



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Appunti di Basi Dati Modulo I

Colacel Alexandru Andrei

## Disclaimer

---

Le fonti sono le "Hand Notes" del prof. Perelli tradotte in italiano, appunti presi dalle slides della prof. De Marsico ed eventuali e-mail.

**Nota:** è vietata assolutamente la vendita di questo materiale in qualsiasi forma senza il mio consenso.

---

# Indice

<b>1</b>	<b>Lemma della Chiusura</b>	<b>2</b>
1.1	Dimostrazione $\Rightarrow$ . . . . .	2
1.2	Dimostrazione $\Leftarrow$ . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Teorema <math>F^+ = F^A</math></b>	<b>3</b>
2.1	Dimostrazione $F^A \subseteq F^+$ . . . . .	3
2.2	Dimostrazione $F^+ \subseteq F^A$ . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Chiusura di X</b>	<b>6</b>
3.1	Teorema: L'algoritmo computa $X_F^+$ . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Lemma: Inclusione delle chiusure</b>	<b>8</b>
4.1	Dimostrazione . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Chiusura di X in G</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Join senza perdita</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Assiomi di Armstrong</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Decomposizione che preserva F</b>	<b>12</b>
8.1	Prima proprietà . . . . .	12
8.2	Seconda proprietà . . . . .	12
8.3	Terza proprietà . . . . .	12
8.4	Definizione G . . . . .	12
<b>9</b>	<b>Dimostrazione <math>\rho</math> preserva F</b>	<b>13</b>
<b>10</b>	<b>Hash</b>	<b>14</b>
<b>11</b>	<b>B-tree</b>	<b>15</b>
<b>12</b>	<b>Chiusura di un insieme di attributi</b>	<b>16</b>
12.1	Algoritmo . . . . .	16
12.2	Dimostrazione correttezza . . . . .	16
<b>13</b>	<b>3NF (per dipendenza transitiva)</b>	<b>17</b>
<b>14</b>	<b>Chiusura di F e primo lemma</b>	<b>18</b>
<b>15</b>	<b>Isam</b>	<b>19</b>
15.1	Variante Isam con chiavi indice che hanno valore ultimo record . . . . .	19
<b>16</b>	<b>Altre definizioni da sapere</b>	<b>20</b>
16.1	Chiave minimale . . . . .	20
16.2	Superchiave . . . . .	20

# 1 Lemma della Chiusura

Sia  $R$  uno schema e sia  $F$  un insieme di dipendenze funzionali definite su  $R$ . Si ha che:

$$X \rightarrow Y \in F^A \iff Y \subseteq X^+ \quad (1)$$

## 1.1 Dimostrazione $\Rightarrow$

Dato  $X \rightarrow Y \in F^A$ , per la regola della decomposizione, otteniamo:

$$X \rightarrow A \in F^A, \quad \forall A \in Y \quad (2)$$

e quindi, per definizione di  $X^+$ , otteniamo che:

$$A \in X^+, \quad \forall A \in Y \quad (3)$$

che significa:

$$Y \subseteq X^+ \quad (4)$$

## 1.2 Dimostrazione $\Leftarrow$

Dato:

$$Y \subseteq X^+ \quad (5)$$

si ottiene che:

$$X \rightarrow A \in F^A \quad \forall A \in Y \quad (6)$$

che implica, per la regola dell'unione, che:

$$X \rightarrow Y \in F^A \quad (7)$$

## 2 Teorema $F^+ = F^A$

Dato uno schema  $R$  e un insieme  $F$  di dipendenze funzionali definite su  $R$ , si ha che:

$$F^+ = F^A \quad (8)$$

### 2.1 Dimostrazione $F^A \subseteq F^+$

Prendiamo  $X \rightarrow Y \in F^A$ , noi dobbiamo provare che  $X \rightarrow Y \in F^+$  per induzione con  $n$  numero di applicazioni degli assiomi di Armstrong.

