n+1)}{n!}(x-1)^n+\cdots\right]\\&=\frac{1}{2}\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n\right]-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n\\&=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-n-1\right)(x-1)^n\end{aligned}$$

其中要求:

$$-1<\frac{x-1}{2}<1,\ -1<x-1<1$$

$$0<x<2$$

对比直接泰勒展开级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^{n}$$

容易得到:

$$(-1)^{2017}\left(\frac{1}{2^{2017+1}}-2017-1\right)=\frac{f^{(2017)}(1)}{2017!}$$

$$f^{(2017)}(1)=-2017!\times\left(\frac{1}{2^{2018}}-2018\right)$$

18.证明:

①$a\leqslant 0$时，显然通项不趋于 0，原级数发散。

②$0<a<1$时，考虑加括号后的级数:

$$\left(1-\frac{1}{2^{a}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{a}}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}\right]+\cdots$$

考虑极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}}{\frac{1}{n}}=-\infty$$

即对于$M=-1$,存在$N\in N_{+}$，对于任意的$n>N$,都有:

$$\frac{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}}{\frac{1}{n}}<-1\Rightarrow\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}<-\frac{1}{n}$$

根据比较审敛法知，加括号后的级数发散，原级数发散

③$a=1$时，根据$Leibniz$判别法知，原级数收敛。

④$a>1$时考虑加括号后的级数:

$$\left(1-\frac{1}{2^{a}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{a}}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}\right]+\cdots$$

考虑极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

即对于$\varepsilon=\frac{1}{4}$,存在$N\in N_{+}$，对于任意的$n>N$,都有:

$$\left|\frac{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}>\frac{1}{4n}$$

根据比较审敛法知，加括号后的级数发散，原级数发散

综上，当且仅当$a=1$时，原级数收敛。