Министерство науки и высшего образования РФ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Кафедра вычислительной физики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

по теме

МЕТОД МАРКЕРОВ. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЯЗЫКОВ СО ИНТЕГРИРОВАННОЙ МНОГОПОТОЧНОСТЬЮ GO И JULIA ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ НА ПРИМЕРЕ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА МАРКЕРОВ

Исполнитель ____________ Попов Н.В.

Руководитель ____________ к.ф.-м.н., доц. Беклемышева К.А.

Долгопрудный 2022

Введение

Актуальность работы

При решении задач вычислительной гидрогазодинамики и механики деформируемого твёрдого тела методами классической вычислительной математики зачастую возникает проблема высокой технической сложности методов. Для решения этой проблемы здесь применяется переход к т.н. смешанному Эйлеро-Лагранжевому подходу, суть которого заключается в применении классического метода маркеров и ячеек (MAC), предложенного Ф. Харлоу ещё в 1965 г. Однако, применение объёмного метода маркеров приводит к большим временным затратам на расчёт самих маркеров, что является одной из его существенных проблем. В ряде научных работ стремятся найти более эффективные способы расчёта маркерных точек.

В данной работе предпринята попытка подойти к указанной проблеме с другой стороны: максимально упростить, сделать как можно более тривиальным непосредственное применение метода в угоду эффективности. Так, зачастую в качестве маркерной функции используется непрерывная объёмная функция жидкости (т.н. Volume-Of-Fluid, или VOF-метод). Здесь же применяется простейшая дискретная, бинарная маркерная функция, расчёт которой не представляет никаких трудностей.

Кроме того, реализация потребных алгоритмов обыкновенно производится преимущественно на распространённых, достаточно старых языках C/C++, Fortran и Python. Отсюда возникает вопрос исследования возможностей более новых, но менее известных в научной среде языков применительно к реализации задач вычислительной физики. Наиболее интересны следующие языки:

1. Go — язык со встроенной многопоточностью и эффективным менеджером потоков.

2. Julia — язык программирования, разработанный специально для научной деятельности.

Цель работы

1. Исследование возможности применения метода маркеров в сочетании с сеточно-характеристическим методом на примере задачи об ударе тела из мягкого металла об твёрдую стенку.

2. Разработка необходимых алгоритмов и их реализация с одинаковой асимптотикой на различных языках программирования: C++, Python, Julia и Go.

3. Исследование полученные алгоритмы на быстродействие на различных физических исполнителях и выяснение практической применимости используемых языков для данного класса задач.

Научная новизна

1. Несмотря на то, что сочетание сеточно-характеристического метода и метода маркеров уже применялось в ряде научных работ, например [Ермаков], [Храбрый], в данной работе предприняты попытки упростить расчёты ячеек маркеров таким образом, чтобы не допустить значительного ухудшения результатов расчёта задачи.

2. Языки Julia и Go, особенно последний, не так часто используются для решения научных задач. В данной работе предприняты попытки исследования возможностей указанных языков в области вычислительной физики.

Постановка задачи

1. Рассматривается натекание тела неправильной формы из мягкого металла на твёрдую неподвижную стенку. Например, тело изготовлено из свинца, а стенка — из стали.

Математическая модель

Уравнения МДТТ

Выпишем общие уравнения механики деформируемого твёрдого тела в безындексной форме записи:

$$\rho \overrightarrow{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \overrightarrow{f} \text{ — ур-я движения,} \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{q} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{F} \text{ — реологические уравнения.} \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность тела, $\overrightarrow{v}$ — скорость, $\overrightarrow{f}$ — вектор сил, тензор второго ранга $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор упругости, тензор второго ранга $\boldsymbol{\epsilon}$ — тензор деформации, тензор второго

ранга $\boldsymbol{F}$ — тензор упругой эластичности, тензор четвёртого ранга $\boldsymbol{q}$ — реологический тензор.
Перепишем приведённые уравнения в матричной форме:

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A_x}\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial x} + \boldsymbol{A_y}\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial y} + \boldsymbol{A_z}\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial z} = \overrightarrow{f} \tag{3}$$

В нашей модели приложенные внешние силы отсутствуют, поэтому далее положим $\overrightarrow{f} = 0$.

СХМ с разделением

Для численного решения полученного матричного уравнения применим сеточно-характеристический метод с разделением по пространственным переменным, предложенный в [БеклемышеваНаАнглийском].
Согласно этому методу, расчёт матричного уравнения (3) сводится к последовательному вычислению решений трёх матричных уравнений вида

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A_i} = \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial i} = 0, \tag{4}$$

где $i \in [x, y, z]$, с подстановкой промежуточных результатов в последующие. Каждое из уравнений вида (4) далее преобразуется стандартным образом:

1. В силу диагонализуемости каждая из матриц $\boldsymbol{A_i}, i \in [x, y, z]$ представляется в виде
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B^{-1}DB},$$
где $\boldsymbol{D}$ — диагональная матрица собственных значений $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{D} = diag\lambda_k, k \in [1..dim\boldsymbol{D}]$), $\boldsymbol{B}$ — матрица, составленная из транспонированных собственных векторов $\boldsymbol{A}$. (В этом и последующих пунктах индекс $i, i \in [x, y, z]$ для матриц опущен: выражение, содержащее матрицу без индекса, считается верным для каждого из них).

2. Вводя инварианты Римана $\overrightarrow{r} = \boldsymbol{B}\overrightarrow{u}$, получим из матричного уравнения (4) путём домножения на $\boldsymbol{B}$ матричное уравнение
$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial i} = 0.$$

3. В свою очередь, полученное матричное уравнение, поскольку имеет диагональную по построению матрицу $\boldsymbol{D}$, может быть разбито на $dim\boldsymbol{D}$ независимых урав-

нений вида

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial r_k}{\partial i_k} = 0, \tag{5}$$

где $k \in [1, dim\boldsymbol{D}], i \in [x, y, z]$. Таким образом, решение уравнения (4) суть композиция независимых волн со скоростями распространения $\lambda_k, k \in [1, dim\boldsymbol{D}]$.

4. Вводя характеристические кривые

$$I_c : \frac{di_k}{dt} = \lambda_k, \tag{6}$$

$k \in [1, dim\boldsymbol{D}], i \in [x, y, z]$, заметим, что уравнения (5) вдоль кривых I_c принимают вид

$$\frac{dr_k}{dt} = 0.$$

Из этого следует, что инварианты Римана $\overrightarrow{r} = \boldsymbol{B}\overrightarrow{u}$ вдоль характеристических кривых постоянны, что в терминах нашей задачи означает равенство их значений на $j+1$-м и j-м временных уровнях.