- **Caso base** ( $n = 0$ ): se  $X \rightarrow Y \in F^A$  senza aver applicato alcun assioma di Armstrong, allora l'unica possibilità è che:

$$X \rightarrow Y \in F \subseteq F^+ \quad (9)$$

- **Ipotesi induttiva forte:** ogni dipendenza funzionale in  $F^A$  ottenuta da  $F$  applicando  $k \leq n$  assiomi di Armstrong è anche in  $F^+$ :

$$X \rightarrow Y \in F^A \text{ tramite } k \leq n \text{ assiomi} \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^+$$

- **Passo induttivo:** è necessario dimostrare che se  $X \rightarrow Y \in F^A$  dopo aver applicato  $n + 1$  assiomi di Armstrong, allora  $X \rightarrow Y \in F^+$ .

È possibile ritrovarsi in uno dei seguenti tre casi:

1. Se l'( $n + 1$ )-esimo assioma applicato è l'assioma di **riflessività**, allora l'unica possibilità è che:

$$X \rightarrow Y \in F^A \Leftrightarrow Y \subseteq X \subseteq R \quad (10)$$

Dunque, poiché,  $Y \subseteq X \subseteq R$ , per ogni istanza legale di  $R$  si ha che:

$$\forall t_1, t_2 \in r_1, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \quad (11)$$

da cui ne segue automaticamente che  $X \rightarrow Y \in F^+$

2. Se l'( $n + 1$ )-esimo assioma applicato è l'assioma di **aumento**, allora è obbligatoriamente necessario che:

–  $\exists V, W \subseteq R \mid \exists V \rightarrow W \in F_A$ , ottenuta applicando  $j \leq n$  assiomi di Armstrong

–  $\exists Z \subseteq R \mid X := VZ, Y := WZ$

Affinché si abbia che:

$$Z \subseteq R, V \rightarrow W \Rightarrow VZ \rightarrow WZ = X \rightarrow Y \in F^A \quad (12)$$

Siccome per ipotesi induttiva si ha  $V \rightarrow W \in F^A \Rightarrow V \rightarrow W \in F^+$  e siccome  $Z \subseteq Z \Rightarrow Z \rightarrow Z \in F^+$ , si vede facilmente che:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} V \rightarrow W \in F^+ \\ Z \rightarrow Z \in F^+ \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall t_1, t_2 \in r, t_1[V] = t_2[V] \Rightarrow t_1[W] = t_2[W] \\ \forall t_1, t_2 \in r, t_1[Z] = t_2[Z] \Rightarrow t_1[Z] = t_2[Z] \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r, t_1[VZ] = t_2[VZ] \Rightarrow t_1[WZ] = t_2[WZ] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^+ \end{aligned}$$

3. Se l'( $n+1$ )-esimo assioma applicato è l'assioma di **transitività**, allora è obbligatoriamente necessario che  $\exists X \rightarrow Z, Z \rightarrow Y \in F^A$ , ottenute con  $k \leq n$  assiomi di Armstrong, affinché si abbia che:

$$X \rightarrow Z \in F^A \vee Z \rightarrow Y \in F^A \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^A \quad (13)$$

Siccome per ipotesi induttiva  $X \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^+$  e  $Z \rightarrow Y \in F^A \Rightarrow Z \rightarrow Y \in F^+$ , si vede facilmente che:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow Z \in F^+ \\ Z \rightarrow Y \in F^+ \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow & \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Z] = t_2[Z] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \Rightarrow \\ & \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^+ \end{aligned}$$

## 2.2 Dimostrazione $F^+ \subseteq F^A$

- Sia  $X \subseteq R$  e sia  $r$  istanza di  $R(X^+, R - X^+)$  tale che

$X^+$			$R - X^+$		
$A_1$	$\dots$	$A_i$	$A_j$	$\dots$	$A_n$
1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
1	$\dots$	1	0	$\dots$	0

dunque tale che  $\forall t_1, t_2 \in r$  si ha:

- \*  $t_1[X^+] = (1, \dots, 1) = t_2[X^+]$
- \*  $t_1[R - X^+] = (1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0) = t_2[R - X^+]$

- Notiamo che  $\forall V, W \subseteq R \mid V \rightarrow W \in F$  si ha che:

- \* Se  $V \cap R - X^+ \neq \emptyset$  (dunque anche se  $V \subseteq R - X^+$ ) allora  $t_1[V] \neq t_2[V]$ , dunque  $r$  soddisfa  $V \rightarrow W \in F$
- \* Se invece  $V \subseteq X^+$ , per il lemma precedentemente visto si ha che

$$V \subseteq X^+ \iff X \rightarrow V \in F^A$$

Siccome  $V \rightarrow W \in F \implies V \rightarrow W \in F^A$ , per transitività si ha che

$$X \rightarrow V \in F^A \wedge V \rightarrow W \in F^A \implies X \rightarrow W \in F^A \iff W \subseteq X^+$$

Dunque, siccome  $V, W \subseteq X^+$ , in definitiva si ha che

$$t_1, t_2 \in r, t_1[V] = (1, \dots, 1) = t_2[V] \wedge t_1[W] = (1, \dots, 1) = t_2[W]$$

e quindi  $r$  soddisfa ogni  $V \rightarrow W \in F$

- Siccome in entrambi i casi  $r$  soddisfa ogni  $V \rightarrow W \in F$ , allora  $r$  è legale.
- A questo punto, una qualsiasi dipendenza  $X \rightarrow Y \in F^+$  deve essere soddisfatta da qualsiasi istanza legale di  $R$ , inclusa  $r$  stessa
- Poiché  $X \subseteq X^+$ , ne segue che la dipendenza non può essere soddisfatta a vuoto poiché  $t_1[X] = t_2[X]$ . Dunque, l'unica possibilità affinché  $X \rightarrow A \in F^+$  sia soddisfatta da  $r$  è che  $Y \subseteq X^+$  in modo che si abbia  $t_1[Y] = t_2[Y]$
- A questo punto, per il lemma si ha che  $Y \subseteq X^+ \iff X \rightarrow Y \in F^A$
- Dunque, siccome  $X \rightarrow Y \in F^+ \implies X \rightarrow Y \in F^A$ , concludiamo che  $F^A \subseteq F^+$

### Nota

Poiché  $F^+ = F^A$ , per calcolare  $F^+$  ci basta applicare gli assiomi di Armstrong sulle dipendenze in  $F$  in modo da trovare  $F^A$ .

Tuttavia, calcolare  $F^+ = F^A$  richiede tempo esponenziale, quindi  $O(2^{nk})$ : considerando anche solo l'assioma di riflessività, siccome ogni possibile sottoinsieme di  $R$  genera una dipendenza e siccome i sottoinsiemi possibili di  $R$  sono  $2^{|R|}$ , allora ne segue che  $|F^+| \gg 2^{|R|}$ .

### 3 Chiusura di X

Input:

- Relazione  $R$
- Dipendenze Funzionali  $F$
- Insieme  $X \subseteq R$

Output:  $X^+$

---

**Algorithm 1** Closure Algorithm
 

---

```

1:  $Z \leftarrow X$ 
2:  $S \leftarrow \{A \mid \exists Y \rightarrow V \in F, A \in V \wedge Y \subseteq Z\}$ 
3: while  $S \not\subseteq Z$  do
4:    $Z \leftarrow Z \cup S$ 
5:    $S \leftarrow \{A \mid \exists Y \rightarrow V \in F, A \in V \wedge Y \subseteq Z\}$ 
6: end while
7: return  $Z$ 

```

---

Tale algoritmo viene eseguito in tempo polinomiale, ossia  $On^k$

#### 3.1 Teorema: L'algoritmo computa $X_F^+$

Il teorema calcola correttamente la chiusura di un insieme di attributi  $X$  rispetto ad un insieme  $F$  di dipendenze funzionali.

**Dimostrazione:**

Denotiamo:

$$Z_0, Z_1, \dots, Z_i, \dots \quad (14)$$

$$S_0, S_1, \dots, S_i, \dots \quad (15)$$

Indichiamo con  $Z_0$  il valore iniziale di  $Z$  ( $Z_0 = X$ ) e con  $Z_i$  e  $S_i$ ,  $i \geq 1$  i valori di  $Z$  ed  $S$  dopo l' $i$ -esima esecuzione del corpo del ciclo, infatti notiamo che  $Z_i \subseteq Z_{i+1}$ , per ogni  $i$ .

