习题 11

最后修改时间：20200608 11：18

1. 解：

（1） $a_n=\dfrac{n}{2^n}$

（2） $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$

2. 解：

（1）

$$a_n=\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}(n\geq 2)$$
$$a_1=S_1=2$$
$$S=\sum_{n=1}^{n}a_n=2+\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1})=2-1=1$$

（2）

$$a_n=\frac{2^n-1}{2^n}-\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n},n\in N^*$$
$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

3. 解：

（1） $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\frac{1}{2})^n+(-\frac{1}{3})^n\right]=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow$ 收敛于 $\dfrac{3}{4}$

（2） $S=\ln\dfrac{1}{n+1}\to-\infty\Rightarrow$ 发散

（3） $S=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{1}{2}\times(1+\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}\Rightarrow$ 收敛于 $\dfrac{3}{4}$

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n}=+\infty\Rightarrow$ 发散

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ 发散

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{1+n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}\Rightarrow$ 发散

（7）

$$\begin{aligned}
&\because \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&=\frac{(n+1)-1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&=\frac{1}{(n+2)(n+3)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]\\
&\therefore S=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

（8）

$$\begin{aligned}
&\because \sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\
&\therefore S=1-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. 证明：

记$S_n=\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$，$T_n=\sum\limits_{n=1}^{n}b_n$，由已知不妨设，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}T_n$不存在

假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n+T_n)$收敛于$C$

则$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(S_n+T_n)-S_n]=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n+T_n)-\lim\limits_{n\to\infty}S_n=C-A\overset{def}{=\!=}B$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}T_n=B$,与$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$不存在矛盾

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$发散

若所给两个数级都发散，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$不一定发散：

令$b_n=-a_n$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$在$b_n=-a_n$条件下收敛于0

5. 解：

（1）$\frac{1}{\ln(n+1)} \ge \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$发散

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \pi \Rightarrow$ 收敛

（3）$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$ 收敛

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\arctan n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 发散

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow$ 发散

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \Rightarrow$ 收敛

（7）

$\frac{a^n}{1+a^{2n}} = \frac{1}{a^{-n}+a^n}$

$a=1$时，$\frac{a^n}{1+a^{2n}} = \frac{1}{2}, S = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2} \Rightarrow$ 发散

$a>1$时，$\frac{1}{a^{-n}+a^n} < \frac{1}{a^n} \Rightarrow$ 收敛

$0<a<1$时，$\frac{1}{a^{-n}+a^n} < \frac{1}{a^{-n}} \Rightarrow$ 收敛

综上：$a=1$时，发散；$a\ne 1$时，收敛

（8）

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{\ln n}{n}}-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln n = +\infty \Rightarrow$ 发散

6.解：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^3}{3^n})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow$收敛

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-1)!!}{n!}}{\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)}{n}=2\Rightarrow$发散

（3）

①根植审敛法：

引理：《高等数学习题与解》例2-17:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}=e$$

$\therefore$发散

②斯特林公式$:n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(n\to\infty)$

$$\therefore\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\sim\frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}}\to+\infty$$

$\therefore$发散

③比值审敛法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n-1)^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)(n-1)^n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}=e$$

$\therefore$发散

④根据收敛的条件，考虑$\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}(n\to\infty)$

记$x_n=\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\Rightarrow\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}(1+\frac{1}{n})^n>1\Rightarrow x_n$单调递增

$x_1=\frac{1^2}{2!}=\frac{1}{2}>0\Rightarrow x_n$不收敛于$0(n\to\infty)$

$\therefore$发散

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}{(n-1)\tan\frac{\pi}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow$收敛

（5）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^n}{\ln(n+1)}}{\frac{a^{n-1}}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\ln n}{\ln(n+1)}=a$$

$0<a<1$时，收敛，

$a>1$时，发散

$a=1$时，$\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$，发散

综上$:0<a<1$时，收敛;$a\geq 1$时，发散

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0\Rightarrow$收敛

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\left((\sqrt[n]{3}-1)^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=0\Rightarrow$收敛

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}\Rightarrow$发散

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left((2n\arcsin\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2n\arcsin\frac{1}{n}}=\sqrt{2}\Rightarrow$发散

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a_n}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b}=\frac{a}{b}\Rightarrow a<b$时，收敛；$a>b$时，发散

7.解：

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^{+\infty}=+\infty\Rightarrow$发散

（2）$\int_1^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx^2=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2e}\Rightarrow$收敛

（3）$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x d(\arctan x)=\left.\frac{\arctan^2 x}{2}\right|_1^{+\infty}=\frac{3\pi^2}{32}\Rightarrow$收敛

（4）$\int_3^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx=\int_3^{+\infty}\ln(\ln x)d(\ln(\ln x))=\left.\frac{[\ln(\ln x)]^2}{2}\right|_3^{+\infty}=+\infty\Rightarrow$发散

8.证明：

（1）

构造$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$，要证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

只需要证明S收敛：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^n}{n!}}{\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0\Rightarrow S\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

（2）

构造$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$，要证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

只需要证明S收敛

根据根值审敛法：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=0\Rightarrow S\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

