习题 9

1. 解：

（1）几何意义：高为h，底面为半径为 1 的圆（$x^2+y^2=1$）的圆柱体积。$\therefore$原式$=\pi\times1^2\times h=\pi h$

（2）几何意义：令$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1(z\ge0)$，所以表示的为半径为 1 的球的体积的二分之一。$\therefore$原式$=\dfrac{4}{3}\pi\times1^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\pi$

（3）几何意义：令$z=\sqrt{9-y^2}\Rightarrow y^2+z^2=9(z\ge0)$，画图容易知道，其几何意义为：底面（四分之一圆）与yOz平面平行，高为 4 的柱体体积。

$\therefore$原式$=\dfrac{1}{4}\times\pi\times3^2\times4=9\pi$

2. 解：

（1）$dQ=\mu(x,y)d\sigma\Rightarrow\iint\limits_D\mu(x,y)d\sigma$

（2）x处压强$p=\rho gx$,该处面积微元$d\sigma$所受压力大小为：$dF=pd\sigma\Rightarrow F=\rho g\iint\limits_D xd\sigma$

（3）设密度$\rho=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则$dm=\rho dV\Rightarrow m=k\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$

3. 解：

（1）（a）

$x\ge0,y\ge0,x+y\le1$时，$(x+y)^2\ge(x+y)^3$，当且仅当$x+y=1$时取等号

$\therefore I_1>I_2$

（b）

在∂D上任取一点$P(2+\sqrt{2}\cos\theta,1+\sqrt{2}\sin\theta)$分析

$x+y=(2+\sqrt{2}\cos\theta)+(1+\sqrt{2}\sin\theta)=3+2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\ge1$

$\therefore(x+y)^2\le(x+y)^3\Rightarrow I_1<I_2$

（2）（a）$0\le x,y\le1$时，$e^{xy}\le e^{2xy}\Rightarrow I_1<I_2$

（b）$-1\le x\le0,0\le y\le1$时,$xy\le0\Rightarrow e^{xy}\ge e^{2xy}\Rightarrow I_1>I_2$

（3）$\because \left|\sin x\right| \le \left|x\right| \Rightarrow \left|\sin(x+y)\right| \le \left|x+y\right| \Rightarrow \sin^2(x+y) \le (x+y)^2 \Rightarrow I_1 < I_2$

4.解： 利用课本P_{125}平均值定理（积分中值定理的推论）$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)A_D$

（1） $A_D = 1\times 1 = 1$，$I = \xi\eta(\xi+\eta) \in (0,2)$

（2） $A_D = \pi\times\frac{3\pi}{4} - \pi\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}$，$I = \frac{\pi^2}{2}\sin(\xi^2+\eta^2) \in \left(\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4}, \frac{\pi^2}{2}\right)$

（3） $A_D = 4\times 8 = 32$，$I = \frac{32}{\ln(4+\xi+\eta)} \in \left(\frac{8}{\ln 2}, \frac{16}{\ln 2}\right)$

（4） $A_D = \frac{\pi}{4}, I = \frac{\pi}{4}e^{\xi^2+\eta^2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi e^{1/4}}{4}\right)$

5.解：

利用积分中值定理

原式$= \lim\limits_{\substack{r\to 0^+ \\ \xi\to x_0 \\ \eta\to y_0}} \frac{\pi r^2 f(\xi,\eta)}{\pi r^2} = f(x_0,y_0)$

6. 证明：

（1）

$\because$函数连续且非负，存在一个小的区域D_1,使$\forall(x,y)\in D_1$,有$f(x,y)>0$
$\therefore$令$D = D_1 \cup D_2$，且区域D_1与D_2无公共内点
则根据重积分积分区域的可加性知：
$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$
$\because \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma > 0, \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma \ge 0$
$\therefore \iint\limits_D f(x,y)d\sigma > 0$

（2）

假设$f(x,y)$不恒为零，那么由第一问知道：
$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma > 0$,与题设$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = 0$矛盾
$\Rightarrow$假设不成立$\Rightarrow f(x,y)\equiv 0$

7. 解：参考课本P_{127}的公式

（1）

画图后容易得到三个交点$(1,0),(2,0),(2,\ln 2)$,区域$D=\{1\le x\le 2,0\le y\le \ln 2\}$

考虑先对y后对x积分，原二重积分化为:$\int_1^2 dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$

考虑先对x后对y积分，原二重积分化为:$\int_0^{\ln 2} dy\int_{e^y}^2 f(x,y)dx$

$$\int_1^2 dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^{\ln 2} dy\int_{e^y}^2 f(x,y)dx$$

（2）$\int_{-3}^1 dx\int_{x^2}^{3-2x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^9 dy\int_{-\sqrt{y}}^{(3-y)/2} f(x,y)dx$

（3）$\int_0^{\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$

（4）$\int_{-1}^1 dx\int_{x^3}^1 f(x,y)dy=\int_{-1}^1 dy\int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dy$

8. 解：

（1）原式=$\int_{-1}^1 dx\int_{-1}^1 (x^2+y^2)dy=\int_{-1}^1 (2x^2+\frac{2}{3})dx=\frac{8}{3}$

（2）原式$=\int_0^1 dy\int_{-1}^1 (xy^2+e^{x+2y})dx=\int_0^1 (e^{2y+1}-e^{2y-1})dy=\frac{(e^2-1)^2}{2e}$

（3）原式$=\int_0^1 dx\int_0^1 xye^{xy^2}dy=\int_0^1 dx(\frac{1}{2}\int_0^x e^{xy^2}dxy^2)=\int_0^1 \frac{e^x-1}{2}dx=\frac{e}{2}-1$

（4）原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^2 x^2y\sin(xy^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\left[\frac{x}{2}\int_0^{4x}\sin(xy^2)dxy^2\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x(1-\cos 4x)}{2}dx=\frac{\pi^2}{16}$

（5）原式$=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2(-x+x^3)dx=\frac{9}{4}$

（6）原式$=\int_0^{\pi} dx\int_0^x x\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi} x(\sin 2x-\sin x)dx=-\frac{3}{2}\pi$

（7）（课本P_{129}，例9.3）原式$=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xydx=\int_{-1}^2 \frac{4y+4y^2+y^3-y^5}{2}=5\frac{5}{8}=\frac{45}{8}$

（8）原式$=\int_1^2 dy\int_y^{y^3}\sin(\frac{x}{y})dx=\int_1^2 y\cos 1-y\cos y^2 dy=\frac{3\cos 1+\sin 1-\sin 4}{2}$

9.证明:左边$=\int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)dy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)=$右边

10.解：

（1） 原式$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

（2） 原式$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

（3） 原式$=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{-\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)dy$

（4） 原式$=\int_0^1 dy\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

11.解：

（1）

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^3}\sqrt{1-x^4}dy=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1-x^4}dx^4 \underset{\text{用}x\text{替换}x^4}{=\!=\!=} \frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1-x}dx \underset{\text{令}t=\sqrt{1-x}}{=\!=\!=}$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 td(1-t^2)=\frac{1}{2}\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{6}$$

（2） $\int_0^{\pi} dy\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^{\pi}\sin ydy=2$

