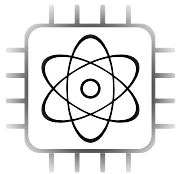


Lösen eines Sudoku mit diversen Quantum Computing Ansätzen



Quantum Computing Hackathon

11.10. - 15.10.

Team Grover:

Jingcheng Wu

Viktoria Patapovich

Sudoku ➤ QUBO Formulierung ➤ Komplexität und Pruning ➤ Annealing ➤ Gate Model ➤ Q&A und Ausblick

Sudoku Problemstellung – Übersicht

1	
	0

Was ist ein Sudoku?

2			4
		1	
	3		

Sudoku ist ein Logikrätsel

Die Grundfläche besteht aus $I \times J$ Feldern bzw. Zellen. Mehr oder weniger gleichmäßig verteilt befinden sich im Rätsel bereits ein paar Ziffern.



Je mehr Ziffern vorgegeben sind, desto einfach fällt die Lösung.

Ziel des Spiels ist es, alle leeren Zellen mit den Ziffern 1 bis K so aufzufüllen, dass jede Ziffer in einer Spalte (senkrecht), in einer Zeile (waagerecht) und in einem Unterblock nur einmal vorkommt.

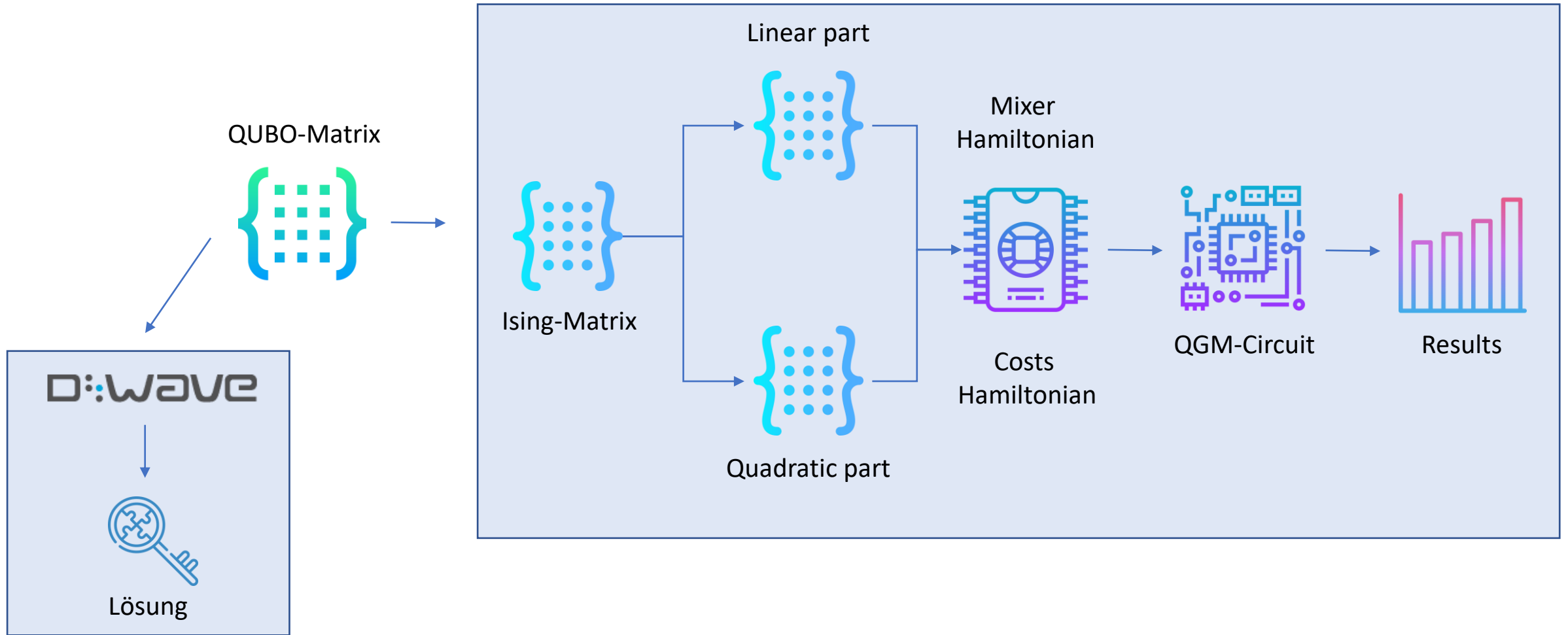
5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

	7		3	1			5	
	1	5		8				
9			5				8	1
5		3	6			2		
2			1		9			4
		7			8	9		6
9	6				5			7
				6				
	2			9				

Quantum Computing Ansätze

Quantum Gate Model 	Quantum Annealing 
QAOA	Simulated Annealing (D-Wave Neal)
Grover's Algorithmus	QPU (D-Wave Advantage)

QA und QAOA: Vorgehen



Komplexität und Tupel-Darstellung

Binäre Kodierung $x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 : & \text{im Kastchen } (i,j) \text{ steht } k \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$

Komplexität:

$$I \cdot J \cdot K$$

	3	2	
1			
			2
	1	3	

$x_{i,j,k}$

Zeile	Spalte	Zahl
1	1	1
2	2	2
...
...
...
I	J	K

Komplexität und Tupel-Darstellung

Binäre Kodierung $x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 : \text{im Kastchen } (i,j) \text{ steht } k \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases}$

Komplexität:

$$I \cdot J \cdot K$$

	3	2	
1			
			2
	1	3	

$x_{i,j,k}$

Zeile	Spalte	Zahl
1	1	1
2	2	2
...
...
...
I	J	K

Problem:

Sogar für kleine Sudokus braucht man **mehr als 30 Qubits** ->

Pruning vonnöten

Kombinatorisches Pruning

	3	2	
1			?
			2
	1	3	

Noch bei der Erstellung der Variablenliste, entfernen wir alle *offensichtlich unmöglichen* Variablen. z.B.:

- Wenn in der Spalte (bzw. Zeile) schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diese Spalte (bzw. Zeile) nicht dieselbe Zahl sein.
- Wenn in einem Unterblock schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diesem Unterblock nicht dieselbe Zahl sein.

Kombinatorisches Pruning

	3	2	
1			?
			2
	1	3	

Die Variable ist nicht 1 und nicht 2

Noch bei der Erstellung der Variablenliste, entfernen wir alle *offensichtlich unmöglichen* Variablen. z.B.:

- Wenn in der Spalte (bzw. Zeile) schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diese Spalte (bzw. Zeile) nicht dieselbe Zahl sein.
- Wenn in einem Unterblock schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diesem Unterblock nicht dieselbe Zahl sein.

Kombinatorisches Pruning

Die Variable ist nicht 1, 2 und nicht 3

?	3	2	
1			3v4
			2
	1	3	

Noch bei der Erstellung der Variablenliste, entfernen wir alle *offensichtlich unmöglichen* Variablen. z.B.:

- Wenn in der Spalte (bzw. Zeile) schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diese Spalte (bzw. Zeile) nicht dieselbe Zahl sein.
- Wenn in einem Unterblock schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diesem Unterblock nicht dieselbe Zahl sein.

Kombinatorisches Pruning

4	3	2	1v4
1	2v4	4	3v4
3v4	4	1v4	2
2v4	1	3	4

Noch bei der Erstellung der Variablenliste, entfernen wir alle *offensichtlich unmöglichen* Variablen. z.B.:

- Wenn in der Spalte (bzw. Zeile) schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diese Spalte (bzw. Zeile) nicht dieselbe Zahl sein.
- Wenn in einem Unterblock schon eine Zahl vorgegeben ist, können die unbekannten Variablen in diesem Unterblock nicht dieselbe Zahl sein.