9. 解：

（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+2^n}{1+3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1\Rightarrow$收敛 or $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1+2^n}{1+3^n}}=\frac{2}{3}$ or $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+2^{n+1}}{1+3^{n+1}}}{\frac{1+2^n}{1+3^n}}=\frac{2}{3}$

（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{3^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^{n-1}}}=\frac{2}{3}\Rightarrow$收敛

（3）$\lim_{n\to\infty}=\frac{\frac{(n!)^2}{(n+1)n^2}}{\frac{[(n-1)!]^2}{n(n-1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)^2}{n+1}=+\infty\Rightarrow$发散

（4）$\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow$收敛

（5）$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}}=1\Rightarrow$发散

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}(1-\cos\dfrac{\pi}{n})}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{n})^2=\dfrac{\pi^2}{2}\Rightarrow$ 收敛

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{2^n}=0\Rightarrow$ 收敛

（8）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{an}{n+1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a$$

$0<a<1$时，收敛；$a>1$时，发散

$a=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^n}=\dfrac{1}{e}\Rightarrow$ 发散

综上：$0<a<1$时，收敛　$a\geq 1$时，发散

10. 证明：

（1）

记$S_n=\sum_{n=1}^{n}a_n$，$T_n=\sum_{n=1}^{n}a_n^2$,

由已知:$\lim_{n\to\infty}S_n$存在$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\exists N\in N_+$，$\forall n>N,a_n^2<a_n<1$

记$\lim_{n\to\infty}S_n=A$,则$S_n<A$恒成立

$T_n=T_N+(T_n-T_N)<T_N+(S_n-S_N)=S_n+T_N-S_N<A+T_N-S_N$

由收敛原理知:$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛

另证 1：

由已知：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

从而：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$

根据比较审敛法知：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛

另证 2：

由已知，a_n有界，设$a_n\leqslant M$恒成立

从而:$a_n^2\leqslant Ma_n$

根据比较审敛法知：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛

（2）

由已知: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$存在，记为$A$，记$S_n=\sum\limits_{n=1}^{n} a_n^2$

由极限的定义知道: $\exists N_1\in N_+$，$\forall n>N_1$，$na_n<A+1\Rightarrow a_n<\dfrac{A+1}{n}<\dfrac{[A+1]+1}{n}=\dfrac{N_2}{n}$

记$T_n=\begin{cases} 0, & n\le N_1 \\ \sum\limits_{n=N_1+1}^{n}\dfrac{N_2^2}{n^2}, & n>N_1 \end{cases}$,则$\lim\limits_{n\to\infty} T_n$存在,记为$B$

$S_n<S_N+T_n<S_N+B$

由收敛原理知: $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n^2$收敛

另证：

由已知，na_n有界，设$na_n\leqslant M\Rightarrow a_n\leqslant\dfrac{M}{n}$恒成立

从而: $a_n^2\leqslant\dfrac{M^2}{n^2}$

根据比较审敛法知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛

（3）

$\because a_n b_n \le \dfrac{a_n^2+b_n^2}{2},(a_n+b_n)^2 \le 2(a_n^2+b_n^2)$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2(a_n^2+b_n^2)$

由第一小问知道:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$均收敛

由比较审敛法知:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛

另证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$

由已知：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

从而：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

根据比较审敛法知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$收敛

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛

（4）

$\because a_n^2+\frac{1}{(2n)^2}\geq\frac{a_n}{n}$

$\therefore$由比较审敛法知道:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$收敛

另证：分两部分考虑：

① $\frac{a_n}{n}<2a_n^2$ 该部分显然收敛

② $\frac{a_n}{n}\geqslant 2a_n^2\Rightarrow a_n\leqslant\frac{1}{2n}\Rightarrow\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{1}{2n^2}$ 该部分也收敛

综上，原级数收敛

（5）

假设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散

$\because n(a_n-a_{n-1})=na_n-(n-1)a_{n-1}-a_{n-1}$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{n}n(a_n-a_{n-1})=na_n-\sum_{n=0}^{n-1}a_n$

$\because na_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}$发散

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$发散，与已知矛盾

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

11. 证明：

$\because \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$发散

$\because \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$收敛

12. 解：

（1）$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}\,(n \to \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$发散

为了方便，我们考虑$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}$

构造函数$f(x) = \frac{\ln x}{x}\,(x \geqslant 3), f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \leqslant 0$

从而得到：$\frac{\ln n}{n}$单调递减$(n \geqslant 3)$

又因为$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

由$Leibniz$判别法知：原级数收敛。

综上，原级数条件收敛。

（2）$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ 发散

（3）$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 \cdot n^2}{2^n} = 0 \Rightarrow$ 原级数绝对收敛

（4）考虑 $-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n+1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)\to+\infty$，原级数不绝对收敛

显然：$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$单调递减，且 $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$

由 $Leibniz$ 判别法知：原级数收敛。

综上，原级数条件收敛。

（5）由不等式：

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

容易知道，原级数不绝对收敛。

记 $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n-1}{2n}<1\Rightarrow a_n$ 单调递减