（3） $\int_0^3 dx\int_0^{x/3} e^{x^2}dy=\int_0^3\frac{xe^{x^2}}{3}dx=\frac{1}{6}\int_0^9 e^{x^2}dx^2=\frac{1}{6}\int_0^9 e^x dx=\frac{e^9-1}{6}$

（4） $\int_0^2 dy\int_0^y 2y^2\sin(xy)dx=\int_0^2(-2y\cos y^2+2y)dy=\int_0^4(1-\cos y)dy=4-\sin 4$

（5）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\sin x}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\sin^2 x}d\sin^2 x$$

$$\underset{\text{用}x\text{代换掉}\sin^2 x}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{2-x}dx\underset{\text{令}t=\sqrt{2-x}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^1 td(2-t^2)=\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

（6）

$$\int_0^{\pi} dy\int_{\frac{y^2}{\pi}}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^{\pi}(\sin y-\frac{y\sin y}{\pi})dy=2+\int_0^{\pi}\frac{y}{\pi}d\cos y=2+\left.\frac{y\cos y}{\pi}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ydy=1$$

12.解：

（1）

$$\because f(x,y)=|xy|,\text{满足}f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x,-y)$$

且D也关于x轴，y轴对称。

$$\therefore \iint_D |xy|dxdy=4\iint_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\x\ge0,y\ge0}} xydxdy=4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xydy=2\int_0^R x(R^2-x^2)dx=\frac{R^4}{2}$$

（2）

$$\iint_D (x^2\tan x+y^3+4)dxdy=\iint_D (x^2\tan x+y^3)dxdy+4\iint_D dxdy$$

$$\text{其中}:4\iint_D dxdy=4\times\pi\times4=16\pi$$

$$\because f(x,y)=x^2\tan x+y^3,\ f(x,y)=-f(-x,-y)$$

$$\therefore \iint_D (x^2\tan x+y^3)dxdy=0$$

$$\therefore \iint_D (x^2\tan x+y^3+4)dxdy=16\pi+0=16\pi$$

（3）

$$D\text{关于}x\text{轴对称},\ f(x,y)=(1+x+x^2)\arcsin\frac{y}{R},\text{满足}f(x,y)=-f(x,-y)$$

$$\therefore \iint_D (1+x+x^2)\arcsin\frac{y}{R}dxdy=0$$

（4）

$$D\text{关于}x\text{轴，y轴对称，且}f(x,y)=|x|+|y|,\text{满足}f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)$$

$$\therefore \iint_D (|x|+|y|)dxdy=4\iint_{\substack{x+y\le1\\x\ge0,y\ge0}} (x+y)dxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy=4\int_0^1 (\frac{1-x^2}{2})dx=\frac{4}{3}$$

13. 解： $d\sigma=rdrd\theta$

（1） 原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（2） 原式$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（3） 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

（4） 原式$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

（5） 原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

14. 解：

（1）

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2}\, r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{(R\cos\theta)^2} \sqrt{R^2-r^2}\, dr^2$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} R^3 (1-\sin^3\theta) d\theta = \frac{2}{3} R^3 (\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}) = \frac{R^3}{3}(\pi-\frac{4}{3})$$

（2） 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 r\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2} \theta d\theta = \frac{3\pi^2}{64}$

（3） D为双纽线，原式$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{|a|\sqrt{\cos 2\theta}} r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos^2 2\theta d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$

（4）

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r dr = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx \xlongequal{令t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{\pi}{4}\int_0^1 t d\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\left.\frac{t(t^2-1)}{t^2+1}\right|_0^1 - \int_0^1 (1-\frac{2}{t^2+1}) dt\right] = \frac{\pi}{4}\cdot(2\arctan t - t)\Big|_0^1 = \frac{\pi(\pi-2)}{8}$$

（5）

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r^3 \sin\theta\cos\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{16\sin\theta\cos^5\theta - \sin\theta\cos\theta}{4} d\theta = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{16\cos^5\theta - \cos\theta}{4} d\cos\theta = \frac{9}{16}$$

（6）

$$原式=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^3 dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 60\sin^4\theta d\theta = 60\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4\theta d\theta = 60\left(\frac{3}{8}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{15}{8}(2\pi-\sqrt{3})$$

15.解：

（1）原式$=\int_0^{2a}dr\int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r,\theta)d\theta$

（2）原式$=\int_0^{a}dr\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}f(r,\theta)d\theta$

（3）由已知:$\begin{cases}0\le\theta\le a\\0\le r\le\theta\end{cases}\Rightarrow 0\le r\le\theta\le a\Rightarrow\begin{cases}0\le r\le a\\r\le\theta\le a\end{cases}\Rightarrow$原式$=\int_0^a dr\int_r^a f(r,\theta)d\theta$

16.解：

（1）

由已知:$\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\x^2+y^2\le 1\\y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\0\le r\le 1\end{cases}$

$\therefore$原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 e^{r^2}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e-1}{2}d\theta=\dfrac{\pi(e-1)}{4}$

（2）

由已知:$\begin{cases}0\le y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\y\le x\le\sqrt{1-y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\0\le r\le 1\end{cases}$

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\theta}{2}d\theta=\dfrac{\pi^2}{64}$

（3）

由已知:$\begin{cases}0\le y\le 2\\-\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le y\le 2\\x^2+y^2\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le r\le 2\end{cases}$

$\therefore$原式$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^5\sin^2\theta\cos^2\theta dr=\int_0^{\pi}\dfrac{8}{3}\sin^2 2\theta d\theta=\int_0^{\pi}\dfrac{4(1-\cos 2\theta)}{3}=\dfrac{4}{3}\pi$

（4）

由已知:$\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\(x-1)^2+y^2\le 1\\y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\0\le r\le 2\cos\theta\end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{8\cos^3\theta}{3}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2(3\cos\theta+\cos 3\theta)}{3}=\dfrac{16}{9}$

（5）

由已知：

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 1\\ \sqrt{1-x^2}\le y\le x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta}\end{cases};\quad \begin{cases}1\le x\le\sqrt{2}\\ 0\le y\le x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{1}{\cos\theta}\le r\le\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\end{cases};$$

$$\begin{cases}\sqrt{2}\le x\le 2\\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\le r\le 2\end{cases};$$

$$\therefore\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1\le r\le 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow 原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2 r^3\sin\theta\cos\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{15}{4}\sin\theta\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{15}{8}d(\sin^2\theta)=\frac{15}{16}$$

（6）

$$由已知:\begin{cases}0\le y\le 1\\ \sqrt{2y-y^2}\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le y\le 1\\ x^2+(y-1)^2\ge 1\\ x\ge 0\\ (x-1)^2+y^2\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ 2\sin\theta\le r\le 2\cos\theta\end{cases}$$

$$\therefore 原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta}e^{\sin\theta\cos\theta}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta e^{\sin\theta\cos\theta}d\theta=\int_1^{\sqrt{e}}2de^{\frac{\sin 2\theta}{2}}=2(\sqrt{e}-1)$$

17. 解：

（1）

$$令3x=r\cos\theta,2y=r\sin\theta,J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\frac{1}{6}r,则d\sigma=\frac{1}{6}rdrd\theta$$

$$原式=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sin r^2 rdr=\frac{1}{12}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1\sin r^2dr^2=\frac{\pi(1-\cos 1)}{24}$$

