

---

# Трудноразрешимые задачи. Классы сложности P. Класс сложности NP. Гамильтонов цикл. Задача коммивояжёра. Задача упаковки корзин. Сводимость задач. NP-полнота

---

## Трудноразрешимые задачи

- Полиномиальный алгоритм (polynomial algorithm)—это алгоритм, вычислительная сложность которого принадлежит классу  $O(n^k)$ , где  $k$ — константа
- Алгоритмы с полиномиальной сложностью считаются «быстрыми» и применимыми на практике
- Примеры полиномиальных алгоритмов:
  - Сортировка выбором —  $O(n^2)$
  - Бинарный поиск— $O(\log n)$
  - Алгоритм Крускала— $O(|E|\log|V|)$

**Трудноразрешимая задача** (*intractable problem*)—задача, для которой нет известных алгоритмов решения с полиномиальной сложностью.

---

## Класс сложности P

- **Теория вычислительной сложности** (*computational complexity theory*) — раздел теоретической информатики, посвященный анализу вычислительной сложности алгоритмов
- Центральным объектом теории являются задачи принятия решения
- **Задача принятия решения** (*задача распознавания, decision problem*)— это задача, решение которой есть ответ: «да» или «нет»
- Задачи принятия решения разбиты на классы сложности
- **Класс сложности P** (*polynomial*)—это множество задач принятия решения, решаемых за полиномиальное время (*для которых известны алгоритмы с полиномиальной*

трудоемкостью)

### Представители класса P:

- Задача сортировки
- Задача обхода графа в глубину
- Задача поиска экстремального элемента в массиве
- Задача построения остовного дерева минимальной стоимости

**Не все** задачи принятия решения являются **полиномиально разрешимыми**  
(принадлежат классу P)

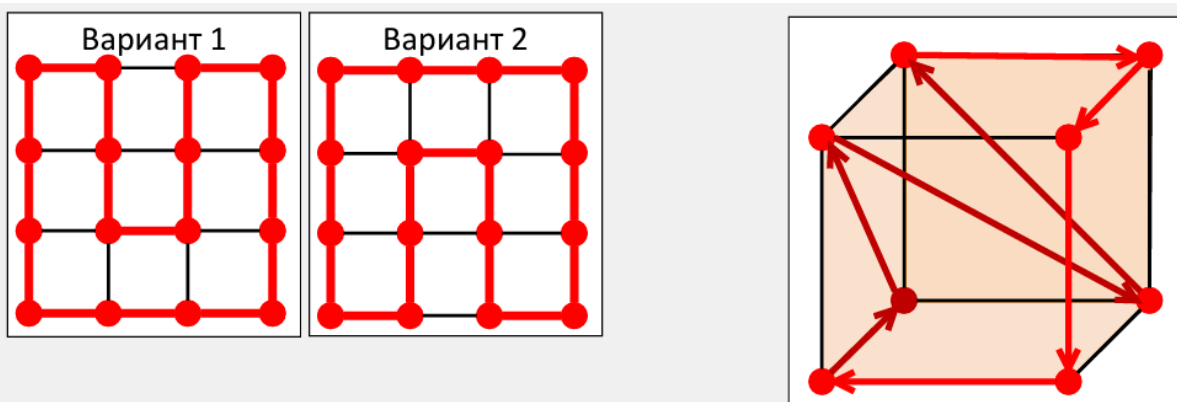
Существуют задачи, которые не могут быть решены никаким алгоритмом—  
**неразрешимые задачи.**

- Задача останова (halting problem, A.M.Turing, 1939):
- Дано описание алгоритма и его начальные входные данные
- Требуется определить, сможет ли выполнение алгоритма с этими данными когда-либо завершиться
- Проблема останова неразрешима на машине Тьюринга

---

## Гамильтонов цикл

- **Гамильтонов цикл** (Hamiltonian cycle problem, HCP)—цикл, включающий в себя каждую вершину ровно один раз
- **Задача.** Определить, имеется ли в заданном графе гамильтонов цикл.

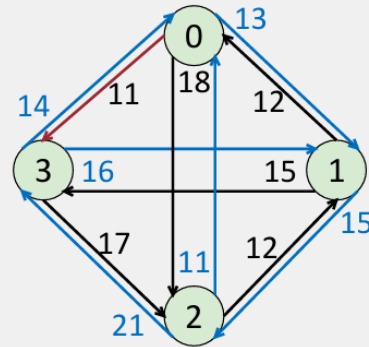


## Задача коммивояжера

- **Задача коммивояжера** (*travelling salesman problem*)
- **Задача.** Найти **кратчайший путь(цикл)** между заданными  $n$  городами так, чтобы через каждый город путь проходил один раз.
- Алгоритм **ближайшего соседа** (*nearest neighbour*):
  - Начиная со стартовой вершины: выбрать кратчайший путь из текущей вершины в следующую, пока все вершины не будут посещены.
  - Добавить в путь ребро из последней посещенной вершины в стартовую.

