

---

# **Операция минимизации. Частично рекурсивные функции Примеры ч.р.ф..**

---

Частичная функция  $f$  называется частично рекурсивной, если она может быть получена из простейших функций конечным числом операций подстановки, примитивной рекурсии и минимизации.

## **Суть операции минимизации**

Операция минимизации (или  $\mu$ -оператор) — это способ определения новой функции через поиск **наименьшего** натурального числа, удовлетворяющего заданному условию.

## **Формальное определение**

Пусть есть функция  $f(x,y)$  от двух аргументов (или предикат  $P(x,y)$ ).

**Минимизация** создает новую функцию:

$$g(x) = \mu y [f(x,y)=0]$$

Это означает: «наименьшее  $y$  такое, что  $f(x,y)=0$ , при условии, что для всех меньших  $z < y$  функция  $f(x,z)$  определена и  $f(x,z) \neq 0 \Rightarrow f(x,z) \neq 0$ ».

Если такого  $y$  не существует, то функция  $g(x)$  **не определена** для этого  $x$ .

## **Пример**

Пусть  $f(x,y) = x+y-3$

Тогда:

$$g(x) = \mu y [x+y-3=0] = \mu y [y=3-x]$$

Для  $x=1$   $g(1)=2$  (так как  $1+2-3=0$ ).

Для  $x=5$ :  $y=-2$  не натуральное число  $\Rightarrow g(5) \text{ не определена}$ .

## **Типы минимизации**

### **1. Ограниченнная минимизация**

Поиск  $y < z$  для некоторой границы  $z$ .

Всегда приводит к **тотальной** (всюду определенной) функции.

## 2. Неограниченная минимизация

Поиск без заранее заданной границы.

Может привести к **частичной** функции (не определенной для некоторых входов).

### Пример 3

- Функция  $f(x,y)=y-x$  является частично рекурсивной, поскольку может быть получена с помощью операции **минимизации** из примитивно рекурсивной функции  $g(x,y)=\underline{x+y}$ .

- $f(x,y) = \mu_z (g(x, z) = y) =$   
 $= \mu_z (x+z=y) = y-x$  при  $x \leq y$

- Значение  $f(x,y)$  неопределено при  $x > y$

### Пример 4

- Рассмотрим функцию, заданную уравнением

$$f(x) = \mu_z (z+x+1=0)$$

- при  $x=0$  нужно найти минимальное значение  $z$ , которое удовлетворяет условию  $z+0+1=0$ .
  - среди неотрицательных целых чисел такое  $z$  не существует.
- 
- Результат операции **минимизации** не определен даже для точки  $x=0$ .
  - Таким образом, функция  $f$  является частично рекурсивной функцией, которая нигде не определена.