Аксиомы и правила вывода в ИП. Примеры логического вывода некоторых формул в ИП.

Логические аксиомы для ИП

- A_1 $(A\to(B\to A))$,
- A_2 : $((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$
- A_3 : $((\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B))$
- P_1 : $\forall x\, A(x)\to A(t)$, где формула $A(x)$ не содержит терм t
- P_2 : $\forall x(A\to B)\to (A\to\forall xB)$, если формула A не включает свободных вхождений x.

Правила вывода в ИП

- modus ponens: $$\frac{A,\ A\to B}{B}\ MP$$

правило обобщения $$\frac{A}{\forall xA}\ (\forall^+)$$

- Понятие выводимой формулы определяется так же, как и в исчислении высказываний.

Пример. Доказать выводимость в исчислении предикатов

$\forall x \forall y A \vdash \forall y \forall x A$

1	$\forall x \forall y A$	гипотеза
2	$\forall x \forall y A \to \forall y A$	P_1
3	$\forall y A$	MP 1,2
4	$\forall y A \to A$	P_1
5	A	MP 3,4
6	$\forall x A$	$\forall$+5
7	$\forall y \forall x A$	$\forall$+ 6

$\forall x A(x) \to A(t)$

$A(x) \leftarrow \forall y A(x,y)$

Правило индивидуализации

Если $A(x)$ не содержит терм t, то
$\forall x A(x) \vdash A(t).$

Доказательство.

1	$\forall x A(x)$	гипотеза
2	$\forall x A(x) \to A(t)$	$P1$
3	$A(t)$	MP 1,2

Правило существования (ПС).

Если терм t свободный для переменной x в формуле A(x), то $A(t) \vdash \exists x A(x)$.

Доказательство.

- 1 $\forall x \neg A(x) \to \neg A(t)$ P1
- 2 $(\forall x \neg A(x) \to \neg A(t)) \to (A(t) \to \neg \forall x \neg A(x))$

  $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ – тавтология

  $B \leftarrow A(t)$, $A \leftarrow \forall x \neg A(x)$
- 3 $A(t) \to \neg \forall x \neg A(x)$ MP 1,2

  $A(t) \to \exists x\, A(x)$