习题 10

最后修改时间：20200514 13：35

1.解：

（1）$y=\sqrt{x},y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,原式$=\int_0^1\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}\right)dx=\int_0^1\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2}dx=\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}$

另解：$x=y^2,x'=2y$,原式$=\int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}dy=\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}$

（2）原式$=4\int\limits_{C_1}yds+2\int\limits_{C_2}xds=4\int_0^2 ydy+2\int_0^4 xdx=24$

其中$C_1:x=4(0\le y\le 2)\ \ C_2:y=2(0\le x\le 4)$

（3）原式$=\int_0^1 xdx+\int_0^1 ydy+\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}dx=1+\sqrt{2}$

（4）原式$=\int\limits_C ds=\int_{-\pi}^0\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=\pi$

（5）原式$=\int_0^1 3t\sin t\sqrt{3^2+1^2}dt=3\sqrt{10}(\sin 1-\cos 1)$

（6）原式$=a^{2n}\int\limits_C ds=a^n\int_0^{2\pi}\sqrt{(a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt=2\pi a^{2n+1}$

（7）原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$

$$=3a^{7/3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 t\cos^2 t)\sin t\cos tdt$$
$$=a^{7/3}$$

（8）双纽线极坐标方程$:\rho^2=a^2\cos 2\theta$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(d\rho\cos\theta)^2+(d\rho\sin\theta)^2}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$$

$$\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}\Rightarrow\rho'=a\frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}}=-a\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

原式$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta+a^2\dfrac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=2(2-\sqrt{2})a^2$

（9）原式$=4\int_0^1(x+1-x)\sqrt{1+(-1)^2}dx=4\sqrt{2}$

（10） 原式$=\int\limits_C(3x^2+4y^2)ds=12\int\limits_C ds=12a$

2.解：

（1） 令$x=2t,y=t,z=2t(0\le t\le 1)$

原式$=\int_0^1(5t)^2\sqrt{2^2+1^2+2^2}dt=25$

（2） $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}=\sqrt{2+t^2}$

原式$=\int_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}dt=\frac{1}{3}\left[(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$

（3）

$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}=\sqrt{\left[e^t(\cos t-\sin t)\right]^2+\left[e^t(\sin t+\cos t)\right]^2+e^{2t}}=\sqrt{3}e^t$

原式$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$

3.解：

构造$Lagrange$函数$:L(x,y,\lambda)=x^3y+\lambda(3x+4y-12)$

$$\begin{cases}L_x=3x^2y+3\lambda=0\\L_y=x^3+4\lambda=0\\L_\lambda=3x+4y-12=0\end{cases}\Rightarrow(x,y,\lambda)=(3,\frac{3}{4},-\frac{27}{4})$$ （已舍去不合题意的解）

$f(x,y)_{\max}=f(3,\frac{3}{4})=\frac{81}{4}\Rightarrow\sqrt{x^3y}\le\frac{9}{2}$

$l_C=\sqrt{(\frac{12}{3})^2+(\frac{12}{4})^2}=5\qquad e^{-\frac{9}{2}}\le e^{-\sqrt{x^3y}}\le 1$

$\Rightarrow 5e^{-\frac{9}{2}}\le\int\limits_C e^{-\sqrt{x^3y}}ds\le 5$

$Ps:3x+4y=x+x+x+4y\ge 4\sqrt[4]{4x^3y}\Rightarrow x^3y\le\frac{81}{4}$

当且仅当$x=4y$时取等号，即$(x,y)=(3,\frac{3}{4})$

4. 解： $m=\int_0^\pi a\sin t\sqrt{(a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt=2a^2$

5.解：

$$I_x=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2k\left|a(1-\cos t)\right|\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+(a\sin t)^2}dt$$
$$=ka^4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\sqrt{2-2\cos t}dt$$
$$=\frac{1024}{35}ka^4$$

其中:$\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\sqrt{2-2\cos t}dt=\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^3\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt$
$$=16\int_0^{2\pi}\sin^7\frac{t}{2}dt$$
$$=32\int_0^{\pi}\sin^7 xdx$$
$$=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 xdx$$
$$=64\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1024}{35}$$

6.解：

（1）

$z=4-2x-\frac{4y}{3},z_x=-2,z_y=-\frac{4}{3}$， $D_{xy}=\{(x,y)\big|\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1\}$

原式$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(2x+\frac{4}{3}y+4-2x-\frac{4y}{3}\right)\sqrt{1+2^2+(\frac{4}{3})^2}dxdy=4\times\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{61}}{3}=4\sqrt{61}$

（2）

$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le R^2\}$

原式$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{yR}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$

由对称性，显然该积分值为0

$\Rightarrow$原式$=0$

（3） 原式$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{R^2+z^2}=\int_0^H\frac{2\pi R}{R^2+z^2}dz=2\pi\arctan\frac{H}{R}$

（4）

$$原式=4\iint_{\Sigma}xy(x^2+y^2)dS=4\iint_{D_{xy}}xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1，\ x>0,y>0\}$$

采取极坐标

$$原式=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^5\sin\theta\cos\theta\sqrt{1+4r^2}dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^4\sqrt{1+4r^2}dr^2=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

（5）

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$$

$$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2ax\}$$

$$原式=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\left[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

采取极坐标

$$原式=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\sin\theta+\cos\theta)\right]rdr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)r^3dr$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)d\theta$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

7.解：

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$S=\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le Rx\}$$

采取极坐标计算

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=(\pi-2)R^2$$

8.解：

不妨取z轴所在直径，则密度$\rho=x^2+y^2$

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$m=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=2\iint_{D_{xy}}\frac{R(x^2+y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le R^2\}$$

采取极坐标进行计算

$$m=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\frac{Rr^3}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=\frac{8}{3}\pi R^4$$

$$Ps:\text{其中}\int_0^R\frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=\int_0^R-r^2d\sqrt{R^2-r^2}=\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}dr^2=\frac{2}{3}R^3$$

9.解：

由对称性: $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iint_{\Sigma} z(x^2+y^2)dS = \frac{1}{m}\iint_{\Sigma}\frac{(x^2+y^2)^2}{2}dS$$

$$z_x = x, z_y = y, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

$$m = \iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS = \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$D_{xy} = \{(x,y)\big| x^2+y^2 \le 4\}$$

