2017级高等数学第二学期期末试卷 (A类)

一、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. 空间立体$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1(z\ge 0)$上的三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=$ (　　)

   (A) π；　(B) $\frac{1}{2}\pi$；　(C) $\frac{4}{5}\pi$；　(D) $\frac{2}{5}\pi$。

2. 若函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$沿任何方向的方向导数都存在，则 (　　)

   (A) $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$存在；　(B) $f(x,y)$在P_0点处连续；

   (C) $f(x,y)$在P_0点处可微；　(D) 以上选项都不成立。

3. $f(x,y,z)=xyz$在约束条件$x^2+2y^2+2z^2=3$下的最大值为： (　　)

   (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$；　(C) $\frac{1}{2}$；　(D) 1。

4. 平面曲线$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$上的曲线积分$\int_C(x+y)\mathrm{d}s=$ (　　)

   (A) 8π；　(B) 6π；　(C) 4π；　(D) 2π。

5. 下列命题中，正确命题的个数为 (　　)

   ① 若极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在，则非负项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

   ② 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛的充分必要条件是：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{1+|a_n|}$收敛；

   ③ 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$也发散.

   (A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3。

二、填空题（每小题3分，共15分）

6. 二次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=$___________________。

7. 设平面曲线C是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的逆时针方向，则曲线积分

   $\oint_C(y+e^x\sin y)\mathrm{d}x+(3x+e^x\cos y)\mathrm{d}y=$___________________。

8. 向量场$\vec{F}(x,y,z)=x^2y\vec{i}+xy^3\vec{j}-\mathrm{e}^{xyz}\vec{k}$在点$(1,1,0)$处的散度$div\vec{F}\big|_{(1,1,0)}=$______。

9. 微分方程$(4y+2x\ln y)\mathrm{d}x+(\frac{x^2}{y}+4x)\mathrm{d}y=0$的通解为：_____________________。

10. $\dfrac{\dfrac{\pi}{1!}+\dfrac{\pi^5}{5!}+\dfrac{\pi^9}{9!}+\dfrac{\pi^{13}}{13!}+\dots}{\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^7}{7!}+\dfrac{\pi^{11}}{11!}+\dfrac{\pi^{15}}{15!}+\dots}=$______________。

三、(本题 8 分)

11. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(2x+4y,y-2e^z,x-e^z)=0$ 所确定的隐函数，

其中 $F(x,y,z)$ 是可微函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$，及 $\mathrm{d}z$ 。

四、(本大题共 18 分，其中第 12 题 8 分，第 13 题 10 分)

12. 若物质曲面 $S: x^2+y^2-z^2=1\,(1\le z\le 2)$ 的面密度函数 $\rho(x,y,z)=5z$，求物质曲面 S 的质量。

13. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{(x^2-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，

其中 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=9\ (z\ge 1)$ 的上侧。

五、(本大题共 18 分，其中第 14 题 8 分，第 15 题 10 分)

14. 质点 $P(0,3)$ 对质点 $M(x,y)$ 的引力为 $\vec{F}=\dfrac{k(-x,3-y)}{(\sqrt{(-x)^2+(3-y)^2})^3}$，其中 k 为常数。

现质点 M 沿平面曲线 $C: y=\sqrt{x-x^2}$ 从点 $A(1,0)$ 运动到点 $O(0,0)$，求此运动过程中质点 P 对质点 M 的引力 $\vec{F}$ 所作的功。

15. 求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^{2^3})\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^n})}$ 的收敛域。

六、(本大题共 18 分，其中第 16 题 8 分，第 17 题 10 分)

16. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{3^n}$ 的和。

17. 利用函数的泰勒展开式，将无理数 $\mathrm{e},\ln 2,\pi$ 分别表示为(有理)数项级数的和。

七、证明题(本题 8 分)

18. 设 $\{a_n\}$ 是正项数列，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 。

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(1-\dfrac{S_{n-1}}{S_n})$ 收敛。