Метод резолюций для ИП

- Метод резолюций используется во многих системах логического программирования.
- Метод был предложен в 1965 г. А. Робинсоном
- Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые называются предложениями.
- Предложение – это бескванторная дизъюнкция литералов.
- Любая формула ИП может быть преобразована во множество предложений, используя следующие шаги.
- Приведение к предваренной форме

- **Элиминация кванторов существования с использованием преобразований**

$$\exists x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow$$
$$Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A(a, x_2, \ldots, x_n)$$

где a – предметная константа, $Q_2, \ldots, Q_n$ –любые кванторы.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow$$
$$\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n A(x_1, \ldots, f(x_1, \ldots, x_{i-1}), \ldots, x_n),$$

где f – функциональный символ,
$Q_{i+1}, \ldots, Q_n$ –любые кванторы.

- После этого этапа формула содержит только кванторы всеобщности.
- Такой вид формул называется скулемовская стандартная форма.*

- Элиминация кванторов всеобщности с использованием преобразования

$$\forall x\, A(x) \Rightarrow A(x)$$

После этого шага формула не содержит кванторов.

- Приведение к конъюнктивной нормальной форме и элиминация конъюнкций.
- После этого этапа получаем множество предложений, соответствующее формуле.
- При рассмотрении метода резолюций для исчисления высказываний особое внимание уделялось поиску контрарных пар во множестве предложений.
- В логике предикатов этот поиск заметно усложняется, поскольку в формулы входят предметные переменные.

Пример. Преобразовать во множество предложений формулу

- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(F(y) \& D(x,y))$

$\equiv \forall x(\neg P(x) \vee \exists y(F(y) \& D(x,y))) \equiv$

$\equiv \forall x \exists y(\neg P(x) \vee F(y) \& D(x,y)) \Rightarrow$

$\forall x(\neg P(x) \vee F(f(x)) \& D(x,f(x)) \Rightarrow$

- $\Rightarrow \neg P(x) \vee F(f(x)) \& D(x,f(x)) \equiv$

$(\neg P(x) \vee F(f(x))) \& (\neg P(x) \vee D(x,f(x)))$

$\neg P(a)$

$\Rightarrow \{\neg P(x) \vee F(f(x)),\ \neg P(x) \vee D(x,f(x))\}$

Пусть имеется два предложения C_1 и C_2 (P, R, Q – предикаты)

- $C_1 = \quad P(y) \vee R(y),$
- $C_2 = \neg P(f(x)) \vee Q(x).$

- Не существует ни одной литеры в C_1 контрарной какой-либо литере в C_2.

- Однако если подставить терм $f(x)$ вместо y в предложении C_1 то получим предложения C_1' и C_2',

$C_1'=P(f(x))\vee R(f(x))$, $C_2'=\neg P(f(x))\vee Q(x)$.

- в которых уже существуют контрарные литералы ($P(f(x))$, $\neg P(f(x))$)

- эти два предложения можно резольвировать и получить резольвенту $C_3'= Q(x)\vee R(f(x))$.
- Таким образом, для получения резольвент из предложений в логике предикатов необходимо выполнить подстановки соответствующих термов вместо переменных.

- Пусть *X* – множество предметных переменных из Ω и *T* – множество термов над переменными из *X*. *Подстановкой* называется отображение $\sigma: X \to T$.
- Подстановка σ называется *конечной*, если $\sigma(x) \neq x$ лишь для конечного числа элементов *x* из *X*.
- Подстановка, не имеющая элементов, называется *тождественной*.

- Подстановку будем обозначать как множество пар

  $\sigma=\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_k \leftarrow t_k\}$,

  $x_1, \ldots, x_k$ – переменные,

  $t_1, \ldots, t_k$ – термы.

- Подстановка σ называется *унификатором* для множества термов $\{t_1, \ldots, t_k\}$, если

$$\sigma(t_1)= \sigma(t_2)=\ldots= \sigma(t_k).$$

- В рассмотренном выше примере подстановка $\sigma=\{y\leftarrow f(x)\}$ является унификатором для множества термов $\{f(x), y\}$.

- Следующий рекурсивный алгоритм выясняет унифицируемы ли два терма *S* и *T*

$\exists x \ldots$

- 1. Если *S* и *T* – константы, то *S* и *T* унифицируемы тогда и только тогда, когда они совпадают

- **2. Если *S* – переменная,**

  T **– произвольный терм, не содержащий свободное вхождение S, то они унифицируемы и σ={*S* $\leftarrow$ *T*}**

  Если *T* – переменная,

  S **– произвольный терм без свободного T, то они унифицируемы и σ={*T* $\leftarrow$ *S*}**

$S = f_1(\ldots)$
$T = f_1(\ldots)$

- **3. В остальных случаях термы *S* и *T* унифицируемы тогда и только тогда, когда *S* и *T* имеют одинаковый главный функциональный символ и все их соответствующие компоненты (подтермы) унифицируемы.**

- Пусть *A* и *B* – два предложения в ИП. Правило вывода

$x \leftarrow y$

- $$\frac{A, B}{(A_1 \vee B_1)\sigma} R$$

$z \leftarrow f_1(t)$

- называется *правилом резолюции* в ИП, если в предложениях *A* и *B* существуют унифицируемые контрарные литералы P_1 и P_2, т.е. $A=P_1 \vee A_1$ и $B=\neg P_2 \vee B_1$,
- причем P_1 и P_2 являются унифицируемыми унификатором σ.