由夹逼定理知：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

由 $Leibniz$ 判别法知：原级数收敛。

综上，原级数条件收敛。

（6）由不等式：

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

容易推出：

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

从而原级数绝对收敛

13. 解：

（1）$\left(\frac{1-3n}{4n+3}\right)^n=(-1)^n\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^n$

因为：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{4n+3}=\frac{3}{4}<1$，所以原级数绝对收敛

（2）由于：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\neq 0$$

进而:$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$不存在

所以原级数发散。

（3）因为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{n^2}}=1$$

根据比较审敛法，原级数绝对收敛。

（4）$\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$

根据比较审敛法:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)}{\frac{1}{\ln n}}=1$知道，原级数不绝对收敛。

注意到：$\frac{1}{\ln 2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$单调递减

又因为：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)=0$

由$Leibniz$判别法知：原级数收敛。

综上，原级数条件收敛。

（5）我们容易得到：

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

根据比较审敛法：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)}{\frac{1}{n}}=\dfrac{\pi}{2}$，原级数不绝对收敛

因为$\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$单调递减

又因为：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0$

由$Leibniz$判别法知：原级数收敛。

综上，原级数条件收敛。

（6）

根据比较审敛法：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=+\infty$，原级数不绝对收敛

考虑$Abel$判别法：令$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$，$b_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

显然，a_n单调递增且有上界e。

根据$Leibniz$判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛；根据$Abel$判别法知：原级数收敛

综上，原级数条件收敛。

（7）$\dfrac{\cos^2 n}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+\cos 2n}{n}$，其中：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$的敛散性。

考虑$Dirichlet$判别法：记$a_n=\dfrac{1}{n}$单调且趋于0，$b_n=\cos 2n$

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{n} b_n\right| &= \left|\sum_{n=1}^{n}\cos 2n\right| \\
&= \left|\frac{2\sin 1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos 2n}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{2\sin 1\cos 2+2\sin 1\cos 4+\cdots+2\sin 1\cos 2n}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{\sin 3-\sin 1+\sin 5-\sin 3+\cdots+\sin(2n+1)-\sin(2n-1)}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{\sin(2n+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right| \leqslant \frac{1}{\sin 1}
\end{aligned}
$$

即$\sum\limits_{n=1}^{n} b_n$有界，根据$Dirichlet$判别法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$收敛。

综上，原级数发散。

（8）$\dfrac{\sin^2 n}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\cos 2n}{n}$，其中：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$的敛散性。

考虑$Dirichlet$判别法：记$a_n=\dfrac{1}{n}$单调且趋于0，$b_n=\cos 2n$

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{n} b_n\right| &= \left|\sum_{n=1}^{n}\cos 2n\right| \\
&= \left|\frac{2\sin 1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos 2n}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{2\sin 1\cos 2+2\sin 1\cos 4+\cdots+2\sin 1\cos 2n}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{\sin 3-\sin 1+\sin 5-\sin 3+\cdots+\sin(2n+1)-\sin(2n-1)}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{\sin(2n+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right| \leqslant \frac{1}{\sin 1}
\end{aligned}
$$

即$\sum\limits_{n=1}^{n} b_n$有界，根据$Dirichlet$判别法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$收敛。

故原级数不绝对收敛。

对于原级数的敛散性：

根据$Leibniz$判别法知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{1}{n}$收敛。

对于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos 2n}{n}$，考虑$Dirichlet$判别法：

记$c_n=\dfrac{1}{n}$单调且趋于0，$d_n=(-1)^{n+1}\cos 2n$.

根据：

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{2n} d_n\right| &= \left|\sum_{n=1}^{n}[\cos(4n-2)-\cos(4n)]\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{n} 2\sin(4n-1)\sin 1\right| \\
&\leqslant 2\left|\sum_{n=1}^{n}\sin(4n-1)\right| \\
&= 2|\sin 3+\sin 7+\cdots+\sin(4n-1)| \\
&= 2\left|\frac{2\sin 3\sin 2+2\sin 7\sin 2+\cdots 2\sin(4n-1)\sin 2}{2\sin 2}\right| \\
&= \frac{|\cos 5-\cos 1+\cos 9-\cos 5+\cdots+\cos(4n+1)-\cos(4n-3)|}{\sin 2} \\
&= \frac{|\cos(4n+1)-\cos 1|}{\sin 2} \leqslant \frac{2}{\sin 2}
\end{aligned}
$$

$$
\left|\sum_{n=1}^{2n+1} d_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{2n} d_n\right| +1 \leqslant \frac{2}{\sin 2}+1
$$

$\sum_{n=1}^{n} d_n$有界，根据$Dirichlet$判别法$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{n}$收敛。

所以原级数收敛。

综上，原级数条件收敛。

14. 解：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin^n x}{n^2}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，原函数项级数绝对收敛，进而原函数项级数收敛。

所以，原函数项级数的收敛域为R

（2）$|x|>1$时，根据根值审敛法：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{|x|^n}}=\frac{1}{|x|}$，原函数项级数绝对收敛，进而原函数项级数收敛。

