2016级高等数学第二学期期末试卷(A类)

一、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. 圆域$D: x^2+y^2\le 1$上的二重积分$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　　)

(A) 2π； (B) π； (C) $\frac{2}{3}\pi$； (D) $\frac{4}{3}\pi$。

2. $f(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$在约束条件$2x+y=1$下的最小值为： (　　)

(A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$； (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$； (C) 1； (D) 2。

3. 设S为球面$x^2+y^2+z^2=1$，则$\oiint\limits_S (x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}S=$ (　　)

(A) π； (B) 8π； (C) 16π； (D) 24π。

4. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}$的和为 (　　)

（其中，$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)$ 。）

(A) e； (B) $\mathrm{e}-1$； (C) $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$； (D) $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1$.

5. 下列命题中，正确命题的个数为 (　　)

① 若$a_n>0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$；

② 若函数$f(x)$在$[-1,1]$上有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)\ne 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$绝对收敛；

③ 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径与幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}a_nx^n$的收敛半径相同。

(A) 3； (B) 2； (C) 1； (D) 0。

二、填空题（每小题3分，共15分）

6. 设$z=e^{3x+y^2}+\arctan\frac{x}{1+x^2}$，则$z_{xy}=$__________________。

7. 函数$u(x,y,z)=2x^2+2y^2-z^2$的梯度场∇u的散度$div(\nabla u)=$____________。

8. 八面体$\Omega: |x|+|y|+|z|\le 1$上的三重积分$\iiint\limits_\Omega \sin(xyz)\mathrm{d}V=$_________。

9. 微分方程$y^2(2x+\frac{1}{y}\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=0$的通解为：_______________________。

10. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=$_________________________。（结果用级数表示）

三、(本题 8 分)

11. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+6y-3z,x-e^z)=0$ 所确定，其中 F 是可微函数，求 $\mathrm{d}z$.

四、(本大题共 18 分，其中第 12 题 8 分，第 13 题 10 分)

12. 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} 3z^2\mathrm{d}S$ ，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的区域的边界曲面。

13. 设曲线 C 是 xOy 平面上的一段光滑曲线。在 xOy 平面上求点 (a,b) ，使得曲线积分 $(F(a,b)=)\int_C[(x-a)^2+(y-b)^2]\mathrm{d}s$ 为最小，并指出点 (a,b) 的意义。

五、(本大题共 18 分，其中第 14 题 8 分，第 15 题 10 分)

14. 计算曲线积分 $\int\limits_L e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x+(3x-y)\mathrm{d}y$,其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=2x\ (y\geq 0)$ ，方向是从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的方向。

15. 计算曲面积分 $\oiint\limits_{S}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+4y^2+9z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中

(1) 曲面 S 是不含原点的任一封闭曲面的外侧;

(2) 曲面 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧。

六、(本大题共 18 分，其中第 16 题 8 分，第 17 题 10 分)

16. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^n}{n}(2x-3)^n$ 的收敛域.

17. 将 $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数 (表示为一个幂级数)，并求 $f^{(2017)}(1)$.

七、证明题(本题 8 分)

18. 针对参数 a ($a\in\mathbf{R}$)的不同取值，讨论如下级数的敛散性:

$$1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^a}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^a}+\ldots\text{。}$$