Herleitung der Produktregel

– Beweis –

Es sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\quad$ u, v differenzierbar

Es gilt:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) \cdot [u(x) - u(x_0)]}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{u(x_0) \cdot [v(x) - v(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x) + \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \cdot u(x_0)$$

$$= u'(x_0) \cdot v(x_0) + v'(x_0) \cdot u(x_0)$$

Somit gilt für $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\quad$ $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$