$|x|\leqslant 1$时，根据$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{x^n}$不趋于0，原函数项级数发散。

综上，原函数项级数的收敛域为$\{x||x|>1\}$

（3）

$\frac{1}{e}<x<e$时，显然原函数项级数收敛。

$0<x\leqslant\frac{1}{e}$或$x\geqslant e$时，根据$\lim\limits_{n\to\infty}(\ln x)^n$不趋于0，原函数项级数发散。

综上，原函数项级数的收敛域为$\left(\frac{1}{e},e\right)$

（4）原式$=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x>0\\ \frac{(-1)^n}{n}, & x<0\end{cases}$

显然，原函数项级数的收敛域为$(-\infty,0)$

15.解：Ps: 又双叒叕做串题目了，完全没用幂级数的知识，于最后补上幂级数相关的求法。

（1）

$|x|\leqslant 1$时，

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\leqslant 2$$

即原幂级数绝对收敛，从而幂级数收敛。

$x>1$时：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}\to+\infty$$

原幂级数发散。

原式$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ $x<1$时：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}\text{不存在}$$

原幂级数发散。

综上，原幂级数的收敛域为：$[-1,1]$

（2）

$x<0$ 或$x>6$ 时，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 不趋于 0，原幂级数发散。

$0\leqslant x<3$ 时，原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(3-x)^n}{n\cdot 3^n}$，根据 $Leibniz$ 判别法知道，该级数收敛，故原幂级数收敛。

$3\leqslant x<6$ 时，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}}{\left(\frac{x-3}{3}\right)^n}=0\Rightarrow$ 原幂级数收敛。

$x=6$ 时，原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，原幂级数发散。

综上，原幂级数的收敛域为 $[0,6)$

（3）

$|x|>\dfrac{1}{2}$ 时，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n$ 不趋于 0，原幂级数发散。

$|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，$\left|\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，原幂级数绝对收敛，进而原幂级数收敛。

综上，原幂级数的收敛域为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

（4）$|x|<\sqrt{2}$ 时，根据根值审敛法，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2^n}|x|^{2n-1}}=\dfrac{x^2}{2}$，原幂级数收敛。

$|x|\geqslant\sqrt{2}$ 时，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^n}x^{2n-1}$ 不趋于 0，原幂级数发散。

综上，原幂级数的收敛域为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

（5）

$|x|<1$时，根据根值审敛法，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x|^n}{(n+1)^p}}=|x|$，原幂级数收敛。

$|x|>1$时，根据$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)^p}$不趋于 0，原幂级数发散。

$p\leqslant 0$，$|x|=1$时，根据$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)^p}$不趋于 0，原幂级数发散。

$0<p\leqslant 1$，$x=-1$时，根据$Leibniz$判别法知道，故原幂级数收敛。

$0<p\leqslant 1$，$x=1$时，$\dfrac{x^n}{(n+1)^p}>\dfrac{1}{n+1}$，根据比较审敛法知，原幂级数发散。

$p>1$，$x=-1$时根据$Leibniz$判别法知道，故原幂级数收敛。

$p>1$，$x=1$时，原幂级数收敛。

综上，原幂级数的收敛域为：$\begin{cases}(-1,1) & p\leqslant 0\\ [-1,1) & 0<p\leqslant 1\\ [-1,1] & p>1\end{cases}$

（6）根据斯特林公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$，$\dfrac{n!}{n^n}x^n\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{x}{e}\right)^n$

$|x|<e$时，根据根值审敛法，原级数绝对收敛，进而原级数收敛。

$|x|\geqslant e$时，根据$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$不趋于 0，原幂级数发散。

综上，原幂级数的收敛域为：$(-e,e)$

补：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1\Rightarrow R=1$，$|x|=1$时，显然级数收敛。

综上，原幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{3}\Rightarrow R=3$

$x=0$ 时，原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，根据 $Leibniz$ 判别法知道，该级数收敛，故原幂级数收敛。

$x=6$ 时，原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，原幂级数发散。

综上，原幂级数的收敛域为 $[0,6)$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=2\Rightarrow R=\frac{1}{2}$

$|x|=\frac{1}{2}$ 时，$\left|\frac{2^n}{n^2+1}x^n\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，原幂级数绝对收敛，进而原幂级数收敛。

综上，原幂级数的收敛域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

（4）由于此为缺项幂级数，所以考虑一般方法。

$|x|<\sqrt{2}$ 时，根据根值审敛法，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}|x|^{2n-1}}=\frac{x^2}{2}$，原幂级数收敛。

$|x|\geqslant\sqrt{2}$ 时，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}x^{2n-1}$ 不趋于 0，原幂级数发散。

综上，原幂级数的收敛域为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1\Rightarrow R=1$

$p\leqslant 0$，$|x|=1$时，根据$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)^p}$不趋于 0，原幂级数发散。