（2）

$$令u = xy, v = \frac{y}{x}, J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v},$$

$$D' = \{(u,v) | 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 4\}$$

$$原式 = \iint\limits_{D'} \frac{u^2}{2v} dudv = \int_1^4 dv \int_1^2 \frac{u^2}{2v} du = \int_1^4 \frac{7}{6v} dv = \frac{7}{3}\ln 2$$

（3）

$$令x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta, J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr，则d\sigma = abrdrd\theta$$

$$原式 = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr = 4ab \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi ab}{2}$$

（4）

$$令u = x + y, v = x - y, J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}, d\sigma = \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2} dudv$$

$$D' = \{(u,v) | -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1\}$$

$$原式 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 e^u du = e - e^{-1}$$

（5）

$$令u = x + y, v = x - y, J = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow d\sigma = \frac{1}{2} dudv$$

$$D' = \{(u,v) | \pi \le u \le 5\pi, -\pi \le v \le \pi\}$$

$$原式 = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{5\pi} u^3 du \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 v dv = 78\pi^5$$

18. 解：

（1）

$T_1: D \mapsto D^*$，其中 D^* 是由曲线 $u^2+v^2=2$，$u=v$ 以及 $v=0$ 围成的闭区域. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2}$，故

$$\iint_D (x^2-y^2)\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*}\mathrm{e}^{u^2}uv\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2\cos^2\theta}r^2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{r^2}-\mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}}\right)r\mathrm{d}r=\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{8}.$$

（2）

$T_2: D \mapsto D'$，其中 D' 是由直线 $u=2v$，$u=1$ 以及 $v=0$ 围成的闭区域. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2\sqrt{u^2-4v^2}}$，故

$$\iint_D (x^2-y^2)\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\mathrm{e}^{u+2v}\sqrt{u^2-4v^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u^2-4v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^u\mathrm{d}u\int_0^{\frac{u}{2}}\mathrm{e}^{2v}\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{e}^u(\mathrm{e}^u-1)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{8}.$$

19. 解：

（1）$S=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=e+e^{-1}-2 \quad S=\int_0^1dx\int_{e^{-x}}^{e^x}dy=e+e^{-1}-2$

（2）$\int_{-1}^0dy\int_{y-1}^{-y^2-1}dx=\int_{-1}^0(-y^2-y)dy=\dfrac{1}{6}$

（3）

令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$

$(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)\Rightarrow r^4=4r^2\cos2\theta\Rightarrow r^2=4\cos2\theta$

$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{4\cos2\theta}}rdr=4 \quad S=4\cdot\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos2\theta d\theta=4$

（4） $S=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2}^{4\sin\theta}rdr=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(8\sin^2\theta-2)d\theta=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$

（5） $S=2\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2}}^{1+\cos\theta}rdr=2\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{(1+\cos\theta)^2-1/4}{2}d\theta=\frac{5\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}}{8}$

（6）

令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$

$(x^2+y^2)^2=2ax^3\Rightarrow r^4=2ar^3\cos^3\theta\Rightarrow r=2a\cos^3\theta$

$S=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2a\cos^3\theta}rdr=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}4a^2\cos^6\theta d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}4a^2\sin^6\theta d\theta=4a^2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi a^2$

（7）

令$u=2x+3y+4,v=5x+6y+7,J=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}\right)^{-1}=-\frac{1}{3}\Rightarrow d\sigma=\frac{1}{3}dudv$

$S=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot9=3\pi$

（8）

令$u=\frac{x^3}{y},v=\frac{y^3}{x},J=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=\left(\begin{vmatrix}\frac{3x^2}{y}&-\frac{x^3}{y^2}\\-\frac{y^3}{x^2}&\frac{3y^2}{x}\end{vmatrix}\right)^{-1}=\frac{1}{8xy}=\frac{1}{8\sqrt{uv}}$

$S=\frac{1}{8}\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{u}}du\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{v}}dv=\frac{1}{8}$

20. 解：

（1） $V=\int_{0}^{2}dy\int_{0}^{2y}\sqrt{4-y^2}dx=\int_{0}^{2}2y\sqrt{4-y^2}dy=\int_{0}^{4}\sqrt{4-y^2}dy^2=\frac{16}{3}$

（2）

①$V=\int_{0}^{\frac{3}{4}}dy\int_{y}^{1-\frac{1}{3}y}(2-2x-\frac{2}{3}y)dx=\int_{0}^{\frac{3}{4}}(\frac{16}{9}y^2-\frac{8}{3}y+1)dy=\frac{1}{4}$

②围成的几何体为三棱锥：$V=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{4})\times2=\frac{1}{4}$

（3）

$$令x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 原不等式化为: r^2 \le z \le 1+\sqrt{1-r^2}$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1+\sqrt{1-r^2}-r^2) r dr = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{12} = \frac{7\pi}{6}$$

（4）

①切片法（体积＝面积在高上的积累）

$$V = \int_{-1}^{1} S dz = \int_{-1}^{1} \pi(1+z^2) dz = \frac{8}{3}\pi$$

②强制写成二重积分：

$$令x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$V = \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} \frac{1+z^2}{2} d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

③真·二重积分(补成圆柱)

$$V = 2\left(\pi\cdot 2\cdot 1 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{r^2-1}\, r dr\right) = \frac{8\pi}{3}$$

（5）$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \int_0^1 \left[(1-x)(6-x^2) - \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx = \frac{17}{6}$

21. 解：$m = \iint\limits_D (x^2+y^2) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2+y^2) dx = \frac{4}{3}$

22. 解：

以球心为原点，圆柱的中心轴为 Oz 建立坐标系，则球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，圆柱面方程为 $x^2+y^2=r^2$．注意到圆柱体关于 xOy 面对称，所以剩余部分立体的体积

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r \sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 - 4\pi\left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=r}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \left[\frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{4\pi}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4\pi}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

圆柱形孔侧面高 $h = 2\sqrt{R^2-r^2}$，故 $V = \frac{\pi}{6}h^3$，即只与 h 有关，而与 r 和 R 无关.

23. 解：

①原式 $=\int_0^2 dx\int_{-3}^0 dy\int_{-1}^1 (x^2+yz)dz=\int_0^2 dx\int_{-3}^0 2x^2dy=\int_0^2 6x^2dx=16$

②原式 $=\int_0^2 dx\int_{-1}^1 dz\int_{-3}^0 (x^2+yz)dy=\int_0^2 dx\int_{-1}^1 (3x^2-\frac{9z}{2})dz=\int_0^2 6x^2dx=16$

③原式 $=\int_{-3}^0 dy\int_0^2 dx\int_{-1}^1 (x^2+yz)dz=\int_{-3}^0 dy\int_0^2 2x^2dx=\int_{-3}^0 \frac{16}{3}dy=16$

④原式 $=\int_{-3}^0 dy\int_{-1}^1 dz\int_0^2 (x^2+yz)dx=\int_{-3}^0 dy\int_{-1}^1 (\frac{8}{3}+2yz)dz=\int_{-3}^0 \frac{32}{3}dy=16$

⑤原式 $=\int_{-1}^1 dz\int_0^2 dx\int_{-3}^0 (x^2+yz)dy=\int_{-1}^1 dz\int_0^2 3x^2dx=\int_{-1}^1 8dz=16$