Fazit: **weniger** Variablen -> **weniger** Qubits und Kosten -> **besseres** Performance

Aufgaben und Komplexität

A	B	C	D	E	F																																																																
<table><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr></table>	0		1		<table><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>					<table><tr><td></td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3	2		1				<table><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr></table>	3	2	1	4	4	1		2	1	4	2	3	2	3	4		<table><tr><td></td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td></td></tr></table>		3	2		1							2		1	3		<table><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>			1		4							3		3		
0																																																																					
1																																																																					
	3	2																																																																			
1																																																																					
3	2	1	4																																																																		
4	1		2																																																																		
1	4	2	3																																																																		
2	3	4																																																																			
	3	2																																																																			
1																																																																					
			2																																																																		
	1	3																																																																			
		1																																																																			
4																																																																					
			3																																																																		
	3																																																																				
4 Variablen	8 Variablen	20 Variablen	8 Variablen	40 Variablen	48 Variablen																																																																
-	-	8* Variablen (mit Pruning)	-	12* Variablen (mit Pruning)	22* Variablen (mit Pruning)																																																																

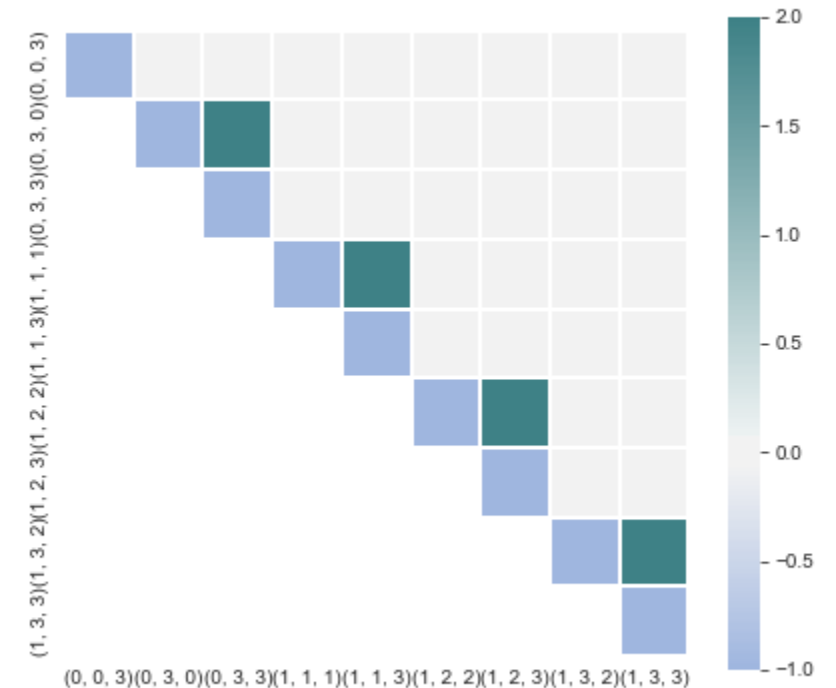
Mathematische Formulierung von Sudoku: Constraints und Kostenfunktion

Constraint 1: In jedem Kastchen darf *nur eine* Zahl stehen

$$\sum_{k \in K} x_{i,j,k} = 1, \quad \forall i, j \in \text{cell}$$

Und Penalty-Funktion zu diesem Constraint:

$$H_1 = \sum_{i,j \in \text{cell}} \sum_{k \in K} (x_{i,j,k} - 1)^2$$



Mathematische Formulierung von Sudoku: Constraints und Kostenfunktion

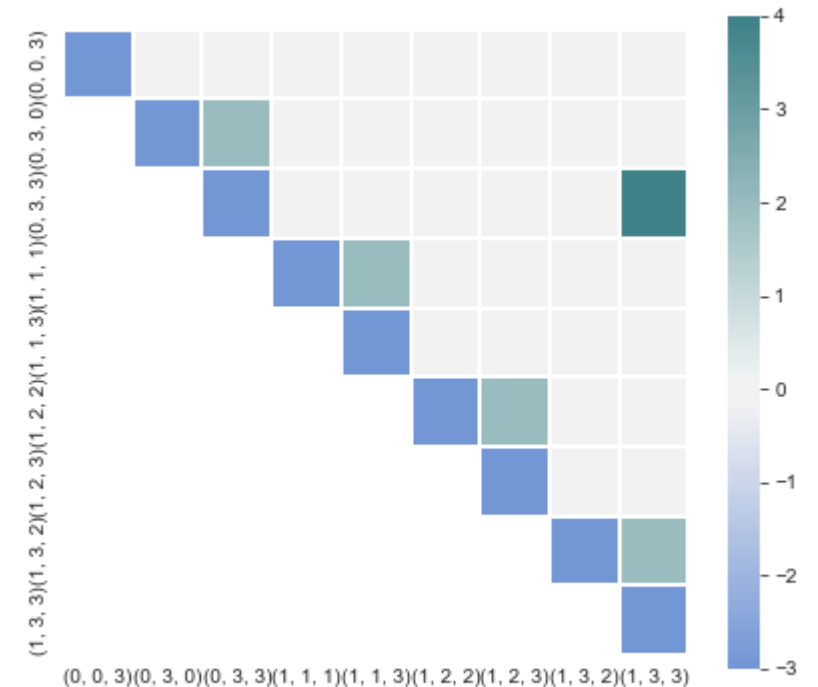
Constraint 1: In jedem Kastchen darf *nur eine* Zahl stehen

Constraint 2: In jeder Spalte steht jede Zahl *nur ein mal*

$$\sum_{i \in I} x_{i,j,k} = 1, \quad \forall j \in J, \forall k \in K$$

Und Penalty-Funktion zu diesem Constraint:

$$H_2 = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I} x_{i,j,k} - 1 \right)^2$$



Mathematische Formulierung von Sudoku: Constraints und Kostenfunktion

Constraint 1: In jedem Kastchen darf *nur eine* Zahl stehen

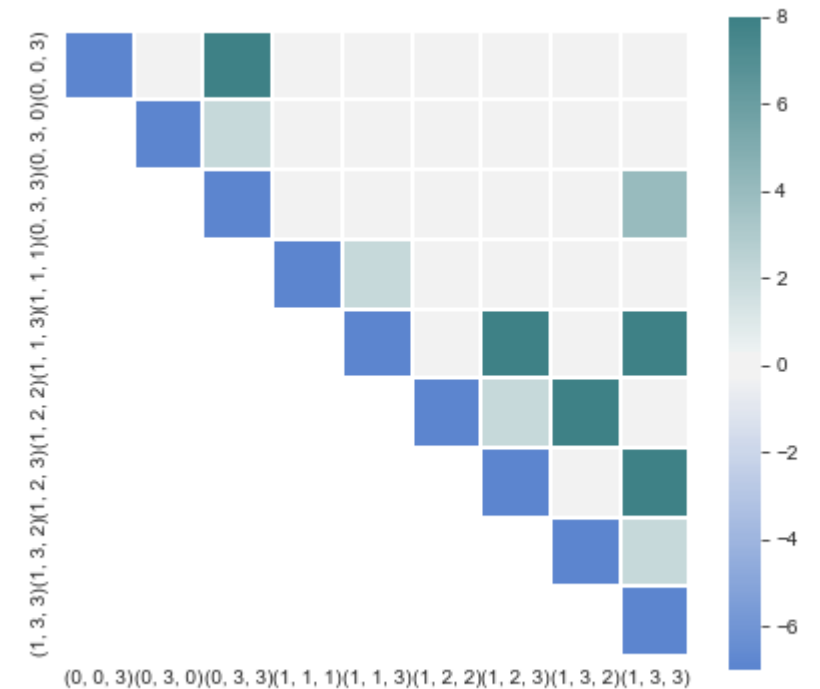
Constraint 2: In jeder Spalte steht jede Zahl *nur ein mal*

Constraint 3: In jeder Zeile steht jede Zahl *nur ein mal*

$$\sum_{j \in J} x_{i,j,k} = 1, \quad \forall i \in I, \forall k \in K$$

Und Penalty-Funktion zu diesem Constraint:

$$H_3 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} x_{i,j,k} - 1 \right)^2$$