$0<p\leqslant 1$，$x=-1$时，根据$Leibniz$判别法知道，故原幂级数收敛。

$0<p\leqslant 1$，$x=1$时，$\dfrac{x^n}{(n+1)^p}>\dfrac{1}{n+1}$，根据比较审敛法知，原幂级数发散。

$p>1$，$x=-1$时根据$Leibniz$判别法知道，故原幂级数收敛。

$p>1$，$x=1$时，原幂级数收敛。

综上，原幂级数的收敛域为：$\begin{cases}(-1,1) & p\leqslant 0\\ [-1,1) & 0<p\leqslant 1\\ [-1,1] & p>1\end{cases}$

（6）根据斯特林公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$，$\frac{n!}{n^{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$

$|x|=e$时，根据$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n}}x^{n}$不趋于 0，原幂级数发散。（另解中补证）

综上，原幂级数的收敛域为：$(-e,e)$

另解：存在阶乘，考虑比值法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$$

$x=e$时，考虑通项：$x_n=\frac{n!\,e^{n}}{n^{n}}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}e^{n+1}}{\frac{n!\,e^{n}}{n^{n}}}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}>1$$

从而有：x_n单调增加，且$x_1=e>0$，故有：

$$\lim_{n\to\infty}x_n\neq0$$

$x=-e$时，$x_n=(-1)^{n}\frac{n!\,e^{n}}{n^{n}}$因为：

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|\neq0$$

所以有：

$$\lim_{n\to\infty}x_n\neq0$$

综上，原幂级数的收敛域为：$(-e,e)$

16.证明：

$x<\min\{R_1,R_2\}$时，

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$，两级数分别收敛。收敛级数+收敛级数仍为收敛级数。

$\min\{R_1,R_2\}<x\leqslant\max\{R_1,R_2\}$时，不妨设$R_1<R_2$。则：

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散，$\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$收敛。发散级数+收敛级数仍为发散级数。

综上：$R=\min\{R_1,R_2\}$

若$R_1=R_2$，以上结论不一定成立：

构造级数：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}-a_n x^n$

显然$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=0$恒成立，即收敛域为$R$

17. 解：

（1）$S(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}dx=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,(-1<x<1)$

（2）

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)x^n + nx^n] \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} [(x^{n+1})''] + x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \\
&= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)'' + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' \\
&= x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' + x\left(\frac{x}{1-x}\right)' \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(x-3)}{(x-1)^3}, -1 < x < 1
\end{aligned}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[(n-1)n+n]x^{n} \\
&= x^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1} \\
&= -x^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)n(-x)^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}n(-x)^{n-1} \\
&= -x^{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n}\right)''-x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n}\right)' \\
&= -x^{2}\cdot\left(\frac{-x}{1+x}\right)''-x\cdot\left(\frac{-x}{1+x}\right)' \\
&= \frac{-2x^{2}}{(1+x)^{3}}+\frac{x}{(1+x)^{2}} \\
&= \frac{x(1-x)}{(1+x)^{3}},-1<x<1
\end{aligned}
$$

（4）

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\left(\int_0^x x^{n-1}dx\right)dx$$

$$=\int_0^x\left[\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx\right]dx$$

$$=\int_0^x\left[\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}\right)dx\right]dx$$

$$=\int_0^x -\ln(1-x)dx$$

$$=x+(1-x)\ln(1-x),\quad -1\leqslant x<1$$

$x=1$时，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

或：$\lim_{x\to 1^+}S(x)=1$

综上：$S(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$

（5）记$t=x^2$

$$T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}t^n$$

$$=2t\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

$$=2te^t+e^t$$

$S(x)=T(x^2)=e^{x^2}(2x^2+1)$

（6）记$t=\dfrac{x}{2}$

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1+1)+1}{n!}t^n \\
&= t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n \\
&= t^2e^t+te^t+e^t-1
\end{aligned}
$$

$$S(x)=T\left(\frac{x}{2}\right)=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)-1$$

18. 解：

（1）考虑幂级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},-1<x<1$$

原式$=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$

（2）考虑幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

（抖机灵）联想到：

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

原式$=\arctan\frac{\pi}{4}$

老实推理：

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx\\&=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx\\&=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n\right)dx\\&=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\arctan x\end{aligned}$$

原式$=S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\arctan\frac{\pi}{4}$

（3）考虑幂级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{n}$

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{n} \\
&= 2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n} \\
&= 2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}\right)'+\frac{1}{1-x} \\
&= 2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{x}{1-x} \\
&= \frac{2x}{(1-x)^{2}}+\frac{x}{1-x} \\
&= \frac{3x-x^{2}}{(1-x)^{2}}
\end{aligned}
$$

原式$=S\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{13}{32}$

（4）考虑级数：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$

$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n-1}-\frac{x^n}{n+1}\right)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x x^{n-2}dx-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x x^n dx$$

$$=\frac{x}{2}\int_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}\right)dx-\frac{1}{2x}\int_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)dx$$

$$=\frac{x}{2}\int_0^x\frac{1}{1-x}dx-\frac{1}{2x}\int_0^x\frac{x^2}{1-x}dx$$

$$=\frac{x}{2}[-\ln(1-x)]-\frac{1}{2x}\left\{\frac{1}{2}[-x^2-2x-2\ln(1-x)]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[x+2+2\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln(1-x)\right]$$