⑥原式 $=\int_{-1}^1 dz\int_{-3}^0 dy\int_0^2 (x^2+yz)dx=\int_{-1}^1 dz\int_{-3}^0 (\frac{8}{3}+2yz)dy=\int_{-1}^1 (8-9z)dz=16$

24. 解：

（1） 原式 $=\int_{-R}^R dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$

（2） 原式 $=\int_{-2}^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\int_0^{x+y+10} f(x,y,z)dz$

（3） $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$

（4） $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz$

25. 解：

（1） $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dy\int_0^{x+2y} ydz=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} y(x+2y)dy=\int_0^1 (\frac{x^5}{2}+\frac{2x^6}{3})dx=\frac{5}{28}$

（2） $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} e^{x+y+z}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} (e-e^{x+y})dy=\int_0^1 \left[(1-x)e-(e-e^x)\right]dx=\frac{e}{2}-1$

（3） 根据积分的对称性,原式 $=0$

（4） 积分区域关于xOz平面对称，而原积分为关于y的奇函数，所以原式 $=0$

（5） $\int_0^{\pi} dz\iint\limits_{D_z} \sin zdxdy=\int_0^{\pi} z^2\pi\sin zdz=\pi^3-4\pi$

（6） $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}} dy\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} x\sin(y+z)dz=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}} x\cos ydy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x-x\sin x^2dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

（7） $\int_0^3 dy\int_0^{\sqrt{9-y^2}} dz\int_0^{\frac{y}{3}} zdx=\int_0^3 dy\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \frac{yz}{3}dz=\int_0^3 \frac{y(9-y^2)}{6}dy=\frac{27}{8}$

（8） $\int_0^4 dx\iint\limits_{D_{yz}} xdxdy=\int_0^4 \frac{\pi x^2}{4}dx=\frac{16\pi}{3}$

26. 解：

（1）

令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

原式$=\int_{-1}^{2}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=24\pi$

（2）

令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

原式$=\int_0^2 dz\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^4(\cos^3\theta+\cos\theta\sin^2\theta)dr=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^5\sin^5\theta\cos\theta}{5}d\theta=0$

（3）

令$y=r\cos\theta, z=r\sin\theta,$

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 dr\int_0^{r\sin\theta+2}r^2\cos\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2(r\sin\theta+2)(r^2\cos\theta)dr=\int_0^{2\pi}(\frac{15}{8}\sin 2\theta+\frac{14}{3}\cos\theta)d\theta=0$

（4）

令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 dr\int_0^{9-r^2}r^2dz=2\pi\int_0^3(9r^2-r^4)dr=\frac{324\pi}{5}$

27. 解：

（1）

令$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \text{则} dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^a\rho^2e^{\rho}d\rho=2\pi\cdot 2\cdot\left[e^a(a^2-2a+2)-2\right]=4\pi e^a(a^2-2a+2)-8\pi$

（2）

$$令\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,则dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\int_1^2\rho^3 e^{\rho^4}d\rho=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{2^4}-e^{1^4}}{4}=\frac{e^{16}-e}{16}\pi$$

（3）

$$令\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,则dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^1\rho^4 d\rho=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1})\cdot\frac{1}{5}=\frac{\pi}{30}$$

（4）

$$令\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,则dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$原式=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\ln(1+\rho^2)}{1+\rho^2}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^1\frac{\rho^3\ln(1+\rho^2)}{1+\rho^2}d\rho$$

其中：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\overset{令t=\sin\varphi}{=\!=\!=\!=}\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx&=\int\frac{x^2\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx^2\\ &\overset{令t=x^2}{=\!=\!=}\int\frac{t\ln(1+t)}{2(1+t)}dt\\ &=\int\frac{\ln(1+t)}{2}dt-\int\frac{\ln(1+t)}{2(1+t)}dt\\ &=\frac{1}{2}\left[(t+1)\ln(1+t)-(t+1)\right]-\int\frac{\ln(1+t)}{2}d\ln(1+t)\\ &=\frac{1}{4}\left[-2x^2-\ln^2(x^2+1)+2(x^2+1)\ln(x^2+1)\right]+C\end{aligned}$$

$$原式=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left[-2-\ln^2 2+4\ln 2\right]=\frac{\pi}{4}(4\ln 2-2-\ln^2 2)$$

（5）

$$令\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, 则 dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$原式=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2\rho^3 d\rho=4\times 2\pi\times(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=4(2-\sqrt{3})\pi$$

（6）

$$令\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, 则 dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$原式=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^R\rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{R^5\cos^2\varphi\sin\varphi}{5}d\varphi+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{32R^5\cos^7\varphi\sin\varphi}{5}d\varphi\right]$$

其中：

$$\int\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi=-\int\cos^2\varphi d\cos\varphi=-\frac{1}{3}\cos^3\varphi+C$$

$$\int\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi=-\int\cos^7\varphi d\cos\varphi=-\frac{1}{8}\cos^8\varphi+C$$

$$\therefore 原式=\frac{7}{60}\pi R^5+\frac{1}{160}\pi R^5=\frac{59}{480}\pi R^5$$

28. 解：

（1）

$$令 x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$$

$$原式=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}dr\int_0^{\sqrt{r^2(1+\sin^2\theta)}}2zrdz=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}r^2(1+\sin^2\theta)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}64(1+\sin^2\theta)d\theta=48\pi$$

（2）

$$令 x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, J=r$$

$$原式=4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_1^{1+\sqrt{1-r^2}}r^2(\cos\theta+\sin\theta)dz=A\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta=0$$

$$其中 A=\int_0^1dr\int_1^{1+\sqrt{1-r^2}}r^2dz$$

（3）

令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$，$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$

$$原式=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}dr\int_0^{\frac{r^2}{2}}zrdz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}\frac{r^5}{2}dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 2\theta}{12}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\theta}{24}d\theta=\frac{1}{24}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$$

（4）

$$令\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,则\ dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

$$\begin{aligned}原式&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\rho^2\sin\varphi(\rho+\frac{1}{\rho^2})d\rho\\&=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\left(\frac{1}{4\cos^4\varphi}+\frac{1}{\cos\varphi}\right)d\varphi\\&=\left(\frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{27}+\ln\frac{3}{2}\right)\pi\end{aligned}$$

（5）

令$u=\dfrac{x}{a},v=\dfrac{y}{b},\omega=\dfrac{z}{c}$，$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}=abc$

$$则原式=abc\iiint\limits_{\Omega'}\sqrt{1-(u^2+v^2+\omega^2)^{3/2}}dV$$

$$令\begin{cases}u=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ v=\rho\sin\varphi\cos\theta,则dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\ \omega=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

$$原式=abc\iiint\limits_{\Omega''}\sqrt{1-\rho^3}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=8abc\int_0^1\sqrt{1-\rho^3}\rho^2d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{8\pi abc}{9}$$

（6）

令$\begin{cases} x = a + \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b + \rho\sin\varphi\sin\theta，J = \rho^2\sin\varphi \\ z = c + \rho\cos\varphi \end{cases}$

$$\text{原式} = 8\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (a^2+b^2+c^2+\rho^2)\rho^2\sin\varphi d\rho\right]$$

$$= 8\left[(a^2+b^2+c^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3(a^2+b^2+c^2) + \frac{4}{5}\pi R^5$$

