Логические эквивалентности для предикатов

- Предикаты *P*, *Q* мощности *n*, определенные на предметной области Ω называются *логически эквивалентными (равносильными)*, если $P(x_1,\ldots,x_n) \equiv Q(x_1,\ldots,x_n)$ для любого набора предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Пример.

Пусть предметная область – это множество слов {a, abbab, bbabb, aa}.

На этом множестве заданы два предиката

- ***P(x)*=«Слово *x* содержит букву b»**
- ***Q(x)*=«Слово *x* имеет длину 5»**

На данном множестве эти два предиката равносильны.

- **Если изменить предметную область, то предикаты *P* и *Q* могут стать неравносильными.**

Теорема.

- ***Разноименные кванторы не всегда коммутируют*.**

Доказательство.

- Пусть имеется двуместный предикат D(*x,y*)= «*x* делится на *y*» на множестве натуральных чисел.

Тогда

- $\exists x \forall y\, D(x,y) \equiv 0$ и
- $\forall y \exists x D(x,y) \equiv 1$.

Теорема.

- ***Имеют место следующие логические следования и эквивалентности***

Законы де Моргана

- $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
- $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$

Коммутация одноименных кванторов

- $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$
- $\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$

Законы дистрибутивности

- $\forall x(P(x)\ \&\ Q(x)) \equiv \forall x P(x)\ \&\ \forall x Q(x)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Законы ограничения действия кванторов

- $\forall x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x P(x) \vee Q(y)$
- $\forall x(P(x) \& Q(y)) \equiv \forall x P(x) \& Q(y)$
- $\exists x(P(x) \& Q(y)) \equiv \exists x P(x) \& Q(y)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \exists x P(x) \vee Q(y)$

равносильности с переименованием переменных

- $\exists x P(x) \& \forall x\, R(x) \equiv \exists x \forall z (P(x) \& R(z))$
- $\exists x P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv \exists x \forall z (P(x) \vee R(z))$
- $\exists x P(x) \& \forall x\, R(x) \equiv \forall z \exists x\, (P(x) \& R(z))$
- $\exists x P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv \forall z \exists x\, (P(x) \vee R(z))$

- $\exists x P(x) \& \exists x\, R(x) \equiv \exists x\, \exists z (P(x) \& R(z))$
- $\forall x P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv \forall x\, \forall z (P(x) \vee R(z))$
- $\exists y \forall x\, P(x,y) \rightarrow \forall x\, \exists y\, P(x,y) \equiv 1$

$y_1 \quad \forall x\, P(x, y_1) = 1$, то $\forall x\, \exists y\, P(x,y) = 1$