
Операция минимизации. Частично рекурсивные функции Примеры ч.р.ф..

Частичная функция f называется частично рекурсивной, если она может быть получена из простейших функций конечным числом операций подстановки, примитивной рекурсии и минимизации.

Суть операции минимизации

Операция минимизации (или μ -оператор) — это способ определения новой функции через поиск **наименьшего** натурального числа, удовлетворяющего заданному условию.

Формальное определение

Пусть есть функция $f(x,y)$ от двух аргументов (или предикат $P(x,y)$).

Минимизация создает новую функцию:

$$g(x) = \mu y [f(x,y) = 0]$$

Это означает: «наименьшее y такое, что $f(x,y)=0$, при условии, что для всех меньших $z < y$ функция $f(x,z)$ определена и $f(x,z) \neq 0$ ».

Если такого y не существует, то функция $g(x)$ **не определена** для этого x .

Пример

Пусть $f(x,y) = x + y - 3$

Тогда:

$$g(x) = \mu y [x + y - 3 = 0] = \mu y [y = 3 - x] \quad g(x) = \mu y [x + y - 3 = 0] = \mu y [y = 3 - x]$$

Для $x=1$ $g(1)=2$ (так как $1+2-3=0$).

Для $x=5$ $g(5)$ не определена, так как $y = -2$ не натуральное число $\Rightarrow g(5)$ **не определена**.

Типы минимизации

1. Ограниченная минимизация

Поиск $y < z$ для некоторой границы z .

Всегда приводит к **тотальной** (всюду определенной) функции.

2. Неограниченная минимизация

Поиск без заранее заданной границы.

Может привести к **частичной** функции (не определенной для некоторых входов).

Пример 3

- Функция $f(x,y)=y-x$ является частично рекурсивной, поскольку может быть получена с помощью операции **минимизации** из примитивно рекурсивной функции $g(x,y)=x+y$.

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x,y) &= \mu_z (g(x, z)=y) = \\ &= \mu_z (x+z=y) = y-x \text{ при } x \leq y \end{aligned}$$

- Значение $f(x,y)$ неопределено при $x > y$

Пример 4

- Рассмотрим функцию, заданную уравнением

$$f(x) = \mu_z (z+x+1=0)$$

- при $x=0$ нужно найти минимальное значение z , которое удовлетворяет условию $z+0+1=0$.
- среди неотрицательных целых чисел такое z не существует.
- Результат операции минимизации не определен даже для точки $x=0$.
- Таким образом, функция f является частично рекурсивной функцией, которая нигде не определена.