29. 解:

（1）

令$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z, J = r$

$$\text{原式} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 dz = 2\pi\int_0^1 r^4(2-2r^2)dr = \frac{8\pi}{35}$$

（2）

令$x = r\sin\theta, y = \cos\theta, z = z, J = r$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{r} r^3\sin\theta\cos\theta\cdot zdz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3\cdot\frac{r^2-r^4}{2}dr = \frac{1}{96}$$

（3）

令$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \text{则} dV = \rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

$$\text{原式} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 \rho\cos\varphi\cdot\rho\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 \rho^4 d\rho = \frac{243\pi}{5}$$

（4）

$$令\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, 则 dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{18}}\rho^4\sin\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{18}}\rho^4 d\varphi=\frac{486(\sqrt{2}-1)}{5}\pi$$

30. 解：

（1）$V=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}dx\int_0^{1-x}dz=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}(1-x)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2})dx=\frac{8}{15}$

（2）利用切片法$:V=\int_0^{3\sqrt{2}}dz\iint\limits_D dxdy=\int_0^9\pi zdz+\int_9^{18}\pi(18-z)dz=81\pi$

（3）

$$V=\iiint\limits_D dxdydz=4\iint\limits_{D_{x-y}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

采用极坐标：$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}rdr=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})=\frac{2}{9}a^3(3\pi-4)$

（4）利用切片法：$V=\int_0^H dz\iint\limits_{D_{x-y}}dxdy=\int_0^H\pi(R^2+z^2)dz=\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi H^3$

（5）$J=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}4&4&8\\2&7&4\\1&4&3\end{vmatrix}=20\Rightarrow V=5|J|=100$

31. 解：$m=\iiint\limits_D(1+\frac{x}{R})dxdydz=\int_{-R}^{R}dx\iint\limits_{D_{y-z}}(1+\frac{x}{R})dydz=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)(1+\frac{x}{R})dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

32. 解：

（1）

$$z=-3x-\frac{3}{2}y+2\Rightarrow z_x=-3,z_y=-\frac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{7}{2}$$

$$S=\iint\limits_D\frac{7}{2}dxdy=\int_0^2dx\int_0^{-2x+4}\frac{7}{2}dy=7\int_0^2(2-x)dx=14$$

（2）

由对称性，仅考虑$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$的第一象限部分，$y=\sin x\xrightarrow{\text{立体化}}\sqrt{y^2+z^2}=\sin x$

$\Rightarrow x=\arcsin\sqrt{y^2+z^2}\Rightarrow x_y=\dfrac{y}{\sqrt{(y^2+z^2)(1-y^2-z^2)}},x_z=\dfrac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)(1-y^2-z^2)}}$

$\Rightarrow\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{1-y^2-z^2}}$

$S=8\iint\limits_D\sqrt{1+\dfrac{1}{1-y^2-z^2}}dydz$

令$y=r\cos\theta,z=r\sin\theta,$则$J=r$

$$
\begin{aligned}
S&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{1-r^2}}rdr\\
&=2\pi\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{1-x}}dx\cdots\text{令}t=\sqrt{1+\frac{1}{1-x}}\\
&=2\pi\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}td(1-\frac{1}{t^2-1})\\
&=2\pi\left[-\frac{t}{t^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty}\\
&=2\pi\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]
\end{aligned}
$$

（3）

考虑xOy上方部分：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$\Rightarrow z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$S=2\iint\limits_D\dfrac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，采取极坐标进行计算：$r=a\cos\theta,$由对称性可以得到

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a^2\cos^2\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-x}}dx=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}2a(1-\sin\theta)d\theta=2a^2(\pi-2)$$

（4）

$$z=\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow z_x=x,z_y=y\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$$

$Tip:(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$为双纽线，所以根据对称性，只需要考虑第一象限

$S=4\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$，采取极坐标进行计算

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\Rightarrow r=\sqrt{\cos 2\theta}$$

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{1+r^2}rdr=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sqrt{2}\cos^3\theta-1)d\theta=\frac{20}{9}-\frac{\pi}{3}$$

（5）

$$z_x=-2x,z_y=2y\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$S=\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$,采取极坐标，由对称性，仅考虑第一象限

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\int_1^2\sqrt{1+4r^2}rdr=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$$

（6）

上曲面表达式为：$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$,下曲面表达式为$:z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}$

其在xOy上投影$:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3a^2\\x^2+y^2=2az\end{cases}\Rightarrow z=a\Rightarrow x^2+y^2=2a^2$

先计算上平面：

$$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow z_x=\frac{-x}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$$

再计算下平面:

$$z=\frac{x^2+y^2}{2a}\Rightarrow z_x=\frac{x}{a},z_y=\frac{y}{a}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{a}$$

$S=\iint\limits_D\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}+\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{a}\right)dxdy$，采取极坐标，根据对称性，只需要考虑第一象限

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\left(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-r^2}}+\frac{\sqrt{1+r^2}}{a}\right)rdr=\frac{16}{3}\pi a^2$$

（7）

由对称性，只需要计算xOy上方立体的表面积

①先考虑上下表面面积：

$z=4-\frac{4}{3}y \Rightarrow z_x=0, z_y=-\frac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{5}{3}$

$S_1=2\iint_D \frac{5}{3}dxdy=2\times\frac{5}{3}\times\pi\times 3^2=30\pi$

②在考虑侧面圆柱的表面积

由对称性，上下两半圆柱可以拼接成一个完整的圆柱。

容易求得，其解析式为：$x^2+y^2=9(0\le z\le 8)$

$S_2=2\pi rh=48\pi$

综上，$S=S_1+S_2=30\pi+48\pi=78\pi$

（8）

不妨设$x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$

由对称性，只需要考虑第一卦限上$y^2+z^2=R^2$的部分：

此时曲面方程：$y^2+z^2=R^2$

于xOy平面的投影：$x^2+y^2=R^2$

$z=\sqrt{R^2-y^2} \Rightarrow \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$

从而得到：

$$S=16\iint_D \frac{R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-y^2}}=16R\int_0^R \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}x=16R^2$$

33.解：

（1）

$$m=\iint_D (x+y)d\sigma=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}(x+y)dy=\int_0^2\left[x(3-\frac{3}{2}x)+\frac{(3-x)^2-(\frac{1}{2}x)^2}{2}\right]dx=6$$

$$\iint_D x(x+y)d\sigma=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}x(x+y)dy=\int_0^2 x\left[x(3-\frac{3}{2}x)+\frac{(3-x)^2-(\frac{1}{2}x)^2}{2}\right]dx=\frac{9}{2}$$

同理$\iint_D y(x+y)d\sigma=9$

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x(x+y)d\sigma}{\iint_D (x+y)d\sigma}=\frac{\frac{9}{2}}{6}=\frac{3}{4}\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y(x+y)d\sigma}{\iint_D (x+y)d\sigma}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$

（2）

$$m=\iint_D xyd\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 xydy=\int_0^1 x\cdot\frac{1-x^4}{2}dx=\frac{1}{6}$$

$$\iint_D x(xy)d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 x^2ydy=\int_0^1 x^2\cdot\frac{1-x^4}{2}dx=\frac{2}{21}$$