Sia  $j$  tale che  $S_j \subseteq Z_j$  (cioè,  $Z_j$  è l'output di  $Z$  quando l'algoritmo termina); proveremo che:

$$A \in Z_j \Leftrightarrow A \in X^+ \quad (16)$$

- Dimostriamo per induzione su  $i$  che  $Z_i \subseteq X^+$

– Caso base dell'induzione:  $i = 0$ .

Alla 0-esima iterazione del while (ossia prima di esso) si ha  $Z_0 = X$  e  $X \subseteq X^+$

– Ipotesi induttiva: Per ogni  $i \in \mathbb{N}$  si ha che  $Z_i \subseteq X^+$

– **Passo induttivo** ( $i > 0$ ): Dato  $A \in Z_{i+1} = Z_i \cup S_i$ , si ha che  $A \in Z_i \vee A \in S_i$ .

Dunque, si possono verificare due casi:

\* Se  $A \in Z_i$ , allora per ipotesi  $A \in Z_i \subseteq X^+$ .

\* Se  $A \in S_i$ , allora  $\exists Y \rightarrow V \in F$  tale che  $A \in V \subseteq R, Y \subseteq Z_i$ .

Siccome per ipotesi  $Z_i \subseteq X^+$  e  $Y \subseteq Z_i$ , allora  $Y \subseteq Z_i \subseteq X^+ \Leftrightarrow X \rightarrow Y \in F^A$  e  $Y \rightarrow V \in F \Rightarrow Y \rightarrow V \in F^A$ , quindi per transitività si ha che:

$$X \rightarrow Y, Y \rightarrow V \in F^A \Rightarrow X \rightarrow V \in F^A \Leftrightarrow V \subseteq X^+. \quad (17)$$

Dunque, si ha che  $A \in V \subseteq X^+$

\* Siccome in entrambi i casi  $A \in Z_{i+1} \Rightarrow A \in X^+$ , allora concludiamo che  $Z_{i+1} \subseteq X^+$ .

- Dimostriamo ora che  $X^+ \subseteq Z_i$ :

- Sia  $X \subseteq R$  e sia  $r$  istanza di  $R(Z_i, R - Z_i)$ .

$Z_i$			$R - Z_i$		
$A_1$	$\dots$	$A_i$	$A_j$	$\dots$	$A_n$
1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
1	$\dots$	1	0	$\dots$	0

dunque tale che per  $t_1, t_2 \in r$  si ha:

- \*  $t_1[Z_i] = (1, \dots, 1) = t_2[Z_i]$
- \*  $t_1[R - Z_i] = (1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0) = t_2[R - Z_i]$

- Notiamo che  $\forall V, W \subseteq R - V \rightarrow W \in F$  si ha che:

- \* Se  $V \cap (R - Z_i) \neq \emptyset$  (quindi anche se  $V \subseteq R - Z_i$ ) allora  $t_1[V] \neq t_2[V]$ , quindi  $r$  soddisfa  $V \rightarrow W \in F$
- \* Se invece  $V \subseteq Z_i$ , allora  $W \subseteq S_f$ , poiché per come viene calcolato  $S_f$ , si ha che:  
 $V \rightarrow W \in F, V \subseteq Z_i, B \in W \subseteq R \Rightarrow B \in S_f \Rightarrow W \subseteq S_f$   
 e quindi, siccome  $S_f \subseteq Z_i$  è la condizione che termina l'algoritmo, allora  $W \subseteq S_f \subseteq Z_i$
- \* Siccome  $V, W \subseteq Z_i$ , in definitiva si ha che  
 $t_1, t_2 \in r, t_1[V] = (1, \dots, 1) = t_2[V]$  e  $t_1[W] = (1, \dots, 1) = t_2[W]$ ,  
 e quindi  $r$  soddisfa  $V \rightarrow W \in F$

