



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Appunti di Basi Dati Modulo I

Colacel Alexandru Andrei

Disclaimer

Le fonti sono le Hand Notes del prof tradotte in italiano con l'obiettivo di migliorare la leggibilità.
Nota: è vietata assolutamente la vendita di questo materiale in qualsiasi forma senza il mio consenso.

Indice

1	Lemma della Chiusura	2
1.1	Dimostrazione \Rightarrow	2
1.2	Dimostrazione \Leftarrow	2
2	Teorema $F^+ = F^A$	3
2.1	Dimostrazione $F^A \subseteq F^+$	3
2.2	Dimostrazione $F^+ \subseteq F^A$	5
3	Chiusura di X	6
4	Lemma Chiusura Inclusione	7
5	Chiusura di X in G	8
6	Join senza perdita	9

1 Lemma della Chiusura

Sia R uno schema e sia F un insieme di dipendenze funzionali definite su R . Si ha che:

$$X \rightarrow Y \in F^A \iff Y \subseteq X^+ \quad (1)$$

1.1 Dimostrazione \Rightarrow

Dato $X \rightarrow Y \in F^A$, per la regola della decomposizione, otteniamo:

$$X \rightarrow A \in F^A, \quad \forall A \in Y \quad (2)$$

e quindi, per definizione di X^+ , otteniamo che:

$$A \in X^+, \quad \forall A \in Y \quad (3)$$

che significa:

$$Y \subseteq X^+ \quad (4)$$

1.2 Dimostrazione \Leftarrow

Dato:

$$Y \subseteq X^+ \quad (5)$$

si ottiene che:

$$X \rightarrow A \in F^A \quad \forall A \in Y \quad (6)$$

che implica, per la regola dell'unione, che:

$$X \rightarrow Y \in F^A \quad (7)$$

2 Teorema $F^+ = F^A$

Dato uno schema R e un insieme F di dipendenze funzionali definite su R , si ha che:

$$F^+ = F^A \quad (8)$$

2.1 Dimostrazione $F^A \subseteq F^+$

- **Caso base** ($n = 0$): se $X \rightarrow Y \in F^A$ senza aver applicato alcun assioma di Armstrong, allora l'unica possibilità è che:

$$X \rightarrow Y \in F^A \Leftrightarrow X \rightarrow Y \in F \quad (9)$$

Siccome $X \rightarrow Y \in F$, allora

$$X \rightarrow Y \in F \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^+ \quad (10)$$

- **Ipotesi induttiva forte:** ogni dipendenza funzionale in F^A ottenuta da F applicando $k \leq n$ assiomi di Armstrong è anche in F^+ :

$$X \rightarrow Y \in F^A \text{ tramite } k \leq n \text{ assiomi} \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^+ \quad (11)$$

- **Passo induttivo:** è necessario dimostrare che se $X \rightarrow Y \in F^A$ dopo aver applicato $n + 1$ assiomi di Armstrong, allora $X \rightarrow Y \in F^+$.

È possibile ritrovarsi in uno dei seguenti tre casi:

1. Se l'($n + 1$)-esimo assioma applicato è l'assioma di riflessività, allora l'unica possibilità è che:

$$X \rightarrow Y \in F^A \Leftrightarrow Y \subseteq X \subseteq R \quad (12)$$

Dunque, poiché, $Y \subseteq X \subseteq R$, per ogni istanza legale di R si ha che:

$$\forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \quad (13)$$

da cui ne segue automaticamente che $X \rightarrow Y \in F^+$

2. Se l'($n + 1$)-esimo assioma applicato è l'assioma di aumento, allora è obbligatoriamente necessario che:

– $\exists V, W \subseteq R \mid \exists V \rightarrow W \in F_A$, ottenuta applicando $j \leq n$ assiomi di Armstrong

– $\exists Z \subseteq R \mid X := VZ, Y := WZ$

Affinché si abbia che:

$$Z \subseteq R, V \rightarrow W \Rightarrow VZ \rightarrow WZ = X \rightarrow Y \in F^A \quad (14)$$

Siccome per ipotesi induttiva si ha $V \rightarrow W \in F^A \Rightarrow V \rightarrow W \in F^+$ e siccome $Z \subseteq Z \Rightarrow Z \rightarrow Z \in F^+$, si vede facilmente che:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} V \rightarrow W \in F^+ \\ Z \rightarrow Z \in F^+ \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall t_1, t_2 \in r, t_1[V] = t_2[V] \Rightarrow t_1[W] = t_2[W] \\ \forall t_1, t_2 \in r, t_1[Z] = t_2[Z] \Rightarrow t_1[Z] = t_2[Z] \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r, t_1[VZ] = t_2[VZ] \Rightarrow t_1[WZ] = t_2[WZ] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^+ \end{aligned}$$