同理$\iint_D y(xy)d\sigma=\frac{1}{8}$

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x(xy)d\sigma}{\iint_D xyd\sigma}=\frac{\frac{2}{21}}{\frac{1}{6}}=\frac{4}{7}\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y(xy)d\sigma}{\iint_D xyd\sigma}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4}$$

$(\frac{4}{7},\frac{3}{4})$

（3）

$$m=\iint_D 2d\sigma=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1+\sin\theta}2rdr=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)^2d\theta=3\pi$$

由对称性知:$\iint_D 2xd\sigma=0$

$$\iint_D 2yd\sigma=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1+\sin\theta}2r^2\sin\theta dr=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{5\pi}{2}$$

$$\bar{x}=\frac{\iint_D 2xd\sigma}{\iint_D 2d\sigma}=\frac{0}{3\pi}=0\quad \bar{y}=\frac{\iint_D 2yd\sigma}{\iint_D 2d\sigma}=\frac{\frac{5\pi}{2}}{3\pi}=\frac{5}{6}$$

$(0,\frac{5}{6})$

（4）

$$m=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\int_{-1}^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 dy+\int_{-1}^1 dx\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}}(2y-1)dy=\pi+\frac{4}{3}$$

由对称性知:$\iint_D x\mu(x,y)d\sigma=0$

$$\iint_D y\mu(x,y)d\sigma=\int_{-1}^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 ydy+\int_{-1}^1 dx\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}}(2y-1)ydy=\frac{15\pi+16}{12}$$

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}=\frac{0}{\pi+\frac{4}{3}}=0\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}=\frac{\frac{15\pi+16}{12}}{\pi+\frac{4}{3}}=\frac{15\pi+16}{12\pi+16}$$

$(0,\frac{15\pi+16}{12\pi+16})$

34.解：

（1）

采取截面法：$V=\int_0^9\pi zdz+\int_9^{36}\pi(12-\frac{z}{3})dz=162\pi$

根据对称性:$\bar{x}=0,\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega zdV=\frac{1}{V}\left[\int_0^9\pi z^2dz+\int_9^{36}\pi(12-\frac{z}{3})zdz\right]=15$$

$(0,0,15)$

（2）

采取截面法：$V=\int_0^1 \pi abzdz=\frac{\pi ab}{2}$

根据对称性：$\bar{x}=0,\bar{y}=0$

$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} zdV=\frac{1}{V}\int_0^1 \pi abz^2dz=\frac{2}{3}$

$(0,0,\frac{2}{3})$

（3）

$\varphi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$

$\rho=4\cos\varphi\Rightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4$

立体Ω在xOy的投影为:$\begin{cases} z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2+(z-2)^2=4 \end{cases}\Rightarrow z=3\Rightarrow x^2+y^2=3$

$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho=10\pi$

由对称性知：$\bar{x}=0,\bar{y}=0$

$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} zdV=\frac{1}{V}\times 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi d\rho=\frac{21}{10}$

$(0,0,\frac{21}{10})$

35. 解：

由已知:$\mu(x,y,z)=kz$

$m=\iiint\limits_{\Omega} kzdV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R}k\rho^3\sin\varphi\cos\varphi d\rho=\frac{\pi}{4}kR^4$

由对称性:$\bar{x}=0,\bar{y}=0$

$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} kz^2dV=\frac{4}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R}k\rho^4\sin\varphi\cos^2\varphi d\rho=\frac{8}{15}R$

$(0,0,\frac{8}{15}R)$

36. 解：

（1）

$I_x=\iint\limits_{D} y^2d\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^3\sin^2\theta dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}60\sin^6\theta d\theta=120\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{75}{4}\pi$

（2）

以底边中点为原点，指向顶点的方向为y轴正方向，建立xOy平面直角坐标系

$$I_y=\iint_D x^2 d\sigma=\int_0^h dy\int_{\frac{a}{2}(\frac{y}{h}-1)}^{\frac{a}{2}(1-\frac{y}{h})} x^2 dx=\int_0^h \frac{a^3}{12}(1-\frac{y}{h})^3 dy=\frac{a^3h}{48}$$

（3）

由已知：$\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k\rho$

$$\iiint_\Omega k\rho dV=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R k\rho^3\sin\varphi d\rho=k\pi R^4=M\Rightarrow k=\frac{M}{\pi R^4}$$

由对称性$:I=I_x=I_y=I_z=\dfrac{2}{3}I_O$

$$I=\frac{2}{3}I_O=\frac{2}{3}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dV=\frac{2}{3}\times 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R k\rho^5\sin\varphi d\rho=\frac{4}{9}MR^2$$

（4）

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)dV=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^4\sin^3\varphi d\rho=\frac{8}{3}\pi$$

37. 解:

不妨设密度为1.采取柱坐标进行计算

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)dV=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R dr\int_0^H (r^2\sin^2\theta+z^2)rdz=2\pi\left(\frac{HR^4}{4}+\frac{H^3R^2}{3}\right)$$

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)dV=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R dr\int_0^H r^3dz=\pi HR^4$$

令$I_x=I_z\Rightarrow H:R=\sqrt{3}:2$

38. 解：

（1）

以底面圆心为坐标原点O，指向顶点为z轴正方向，建立空间直角坐标系

则顶点坐标为$(0,0,h)$，圆锥体解析式：$z=h-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\tan\alpha}$

由对称性知：$F_x=F_y=0$

$$F_z=\iiint_{\Omega}\frac{k(z-h)}{\left[x^2+y^2+(z-h)^2\right]^{3/2}}dV=\int_0^h dz\iint_{D_z}\frac{k(z-h)dxdy}{\left[x^2+y^2+(z-h)^2\right]^{3/2}}$$

$D_z=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le(h-z)^2\tan^2\alpha\}$,采取柱坐标进行计算

$$\begin{aligned}F_z&=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{(h-z)\tan\alpha}\frac{(z-h)krdr}{\left[r^2+(z-h)^2\right]^{3/2}}\\&=-2\pi k(1-\cos\alpha)\int_0^h dz\\&=-2\pi kh(1-\cos\alpha)\end{aligned}$$

（2）

由对称性知：$F_x=F_y=0$

$$F_z=\iiint_{\Omega}\frac{k(z-a)}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}dV=\int_0^h dz\iint_{D_z}\frac{k(z-a)dxdy}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}$$

$D_z=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le R^2\}$,采取柱坐标进行计算

$$\begin{aligned}F_z&=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R}\frac{k(z-a)rdr}{\left[r^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}\\&=2k\pi\int_0^h\left(-1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right)dz\\&=-2k\pi\left[\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}+h\right]\end{aligned}$$

（3）

以球心为坐标原点，建立空间直角坐标系

设P点到球心距离为d，不妨设$P(0,0,d)$

由对称性：$F_x = F_y = 0$

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} \frac{k(z-d)}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}} dV = \int_{-R}^{R} dz \iint\limits_{D_z} \frac{k(z-d)dxdy}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}}$$