Mathematische Formulierung von Sudoku: Constraints und Kostenfunktion

Constraint 1: In jedem Kastchen darf *nur eine* Zahl stehen

Constraint 2: In jeder Spalte j steht jede Zahl *nur ein mal*

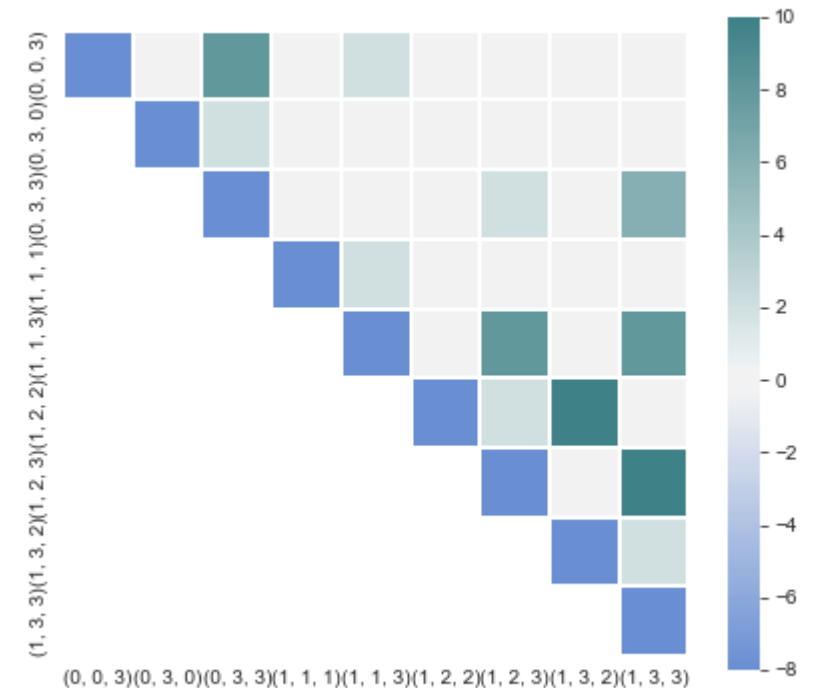
Constraint 3: In jeder Zeile i steht jede Zahl *nur ein mal*

Constraint 4: In jedem Unterblock steht jede Zahl *nur ein mal*

$$\sum_{i,j \in \text{Unterblock}} x_{i,j,k} = 1, \quad \forall k \in K$$

Und Penalty-Funktion zu diesem Constraint:

$$H_4 = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i,j \in \text{Unterblock}} x_{i,j,k} - 1 \right)^2$$



Parameter und finale QUBO

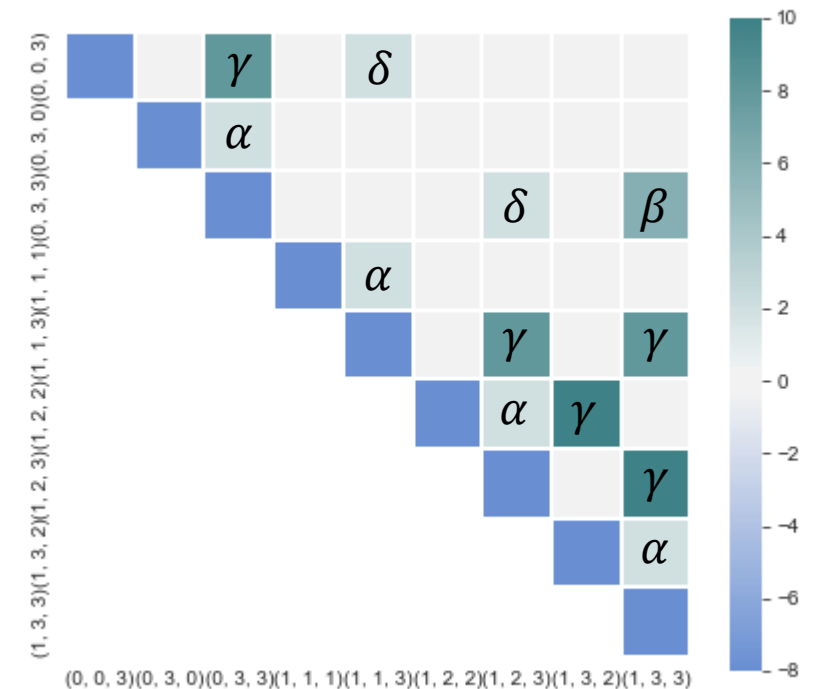
Finale QUBO:

$$H := \alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 + \delta H_4$$

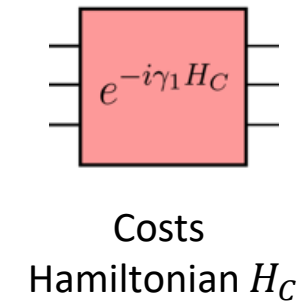
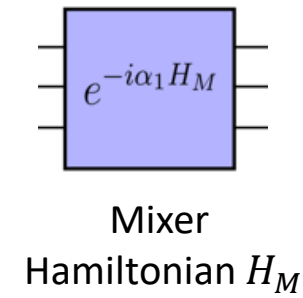
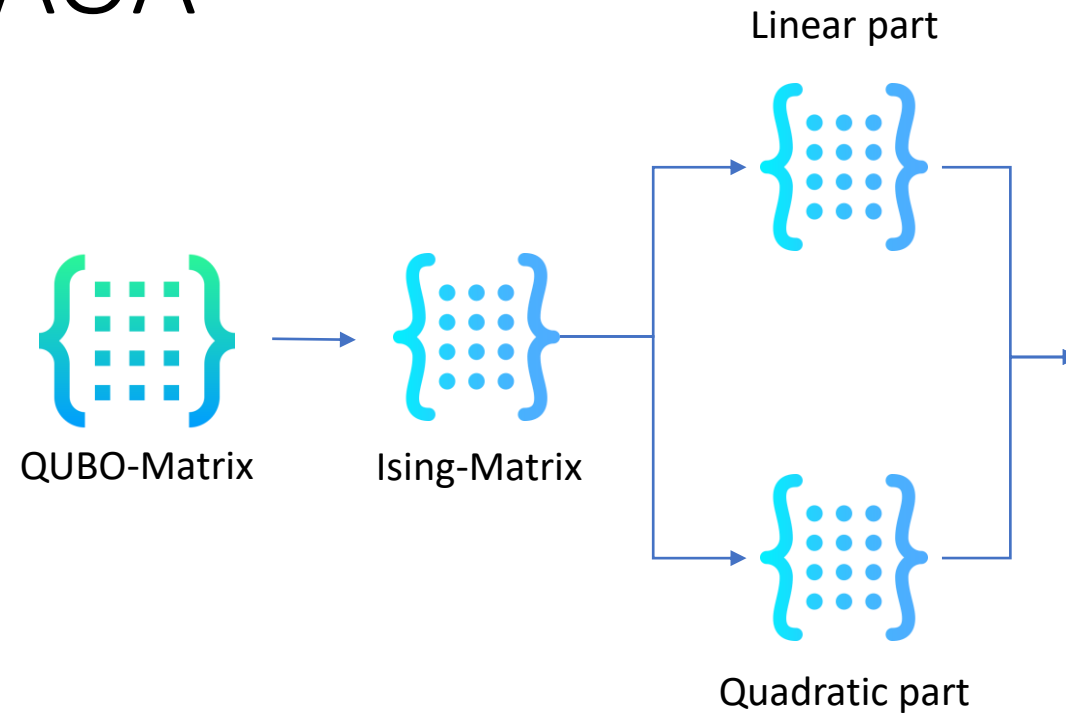
α	β	γ	δ
2	1.5	1.5	1