3. Se l'($n + 1$)-esimo assioma applicato è l'assioma di transitività, allora è obbligatoriamente necessario che $\exists X \rightarrow Z, Z \rightarrow Y \in F^A$, ottenute con $k \leq n$ assiomi di Armstrong, affinché si abbia che:

$$X \rightarrow Z \in F^A \vee Z \rightarrow Y \in F^A \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^A \quad (15)$$

Siccome per ipotesi induttiva $X \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^+$ e $Z \rightarrow Y \in F^A \Rightarrow Z \rightarrow Y \in F^+$, si

vede facilmente che:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow Z \in F^+ \\ Z \rightarrow Y \in F^+ \end{array} \right. \implies \\
 \implies & \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \implies t_1[Z] = t_2[Z] \implies t_1[Y] = t_2[Y] \implies \\
 & \implies X \rightarrow Y \in F^+
 \end{aligned}$$

2.2 Dimostrazione $F^+ \subseteq F^A$

- Sia $X \subseteq R$ e sia r istanza di $R(X^+, R - X^+)$ tale che

X^+			$R - X^+$		
A_1	\dots	A_i	A_j	\dots	A_n
1	\dots	1	1	\dots	1
1	\dots	1	0	\dots	0

dunque tale che $\forall t_1, t_2 \in r$ si ha:

- * $t_1[X^+] = (1, \dots, 1) = t_2[X^+]$
- * $t_1[R - X^+] = (1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0) = t_2[R - X^+]$

- Notiamo che $\forall V, W \subseteq R \mid V \rightarrow W \in F$ si ha che:

- * Se $V \cap R - X^+ \neq \emptyset$ (dunque anche se $V \subseteq R - X^+$) allora $t_1[V] \neq t_2[V]$, dunque r soddisfa $V \rightarrow W \in F$
- * Se invece $V \subseteq X^+$, per il lemma precedentemente visto si ha che

$$V \subseteq X^+ \iff X \rightarrow V \in F^A$$

Siccome $V \rightarrow W \in F \implies V \rightarrow W \in F^A$, per transitività si ha che

$$X \rightarrow V \in F^A \wedge V \rightarrow W \in F^A \implies X \rightarrow W \in F^A \iff W \subseteq X^+$$

Dunque, siccome $V, W \subseteq X^+$, in definitiva si ha che

$$t_1, t_2 \in r, t_1[V] = (1, \dots, 1) = t_2[V] \wedge t_1[W] = (1, \dots, 1) = t_2[W]$$

e quindi r soddisfa ogni $V \rightarrow W \in F$

- Siccome in entrambi i casi r soddisfa ogni $V \rightarrow W \in F$, allora r è legale.
- A questo punto, una qualsiasi dipendenza $X \rightarrow Y \in F^+$ deve essere soddisfatta da qualsiasi istanza legale di R , inclusa r stessa
- Poiché $X \subseteq X^+$, ne segue che la dipendenza non può essere soddisfatta a vuoto poiché $t_1[X] = t_2[X]$. Dunque, l'unica possibilità affinché $X \rightarrow A \in F^+$ sia soddisfatta da r è che $Y \subseteq X^+$ in modo che si abbia $t_1[Y] = t_2[Y]$
- A questo punto, per il lemma si ha che $Y \subseteq X^+ \iff X \rightarrow Y \in F^A$
- Dunque, siccome $X \rightarrow Y \in F^+ \implies X \rightarrow Y \in F^A$, concludiamo che $F^A \subseteq F^+$

Nota

Poiché $F^+ = F^A$, per calcolare F^+ ci basta applicare gli assiomi di Armstrong sulle dipendenze in F in modo da trovare F^A .

Tuttavia, calcolare $F^+ = F^A$ richiede tempo esponenziale, quindi $O(2^{nk})$: considerando anche solo l'assioma di riflessività, siccome ogni possibile sottoinsieme di R genera una dipendenza e siccome i sottoinsiemi possibili di R sono $2^{|R|}$, allora ne segue che $|F^+| \gg 2^{|R|}$.

3 Chiusura di X

4 Lemma Chiusura Inclusione

5 Chiusura di X in G

6 Join senza perdita