原式$=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5-6\ln 2}{8}$

19. 解：

（1）利用e^x展开的幂级数：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty)$$

两边同时乘以x：

$$xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}, x\in(-\infty,+\infty)$$

再用x^2替换掉x：

$$x^2e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2(n+1)}, x\in(-\infty,+\infty)$$

则其展开成立的区间为：$(-\infty,+\infty)$

（2）利用$(1+x)^{\alpha}$展开的幂级数：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n},-1<x<1$$

$$\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{[1+(x-1)]^{2}}=[1+(x-1)]^{-2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}(x-1)^{n},(-1<x-1<1)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)!}{n!}(x-1)^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)(x-1)^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)(x-1)^{n},(0<x<2)$$

（3）利用$(1+x)^{\alpha}$展开的幂级数：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n},-1<x<1$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{2}-x-6}&=\frac{1}{(x-3)(x+2)}\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{(x-1)-2}-\frac{1}{(x-1)+3}\right)\\&=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}\\&=-\frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{x-1}{2}\right)^{-1}-\frac{1}{15}\cdot\left(1+\frac{x-1}{3}\right)^{-1}\\&=-\frac{1}{10}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n}\right]-\frac{1}{15}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n}\right]\\&=-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^{n}}{3^{n+1}}\right](x-1)^{n}\end{aligned}$$

其成立的区间由：$\begin{cases}-1<\dfrac{x-1}{2}<1\\-1<\dfrac{x-1}{3}<1\end{cases}$决定，即 $-1<x<3$

（4）利用$\ln(1+x)$展开的幂级数：

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,-1<x\leqslant 1$$

$$\begin{aligned}\ln(10+x)&=\ln 10+\ln\left(1+\frac{x}{10}\right)\\&=\ln 10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{10}\right)^n,\left(-1<\frac{x}{10}\leqslant 1\right)\\&=\ln 10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 10^n}x^n,(-10<x\leqslant 10)\end{aligned}$$

（5）利用$\ln(1+x)$展开的幂级数：

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,-1<x\leqslant 1$$

$$\begin{aligned}\ln(2+x-3x^2)&=\ln[(3x+2)(1-x)]\\&=\ln(3x+2)+\ln(1-x)\\&=\ln 2+\ln\left(1+\frac{3}{2}x\right)+\ln(1-x)\\&=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{3}{2}x\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\\&=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right]\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

其成立的区间由：$\begin{cases}-1<\dfrac{3}{2}x\leqslant 1\\-1<-x\leqslant 1\end{cases}$决定，即$-\dfrac{2}{3}<x\leqslant\dfrac{2}{3}$

（6）利用$\ln(1+x)$展开的幂级数：

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n},-1<x\leqslant 1$$

$$\begin{aligned}(1+x)\ln(1-x)&=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^{n},-1<-x\leqslant 1\\&=-(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}\\&=-x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)x^{n},\quad -1\leqslant x<1\end{aligned}$$

（7）利用$\sin x$展开的幂级数：

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$\begin{aligned}\sin(2x)&=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right]\\&=-\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2n+1},-\infty<x-\frac{\pi}{2}<+\infty\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1},-\infty<x<+\infty\end{aligned}$$

（8）由：

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

利用$(1+x)^{\alpha}$展开的幂级数：

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, -1 < x < 1$$

我们可以得到：

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n, -1 < -x^2 < 1 \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n! \cdot 2^n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\end{aligned}$$

利用幂级数的逐项可积性我们可以得到：

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\right) dx \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} x^{2n+1}, -1 < x < 1\end{aligned}$$

$|x| = 1$时，由不等式：

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

我们可以得到：

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} < \frac{1}{(2n+1)^{3/2}}$$

进而，此时幂级数绝对收敛，从而幂级数收敛。

综上：

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} x^{2n+1}, -1 \leqslant x \leqslant 1$$

20. 解：

（1）利用$(1+x)^{\alpha}$展开的幂级数：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n},-1<x<1$$

$$S(x)=(1+x)^{1/3}=1+\sum_{n=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^{n}+R_{n}(x),$$

其中，$R_{n}(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\left(\frac{1}{3}-n\right)}{(n+1)!}(\theta x)^{n},0<\theta<1$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{30}&=3\left(1+\frac{1}{3^{2}}\right)^{1/3}\\&=3\left[1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\times\frac{1}{3^{2}}-\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{2!}\times\frac{1}{3^{4}}+\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}}{3!}\times\frac{1}{3^{6}}+\cdots\right]\end{aligned}$$

由于：

$$\frac{\frac{1}{3}}{1!}\times\frac{1}{3^{2}}\approx0.037037$$

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{2!}\times\frac{1}{3^{4}}\approx0.001371$$

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}}{3!}\times\frac{1}{3^{6}}\approx0.000085$$

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{3}}{4!}\times\frac{1}{3^{8}}\approx0.000005$$

所以：

$$\sqrt[3]{30}\approx3\times[1+0.037037-0.001371+0.000085]\approx3.1073$$

（2）利用$\ln(1+x)$展开的幂级数：

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n},-1<x\leqslant 1$$

从而得到：$\ln 1.2=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^{2}+\frac{1}{3}(0.2)^{3}+\cdots$