$D_z = \{(x,y) \big| x^2+y^2 \le R^2 - z^2\}$,采取柱坐标进行计算

$$\begin{aligned}
F_z &= \int_{-R}^{R} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{k(z-d)rdr}{\left[r^2+(z-d)^2\right]^{3/2}} \\
&= 2k\pi \int_{-R}^{R} \left[\frac{z-d}{|z-d|} - \frac{z-d}{\sqrt{R^2-2dz+d^2}}\right] dz \\
&= 2k\pi \left[-\int_{-R}^{d} dz + \int_{d}^{R} dz - \int_{-R}^{R} \frac{z-d}{\sqrt{R^2-2dz+d^2}} dz\right] \\
&= 2k\pi \left[-2d + \frac{1}{d}\int_{-R}^{R} (z-d) d\sqrt{R^2-2dz+d^2}\right] \\
&= 2k\pi \left[-2d + \frac{1}{d}(z-d)\sqrt{R^2-2dz+d^2}\Big|_{-R}^{R} - \frac{1}{d}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2dz+d^2}\, dz\right] \\
&= 2k\pi \left[-2d + \frac{2(R^2+d^2)}{d} + \frac{1}{3d^2}\left(R^2-2dz+d^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-R}^{R}\right] \\
&= -\frac{4}{3}k\pi d
\end{aligned}$$

与课本例9.40联系可知：均质球壳对球壳内质点的万有引力为0

补充题：

1.证明：

（1）记 D 是由 $x=b, y=a, y=x\left(0<a<b\right)$围成的闭区域，则

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（2）由（1）可知：

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b f(y)\mathrm{d}x=\int_a^b (b-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

2. 解：

（1）

$$\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x+y)dy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^x(\sin x+\cos x)dx=\sqrt{2}\,\frac{e^{\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}=\sqrt{2}\cosh\frac{\pi}{4}$$

$$\text{其中}:\int e^x(\sin x+\cos x)dx=e^x\sin x+C$$

（2） $\text{原式}=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x^3}}^x xydy=\int_0^1 \frac{x(x^2-x^3)}{2}dx=\frac{1}{40}$

（3）

$$\text{采取极坐标：原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 (\sin\theta+\cos\theta)dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta-1)d\theta=2-\frac{\pi}{2}$$

（4）

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^4 \mathrm{d}x\int_0^1 \sqrt{\left|x-y^2\right|}ydy=\int_0^4 dx\int_0^1 \frac{\sqrt{|x-y|}}{2}dy=\frac{1}{2}\int_0^4 dx\int_0^1 \sqrt{|x-y|}dy\\&=\int_0^1 dx\int_x^1 \sqrt{y-x}dy+\frac{1}{2}\int_1^4 dx\int_0^1 \sqrt{x-y}dy\cdots\text{利用了}[0,1]\times[0,1]\text{关于}y=x\text{的对称性}\\&=\int_0^1 \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{1}{3}\int_1^4\left[x^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]dx\\&=\frac{2}{5}(11-3\sqrt{3})\end{aligned}$$

（5）

为了去掉绝对值，添加辅助线$y=x+\pi, x=\pi$从而把D分为三个区域

$$
\begin{aligned}
原式&=\int_0^{\pi} dx\int_x^{x+\pi}\sin(y-x)dy+\int_{\pi}^{2\pi} dx\int_x^{2\pi}\sin(y-x)dy-\int_0^{\pi} dx\int_{x+\pi}^{2\pi}\sin(y-x)dy \\
&=\int_0^{\pi} 2dx+\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos x)dx+\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx \\
&=2\pi+\pi+\pi \\
&=4\pi
\end{aligned}
$$

（6）

在极坐标下进行计算：

$$
原式=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr+\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_1^e r\ln r^2 dr\right)=\pi\left(\int_0^1\sqrt{1-x}dx+\int_1^{e^2}\ln xdx\right)=\frac{\pi}{3}(5+3e^2)
$$

（7）引入区域D_1, D_2，其中D_1是由曲线$y=x^3, y=-x^3$和直线$y=1$围成的闭区域，D_2是由曲线$y=x^3, y=-x^3$和直线$x=-1$围成的闭区域，则有

$$
\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2})x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

由对称性知 $\iint\limits_{D_1} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \iint\limits_{D_2} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$

于是 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{x^3}^{-x^3}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}.$

3. 解：

曲线族在$(-1,0)$及$(1,0)$两点处的法线分别为$y=-\frac{1}{2c}(x+1), y=\frac{1}{2c}(x-1)$，于是曲线与这两条法线所围成的图形面积为

$$
2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2c}(x-1)}^{c(1-x^2)}\mathrm{d}y=\frac{1}{2c}+\frac{4c}{3}\ge\frac{2\sqrt{6}}{3}.
$$

故当$\frac{1}{2c}=\frac{4c}{3}, c=\frac{\sqrt{6}}{4}$时，曲线与两条法线围成的图形面积最小。

4. 解：

作变换$T: u = x + y, v = x - y$，则相应的区域换为

$$D' = \{(u,v) \mid 1 \le u \le 2, u + v \ge 0, u - v \ge 0\}.$$

此时$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\dfrac{1}{2}$, 于是

$$\iint_D \cos\frac{y-x}{y+x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}u \int_{-u}^{u} \frac{1}{2}\cos\frac{v}{u} \mathrm{d}v = \frac{3}{2}\sin 1.$$

5. 解：

作变换$T: u = x + y, v = y$, 则相应的积分区域化为

$$D' = \{(u,v) \mid u \le 1, u - v \ge 0, v \ge 0\}.$$

此时$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$，于是$\displaystyle\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^u f(u)\mathrm{d}v = \int_0^1 u f(u)\mathrm{d}u.$

6. 解：

（1）作变换$T: u=x+y, v=x-y$,则相应的区域换为

$$D'=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leq 2\}.$$

此时$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{2}$,于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{2-u^2}}^{\sqrt{2-u^2}} f(u)\frac{1}{2}\mathrm{d}v=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(u)\sqrt{2-u^2}\mathrm{d}u.$$

（2）作变换$T: u=x+y, t=x-y$,则相应的区域换为

$$D'=\{(u,t)\mid |u+t|\leq A, |u-t|\leq A\}.$$

此时$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,t)}=-\dfrac{1}{2}$,于是

$$\iint\limits_{|x|,|y|\leq A/2} f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-A}^{0}\mathrm{d}t\int_{-A-t}^{A+t} f(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}u+\int_{0}^{A}\mathrm{d}t\int_{-A+t}^{A-t} f(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-A}^{0} f(t)(A+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{A} f(t)(A-t)\mathrm{d}t=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t.$$

7. 证明：

（1）

由*Cauchy-Schwarz*不等式的积分形式知：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

令$g(x)=1$

则$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b g^2(x)dx$，即所证不等式

另解：$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \int_a^b\int_a^b \frac{f^2(x)+f^2(y)}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{b-a}{2}\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right)=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

$Tip: \int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy \Rightarrow \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)dxdy$

（2）

由*Cauchy-Schwarz*不等式的积分形式知：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

令$g(x)=\frac{1}{f(x)}$

则$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge \left(\int_a^b dx\right)^2=(b-a)^2$，即所证不等式

另解：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^b\int_a^b \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$

$$\ge \int_a^b\int_a^b \mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2.$$

$Tip: \int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy \quad \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy$

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy=\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$$

