Кванторы. Предваренная форма. Логические операции с кванторами.

В логике предикатов наряду с операциями логики высказываний имеются специфические операции, называемые **кванторами**.
Пусть P – одноместный предикат, определенный на предметной области Ω □ Пусть множество Ω имеет конечное число элементов, т.е. Ω={a1,…,am } .
Тогда высказывание «Все элементы Ω обладают свойством P» можно записать в виде конечной конъюнкции P(a1)&P(a2)&…&P(am) и высказывание будет истинно тогда и только тогда, когда предикат P принимает истинное значение для любого ai из предметной области

- можно рассмотреть высказывание «Хотя бы один элемент Ω обладает свойством P» и записать его в виде конечной дизъюнкции предикатов P(a1)□P(a2) □ … □ P(am) и это высказывание будет истинным, если хотя для одного элемента из предметной области предикат принимает истинное значение.
- Однако в случае бесконечного множества нельзя записать бесконечную конъюнкцию или дизъюнкцию предикатов
- в этом случае используют квантор всеобщности или квантор существования.
- Пусть P – предикат мощности n, определенный на предметной области Ω.
- Поставим ему в соответствие (n-1)-местный предикат xi P(x1,… xi-1,xi , xi+1,…,xn) от переменных $x_1, .., x_i - 1, x_i + 1, .., x_n$, который получен из исходного навешиванием квантора всеобщности.
- В естественном языке предикату ∀x P(x) соответствуют фразы
  - Для любого x (имеет место) P
  - P(x) при произвольном x
  - P(x), каково бы ни было x
  - Всегда имеет место P(x) □ Каждый x обладает свойством P
- В естественном языке предикату ∃x P(x) соответствуют фразы
  - Для некоторых x имеет место P(x)
  - Существует x, для которого P(x)
  - Имеется x такой, что P(x)
  - Найдется x, для которого P(x)
- Если в формуле по некоторой переменной навешан квантор, то такая переменная называется связанной

- В противном случае, переменная является **свободной**
- Если в формуле **нет** свободных переменных, то формула называется **замкнутой**

- **Предикаты *P, Q* мощности *n*, определенные на предметной области Ω называются *логически эквивалентными (равносильными)*, если $P(x_1,\ldots,x_n) \equiv Q(x_1,\ldots,x_n)$ для любого набора предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$.**

Пример.

Пусть предметная область – это множество слов {a, abbab, bbabb, aa}.

На этом множестве заданы два предиката

- ***P(x)*=«Слово *x* содержит букву b»**
- ***Q(x)*=«Слово *x* имеет длину 5»**

На данном множестве эти два предиката равносильны.

- Если изменить предметную область, то предикаты P и Q могут стать неравносильными.

Теорема.

- ***Разноименные кванторы не всегда коммутируют.***

Доказательство.

- Пусть имеется двуместный предикат D(x,y)= «x делится на y» на множестве натуральных чисел.

Тогда

- $\exists x \forall y\, D(x,y) \equiv 0$ и
- $\forall y \exists x D(x,y) \equiv 1$.

Законы де Моргана

- $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
- $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$

Коммутация одноименных кванторов

- $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$
- $\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$

Законы дистрибутивности

- $\forall x(P(x)\ \&\ Q(x)) \equiv \forall x P(x)\ \&\ \forall x Q(x)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Законы ограничения действия кванторов

- $\forall x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x P(x) \vee Q(y)$
- $\forall x(P(x)\ \&\ Q(y)) \equiv \forall x P(x)\ \&\ Q(y)$
- $\exists x(P(x)\ \&\ Q(y)) \equiv \exists x P(x)\ \&\ Q(y)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \exists x P(x) \vee Q(y)$

равносильности с переименованием переменных

- $\exists x P(x) \& \forall x\, R(x) \equiv \exists x \forall z (P(x) \& R(z))$
- $\exists x P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv \exists x \forall z (P(x) \vee R(z))$
- $\exists x P(x) \& \forall x\, R(x) \equiv \forall z \exists x\, (P(x) \& R(z))$
- $\exists x P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv \forall z \exists x\, (P(x) \vee R(z))$

- $\exists x P(x) \& \exists x\, R(x) \equiv \exists x \exists z (P(x) \& R(z))$
- $\forall x P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv \forall x\, \forall z (P(x) \vee R(z))$

- $\exists y \forall x\, P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\, P(x,y) \equiv 1$

Формула A находится в ***предваренной форме*****, если она имеет следующий вид**

$$A = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n B(x_1, \ldots, x_n),$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$ **– кванторы,**

а B **– бескванторная формула.**

- **Приставка** $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$ **называется** ***префиксом*****, а формула** B **–** ***матрицей*****.**

Теорема.

- ***Для любой формулы логики предикатов существует логически эквивалентная ей формула в предваренной форме.***

Доказательство.

Для того, чтобы привести формулу к предваренной форме, используют следующие шаги:

- **Исключают импликации** $A \to B \equiv \neg A \vee B$
- **Для внесения $\neg$ внутрь скобок применяют законы де Моргана и закон двойного отрицания**

- Для переноса кванторов применяют законы дистрибутивности, законы ограничения действия кванторов и равносильности с переименованием переменных.

- Пример 1. Рассмотрим построение предваренной формы для формулы $\forall x P(x) \to \forall x\, R(x)$.
- $\forall x P(x) \to \forall x\, R(x) \equiv$

$\equiv \neg(\forall x P(x)) \vee \forall x\, R(x) \equiv \exists x\, \neg P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv$

$\equiv \exists x\, \neg P(x) \vee \forall z\, R(z) \equiv \exists x\, (\neg P(x) \vee \forall z\, R(z)) \equiv$

$\equiv \exists x\, \forall z\, (\neg P(x) \vee R(z))$