α - harter Constraint

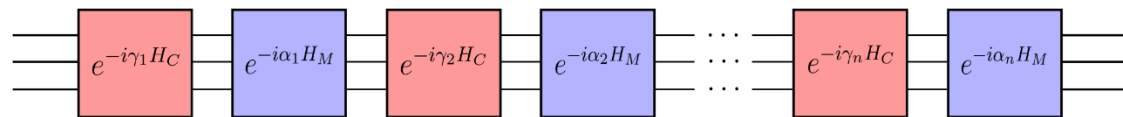
β, γ, δ - weiche Constraints



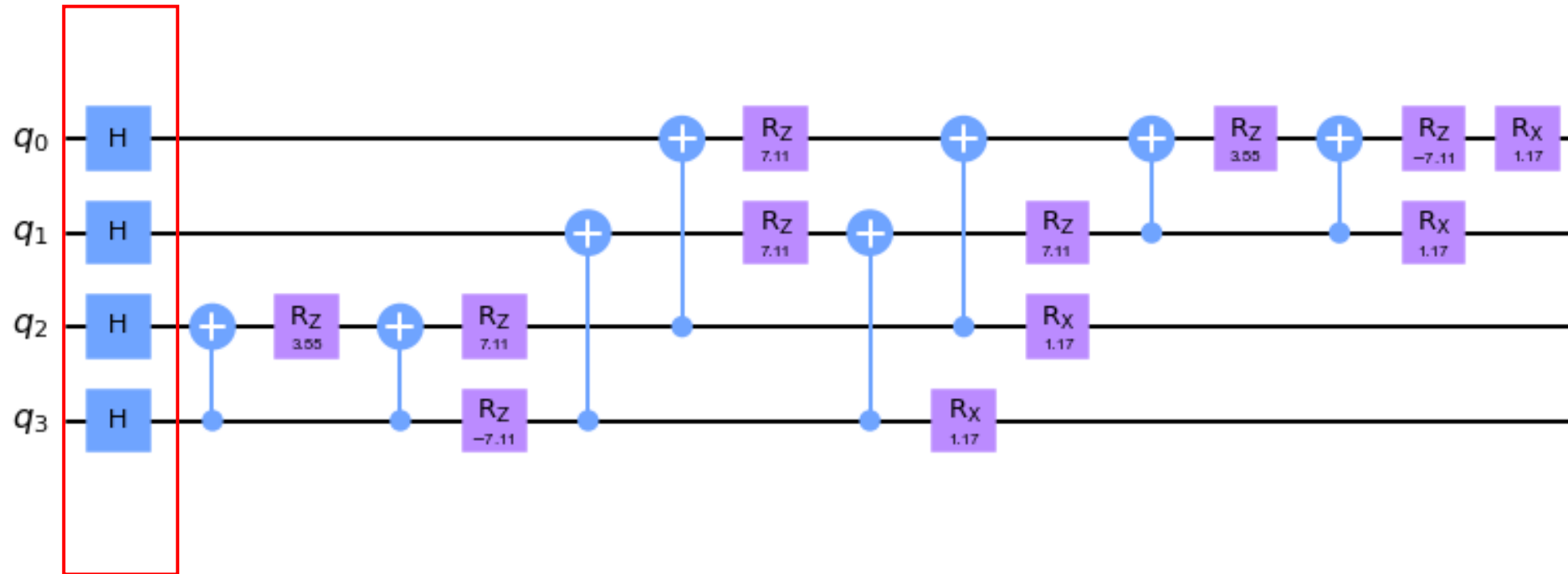
QAOA



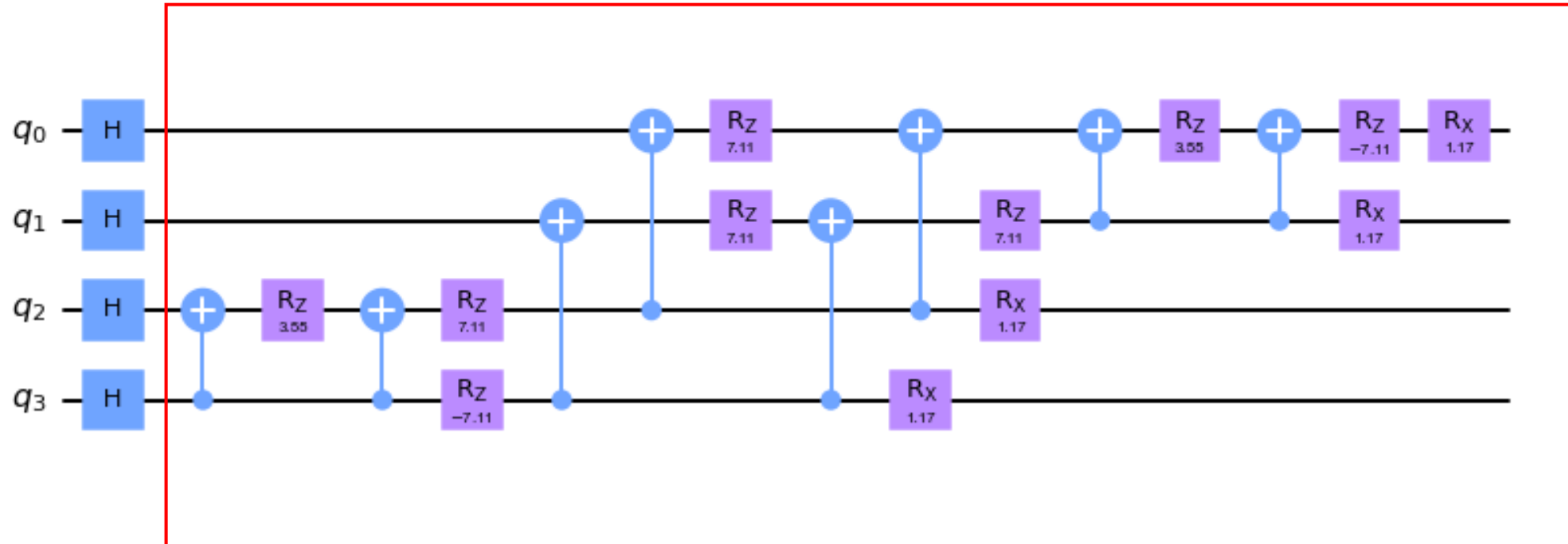
Parameter α und γ werden mit einem klassischen Optimizer bestimmt
(wir benutzen *SPSA*, *ADAM*, *COBYLA* aus Qiskit Library)