- В этом случае резольвентой предложений *A* и *B* является предложение $(A_1 \vee B_1)\sigma$, полученное из предложения $A_1 \vee B_1$ применением унификатора σ.

- **В этом случае резольвентой предложений *A* и *B* является предложение $(A_1 \vee B_1)\sigma$, полученное из предложения $A_1 \vee B_1$ применением унификатора σ.**

Пример. Резольвировать множество предложений

- $\{P(x, g(x), a) \vee Q(x), \neg P(f(x), y, u) \vee \neg Q(y)\}$ √

Переименование x на z

Надо унифицировать t = $(z, g(z), a)$ и

$s = (f(x), y, u)$

$\sigma_1 = (z \leftarrow f(x)) \quad \sigma_1(t) = (f(x), g(f(x)), a)$

$\sigma_2 = (y \leftarrow g(f(x))) \; \sigma_2(s) = (f(x), g(f(x)), u))$

$\sigma_3 = (u \leftarrow a) \quad \sigma_3(\sigma_2(s)) = (f(x), g(f(x)), a))$

Q(f(x)) ∨ ¬Q(g(f(x)))

Пример. Резольвировать множество предложений

- $\{P(x, g(x)), \neg P(f(x), x)\}$

Переименование x на z

t = $(z, g(z))$ и s = $(f(x), x)$

$\sigma_1 = (z \leftarrow f(x))$ $\sigma_1(t) = (f(x), g(f(x)))$

Термы $x, g(f(x))$ нельзя унифицировать, поскольку $g(f(x))$ содержит вхождение переменной x.

- **Пусть нужно установить выводимость *Г* ├ *F* в ИП методом резолюций.**
- **Воспользуемся доказательством от противного и будем доказывать выводимость *Г*, ¬*F* ├ ∅.**

- Для этого каждая формула множества Γ и формула $\neg F$ независимо преобразуются в множества предложений.

- В полученном совокупном множестве предложений отыскиваются резольвируемые предложения, к ним применяется правило резолюции в ИП и резольвента добавляется во множество и т.д.

При этом возможны три случая

- **Среди текущего множества предложений нет резольвируемых.**
- **Это означает, что теорема опровергнута, т.е. формула *F* не выводима из множества формул *Г*.**

- **В результате очередного применения правила резолюции получено пустое предложение. Это означает, что теорема доказана, т.е. $\Gamma \vdash F$.**

- Процесс не заканчивается, т.е. множество предложений пополняется новыми резольвентами, среди которых нет пустых. Это ничего не означает.

- Таким образом, ИП является полуразрешимой теорией, а метод резолюций является частичным алгоритмом автоматического доказательства теорем.

Пример. Покажем выводимость формулы

$\forall x \forall y A(x,y) \to \forall y \forall x A(x,y)$

$\neg(\forall x \forall y A(x,y) \to \forall y \forall x A(x,y)) \equiv$

$\neg(\neg(\forall x \forall y A(x,y)) \vee \forall y \forall x A(x,y)) \equiv$

$(\forall x \forall y A(x,y)) \& \neg(\forall y \forall x A(x,y)) \equiv$

$(\forall x \forall y A(x,y)) \& (\exists y \exists x \neg A(x,y)) \equiv$

$(\forall y \forall x A(x,y)) \& (\exists y \exists x \neg A(x,y)) \equiv$

- $\equiv \forall y \exists y_1 \forall x \exists x_1 (A(x,y) \& \neg A(x_1,y_1)) \equiv$
- $\forall y \forall x (A(x,y) \& \neg A(g(x,y), f(y)))$
- $\{A(x,y), \neg A(g(x,y), f(y))\}$

Резольвируем полученное множество предложений

- 1 $A(x,y)$ $A(z, v)$
- 2 $\neg A(g(x,y),f(y))$ $z \leftarrow g(x, y)$, $v \leftarrow f(y)$
- 3 $\varnothing$ **ПР из 1,2**

Выводимость доказана.

Пример. Проверить правильность рассуждения

- **Всякий, кто может решить эту задачу, – математик.**
- **Ни один математик не может решить этой задачи.**
- **Значит, задача неразрешима.**

- **Определим на множестве людей следующие предикаты**
- ***R*(*x*)= «*x* может решить эту задачу»**
- ***M*(*x*)= «*x* -- математик»**

Тогда фразы можно записать в логической символике следующим образом

- $\forall x\ (R(x) \to M(x))$
- $\neg\exists x\ (M(x) \to R(x))$ $\Rightarrow \neg R(x)$
- $\neg\exists x\ R(x)$ $\Rightarrow R(a)$

или

$$\forall x(R(x)\to M(x)),\ \neg\exists x(M(x)\to R(x)) \vdash \neg\exists x\ R(x)$$

Проверим выводимость методом резолюций.

- Множество предложений

  $\{\neg R(x) \vee M(x), \neg R(x), M(x), R(a)\}$

  резольвируется до получения пустой формулы.
- Таким образом, данное рассуждение правильное.