	0	1	2	3
0	$\infty$	13	18	11
1	12	$\infty$	15	13
2	11	12	$\infty$	21
3	14	16	17	$\infty$

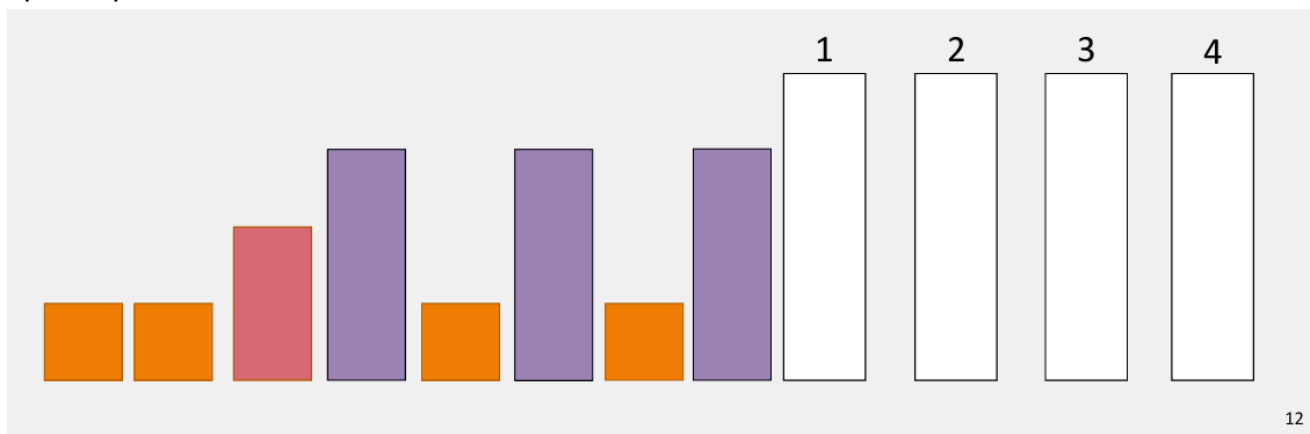
0 -> 3 -> 1 -> 2 -> 0  
 $11 + 16 + 15 + 11 = 53$



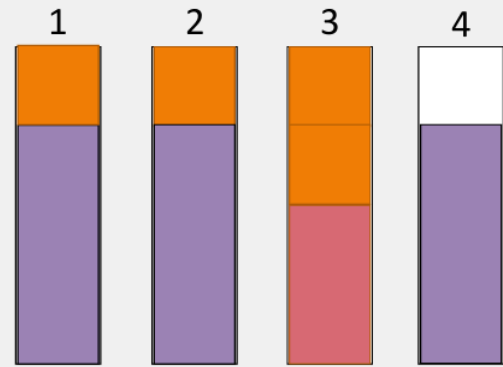
31

## Задача упаковки корзин

- **Задача упаковки корзин** (*bin packing problem, BPP*)
- **Даны**  $n$  предметов и их размеры
- **Требуется** разместить эти предметы в наименьшее количество корзин предопределенного объема



12



## Класс сложности NP

- **Класс сложности NP** (non-deterministic polynomial)—это множество задач принятия решения, решаемых недетерминированным полиномиальным алгоритмом
- **Структура недетерминированных полиномиальных алгоритмов:**
  - Шаг1. Недетерминированным алгоритмом с полиномиальной сложностью формируется возможное решение S экземпляра I задачи (для заданных входных данных)
  - Шаг2. Полиномиальным алгоритмом проверяется, является ли S корректным решением экземпляра I
- **Представители класса NP:**
  - Задача поиска гамильтонова цикла
  - Задача коммивояжера
  - Задача о рюкзаке
  - Задача упаковки корзин

Так как для любой задачи из класса P решение строится за полиномиальное время, то  $P \subseteq NP$

- Пример недетерминированного полиномиального алгоритма для решения задачи сортировки:
  - Шаг1. Формируем случайную перестановку элементов массива
  - Шаг2. Проверяем, является ли массив упорядоченным Шаги выполняются, пока не будет получено корректное решение
- Открытая проблема:  $P=NP$
- Вопрос поставлен независимо Л.Левиным(СССР,1971) и С.Куком(США, 1971)
- Проблема равенства классов P и NP является одной из семи задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил премию в миллион

## Сводимость задач

- **Полиномиальная приводимость** — это когда одну задачу (T1) можно "переформулировать" в виде другой задачи (T2) так, что:
  1. **Ответы сохраняются:**
    - Если у T1 был ответ "Да" → у T2 тоже будет "Да"
    - Если у T1 был ответ "Нет" → у T2 тоже будет "Нет"
  2. **Переформулировка быстрая:**
    - Преобразование делается за полиномиальное время (не дольше, чем за  $n^k$  шагов, где  $n$  — размер задачи)

### Простое следствие:

- Если:
    - T1 сводится к T2 (как выше)
    - T2 решается быстро (за полиномиальное время)
  - Тогда:
    - T1 тоже можно решить быстро (комбинируя преобразование и решение T2)
- 

## NP-полные задачи

- Задача T принятия решения является NP-полной (NP-complete), если:
  - Она принадлежит классу NP
  - Любая задача в NP полиномиально приводима к задаче T
  - NP-полные задачи образуют класс NPC
  - Примеры NP-полных задач:
    - Задача поиска гамильтонова цикла
    - Задача коммивояжёра
-