由于：

$$\frac{1}{2}(0.2)^{2}=0.02$$

$$\frac{1}{3}(0.2)^{3}\approx 0.002667$$

$$\frac{1}{4}(0.2)^{4}=0.0004$$

$$\frac{1}{5}(0.2)^{5}=0.000064$$

所以：

$$\ln 1.2=0.2-0.02+0.002667-0.0004\approx 0.1823$$

21. 解：

（1）利用$\sin x$展开的幂级数：

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

进而可以得到：

$$\begin{aligned}\int_0^{0.8}x^{10}\sin x dx&=\int_0^{0.8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n+9}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!(2n+10)}x^{2n+10}\Big|_0^{0.8}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!(2n+10)}0.8^{2n+10}\\&\approx 0.005726-0.000524+0.000015\\&\approx 0.005\end{aligned}$$

（2）$\displaystyle\int\frac{e^x-1}{x}dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}x^n+C$

（3）$\displaystyle\int\frac{1-\cos x}{x}dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{2n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n\cdot(2n)!}x^{2n}+C$

（4）利用e^x展开的幂级数：

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-x^2}dx&=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x^2)^n dx\\&=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}dx\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}+C\end{aligned}$$

22.解：

（1）依 Fourier 系数公式有：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}(-x)dx\right)=1-\frac{\pi}{2}$$

当$n\geqslant 1$时，有：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}-x\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{0+\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}-x\sin nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n}+\frac{(-1)^n\pi}{n}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n(1+\pi)-1}{n\pi}$$

因此：

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\cos nx+\frac{(-1)^n(1+\pi)-1}{n\pi}\sin nx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+\pi)-1}{n\pi}\sin nx$$

根据 Dirichlet 收敛定理可得和函数：

$$S(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0\\ -x, & 0<x<\pi\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{1-\pi}{2}, & x=\pm\pi\end{cases}$$

（2）$f(x)$为偶函数，故$b_n=0$

依 Fourier 系数公式有：

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2-x^2)dx\\&=\frac{4}{3}\pi^2\end{aligned}$$

当$n\geqslant 1$时，有：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nxdx\\&=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4\pi}{n^2}\\&=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\end{aligned}$$

因此：

$$f(x)\sim\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

根据 Dirichlet 收敛定理可得和函数：

$$S(x)=\pi^2-x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

（3）$f(x)$为偶函数，故$b_n=0$

依 Fourier 系数公式有：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

当$n \geqslant 1$时，有：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n+1}{1-n^2} \\ &= \frac{2\cdot[(-1)^n+1]}{\pi(1-n^2)} \end{aligned}$$

因此：

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot[(-1)^n+1]}{\pi(1-n^2)} \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

根据 Dirichlet 收敛定理可得和函数：

$$S(x) = |\sin x| \, (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

23.解

（1）依 Fourier 系数公式，当$n \geqslant 1$时，有：

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi + \pi(-1)^n}{4n} = \frac{1 + (-1)^n}{2n}$$

因此：

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2n} \sin nx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases}$$

（2）依 Fourier 系数公式:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{h} dx = \frac{2h}{\pi}$$

当$n \geqslant 1$时，有：

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{h} \cos nx dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(hn)}{n}$$

$$= \frac{2\sin(hn)}{n\pi}$$

因此：

$$f(x) \sim \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(hn)}{n} \cos nx = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < h \\ 0, & h \leqslant x \leqslant \pi \\ \frac{1}{2}, & x = h \end{cases}$$

24.证明：依 Fourier 系数公式，当$n \geqslant 1$时，有：

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2(-1)^{n+1} + 2}{n^3}$$
$$= \frac{4[(-1)^{n+1} + 1]}{n^3\pi}$$

因此：

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4[(-1)^{n+1} + 1]}{n^3\pi} \sin nx$$
$$= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

根据 Dirichlet 收敛定理可得和函数：

$$S(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases}$$

令$x = \frac{\pi}{2}$，我们可以得到：

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^2}{4}$$

即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

25.解：

（1）$f(x)$为偶函数，故$b_n=0$

依 Fourier 系数公式有：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |x| dx \\ &= l \end{aligned}$$

当$n \geqslant 1$时，有：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} x\cos\frac{n\pi}{l}xdx \\ &= \frac{2}{l}\cdot\frac{l^2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{2l[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

因此：

$$f(x) \sim \frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x$$

根据 Dirichlet 收敛定理可得和函数：

$$S(x)=|x|\,(-l \leqslant x \leqslant l)$$

（2）依 Fourier 系数公式有：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{2} hdx\right) \\ &= h \end{aligned}$$

当$n \geqslant 1$时，有：

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} h\cos\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} h\sin\frac{n\pi}{2}xdx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2h[(-1)^n - 1]}{\pi n} \\ &= \frac{h[(-1)^n - 1]}{\pi n} \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h[(-1)^n - 1]}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}x \\ &= \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x \end{aligned}$$

根据 Dirichlet 收敛定理可得和函数：

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ h, & 0 < x < 2 \\ \frac{h}{2}, & x = 0, \pm 2 \end{cases}$$

补充题

1.

