
Метод редукции проверки выводимости формул в ИВ

Примеры применения метода

Метод редукции

- Пусть формула F имеет вид импликации $F=A \rightarrow B$.
- Допустим, что в некоторой интерпретации формула F принимает ложное значение.
- Тогда в соответствии с таблицей истинности для импликации имеем $A=1, B=0$.
- Таким образом, проверка формулы F сводится к дальнейшей проверке формул A и B .
- Данный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено противоречие с начальным предположением о ложности формулы. В этом случае доказано, что формула является тавтологией.
- В противном случае будет определен набор значений переменных, на котором формула принимает ложное значение, а значит не является тавтологией.

Пример 1:

Проверить выводимость формулы $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$ методом редукции.

- Пусть в некоторой интерпретации формула имеет ложное значение.
- Тогда $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)=1, (X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)=0$
- Применим теперь метод редукции к формуле $(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)$.
- Если она в некоторой интерпретации имеет ложное значение, то $X \rightarrow Y=1, X \rightarrow Z=0$.
- Для формулы $X \rightarrow Z$ метод редукции дает $X=1, Z=0$.
- Из $X \rightarrow Y=1$ получаем, что $Y=1$.
- Однако это приводит к противоречию с $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)=1$.
- Таким образом, исходная формула не может быть ложной ни при какой интерпретации, т.е. формула является тавтологией, а следовательно выводима в ИВ.
- Пример 2.

Проверить выводимость $(X \rightarrow Y) \vdash (X \rightarrow Y) \& (X \rightarrow \neg Z)$ методом редукции.

- Сначала применим теорему дедукции к данной выводимости.
- По теореме дедукции можно проверять выводимость $(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y) \& (X \rightarrow \neg Z)^*$.
- Пусть в некоторой интерпретации формула имеет ложное значение.
- Тогда $X \rightarrow Y=1, (X \rightarrow Y) \& (X \rightarrow \neg Z)=0$.
- Отсюда $X \rightarrow \neg Z=0$ и $X=1, Z=1$.
- Таким образом, существует интерпретация переменных $X=1, Y=1, Z=1$, при которой формула является ложной.

- Значит, формула не выводима в ИВ.