采取极坐标进行计算

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr = \frac{4\pi(25\sqrt{5}+1)}{15}$$

同理 $\iint_{\Sigma}\frac{(x^2+y^2)^2}{2}dS = \frac{8\pi(125\sqrt{5}-1)}{105}$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iint_{\Sigma}\frac{(x^2+y^2)^2}{2}dS = \frac{2(125\sqrt{5}-1)}{7(25\sqrt{5}+1)}$$

10.解：

（1）

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+9x^4}dx \Rightarrow dx = \frac{ds}{\sqrt{1+9x^4}}$$

原式 $= \int_{-1}^{1} x^2\cdot x^3dx - x\cdot(3x^2)dx = \int_{-1}^{1}(x^5-3x^3)dx = \int_C \frac{(x^5-3x^3)ds}{\sqrt{1+9x^4}} = \int_C \frac{x^2y-3x^3}{\sqrt{1+9x^4}}ds$

（2）

$$x'(t) = 1, y'(t) = 2t, z'(t) = 3t^2$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt = \sqrt{1+4t^2+9t^4}dt$$

$$\Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

原式 $= \int_0^1 Pdt + 2tQdt + 3t^2Rdt = \int_0^1 (P+2tQ+3t^2R)dt = \int_L \frac{P+2tQ+3t^2R}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}ds = \int_L \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4y+9y^2}}ds$

11.解：

（1）原式 $= \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

（2） $原式=\int_0^1 (x^2-x^4)dx+x^3\cdot(2x)dx=\int_0^1(x^2+x^4)dx=\frac{8}{15}$

（3） $原式=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 ydy=\frac{5}{6}$

12.解：

（1）

$分为两段:①y=1-x,x从1变到0，②y=x+1,x从0变到-1$

$$原式=\int_1^0\frac{dx-dx}{|x|+|y|}+\int_0^{-1}\frac{2dx}{-x+x+1}=-2$$

（2） $原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sin t(-a\sin t)dt+a\cos t(a\cos t)dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2tdt=\frac{1}{2}a^2$

（3） $原式=\int_0^1 (t^4-t^6)dt+2t^5(2t)dt-t^2(3t^2)dt=\int_0^1(-2t^4+3t^6)dt=\frac{1}{35}$

（4） $令x=\cos t, y=\sin t,则z=2-\cos t+\sin t$

$$\begin{aligned}
原式&=-\int_0^{2\pi}(2-\cos t+\sin t-\sin t)(-\sin t)dt+(\cos t-(2-\cos t+\sin t))(\cos t)dt\\
&\quad+(\sin t-\cos t)(\cos t+\sin t)dt\\
&=-\int_0^{2\pi}\left[(\cos t-2)\sin t+(2\cos t-\sin t-2)\cos t+\sin^2 t-\cos^2 t\right]dt\\
&=-\int_0^{2\pi}(\cos t\sin t-2\sin t+2\cos^2 t-\sin t\cos t-2\cos t+\sin^2 t-\cos^2 t)dt\\
&=-\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt\\
&=-2\pi
\end{aligned}$$

13.解：

（1） $W=\int_L x^2ydx-xydy=\int_0^1 t^{10}(3t^2)dt-t^7(4t^3)dt=\int_0^1(3t^{12}-4t^{10})dt=-\frac{19}{143}$

（2） $W=\int_L x^2dx+xydy+z^2dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t\cos t-\sin^2 t\cos t+2t^5)dt=\frac{\pi^6}{192}$

14. 解：

（1）

$$令x=a\cos t, y=a\sin t, t从0变化到\frac{\pi}{2}$$

$$F=ka(\cos(t+\frac{\pi}{2}),\sin(t+\frac{\pi}{2}))=ka(-\sin t,\cos t)$$

$$W=ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt==\frac{1}{2}k\pi a^2$$

（2）

$$令x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, t从0变化到\frac{\pi}{2}$$

$$F=ka(\cos^3(t+\frac{\pi}{2}),\sin^3(t+\frac{\pi}{2}))=ka(-\sin^3 t,\cos^3 t)$$

$$\begin{aligned}W&=ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(-\sin^3 t)(-3\cos^2 t\sin t)+(\cos^3 t)(3\sin^2 t\cos t)\right]dt\\&=ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^4 t\cos^2 t+3\sin^2 t\cos^4 t)dt\\&=3ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt\\&=\frac{3ka^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt\\&=\frac{3ka^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt\\&=\frac{3k\pi a^2}{16}\end{aligned}$$

15. 解：

$$原式=\int_0^{\pi}(1+a^3\sin^3 x)dx+(2x+a\sin x)(a\cos x)dx=\int_0^{\pi}(1+2ax\cos x+a^2\sin x\cos x+a^3\sin^3 x)dx$$

$$其中:\int_0^{\pi}dx=\pi$$

$$\int_0^{\pi}x\cos xdx=\int_0^{\pi}xd\sin x=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=-2$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2x)dx=0$$

$$\int_0^{\pi}\sin^3 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$进而,原式=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3$$

$$令f(a)=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3\Rightarrow f'(a)=-4+4a^2=4(a-1)(a+1)$$

$$令f'(a)=0\Rightarrow a=1(a>0)$$

经检验$f(a)$的单调性，$a=1$符合题意

$y=\sin x$

16. 解：

（1）

$$z=a-x,z_x=-1,z_y=0\Rightarrow \boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(1,0,1)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n}^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\Rightarrow d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}^0dS$$

$$原式=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)+R(x,y,z)\right]dS$$

（2）

$$y=x^2+2z^2,y_x=2x,y_z=4z,\Rightarrow \boldsymbol{n}=(-y_x,1,-y_z)=(-2x,1,-4z)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n}^0=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+16z^2}}(-2x,1,-4z)\Rightarrow d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}^0dS$$

$$原式=-\iint_{\Sigma}\frac{-2xP(x,y,z)+Q(x,y,z)-4zR(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+16z^2}}dS=\iint_{\Sigma}\frac{2xP(x,y,z)-Q(x,y,z)+4zR(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+16z^2}}dS$$

17.解：

（1）

$D_{xy}=\{(x,y)\big| x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}, z=1-x-y, z_x=-1, z_y=-1 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(1,1,1)$

$\boldsymbol{n}^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\Rightarrow d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}^0 dS$

原式$=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1-x-y)^2 dS=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)^2 dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2 dy=\dfrac{1}{12}$

