SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Appunti di Basi Dati Modulo I

Colacel Alexandru Andrei

Disclaimer

Indice

1 Lemma della Chiusura

Sia R uno schema e sia F un insieme di dipendenze funzionali definite su R. Si ha che:

$$X \to Y \in F^A \Longleftrightarrow Y \subseteq X^+ \tag{1}$$

1.1 Dimostrazione $\Rightarrow$

Dato $X \to Y \in F^A$, per la regola della decomposizione, otteniamo:

$$X \to A \in F^A, \quad \forall A \in Y \tag{2}$$

e quindi, per definizione di X^+, otteniamo che:

$$A \in X^+, \quad \forall A \in Y \tag{3}$$

che significa:

$$Y \subseteq X^+ \tag{4}$$

1.2 Dimostrazione $\Leftarrow$

Dato:

$$Y \subseteq X^+ \tag{5}$$

si ottiene che:

$$X \to A \in F^A \quad \forall A \in Y \tag{6}$$

che implica, per la regola dell'unione, che:

$$X \to Y \in F^A \tag{7}$$

2 Teorema $F^+ = F^A$

Dato uno schema R e un insieme F di dipendenze funzionali definite su R, si ha che:

$$F^+ = F^A \tag{8}$$

2.1 Dimostrazione $F^A \subseteq F^+$

Prendiamo $X \to Y \in F^A$, noi dobbiamo provare che $X \to Y \in F^+$ per induzione con n numero di applicazioni degli assiomi di Armstrong.

- **Caso base** (n = 0): se $X \to Y \in F^A$ senza aver applicato alcun assioma di Armstrong, allora l'unica possibilità è che:
$$X \to Y \in F \subseteq F^+ \tag{9}$$
- **Ipotesi induttiva forte:** ogni dipendenza funzionale in F^A ottenuta da F applicando k $\leq$ n assiomi di Armstrong è anche in F^+:
$$X \to Y \in F^A \text{ tramite } k \leq n \text{ assiomi} \Rightarrow X \to Y \in F^+$$
- **Passo induttivo:** è necessario dimostrare che se $X \to Y \in F^A$ dopo aver applicato $n+1$ assiomi di Armstrong, allora $X \to Y \in F^+$.

  È possibile ritrovarsi in uno dei seguenti tre casi:

  1. Se l'$(n+1)$-esimo assioma applicato è l'assioma di **riflessività**, allora l'unica possibilità è che:
  $$X \to Y \in F^A \Leftrightarrow Y \subseteq X \subseteq R \tag{10}$$
  Dunque, poiché, $Y \subseteq X \subseteq R$, per ogni istanza legale di R si ha che:
  $$\forall t_1, t_2 \in r_1, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \tag{11}$$
  da cui ne segue automaticamente che $X \to Y \in F^+$
  2. Se l'$(n+1)$-esimo assioma applicato è l'assioma di **aumento**, allora è obbligatoriamente necessario che:
     - $\exists V, W \subseteq R \,|\, \exists V \to W \in F_A$, ottenuta applicando $j \leq n$ assiomi di Armstrong
     - $\exists Z \subseteq R \,|\, X := VZ,\, Y := WZ$

     Affinché si abbia che:
  $$Z \subseteq R,\, V \to W \Rightarrow VZ \to WZ = X \to Y \in F^A \tag{12}$$
  Siccome per ipotesi induttiva si ha $V \to W \in F^A \Rightarrow V \to W \in F^+$ e siccome $Z \subseteq Z \Rightarrow Z \to Z \in F^+$, si vede facilmente che:
  $$\begin{cases} V \to W \in F^+ \\ Z \to Z \in F^+ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \forall t_1, t_2 \in r, t_1[V] = t_2[V] \implies t_1[W] = t_2[W] \\ \forall t_1, t_2 \in r, t_1[Z] = t_2[Z] \implies t_1[Z] = t_2[Z] \end{cases} \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \forall t_1, t_2 \in r, t_1[VZ] = t_2[VZ] \implies t_1[WZ] = t_2[WZ] \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \implies t_1[Y] = t_2[Y] \implies X \to Y \in F^+$$