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(y)dy\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b\int_a^b \frac{f(y)}{f(x)}dxdy$$

8. 证明：

（1）

由于 $f(x)$在[0,1]上连续，且单调增加，则

$$(f(x)-f(y))(x-y)\geq 0,\ \text{即}\quad xf(x)+yf(y)\geq yf(x)+xf(y).$$

于是有$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(xf^2(x)f^3(y)+yf^2(y)f^3(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(xf^2(y)f^3(x)+yf^2(x)f^3(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x.$$

整理即得所证的不等式。

（2）

由条件有$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq 0,$ 即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geq g(y)f(x)+g(x)f(y)$$

于是 $\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(f(x)g(y)+f(y)g(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(f(x)g(x)+f(y)g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

9. 解：

（1）

由于$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(y)f(x)\mathrm{d}x$, 从而

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(y)f(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{A^2}{2}.$$

（2）令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F'(x)=f(x), F(0)=0, F(1)=A$.

$$原式=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)[F(y)-F(x)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1[F(y)-F(x)]\mathrm{d}[F(y)-F(x)]$$

$$=\int_0^1 f(x)\frac{\left[F(x)-F(1)\right]^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{A^3}{3!}\ .$$

Tip:事实上，第一小问也可以采用变上限积分：

令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则$F'(x)=f(x), F(0)=0, F(1)=A$

$$原式=\int_0^1 f(x)\left[F(1)-F(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[F(1)-F(x)\right]dF(x)$$

$$=\frac{A^2}{2}$$

10. 解：

记$D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2+9z^2\le 1\}$，由重积分的性质有：对$\forall\Omega\in\mathbb{R}^3$，

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(1-x^2-4y^2-9z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=(\iiint\limits_{\Omega\cap D}+\iiint\limits_{\Omega\setminus D})(1-x^2-4y^2-9z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\le\iiint\limits_{\Omega\cap D}(1-x^2-4y^2-9z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\le(\iiint\limits_{\Omega\cap D}+\iiint\limits_{D\setminus\Omega})(1-x^2-4y^2-9z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint\limits_{D}(1-x^2-4y^2-9z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

于是$\Omega=D$即为所求。

11. 证明：

抛物面$z=x^2+y^2+1$上任意一点(a,b,c)处的切平面为

$$2a(x-a)+2b(y-b)-(z-c)=0，即\quad z=2ax+2by-a^2-b^2+1.$$

该平面与抛物面$z=x^2+y^2$所围立体的体积为

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{x^2+y^2\le z\le 2ax+2by-a^2-b^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2ax+2by-a^2-b^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2ax+2by-a^2-b^2+1}\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\le 1}\left(1-(x-a)^2-(y-b)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

12. 解：

作变换$T:u=\sqrt{x},v=\sqrt{y},w=\sqrt{z}$，则对应的区域是

$$\Omega=\{(u,v,w)\mid u+v+w\le 1,u,v,w\ge 0\},$$

且$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=8uvw$, 于是所求的体积

$$V=\iiint\limits_{\Omega}8uvw\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u}\mathrm{d}v\int_0^{1-u-v}8uvw\mathrm{d}w=\frac{1}{90}.$$

13. 解：

利用球面坐标变换

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_r^R\rho^{2-n}\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi\int_r^R\rho^{2-n}\mathrm{d}\rho=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{3-n}(R^{3-n}-r^{3-n}), & n\ne 3\\ 4\pi(\ln R-\ln r), & n=3\end{cases}$$

由上式可知，当$3-n>0,n<3$时积分值当$r\to 0^+$时极限存在。

14. 解：

（1）

由球坐标变换有

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=4\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho,$$

于是$F'(t)=4\pi f(t^2)t^2$.

（2）

利用柱面坐标变换有

$$F(t)=\frac{h^3}{3}\pi t^2+2\pi h\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r,$$

故$F'(t)=2\pi ht\left(\dfrac{h^2}{3}+f(t^2)\right)$.

15. 解：

利用球坐标变换有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}\rho^3\sin\varphi\mathrm{d}\rho = \pi t^4.$$

于是 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi.$

16. 解：

由对称性，不妨设球面 Σ 的球心在点 $(0,0,a)$，则球面 Σ 位于定球面内的那部分的方程为 $z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，它在 xOy 坐标面上的投影域为

$$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\frac{R^2}{2a}\left(2a-\frac{R^2}{2a}\right)\right\},$$

于是所求的曲面面积为

$$S=\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{R^2}{2a}(2a-\frac{R^2}{2a})}}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r = 2\pi R^2(1-\frac{R}{2a}).$$

从而当 $\dfrac{R}{4a}=1-\dfrac{R}{2a}, R=\dfrac{4}{3}a$ 时所求的面积最大.

17. 解：

科普：如果一个锥体的底面为圆形，顶点位于过底面中心的底面的垂线上，则这个锥体称为直圆锥(*right circular cone*)。

直角三角形以其一直角边为轴旋转而成的旋转体是直圆锥。也可以说在初等几何中，一个锥体若底面为圆，而圆心恰为其顶点在底面上的射影，则称其为直圆锥。通常说圆锥多是指直圆锥

（1）

记山脉直圆锥体为Ω，形成山脉作的功即为增加的势能. 点 P 处体积微元 $\mathrm{d}V$ 的势能 $\mathrm{d}W = h(P)f(P)g\mathrm{d}V$，其中 g 为重力加速度，故总势能，即山脉形成过程中作的总功为

$$W = g\iiint_{\Omega} h(P)f(P)\mathrm{d}V .$$

（2）

圆锥面的方程为 $z = 4000 - \frac{4}{19}\sqrt{x^2+y^2}$. 由于 $h(P)=z,\quad f(P)=3200$，故

$$W = \iiint_{\Omega} 3200gzdV = 3200g\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{19000} dr \int_0^{4000-\frac{4}{19}r} zrdz$$

$$= 3200\pi g\int_0^{19000} r\left(4000-\frac{4}{19}r\right)^2 dr$$

$$= \frac{46208}{3}\pi g \times 10^{14}(J) \approx 4.839\times 10^{18} g(J).$$

18.解：

取薄片的圆心为原点，直径为 x 轴， 建立平面直角坐标系（薄片落在坐标面的上半平面）。设矩形薄片的另一边长度为 a，不妨设材料的密度为 1，则矩形薄片的质心落在点 $(0,-\frac{a}{2})$. 记半圆形区域为 D，因为 $\dfrac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \dfrac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{\pi}{2}R^2} = \dfrac{4R}{3\pi}$，所以半圆形的质心在点 $(0,\frac{4R}{3\pi})$ 处. 要使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，则有

$$\frac{\pi}{2}R^2\frac{4R}{3\pi} + 2Ra(-\frac{a}{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

19.解：

取圆锥Ω底面圆心为原点，高为 z 轴，底面为 xOy 平面建立坐标系. 由于

$$\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V}=\frac{\frac{1}{12}\pi a^2h^2}{\frac{1}{3}\pi a^2 h}=\frac{1}{4}h,$$

故形心落在点$\left(0,0,\frac{1}{4}h\right)$处。圆锥关于其对称轴也即是 z 轴的转动惯量为

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\int_0^h \mathrm{d}z\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{a}{h}(h-z)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{10}a^4h.$$