Ps:这样傻乎乎套下模板后，还是写一个正常做法吧

$z=1-x-y\Rightarrow$ 原式$=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)^2 dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2 dy=\dfrac{1}{12}$

我们再梳理一下，这个就是第二类曲面积分的一小部分。

根据定理10.4，还可以这样：

$D_{xy}=\{(x,y)\big| x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}, z=1-x-y, z_x=-1, z_y=-1 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(1,1,1)$

原式$=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)^2\times 1dxdy=\dfrac{1}{12}$

（2）

$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

原式$=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$

$D_{xy}=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le R^2\}$，采取极坐标进行计算，根据对称性，只需要考虑第一象限

原式$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\cos^2\theta\sin^2\theta dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}dr=4\times\dfrac{\pi}{16}\times\dfrac{8R^7}{105}=\dfrac{2\pi R^7}{105}$

（3）

$z_x=2x, z_y=2y\Rightarrow \boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(-2x,-2y,1)$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\iint\limits_{D_{xy}}\left(-2xe^y-2y^2e^x+x^2y\right)dxdy\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}\left(-2ye^x-2y^2e^x+x^2y\right)dxdy\\
&=\int_0^1 e^x dx\int_0^1(-2y-2y^2)dy+\int_0^1 x^2dx\int_0^1 ydy\\
&=\frac{11}{6}-\frac{5e}{3}
\end{aligned}
$$

（4）

$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,x\le 0,y\ge 0\}$

先计算$\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{8}$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2},z_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dxdy$

由对称性:$\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

所以，原积分$=\frac{\pi}{8}$

（5）

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$,其中$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$分别为$\Sigma$ $x=0,y=0,z=0$的三部分，Σ_4为$x+y+z=1$的部分

显然$\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}=0$.由轮换对称性知道：

原式$=3\iint\limits_{\Sigma_4}zxdxdy=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)xdy=\frac{1}{8}$

（6）

由对称性，上下底面的定积分值为相反数。

所以我们只需要考虑侧面的积分：

记侧面为Σ_1,方向向外。

在yOz面上的投影为：$D=\{(y,z)\big|-R\le y,z\le R\}$

原积分$=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$

再根据对称性，可以知道$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$

所以原积分$=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=2\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\int_{-R}^{R}\frac{dz}{R^2+z^2}=\frac{1}{2}\pi^2R$

（7）

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$,其中:

$\Sigma_1: y=\sqrt{4-x^2}, D_{xz}=\{(x,z)|0\le z\le 2-x,-2\le x\le 2\}$

$\Sigma_2: y=-\sqrt{4-x^2}, D_{xz}=\{(x,z)|0\le z\le 2-x,-2\le x\le 2\}$

分别计算积分值：

$$\iint_{\Sigma_1}-ydzdx+(z+1)dxdy=\iint_{D_{xz}}-\sqrt{4-x^2}\,dzdx=-\int_{-2}^{2}dx\int_0^{2-x}\sqrt{4-x^2}\,dz=-4\pi$$

由对称性:

$$\iint_{\Sigma_2}-ydzdx+(z+1)dxdy=\iint_{\Sigma_1}-ydzdx+(z+1)dxdy=-4\pi$$

原积分值$=-8\pi$

（8）

分别计算$(A,B,C)=\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)=(\sin v,-\cos v,u)$

原式$=\iint_{D_{uv}}(u\sin^2 v-u\cos^2 v+uv^2)dudv=\int_0^1 udu\int_0^{\pi}(v^2-\cos 2v)dv=\dfrac{\pi^3}{6}$

18.解：

（1）

$$\Phi=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

轮换对称性知：

$$\Phi=3\iint_{\Sigma}z^2dxdy=3\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)dxdy=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{3\pi}{8}$$

（2）

$$\Phi=\oiint_{\Sigma}x^2dydz+xydzdx+y^2dxdy$$

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$,其中：

$\Sigma_1: z=1, D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$\Sigma_2: z=x^2+y^2, D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$\Phi=\iint_{\Sigma_1}x^2dydz+xydzdx+y^2dxdy+\iint_{\Sigma_2}x^2dydz+xydzdx+y^2dxdy=I_1+I_2$$

$$I_1=\iint_{D_{xy}}y^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sin^2\theta dr=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}I_2&=-\iint_{D_{xy}}(-2x^3-2xy^2+y^2)dxdy\\&=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(-2r^3\cos^3\theta-2r^3\cos\theta\sin^2\theta+r^2\sin^2\theta)rdr\\&=-\int_0^{2\pi}(-\frac{1}{2}\cos^3\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)d\theta\\&=-\int_0^{2\pi}(-\frac{1}{2}\cos\theta(1-\cos^2\theta)+\frac{1}{4}\times\frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta\\&=-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\Phi=I_1+I_2=0$$

19. 解：

（1）

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\oint_{C^+}xdy-ydx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\sin^2 t+3a^2\sin^4 t\cos^2 t)dt\\&=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)dt\\&=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt\\&=\frac{3\pi a^2}{8}\end{aligned}$$

（2）

$$S=\frac{1}{2}\oint_{C^+}xdy-ydx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t+3\sin^2 t\cos^2 t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left((\frac{1+\cos 2t}{2})^2+\frac{3\sin^2 2t}{4}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{(1+\cos 4t)}{8}+\frac{3(1-\cos 4t)}{8}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8})dt$$
$$=\frac{3\pi}{4}$$

（3）

$$S=\frac{1}{2}\oint_{C^+}xdy-ydx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^2(t-\sin t)\sin t-a^2(1-\cos t)^2\right)dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t+\sin^2 t-t\sin t)dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\times 6\pi$$
$$=3\pi a^2$$

20. 解:

（1）原式$=\iint_D(2x\cos y+1-2x\cos y+4)dxdy=5\iint_D dxdy=15\pi$

（2）原式$=-\iint_D(-1-1)dxdy=2\pi ab$

（3）原式$=\iint_D\left[(x^2-1)-(x^2-2)\right]dxdy=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\times 1\times(2-1)=\frac{1}{2}$