QAOA Quantum Schaltkreis

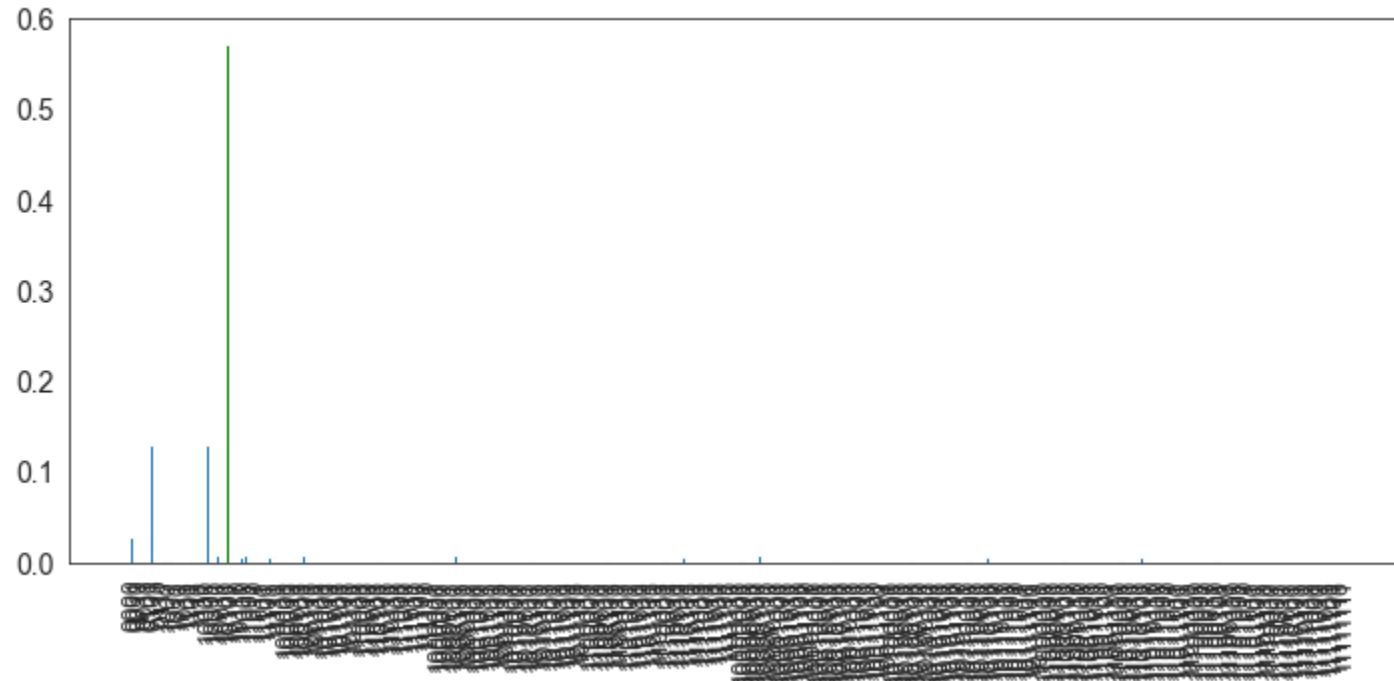


QAOA Quantum Schaltkreis



QAOA mit Qiskit: Quadratic Programm

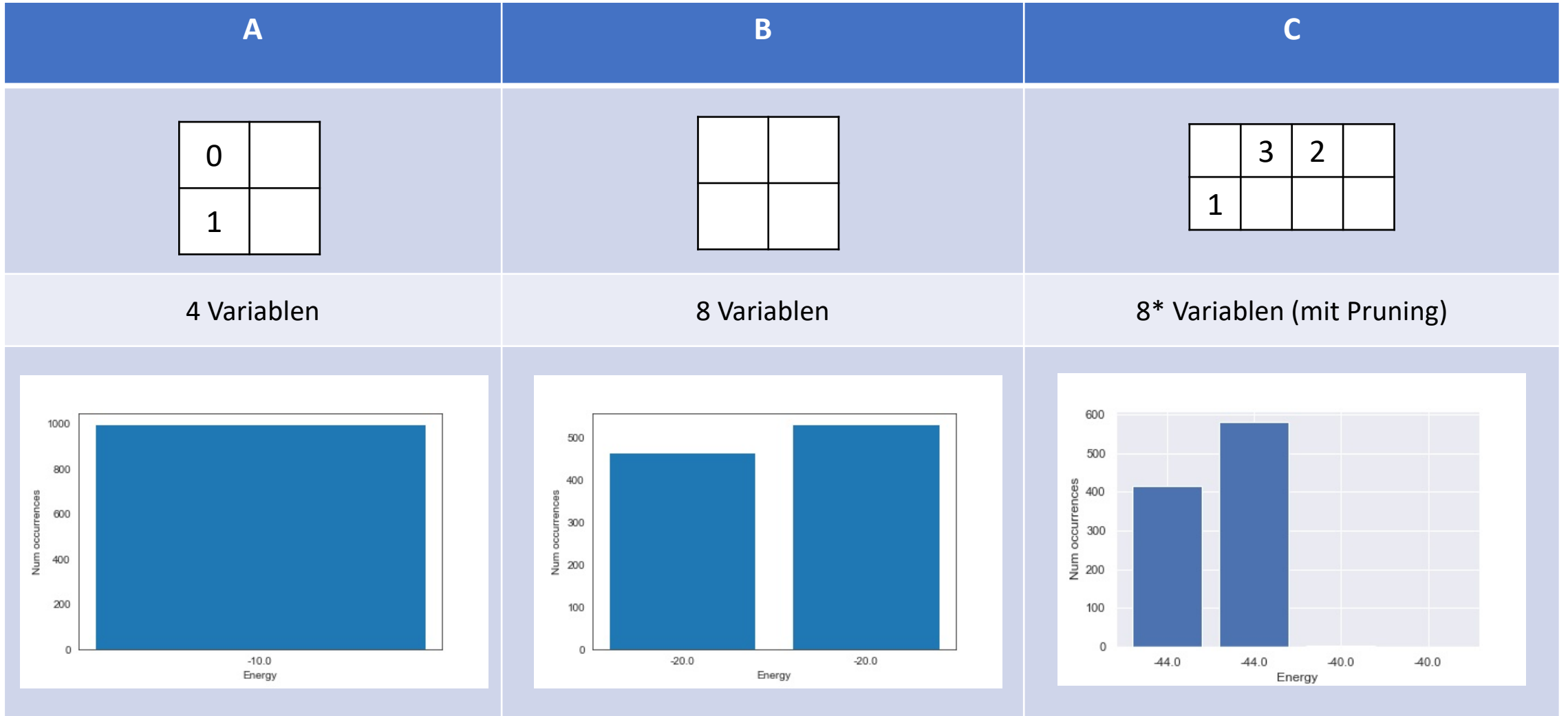
```
optimal params: {ParameterVectorElement(0[0]): 0.22490671453358582, ParameterVectorElement(0[1]): 5.510484420501434}
optimal value: -20.176349833739003
```



Simulated Annealing und DWave



Simulated Annealing und DWave

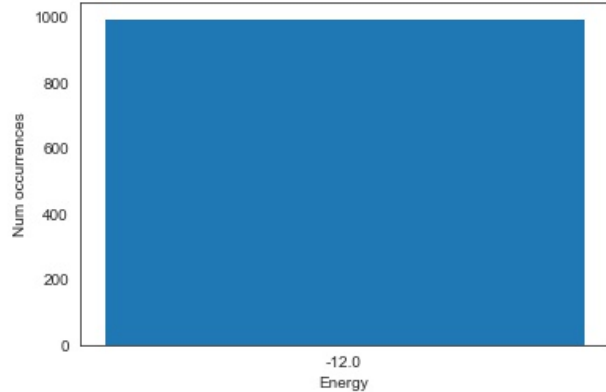


Simulated Annealing und DWave

D

3	2	1	4
4	1		2
1	4	2	3
2	3	4	

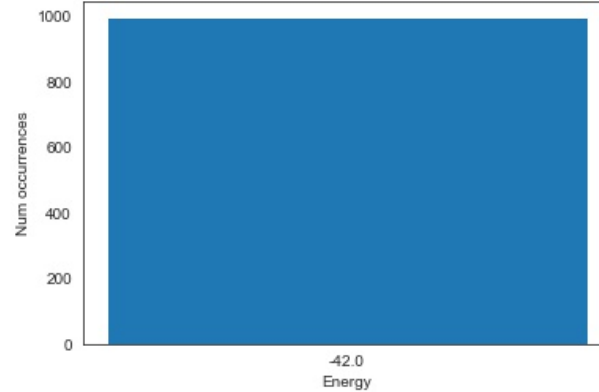
8 Variablen



E

	3	2	
1			
			2
	1	3	

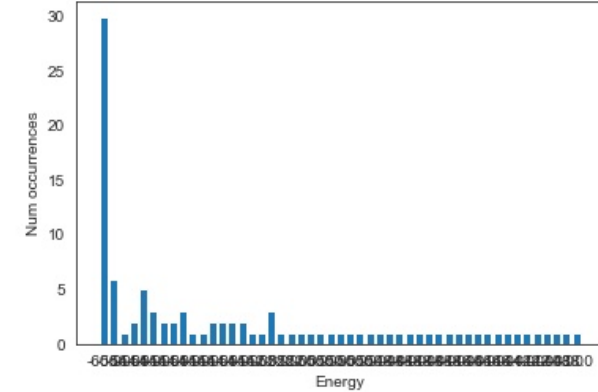
12* Variablen (mit Pruning)



F

		1	
4			
			3
	3		

22* Variablen (mit Pruning)



QAOA

A	B	C
<div> <div> <div>0</div> <div></div> </div> <div> <div>1</div> <div></div> </div> </div>	<div> <div></div> <div></div> </div> <div> <div></div> <div></div> </div>	<div> <div></div> <div>3</div> <div>2</div> <div></div> </div> <div> <div>1</div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>
4 Variablen	8 Variablen	8* Variablen (mit Pruning)

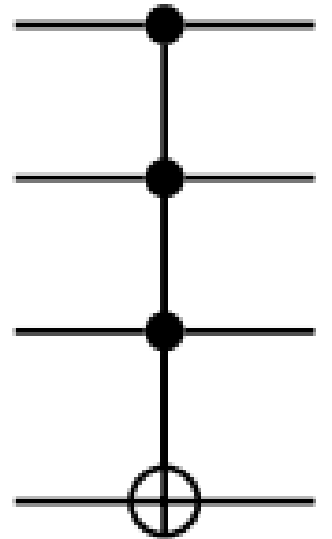
Grover Algorithmus

- Der Algorithmus von Grover nutzt die Interferenz aus, um Informationen über ein Orakel U_f zu erhalten.
- Was ist Orakel U_f ?