- Siccome in entrambi i casi  $r$  soddisfa ogni  $V \rightarrow W \in F$ , allora  $r$  è legale.
- A questo punto, dato  $A \in X^+$ , si ha che  $X \rightarrow A \in F^A = F^+$  deve essere soddisfatta da qualsiasi istanza legale di  $R$ , inclusa  $r$  stessa.
- Poiché  $X = Z_0 \subseteq Z_i$ , ne segue che la dipendenza non può essere soddisfatta a vuoto poiché  $t_1[X] = t_2[X]$ . Dunque, l'unica possibilità affinché  $X \rightarrow A \in F^+$  sia soddisfatta da  $r$  è  $A \in Z_i$  in modo che si abbia  $t_1[A] = t_2[A]$ .
- Dunque, siccome  $A \in X^+ \Rightarrow A \in Z_i$ , concludiamo che  $X^+ \subseteq Z_i$ .



## 4 Lemma: Inclusione delle chiusure

Dato uno schema  $R$  e due insiemi  $F$  e  $G$  di dipendenze funzionali su  $R$ , si ha che:

$$F \subseteq G^+ \Leftrightarrow F^+ \subseteq G^+ \quad (18)$$

### 4.1 Dimostrazione

- Denotiamo come  $G \xrightarrow{A} F$  la possibilità di ottenere  $F$  partendo da  $G$  applicando una determinata quantità di assiomi di Armstrong.
- Ricordando che  $G^A$  è l'insieme di tutte le dipendenze funzionali ottenibile applicando assiomi di Armstrong su  $G$ , allora:

$$G \xrightarrow{A} F \Leftrightarrow \forall X \rightarrow Y \in F, \text{ si ha } X \rightarrow Y \in G^A = G^+ \Leftrightarrow F \subseteq G^+ \quad (19)$$

- Siccome  $F \subseteq G \Leftrightarrow G \xrightarrow{A} F$ , per definizione di  $F^A = F^+$  si ha che:

$$F \subseteq G^+ \Rightarrow G \xrightarrow{A} F \xrightarrow{A} F^A = F^+ \Rightarrow F^+ \subseteq G^+ \quad (20)$$

- Viceversa, si ha che  $F^+ \subseteq G^+ \Rightarrow F \subseteq F^+ \subseteq G^+$ , quindi concludiamo che  $F \subseteq G^+ \Leftrightarrow F^+ \subseteq G^+$

## 5 Chiusura di $X$ in $G$

Dato uno schema  $R$  con decomposizione  $\rho = R_1, \dots, R_k$ , dato un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$  e posto:

$$G := \bigcap_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$$

preso  $X \subseteq R$ , il seguente algoritmo calcola  $X_G^+$  tramite  $F$ :

---

**Algorithm 2** Calcolo di  $XG^+$  tramite  $F$

---

```

1: procedure CALCULATEXG( $R, F, X$ )
2:    $Z \leftarrow X$ 
3:    $S \leftarrow \emptyset$ 
4:   for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
5:      $S \leftarrow S \cup ((Z \cap R_i)_F^+ \cap R_i)$ 
6:   end for
7:   while  $S \not\subseteq Z$  do
8:      $Z \leftarrow Z \cup S$ 
9:     for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
10:       $S \leftarrow S \cup ((Z \cap R_i)_F^+ \cap R_i)$ 
11:    end for
12:   end while
13:    $X_G^+ \leftarrow Z$ 
14:   return  $X_G^+$ 
15: end procedure

```

---

## 6 Join senza perdita

## 7 Assiomi di Armstrong

## 8 Decomposizione che preserva $F$

8.1 Prima proprietà

8.2 Seconda proprietà

8.3 Terza proprietà

8.4 Definizione  $G$

## 9 Dimostrazione $\rho$ preserva $F$

## 10 Hash

# 11 B-tree



## 12 Chiusura di un insieme di attributi

### 12.1 Algoritmo

### 12.2 Dimostrazione correttezza

## 13 3NF (per dipendenza transitiva)

## 14 Chiusura di F e primo lemma

## **15 Isam**

### **15.1 Variante Isam con chiavi indice che hanno valore ultimo record**

## **16 Altre definizioni da sapere**

### **16.1 Chiave minimale**

### **16.2 Superchiave**