（4）添加定向直线段$\overrightarrow{OA}$，与C构成闭曲线，记该闭曲线围成的区域为D。

$$原式=\iint_D (e^x\cos y-e^x\cos y+m)dxdy-\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=m\iint_D dxdy$$

$$=\frac{m\pi a^2}{8}$$

（5）记点$A(\pi+1,0),O(1,0)$，添加定向直线段$\overrightarrow{OA}$，与C构成闭曲线，记该闭曲线围成的区域为D。

$$原式=\iint_D\left[y(y+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]dxdy-\int_{\overline{OA}}\sqrt{x^2+y^2}dx+y\left[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]dy$$

$$=\iint_D y^2dxdy-\int_1^{\pi+1}xdx$$

$$=\int_1^{\pi+1}dx\int_0^{\sin(x-1)}y^2dy-\frac{(\pi+1)^2-1^2}{2}$$

$$=\int_1^{\pi+1}\frac{\sin^2(x-1)}{3}dx-\frac{\pi^2+2\pi}{2}$$

$$=\frac{4}{9}-\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

（6）

$$原式=\iint_D\left(\frac{\frac{2}{y}}{y(1+\frac{x^2}{y^2})}-\frac{\frac{1}{x}}{x(1+\frac{y^2}{x^2})}\right)dxdy$$

$$=\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2\frac{1}{r}dr$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{12}$$

（7）记点 $O(1,1), A(1,0), B(0,1),$ 添加定向直线段 $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OA}$，与 C 构成闭曲线，记该闭曲线围成的区域为 D。

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\iint_D \left(-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)dxdy + \int_{BO} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \int_{OA} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \\
&= \int_0^1 \frac{-dx}{x^2+1} + \int_1^0 \frac{dy}{1+y^2} \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ps:添加定向直线段时，注意方向。

（8）注意到 C 围成区域内有奇点 $(0,0),$ 构造一顺时针椭圆 L: $4x^2+y^2=\varepsilon^2,$ 其中 $\varepsilon>0$ 且充分小。（为什么这么构造，因为分母可以消掉啊！）

记 C 与 L 围成的区域为 D, L 围成的区域为 D_ε.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_D \frac{y^2-4x^2+4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} xdy-ydx \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon} dxdy \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}\pi \times \frac{\varepsilon}{2} \times \varepsilon \\
&= \pi
\end{aligned}$$

21. 解：

（1）

记 $P=x+y, Q=x-y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow$ 与路径无关

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{(1,0)}^{(2,0)} (x+y)dx+(x-y)dy + \int_{(2.0)}^{(2,2)} (x+y)dx+(x-y)dy \\
&= \int_1^2 xdx + \int_0^2 (2-y)dy \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

（2）

$$记P = x^2 y + 3xe^x, Q = \frac{1}{3}x^3 - y\sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 \Rightarrow 与路径无关$$

$$\begin{aligned}
原式 &= \int_{(0,0)}^{(0,2)} (x^2 y + 3xe^x)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - y\sin y\right)dy + \int_{(0,2)}^{(\pi,2)} (x^2 y + 3xe^x)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - y\sin y\right)dy \\
&= \int_0^2 - y\sin y dy + \int_0^{\pi} (2x^2 + 3xe^x)dx \\
&= 3\left[e^{\pi}(\pi - 1) + 1\right] + \frac{2\pi^3}{3} + 2\cos 2 - \sin 2
\end{aligned}$$

（3）

$$记P = y + e^{-x}\sin y, Q = x - e^{-x}\cos y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + e^{-x}\cos y \Rightarrow 与路径无关$$

$$\begin{aligned}
原式 &= \int_{(0,0)}^{(1,0)} (y + e^{-x}\sin y)dx + (x - e^{-x}\cos y)dy + \int_{(1,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} (y + e^{-x}\sin y)dx + (x - e^{-x}\cos y)dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-1}\cos y)dy \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

（4）

$$记P = \frac{y}{1 + (xy)^2}, Q = \frac{x}{1 + (xy)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2} \Rightarrow 与路径无关$$

$$\begin{aligned}
原式 &= \int_{(0,0)}^{(1,0)} \frac{ydx + xdy}{1 + (xy)^2} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \frac{ydx + xdy}{1 + (xy)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

22. 解：

（1）

记$P = yx^{y-1}, Q = x^y \ln x$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = x^{y-1}(y\ln x + 1) \Rightarrow$ 在右半平面存在原函数$u(x,y)$

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy \\
&= \int_{(1,1)}^{(x,1)} yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy + \int_{(x,1)}^{(x,y)} yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy \\
&= \int_1^x dx + \int_1^y x^y \ln x dy \\
&= x - 1 + x^y - x \\
&= x^y - 1
\end{aligned}
$$

取$u(x,y) = x^y$作为最终结果

（2）

记$P = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}, Q = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y(y\sin\frac{y}{x} - 2x\cos\frac{y}{x})}{x^3} \Rightarrow$ 在右半平面存在原函数$u(x,y)$

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy \\
&= \int_{(1,0)}^{(x,0)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy \\
&= \int_1^x dx + \int_0^y \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy \\
&= x - 1 + y\sin\frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

取$u(x,y) = x + y\sin\frac{y}{x}$作为最终结果

（3）

$$\text{记}P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Rightarrow \text{在右半平面存在原函数}u(x,y)$$

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\int_{(0,0)}^{(x,0)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\int_0^x dx+\int_0^y\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=x+\sqrt{x^2+y^2}-x\\&=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

取$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$作为最终结果

（4）

$$\text{记}P=\frac{x-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow \text{在右半平面存在原函数}u(x,y)$$

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}\\&=\int_{(1,0)}^{(x,0)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}\\&=\int_1^x\frac{dx}{x}+\int_0^y\frac{(x+y)dy}{x^2+y^2}\\&=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}-\ln x\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}\end{aligned}$$

取$u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\dfrac{y}{x}$作为最终结果

23. 解：

（1）

记$P = xy^2, Q = yf(x)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 2xy = yf'(x) \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C$$

$\because f(0) = 0 \quad \therefore f(x) = x^2$

（2）

记$P = yf(x), Q = -xf(x), f = f(x), f' = f'(x)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow f = -f - xf'$$

$$\Rightarrow 2f = -x\frac{df}{dx} \Rightarrow \frac{2}{x}dx = \frac{-df}{f} \Rightarrow 2\ln x + C = -\ln f \Rightarrow f(x) = \frac{C}{x^2}$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$$