Orakel U_f

$$U_{f_{\hat{x}}} : |x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f_{\hat{x}}(x)\rangle$$

$$\begin{aligned} U_{f_{\hat{x}}} \left(|x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) &= |x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_{\hat{x}}(x)\rangle - |1 \oplus f_{\hat{x}}(x)\rangle) \\ &= (-1)^{f_{\hat{x}}(x)} |x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned}$$



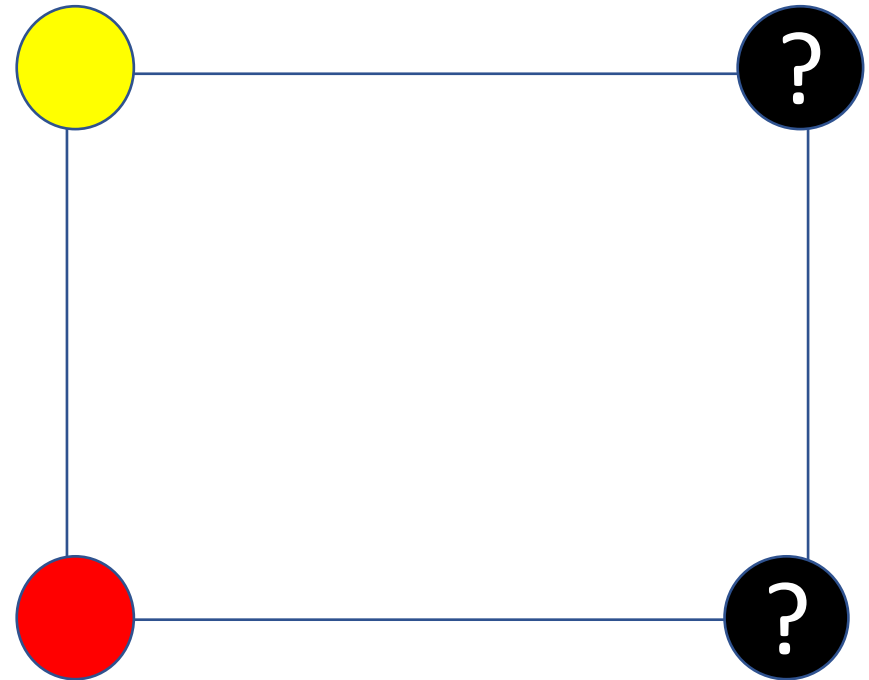
Sudoku als Graph Coloring

a) 2x2-Sudoku mit binären Einträgen, davon 2 vorausgefüllt

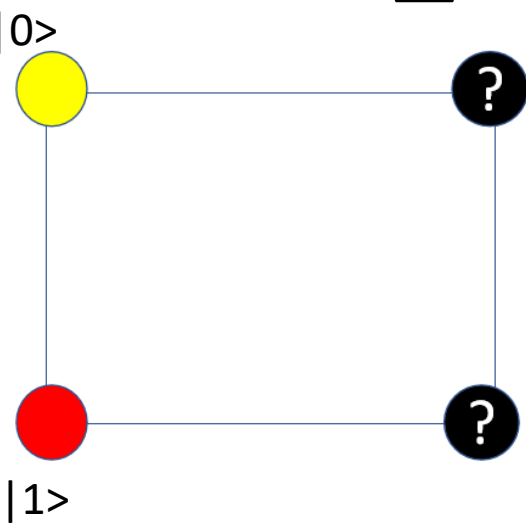
0	X
1	X

0: Yellow

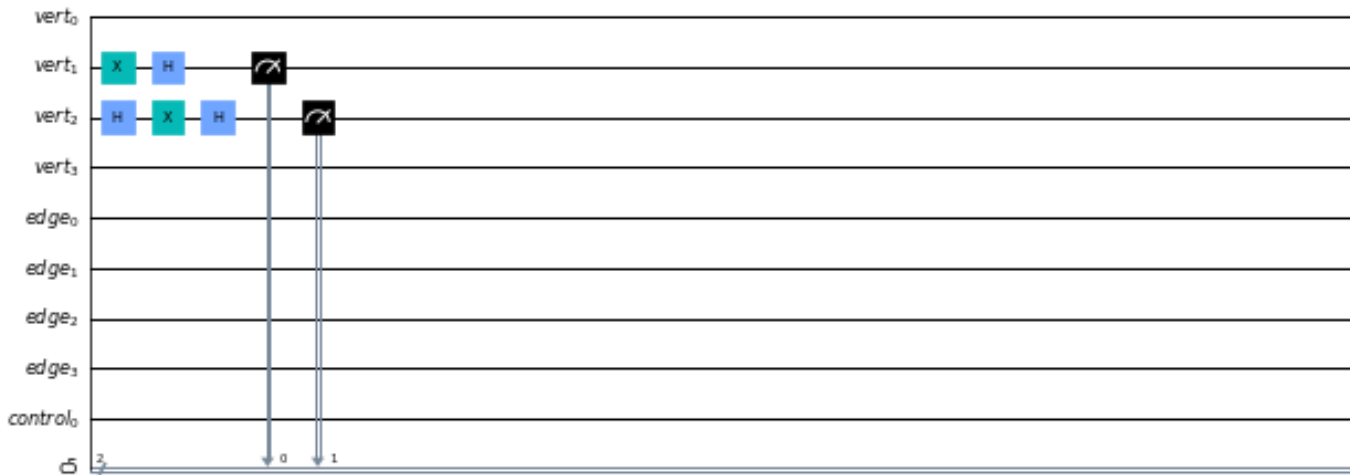
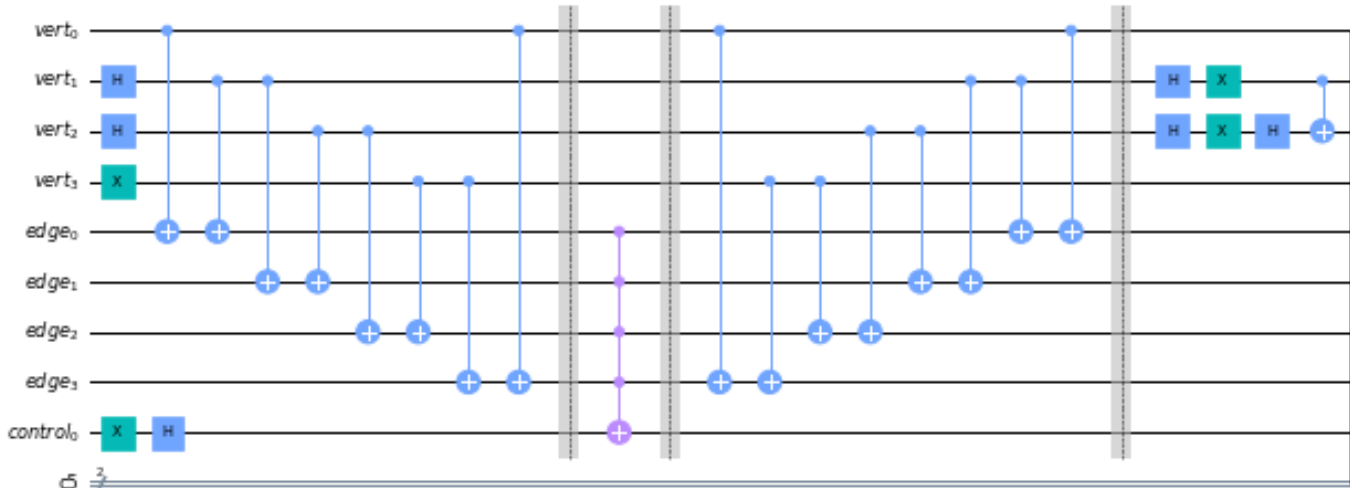
1: Red