证 由于$0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$，且$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

当级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$的敛散性不定。

如取$a_n = c_n = b_n = 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$发散；若取$a_n = -1, b_n = 1, c_n = 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛。

2.

证 由$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$有

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{b_2}{b_1},$$

即$a_n \le \frac{a_1}{b_1}b_n$，从而当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛；当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也发散。

3.

证 记$S_n = (1+\frac{1}{1\cdot 2})(1+\frac{1}{2\cdot 3})\cdots(1+\frac{1}{n\cdot(n+1)})$，则

$$\ln S_n = \sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{i\cdot(i+1)}) \ge 0.$$

由于$\ln S_n - \ln S_{n-1} = \ln(1+\frac{1}{n(n+1)}) \ge 0,$ 且由$\ln(1+x) \le x(x \ge 0)$知

$$\ln S_n \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

因此$\lim_{n\to\infty}\ln S_n$存在，从而$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1\cdot 2})(1+\frac{1}{2\cdot 3})\cdots(1+\frac{1}{n\cdot(n+1)})$存在。

4.

证 由于$\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}} \le \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + \dfrac{1}{n^2+\lambda}\right)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\lambda}$收敛，故由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$绝对收敛。

5.

证 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x(x\ge 0)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1\ge 0, f(0)=0$，故 $f(x)$ 单调增加. 又 $a_n = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，从而$0\le a_{n+1}\le a_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，据 Leibniz 判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛。

另一方面，由于

$$\lim_{n\to\infty} na_n = n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2},$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$条件收敛。

6.

证 由$\sqrt{2+2\cos t}=2\cos\dfrac{t}{2}(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}),\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$知

$$a_n=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{n-1}}}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=1$，故原级数收敛。

7.

证 由条件有 $f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,$于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0).$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left|f(\dfrac{1}{n})\right|=\dfrac{1}{2}|f''(0)|$. 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛。

8.

证 由$a_{n+1}\le a_n(n=1,2,\cdots)$，记正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$前 n 项部分和为S_n，则

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i-na_{n+1}\le\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$收敛。

令$n\to\infty$知$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_{n+1}$存在，从而$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_n$存在. 记$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_n=l(0\le l<\infty)$，

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以$l=0$.

9.

证 由条件有$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})\ge 1, a_n-a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\ 2}-1}{2a_n}\ge 0\ (n\in\mathbb{N}_+)$, 从而数列$\{a_n\}$单调减少有下界 1，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在。由于$0\le\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\le a_n-a_{n+1}$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)$收敛。

10.

证 (1) 由于 $$a_{n+2}+a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1},$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1.$$

(2) 因为 $a_{n+2}>0$，所以 $a_n<\frac{1}{n+1}$，从而

$$0<\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{1}{n^{1+\lambda}}.$$

当 $\lambda>0$ 时，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

11.

证 记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 前 n 项部分和为 S_n，则有 $S_{2n}=\sum\limits_{i=1}^{n}(u_{2i-1}+u_{2i})$. 由条件可知数列 $\{S_{2n}\}$ 收敛。而 $S_{2n-1}=S_{2n}-u_{2n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故 $\{S_{2n-1}\}$ 亦收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$，从而 $\{S_n\}$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

12.

证 当 $x=0$ 时，级数显然收敛.

$x\neq 0$ 原级数为定号级数，且当 $\alpha\le 0$ 时，级数发散；当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\cdot\frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}=\frac{1}{x}$，故当 $\alpha-1>1$，即 $\alpha>2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}$ 收敛；当 $0<\alpha\le 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}$ 发散。

综上知: $\alpha>2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}$ 的收敛域为 $\mathbb{R}$；当 $\alpha\le 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}$ 的收敛域为 $\{0\}$.

13.

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^n+b^n}{n}}=\max\{a,b\}$, 故其收敛半径 $R=\min\left\{\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right\}$.

当 $x=R$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{a^n+b^n}{n}R^n=1$, 可知此时级数发散；当 $x=-R$ 时，

$$\frac{a^n+b^n}{n}(-R)^n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\min\{a,b\}}{\max\{a,b\}}\right)^n,$$

故此时级数收敛。于是所求收敛域为：$[-\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\},\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\})$.

14.

证 由 Fourier 系数公式有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^n}{(n^2+4)\pi}\sinh 2\pi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2n(-1)^n}{(n^2+4)\pi}\sinh 2\pi.$$

于是 $f(x)\sim\dfrac{2\sinh 2\pi}{\pi}\left(\dfrac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right)$.

由 Dirichlet 收敛定理有 $f(0)=\dfrac{2\sinh 2\pi}{\pi}\left(\dfrac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{n^2+4}\right)=1$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+4}=\frac{1}{8}-\frac{\pi}{4\sinh 2\pi}.$$

15.

证 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2\ (-\pi\le x\le\pi).$$

由 Dirichlet 收敛定理，令 $x=\pi$，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;

令 $x=0$，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$;（3）式由（2）式直接可得；

由（1）式可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$