（3）

$$记P = ye^x f(x) - \frac{y}{x}, Q = -\ln f(x), f = f(x), f' = f'(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow e^x f - \frac{1}{x} = -\frac{f'}{f} \Rightarrow f' - \frac{f}{x} = -e^x f^2$$

令$z(x) = f^{-1}$,原方程变换为:

$$z' + \frac{z}{x} = e^x \Rightarrow (ze^{\int \frac{1}{x} dx})' = e^{\int \frac{1}{x} dx} e^x \Rightarrow (zx)' = xe^x$$

$$\Rightarrow zx = \int xe^x dx = e^x(x-1) + C \Rightarrow z = \frac{e^x(x-1)+C}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) = z^{-1} = \frac{x}{e^x(x-1)+C}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{e^x(x-1)+2}$$

Ps:至于为什么我不直接用公式呢，因为，我我我，真的忘了！
考试的时候都现推现用，何况现在做作业！！！

那就推一下，顺便复习一下公式吧。

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

设$F(x) = yf(x) \Rightarrow F'(x) = y'f(x) + yf'(x) = Qf(x)$

对比系数：令$P(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int P(x)dx = \ln f(x)$

$$f(x) = e^{\int P(x)dx} \Rightarrow F'(x) = (ye^{\int P(x)dx})' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C\right)$$

Tip:加一个C原因是，公式中所有不定积分，事实上都是取一个原函数。

24. 解：

$$记P=2xy,Q=Q(x,y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow 2x=Q_x\Rightarrow Q=x^2+C(y)$$

$$\begin{aligned}左边&=\int_{(0,0)}^{(t,0)}2xydx+Q(x,y)dy+\int_{(t,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy\\&=\int_0^t 0dx+\int_0^1 Q(t,y)dy\\&=\int_0^1 Q(t,y)dy\\&=t^2+\int_0^1 C(y)dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右边&=\int_{(0,0)}^{(1,0)}2xydx+Q(x,y)dy+\int_{(1,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy\\&=\int_0^1 0dx+\int_0^t Q(1,y)dy\\&=\int_0^t Q(1,y)dy\\&=t+\int_0^t C(y)dy\end{aligned}$$

$$左边=右边\Rightarrow t+\int_0^t C(y)dy-t^2-\int_0^1 C(y)dy=0$$

$$两边同时对t求导:1+C(t)-2t=0\Rightarrow C(y)=2y-1$$

$$Q(x,y)=x^2+2y-1$$

25. 解：

$$记P=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^p,Q=-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^p$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow -\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^p+2px(x^2+y^2)^{p-1}=-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)^p-\frac{2px^3}{y^2}(x^2+y^2)^{p-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)+2px=-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)-\frac{2px^3}{y^2}\Rightarrow -x(x^2+y^2)+2pxy^2=-2x(x^2+y^2)-2px^3$$

$$\Rightarrow x^3+xy^2+2pxy^2+2px^3=0\Rightarrow (2p+1)(x^3+xy^2)=0$$

$$\Rightarrow 2p+1=0\Rightarrow p=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}(ydx-xdy)&=\int_{(1,1)}^{(0,1)}\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}(ydx-xdy)+\int_{(0,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}(ydx-xdy)\\&=\int_1^0\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}+\int_1^2 0dy\\&=1-\sqrt{2}\end{aligned}$$

26.解：

（1）

$$\left[y+\ln(1+x)\right]dx+(x+1-e^{y})dy=0$$
$$\Rightarrow ydx+xdy+\ln(1+x)dx+(1-e^{y})dy=0$$
$$\Rightarrow d(xy)+\ln(1+x)dx+(1-e^{y})dy=0$$
$$\Rightarrow xy+(x+1)\ln(x+1)-x+y-e^{y}=C$$
$$\Rightarrow (1+x)\ln(x+1)-x+(x+1)y-e^{y}=C$$

（2）

$$(1+y\cos xy)dx+x\cos xydy=0$$
$$\Rightarrow dx+d(\sin xy)=0$$
$$\Rightarrow x+\sin xy=C$$

（3）

$$(2xy^{2}+ye^{x})dx-e^{x}dy=0$$
$$\Rightarrow 2xdx+\frac{ye^{x}dx-e^{x}dy}{y^{2}}=0$$
$$\Rightarrow d(x^{2})+d(\frac{e^{x}}{y})=0$$
$$\Rightarrow x^{2}+\frac{e^{x}}{y}=C$$

（4）

$$(y+2xy^{2})dx+(x-2x^{2}y)dy=0$$
$$\Rightarrow (ydx+xdy)+(2xy^{2}dx-2x^{2}ydy)=0$$
$$\Rightarrow d(xy)+y^{2}dx^{2}-x^{2}dy^{2}=0$$
$$\Rightarrow \frac{d(xy)}{x^{2}y^{2}}+\frac{dx^{2}}{x^{2}}-\frac{dy^{2}}{y^{2}}=0$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{xy}+2\ln x-2\ln y=C$$
$$\Rightarrow 2\ln\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}=C$$

27.证明

$$\oint_{\partial D^+} uvdy \xlongequal{Green\text{公式}} \iint_D \frac{\partial(uv)}{\partial x}dxdy = \iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}dxdy + \iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy$$

整理后即得所证等式

28. 证明:

记C围成的区域为D

$$\oint_C xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \xlongequal{Green\text{公式}} \iint_D \left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy \cdots \text{前方高能，对称轮换}$$

$$= \iint_D \left(f(x)+\frac{1}{f(y)}\right)dxdy$$

$$= \iint_D \left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy$$

$$\geq 2\iint_D dxdy = 2\pi$$

29. 解：

（1）直接利用 Gauss 公式

$$\text{原式} = \iiint_\Omega (2x+2y+2z)\,dV = 6\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz = \frac{1}{4}$$

（2）$\text{原式} = \iiint_\Omega (y-z)\,dV = -\iiint_\Omega zdV = -\int_0^3 \pi zdz = -\frac{9\pi}{2}$

Ps:其中，根据对称性，$\iiint_\Omega ydV = 0$

（3）先根据第二类曲线积分的性质，将积分化为外侧（添加负号），

再利用 Gauss 公式。

$$\text{原式} = -3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dV = -3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi\int_0^R r^4dr = -\frac{12\pi R^5}{5}$$

