Формулировка и доказательство теоремы дедукции. Следствия из теоремы дедукции. Производные правила вывода ИВ.

Дедуктивные умозаключения -- это умозаключения, в которых из общего правила делается вывод для частного случая.
Теорема дедукции (Ж. Эрбран):

- Пусть Γ – множество формул, A и B – формулы.
- Если Γ, A ├ L B, то Γ ├ L A→B и обратно.
- Доказательство достаточности
- Докажем, что если Γ ├ L A→B, то Γ, A ├ L B
- Пусть имеется вывод Γ ├ L A→B, состоящий из n формул.
- n: A→B
- n+1: A гипотеза
- n+2: B MP n, n+1
- Достроив имеющийся вывод таким образом , получим вывод Γ, A ├ L B.
- Доказательство необходимости
- Пусть имеется вывод $B_1, B_2, \ldots, B_n$ из Γ U {A}, где $B_n = B$
- Индукцией по i (1≤i≤n) покажем, что Γ ├ $_L$ $A{\to}B_i$
- Базис индукции i=1
- B_1 должно быть элементом Γ, либо быть аксиомой, либо совпадать с A.
- $B_1 \to (A \to B_1)$ – аксиома, поэтому
- $\mathit{\Gamma} \vdash_L A \to B_1$ по правилу отделения
- Если $B_1 = A$, то показано, что $\vdash_L A \to A$
- Индуктивный переход

- Допустим, что $\Gamma \vdash_L A \to B_k$ для любого k < i

Для B_i имеется четыре возможности

- **Аксиома**
- **Гипотеза**
- $B_i = A$
- B_i **логическое следствие из некоторых** B_s **и** B_m**,**
  при этом $s, m < i$ **и** $B_m = B_s \to B_i$

Первые три случая аналогичны

- **Применим индуктивное предположение, что** $\Gamma \vdash_L A \to B_s$ **и** $\Gamma \vdash_L A \to (B_s \to B_i)$
- **Поскольку имеет место аксиома**

$$\vdash_L (A \to (B_s \to B_i)) \to ((A \to B_s) \to (A \to B_i))$$

то по правилу отделения

$$\vdash_L (A \to B_s) \to (A \to B_i)$$

$A \to B_i$

Еще раз применяя правило отделения

Следствие 1.

- *Если $A \vdash_L B$, то $\vdash_L A \to B$ и обратно*

- **Доказательство. Положим в теореме дедукции $\Gamma = \varnothing$.**

Следствие 2. *(Правило транзитивности)*

- $A \to B,\ B \to C \vdash_L A \to C$

Доказательство.

- 1 $A \to B$ гипотеза
- 2 $B \to C$ гипотеза
- 3 A гипотеза
- 4 B MP 3,1
- 5 C MP 4,2
- 6 $A \to B,\ B \to C,\ A \vdash_L C$ 1-5
- 7 $A \to B,\ B \to C \vdash_L A \to C$

Следствие 3.
(Правило сечения)

- $A \to (B \to C),\ B \vdash_L A \to C$

Доказательство.

- 1 $A\rightarrow(B\rightarrow C)$ гипотеза
- 2 A гипотеза
- 3 $B\rightarrow C$ МР 2,1
- 4 B гипотеза
- 5 C МР 4,3
- 6 $A\rightarrow(B\rightarrow C), B, A \vdash_L C$ 1-5
- 7 $A\rightarrow(B\rightarrow C), B \vdash_L A\rightarrow C$

Вывод $\vdash_L \neg\neg A\rightarrow A$

- 1. $(\neg A\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow A)$

Аксиома 3

$$((\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow((\neg B\rightarrow A)\rightarrow B))$$

с подстановкой

$B\leftarrow A$, $A\leftarrow \neg A$

Вывод $\vdash_L \neg\neg A \to A$

2. $(\neg A \to \neg A)$

Ранее доказанная формула

3. $(\neg A \to \neg\neg A) \to A$

Правило сечения 1,2

4. $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$

Аксиома 1 с подстановкой $B \leftarrow \neg A$, $A \leftarrow \neg\neg A$

5. $\neg\neg A \to A$

Вывод $\vdash_L A \to \neg\neg A$

- 1. $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$

Аксиома 3

$$((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$$

с подстановкой $B \leftarrow \neg\neg A$

Вывод $\vdash_L A \to \neg\neg A$

2\. $(\neg\neg\neg A \to \neg A)$

Ранее доказанная формула

3\. $(\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$

Правило отделения 1,2

4\. $A \to (\neg\neg\neg A \to A)$

Аксиома 1 с подстановкой $B \leftarrow \neg\neg\neg A$

5\. $A \to \neg\neg A$

Вывод $\neg A, A \vdash_L B$

1. $\neg A$	гипотеза
2. A	гипотеза
3. $A \to (\neg B \to A)$	аксиома 1
4. $(\neg B \to A)$	*правило отделения 2,3*
5. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	аксиома 1
6. $(\neg B \to \neg A)$	*правило отделения 5, 1*
7. $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$	аксиома 3
8. $((\neg B \to A) \to B))$	*правило отделения 6, 7*
9. B	*правило отделения 8, 4*