

Суперпозиция машин Тьюринга.

Пример.

- Построить машину Тьюринга для вычисления функции $C(x)=1$

$C(x) = S(O(x))$

	q_1	q_2	q_3	q_4
0		1H q_3		1H q_0
1	0R q_1	0R q_2	1L q_4	

- Искомую машину будем строить как суперпозицию машин, вычисляющих функции $O(x) = 0$ и $S(x) = x + 1$ т.е. $C(x) = S(O(x))$
- Пусть имеются две машины T_1 и T_2 , которые вычисляют функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно в одном и том же алфавите.
- Построим новую машину Тьюринга T следующим образом.
- Состояния машины T_2 переобозначим так, чтобы они отличались от состояний T_1 .
- Начальное состояние q_1^1 машины T_1 объявляем начальным состоянием q_1 машины T .
- Заключительное состояние q_0^2 машины T_2 объявляем заключительным состоянием q_0 для машины T .
- Заключительное состояние q_0^1 машины T_1 и начальное состояние q_1^2 машины T_2 отождествляем.
- Полученные команды для обеих машин объединяем в одну программу новой машины.

- Построенная машина Т вычисляет суперпозицию функций $f(x) = f_2(f_1(x))$ и называется суперпозицией машин T_1 и T_2

В результате из двух таблиц

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$0Rq_2$	$0Rq_2$

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$1Lq_2$	

получим одну

	q_1	q_2^1	q_0^1	q_2^2
0		$1H q_0^1$		$1Hq_0$
1	$0R q_2^1$	$0R q_2^1$	$1L q_2^2$	

1. Идея суперпозиции

У нас есть две функции:

- $f_1(x)f_1(x)$, вычисляемая машиной T_1T_1
- $f_2(y)f_2(y)$, вычисляемая машиной T_2T_2

Мы хотим построить машину ТТ, которая вычисляет:

$$f(x)=f_2(f_1(x))f(x)=f_2(f_1(x))$$

То есть сначала применить f_1 к входу xx , потом к результату применить f_2 .

2. Как соединяются машины

1. Переобозначение состояний

Состояния T_2 переименовываются (например, добавляется верхний индекс 22), чтобы они не совпадали с состояниями T_1 . Это нужно, чтобы при объединении программ не было конфликтов состояний.

2. Начальное и конечное состояния новой машины

- **Начальное состояние** q_1 машины ТТ — это начальное состояние T_1 (обозначим q_1).
- **Заключительное состояние** q_f машины ТТ — это заключительное состояние T_2 (обозначим q_f).

3. Соединение T_1 и T_2

Заключительное состояние T_1 (q_1) отождествляется с начальным состоянием T_2 (q_2).

Это значит: когда T_1 завершает работу, машина автоматически переходит в состояние q_2 и начинает выполнять программу T_2 .

3. Как это выглядит на ленте

- **Шаг 1:** На ленте записаны исходные данные xx .
 - **Шаг 2:** T_1 работает с xx и вычисляет $f_1(x)$. После завершения на ленте остаётся результат $f_1(x)$, головка находится в каком-то положении (обычно в стандартном для завершения T_1).
 - **Шаг 3:** Автоматический переход в состояние q_2 , машина T_2 начинает работу с теми данными, которые оставила T_1 .
 - **Шаг 4:** T_2 вычисляет $f_2(f_1(x))$, результат остаётся на ленте.
 - **Шаг 5:** При переходе в состояние q_f машина останавливается — это заключительное состояние ТТ.
-

4. Важные детали

- **Внешний алфавит один и тот же** — это важно, чтобы данные, которые оставляет T_1T_1 , могли быть прочитаны T_2T_2 .
 - **Программы объединяются** — получается одна большая программа из всех команд T_1T_1 и T_2T_2 , с соответствующими переходами состояний.
 - **Автоматический переход** из qf_1qf_1 в qi_2qi_2 может быть реализован просто как **отсутствие команды** для qf_1qf_1 в T_1T_1 кроме той, которая ведёт в qi_2qi_2 (или как специальная команда перехода).
-

5. Аналог в программировании

Это соответствует последовательному выполнению функций:

```
python
```

```
def T(x):  
    y = f1(x) # T1  
    return f2(y) # T2
```

Или в виде конвейера:

```
вход → T1 → T2 → выход .
```

6. Итог

Суперпозиция машин Тьюринга — это способ соединить две машины так, чтобы выход первой подавался на вход второй, создавая таким образом более сложную вычислимую функцию.

Это одна из базовых конструкций в теории вычислимости, показывающая, что машины Тьюринга замкнуты относительно композиции.