（4）添加外侧曲面$\Sigma_1{:}z=0,\Sigma_2{:}z=1$，构成闭合曲面，再利用 Gauss 公式求解。记$D_{xy}=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant R^2\}$

$$
\begin{aligned}
原式&=\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}(x^3-yz)dydz-2x^2ydzdx+zdxdy\\
&\quad-\iint_{\Sigma_1}(x^3-yz)dydz-2x^2ydzdx+zdxdy\\
&\quad-\iint_{\Sigma_2}(x^3-yz)dydz-2x^2ydzdx+zdxdy\\
&=\iiint_{\Omega}(3x^2-2x^2+1)dV-0-\iint_{D_{xy}}dxdy\\
&=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dV+\iiint_{\Omega}dV-\iint_{D_{xy}}dxdy\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr+\pi R^2-\pi R^2\\
&=\frac{\pi R^4}{4}
\end{aligned}
$$

（5）由已知，为内侧，所以先根据第二类曲线积分的性质，将积分化为外侧（添加负号）。再添加内侧曲面$\Sigma_1{:}z=1$，构成闭合曲面，利用 Gauss 公式求解。记$D_{xy}=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant 1\}$

$$
\begin{aligned}
原式&=-\iiint_{\Omega}(2+1)dV-\iint_{\Sigma_1}zdxdy\\
&=-3\int_0^1\pi zdz+\iint_{D_{xy}}dxdy\\
&=-\frac{3}{2}\pi+\pi\\
&=-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

（6）由已知：旋转后的曲面为：$\Sigma : z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

添加外侧曲面$\Sigma_1 : z = e^a$，构成闭合曲面，利用 Gauss 公式求解。记

$D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\}$

$$
\begin{aligned}
原式 &= \iiint_{\Omega} (4z-2z-2z)dV - \iint_{\Sigma_1} 4xzdydz - 2yzdzdx + (1-z^2)dxdy \\
&= (e^{2a}-1)\iint_{D_{xy}} dxdy \\
&= (e^{2a}-1)\pi a^2
\end{aligned}
$$

（7）直接利用 Gauss 公式求解：

$$
\begin{aligned}
原式 &= \iiint_{\Omega} \left(3x^2 + \frac{1}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right) + 3y^2 - \frac{1}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right) + 3z^2\right) dV \\
&= 3\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2) dV
\end{aligned}
$$

为了便于计算与阐述，根据对称轮换性，将题干中$x = \sqrt{y^2+z^2}$更换为$z = \sqrt{x^2+y^2}$对结果无影响。再利用球坐标：

$$
原式 = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_1^2 r^4 dr = \frac{93\pi}{5}\left(2-\sqrt{2}\right)
$$

（8）添加外侧曲面$\Sigma_1{:}z=0$，从而构成封闭曲面。利用 Gauss 公式求解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \frac{Rxdydz+(z+R)^2dxdy}{R} \\
&= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{Rxdydz+(z+R)^2dxdy}{R} - \iint_{\Sigma_1} \frac{Rxdydz+(z+R)^2dxdy}{R} \\
&= \iiint_{\Omega} \frac{R+2(z+R)}{R} dV - \iint_{D_{xy}} Rdxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^R \frac{R+2(r\cos\varphi+R)}{R} r^2 \sin\varphi dr - \pi R^3 \\
&= \frac{\pi R^3}{2}
\end{aligned}
$$

$$Ps{:}\iint_{\Sigma} \frac{Rxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \neq 0$$

该处为$dydz$,应该判断外法线向量与x轴的夹角，而非与z轴的夹角

30. 解：记$\boldsymbol{e}_n$为单位外法线向量，因$\cos\left(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}}\right)=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_n}{r}$，故

$$\oiint_{\Sigma}\frac{\cos\left(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}}\right)}{r^2}dS=\oiint_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{e}_n dS=\oiint_{\Sigma_{外侧}}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}d\boldsymbol{S}$$

记$\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\left(\dfrac{x}{r^3},\dfrac{y}{r^3},\dfrac{z}{r^3}\right)$，则有

$$div\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=0$$

（1）根据 Gauss 公式，原式$=\iiint_{\Omega}0dV=0$

（2）以原点为中心，以充分小的$\varepsilon>0$为半径作球面Σ_1（取外侧），使它包含在曲面Σ内，并记Ω为由Σ和Σ_1所围成的空间闭区域，则有高斯公式得：

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}\frac{\cos\left(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}}\right)}{r^2}dS&=\oiint_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}d\boldsymbol{S}\\&=\iint_{\Sigma+\Sigma_1^-}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}d\boldsymbol{S}-\oiint_{\Sigma_1^-}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}d\boldsymbol{S}\\&=\oiint_{\Sigma_1}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}d\boldsymbol{S}\\&=\oiint_{\Sigma_1}\frac{\cos\left(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}}\right)}{r^2}dS\\&=\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^2}dS\ \cdots\text{球面上}\boldsymbol{r}\text{与}\boldsymbol{n}\text{同向，夹角为0}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oiint_{\Sigma_1}dS\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\times4\pi\varepsilon^2\\&=4\pi\end{aligned}$$

31. 解：

（1）$z=1-x-y, z_x=-1, z_y=-1, \boldsymbol{n}=(1,1,1)$，进而有：

$$
\begin{aligned}
\varPhi &= \iint_{\Sigma} xzdydz+xydzdx+yzdxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} (xz+xy+yz)dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} (x+y-xy-x^2-y^2)dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} (2x-xy-2x^2)dxdy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x-xy-2x^2)dy \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

（2）根据对称轮换性与格林公式求解：

$$
\begin{aligned}
\varPhi &= \iint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy \\
&= 3\iint_{\Sigma} z^3dxdy \\
&= 9\iiint_{\Omega} z^2dV \\
&= 9\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi \int_0^R r^4dr \\
&= \frac{12\pi}{5}R^5
\end{aligned}
$$

32. 解：

（1）$div\boldsymbol{A}=4-2x+2z$，代入$(x,y,z)=(1,1,3)$，原式$=8$

（2）$div\boldsymbol{A}=6xyz$，代入$(x,y,z)=(1,3,2)$，原式$=36$

（3）$u\boldsymbol{A}=(x^3yz^4,-x^2y^3z^3,2x^4y^2z^3), div(u\boldsymbol{A})=3x^2yz^4-3x^2y^2z^3+6x^4y^2z^2$