3. Se l'$(n+1)$-esimo assioma applicato è l'assioma di **transitività**, allora è obbligatoriamente necessario che $\exists X \to Z, Z \to Y \in F^A$, ottenute con $k \leq n$ assiomi di Armstrong, affinché si abbia che:

$$X \to Z \in F^A \vee Z \to Y \in F^A \Rightarrow X \to Y \in F^A \tag{13}$$

Siccome per ipotesi induttiva $X \to Z \in F^A \Rightarrow X \to Z \in F^+$ e $Z \to Y \in F^A \Rightarrow Z \to Y \in F^+$, si vede facilmente che:

$$\begin{cases} X \to Z \in F^+ \\ Z \to Y \in F^+ \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Longrightarrow t_1[Z] = t_2[Z] \Longrightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X \to Y \in F^+$$

2.2 Dimostrazione $F^+ \subseteq F^A$

- Sia $X \subseteq R$ e sia r istanza di $R(X^+, R - X^+)$ tale che

X^+			$R - X^+$		
A_1	$\cdots$	A_i	A_j	$\cdots$	A_n
1	...	1	1	...	1
1	...	1	0	...	0

  dunque tale che $\forall t_1, t_2 \in r$ si ha:
  * $t_1[X^+] = (1, \dots, 1) = t_2[X^+]$
  * $t_1[R - X^+] = (1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0) = t_2[R - X^+]$
- Notiamo che $\forall V, W \subseteq R \mid V \to W \in F$ si ha che:
  * Se $V \cap R - X^+ \neq \emptyset$ (dunque anche se $V \subseteq R - X^+$) allora $t_1[V] \neq t_2[V]$, dunque r soddisfa $V \to W \in F$
  * Se invece $V \subseteq X^+$, per il lemma precedentemente visto si ha che

$$V \subseteq X^+ \iff X \to V \in F^A$$

    Siccome $V \to W \in F \implies V \to W \in F^A$, per transitività si ha che

$$X \to V \in F^A \wedge V \to W \in F^A \implies X \to W \in F^A \iff W \subseteq X^+$$

    Dunque, siccome $V, W \subseteq X^+$, in definitiva si ha che

$$t_1, t_2 \in r, t_1[V] = (1, \dots, 1) = t_2[V] \wedge t_1[W] = (1, \dots, 1) = t_2[W]$$

    e quindi r soddisfa ogni $V \to W \in F$
- Siccome in entrambi i casi r soddisfa ogni $V \to W \in F$, allora r è legale.
- A questo punto, una qualsiasi dipendenza $X \to Y \in F^+$ deve essere soddisfatta da qualsiasi istanza legale di R, inclusa r stessa
- Poiché $X \subseteq X^+$, ne segue che la dipendenza non può essere soddisfatta a vuoto poiché $t_1[X] = t_2[X]$. Dunque, l'unica possibilità affinché $X \to A \in F^+$ sia soddisfatta da r è che $Y \subseteq X^+$ in modo che si abbia $t_1[Y] = t_2[Y]$
- A questo punto, per il lemma si ha che $Y \subseteq X^+ \iff X \to Y \in F^A$
- Dunque, siccome $X \to Y \in F^+ \implies X \to Y \in F^A$, concludiamo che $F^A \subseteq F^+$

Nota

Poiché $F^+ = F^A$, per calcolare F^+ ci basta applicare gli assiomi di Armstrong sulle dipendenze in F in modo da trovare F^A.
Tuttavia, calcolare $F^+ = F^A$ richiede tempo esponenziale, quindi $O(2^{nk})$: considerando anche solo l'assioma di riflessività, siccome ogni possibile sottoinsieme di R genera una dipendenza e siccome i sottoinsiemi possibili di R sono $2^{|R|}$, allora ne segue che $|F^+| >> 2^{|R|}$.

3 Chiusura di X

4 Lemma Chiusura Inclusione

5 Chiusura di X in G

6 Join senza perdita