（4）$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\dfrac{r^2-x^2}{r^3},div\boldsymbol{A}=\nabla^2 r=\sum\dfrac{r^2-x^2}{r^3}=\dfrac{2}{r}$

33. 解：

记$f=f(x,y,z)=div\boldsymbol{A}=6x^2yz-2x^2yz-2x^2yz=2x^2yz$

则f可微，分别计算三个方向的偏导数与单位方向向量:

$$(f_x,f_y,f_z)=(4xyz,2x^2z,2x^2y)$$

$$\boldsymbol{l}^0=\frac{\boldsymbol{l}}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{3}\boldsymbol{l}=\frac{1}{3}(2,2,-1)$$

代入$(x,y,z)=(1,1,2)\Rightarrow(f_x,f_y,f_z)|_M=(8,4,2)\Rightarrow\left.\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{l}^0}\right|_M=\dfrac{22}{3}$

最大值为：$\sqrt{8^2+4^2+2^2}=2\sqrt{21}$

34. 解：

（1）

$$原式=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy\end{vmatrix}=0$$

（2）

$$原式=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ e^x+x^2y^2z^2 & e^y-y^2z & e^z+yz^2\end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma(y^2+z^2)dydz+(2x^2y^2z+y^2)dxdy-(2x^2yz^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr$$

$$=\frac{\pi R^4}{2}$$

（3）

$$原式=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}2dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}2dxdy$$

$$=-2\pi$$

（4）

$$原式=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(-2y-4z-2z-6x-2x-2y)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(2y-2x-12)dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}12dxdy$$

$$=-24$$

35. 解：

条件：对于任何一段光滑闭曲线，都有：

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

根据 Stokes 定理知道：

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

则我们可以得到下列结论：

设空间区域G是以为单连通域，

函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在G内具有一阶连续偏导数

则空间曲线积分

$$\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

在G内与路径无关的充要条件是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

在G内恒成立

据检验（1）（2）中给定积分均与路径无关。

（1）

$$
\begin{aligned}
\text{原式}=&\int_{(0,0,0)}^{(3,0,0)}(y+\sin z)dx+xdy+x\cos zdz\\
&+\int_{(3,0,0)}^{(3,2,0)}(y+\sin z)dx+xdy+x\cos zdz\\
&+\int_{(3,2,0)}^{\left(3,2,\frac{\pi}{3}\right)}(y+\sin z)dx+xdy+x\cos zdz\\
=&\int_0^3 0dx+\int_0^2 3dy+\int_0^{\frac{\pi}{3}}3\cos zdz\\
=&6+\frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\text{原式}=&\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2zx)dy+(z^2-2xy)dz\\
&+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2zx)dy+(z^2-2xy)dz\\
&+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2zx)dy+(z^2-2xy)dz\\
=&\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-2xy)dz\\
=&\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)-2xyz
\end{aligned}
$$

36. 解：

（1）采取极坐标进行计算。

$$\begin{aligned}
&\oint_L -ydx+xdy+adz \\
&=\int_0^{2\pi} -\sin\theta(-\sin\theta)d\theta+\cos\theta(\cos\theta)d\theta+0 \\
&=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&=2\pi
\end{aligned}$$

（2）采取极坐标进行计算。

$$\begin{aligned}
&\oint_L xydx+(x+y^2)dy+zdz \\
&=\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta)d\theta+(\cos\theta+\sin^2\theta)\cos\theta d\theta \\
&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\
&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta \\
&=\pi
\end{aligned}$$

37. 解：

（1）根据公式，求得旋度为：

$$rot\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & xyz & xyz \end{vmatrix}=(xz-xy)\boldsymbol{i}+(xy-yz)\boldsymbol{j}+(yz-xz)\boldsymbol{k}$$

代入$(x,y,z)=(1,3,2)$，原式$=$-$\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$

（2）根据公式，求得旋度为：

$$rot\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}=-2z\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}-2y\boldsymbol{k}$$

代入$(x,y,z)=(1,1,1)$，原式$=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

（3）根据公式，求得旋度为：

$$rot\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x\cos z & y\ln x & -z^2\end{vmatrix}=(-x\sin z)\boldsymbol{j}+\frac{y}{x}\boldsymbol{k}$$

（4）根据公式，求得旋度为：

$$rot\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3xz^2 & -yz & x+2z\end{vmatrix}=y\boldsymbol{i}+(6xz-1)\boldsymbol{j}$$

38. 证明：

（1）记$\boldsymbol{C}=(a,b,c)$， $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{xf'}{r},\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{yf'}{r},\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{zf'}{r}$

$$rot(f(r)\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)a & f(r)b & f(r)c \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{ycf'(r)-zbf'(r)}{r}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{zaf'(r)-xcf'(r)}{r}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{xbf'(r)-ayf'(r)}{r}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{f'(r)}{r}[(yc-zb)\boldsymbol{i}+(za-xc)\boldsymbol{j}+(xb-ya)\boldsymbol{k}]$$

$$=\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{C})$$

（2）分别计算：

$$\frac{\partial\frac{f'}{r}}{\partial x}=\frac{(rf''-f')f'}{r^3}x,\frac{\partial\frac{f'}{r}}{\partial y}=\frac{(rf''-f')f'}{r^3}y,\frac{\partial\frac{f'}{r}}{\partial z}=\frac{(rf''-f')f'}{r^3}z$$

利用$rot(f(r)\boldsymbol{C})=\dfrac{f'(r)}{r}[(yc-zb)\boldsymbol{i}+(za-xc)\boldsymbol{j}+(xb-ya)\boldsymbol{k}]$

可以得到：

$$div\{rot[f(r)\boldsymbol{C}]\}$$
$$=\frac{(rf''-f')f'}{r^3}[x(yc-zb)+y(za-xc)+z(xb-ya)]=0$$

补充题

1.

解 取曲线的参数方程

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t, z=a\sin\frac{t}{2}, t:0\to 2\pi,$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{a^2}{4}\sin^2 t\cdot(-\frac{a}{2}\sin t)+a^2\sin^2\frac{t}{2}\cdot(\frac{a}{2}\cos t)+\frac{a^2}{4}(1+\cos t)^2\cdot(\frac{a}{2}\cos\frac{t}{2})\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(-\frac{a^3}{8}\sin^3 t)+\frac{a^3}{2}\sin^2\frac{t}{2}\cos t+\frac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}\right]dt$$

$$=-\frac{1}{4}\pi a^3.$$

其中：

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{a^3}{8}\sin^3 t\right)+\frac{a^3}{2}\sin^2\frac{t}{2}\cos t+\frac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1-\cos t}{2}\cos t+\frac{a^3}{4}\cos^5\frac{t}{2}\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3}{4}\cos^2 t\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{a^3}{4}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{a^3}{8}dt$$

$$=-\frac{1}{4}\pi a^3$$

2.

解 取曲线的参数方程： $x=\cos t, y=z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t, t:0\to 2\pi$, 因此

$$\oint_L xyz\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{1}{2}\sin^2 t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi.$$

3.

解 不妨设 $a>b>0$，右焦点的坐标为 $(c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则质点运动到点 (x,y) 时所受的引力为

$$\frac{kMm}{(x-c)^2+y^2}\left(\frac{c-x}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}\right).$$

记
$$kMm\left(\frac{c-x}{((x-c)^2+y^2)^{3/2}},\frac{-y}{((x-c)^2+y^2)^{3/2}}\right)=kMm(P(x,y),Q(x,y)),$$

则引力对质点做功 $W=kMm\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，其中 C 为椭圆正向从 $A(a,0)$ 到 $B(0,b)$. 由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故曲线积分与路径无关。选择避开右焦点的折线路径 $(a,0)\to(a,b)\to(0,b)$ 积分，得

$$\begin{aligned}W&=kMm\left(\int_0^b\frac{-y}{((a-c)^2+y^2)^{3/2}}dy+\int_a^0\frac{c-x}{((x-c)^2+b^2)^{3/2}}dx\right)\\&=kMm\left(\frac{1}{\sqrt{a-c^2+b^2}}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}\right)\\&=-\frac{kMmc}{a(a-c)}.\end{aligned}$$

4.

解 两椭圆在第一象限的交点$B\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，记椭圆$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$的右顶点为$A$，则$\overset{\frown}{AB}$参数方程为$x=b\cos\theta, y=a\sin\theta, \theta:0\to\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 根据对称性知所求面积

$$A=8\times\frac{1}{2}\oint_{\overset{\frown}{AB}\cup\overline{BO}\cup\overline{OA}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=4\int_{\overset{\frown}{AB}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(b\cos\theta\cdot a\cos\theta-a\sin\theta\cdot(-b\sin\theta)\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=4ab\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5.

解 若存在积分因子 $\mu = \mu(x)$，则有

$$\frac{\partial\left(\mu(x)P\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\mu(x)Q\right)}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x)\frac{\partial P}{\partial y} = \mu'(x)Q + \mu(x)\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

导出 $$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\mathrm{d}(\ln \mu(x))}{\mathrm{d}x}.$$

由于$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$仅与$x$有关,记$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$,由上式知原方程有积分因子

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x}.$$

对于一阶线性方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$，即$\left(p(x)y - q(x)\right)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$. 由于该方程满足$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = p(x)$，因此有积分因子$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，从而

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left(p(x)y - q(x)\right)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程, 其通解为

$$-\int_0^x \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} q(x)\mathrm{d}x + \int_0^y \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y = C_1,$$

导出$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} \cdot y = \int_0^x \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} q(x)\mathrm{d}x + C_1$，从而

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} q(x)\mathrm{d}x + C\right).$$

6.

解 联立方程 $x^2+z^2=2az, z=\sqrt{x^2+y^2}$ ，得到 $2z^2-2az=y^2$. 故曲面 Σ 在 yOz 面的投影区域

$$D_{yz}=\{(y,z)\,|\,a\le z\le 2a,-\sqrt{2z^2-2az}\le y\le\sqrt{2z^2-2az}\}.$$

曲面的显式方程为 $x=\pm\sqrt{2az-z^2},(y,z)\in D_{yz}$，它关于 yOz 面对称，所以

$$\iint_\Sigma \frac{x^2}{z}\mathrm{d}S=2\iint_{D_{yz}}\frac{2az-z^2}{z}\cdot\frac{a}{\sqrt{2az-z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2a\int_a^{2a}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{2z^2-2az}}^{\sqrt{2z^2-2az}}\frac{2a-z}{\sqrt{2az-z^2}}\mathrm{d}y$$

$$=4\sqrt{2}a\int_a^{2a}\sqrt{(z-a)(2a-z)}\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3.$$

7.

解 点 $P(x,y,z)\in\Sigma$ 的法向量为 $(-z_x,-z_y,1)=(\frac{x}{2z},\frac{y}{2z},1)$，从而

$$\rho(x,y,z)=\frac{\left|\frac{x}{2z}(0-x)+\frac{y}{2z}(0-y)+(0-z)\right|}{\sqrt{(\frac{x}{2z})^2+(\frac{y}{2z})^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}$$

Σ 在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\le 1\}$， 于是

$$\iint_\Sigma\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint_\Sigma\frac{z\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(1-\frac{x^2+y^2}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{2}.$$

8.

解　由 Gauss 公式有

$$\oiint_{\Sigma} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} (f(x) + xf\,'(x) - xf(x) - \mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0\,,$$

其中Ω是光滑定侧封闭曲面Σ所围成的区域。由曲面Σ的任意性知

$$f(x) + xf'(x) - xf(x) - \mathrm{e}^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (xf(x))' - xf(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

解此微分方程并结合 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ 可得 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{x}$.

9.

解　由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint_{\Omega} \left[f'(x) + g'(y) + h'(z) \right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c \left[f'(x) + g'(y) + h'(z) \right]\mathrm{d}z \\ &= abc\left(\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right).\end{aligned}$$

10.

解　Σ在点(x, y, z)处的外单位法向量$\overrightarrow{n^0} = (\dfrac{x-a}{a}, \dfrac{y-a}{a}, \dfrac{z-a}{a})$，记$\Sigma$所围区域为$\Omega$. 由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} (x + y + z + \sqrt{3}a)\mathrm{d}S &= \oiint_{\Sigma} \left((a, a, a)\cdot \overrightarrow{n^0} + (3 + \sqrt{3})a \right)\mathrm{d}S \\ &= \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \oiint_{\Sigma} (3 + \sqrt{3})a\mathrm{d}S \\ &= 4(3 + \sqrt{3})\pi a^3 \ge 12\pi a^3.\end{aligned}$$