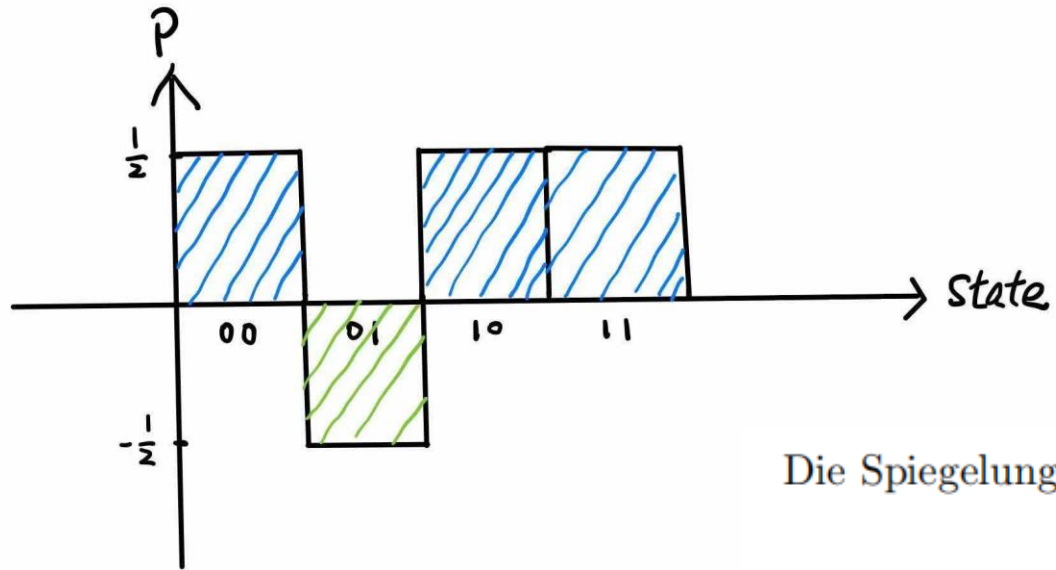
Grovers Algorithm : Schaltkreis von Problem_a



0	
1	

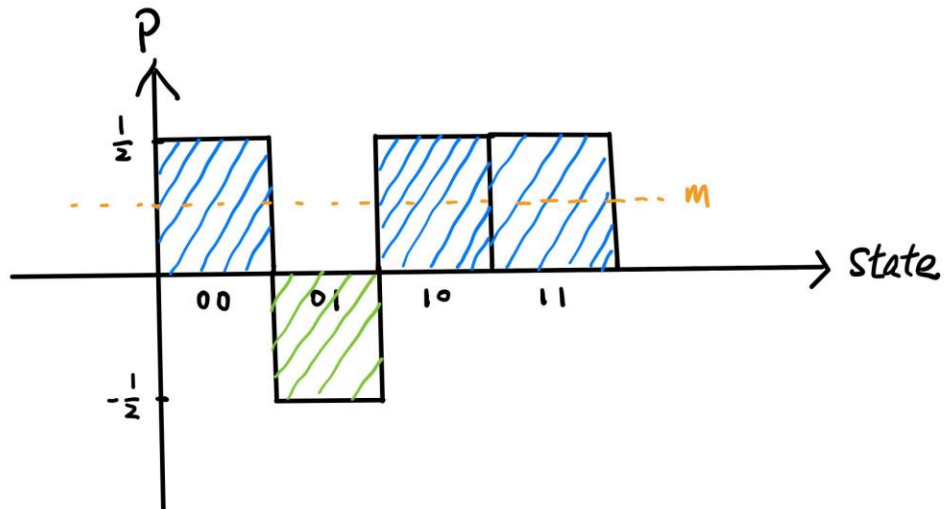


Spiegelung am Mittelwert

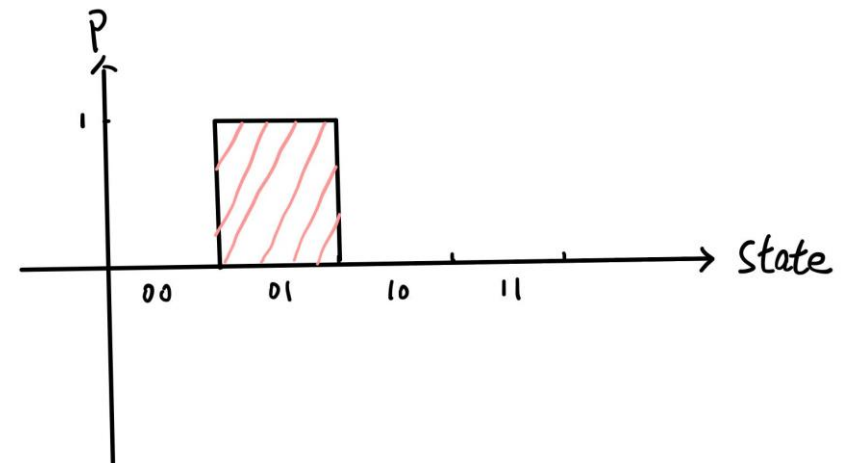


Die Spiegelung einer Amplitude a am Mittelwert m ist definiert als Abbildung:

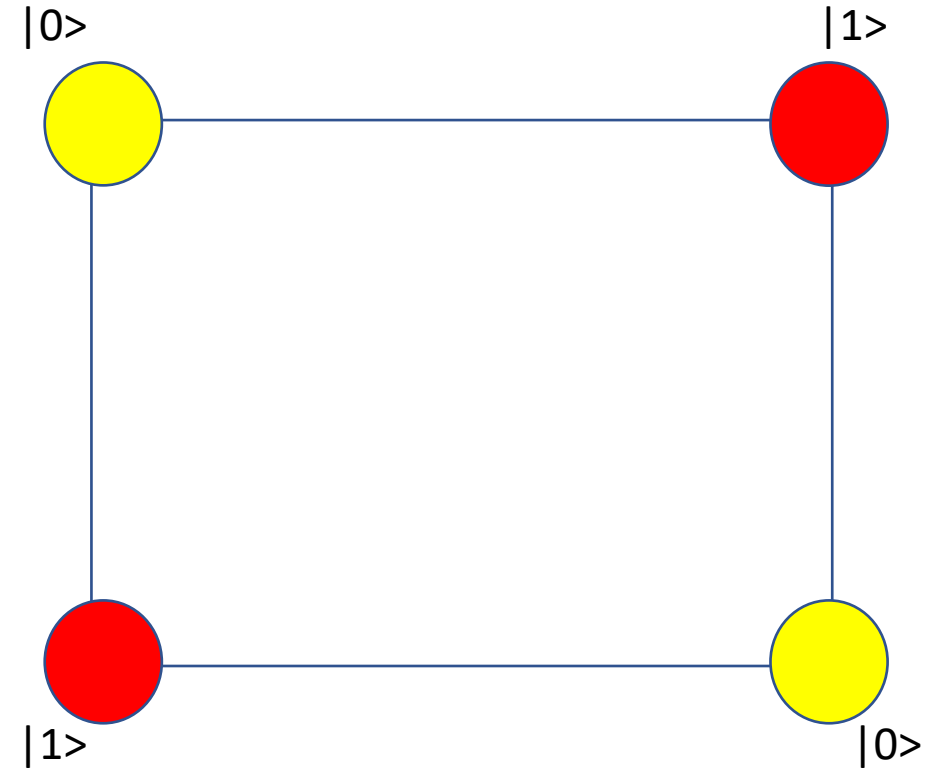
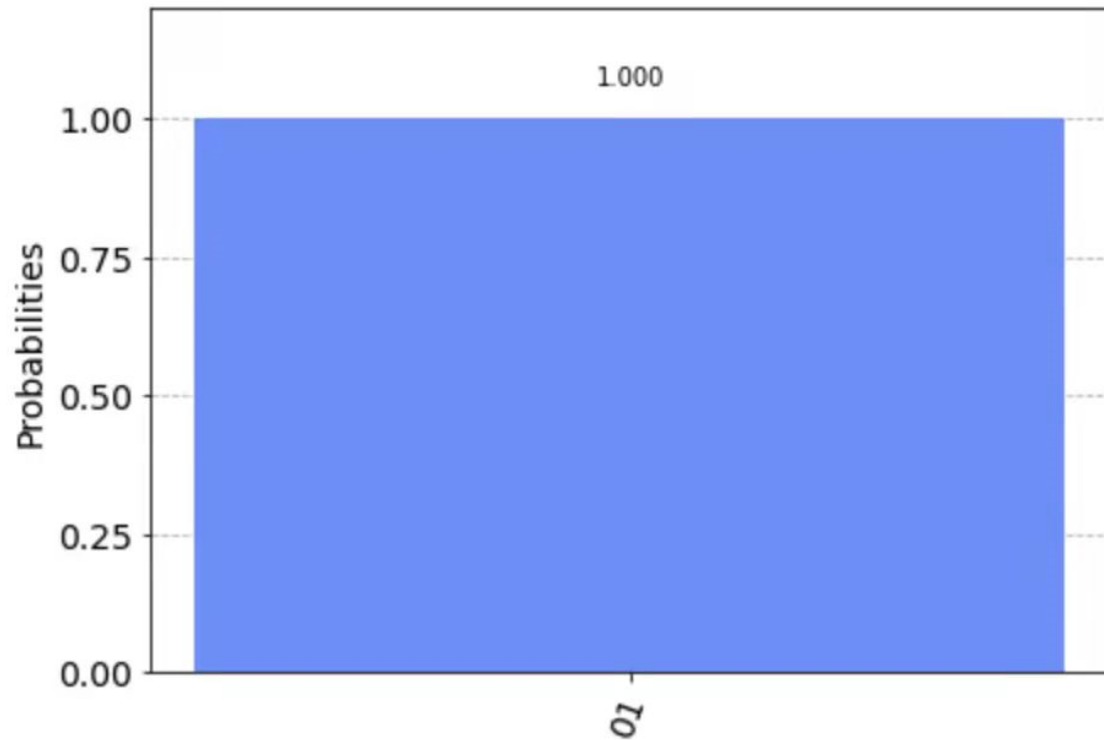
$$a \mapsto 2 \cdot m - a$$



\Rightarrow



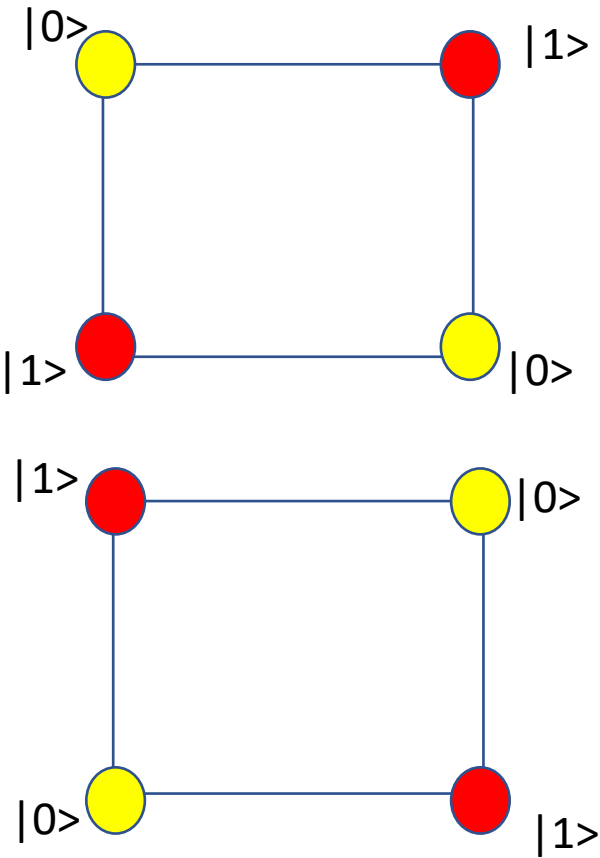
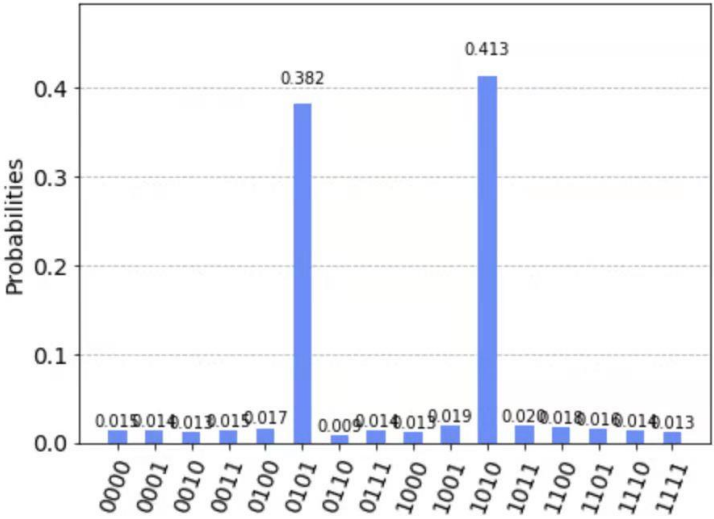
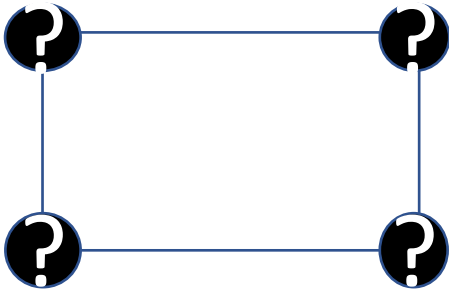
Ergebnisse mit Grover's Algorithmus



Weitere Sudokus mit Grover's Algorithmus

b) leeres 2x2-Sudoku mit binären Einträgen

X	X
X	X

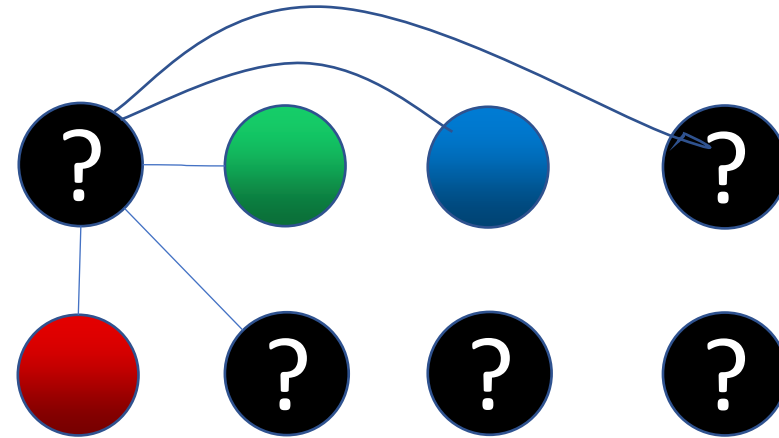


Weitere Sudokus mit Grover's Algorithmus

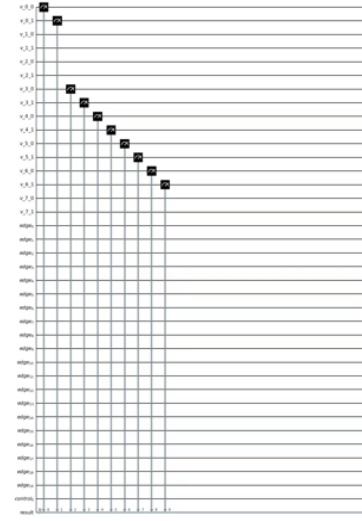
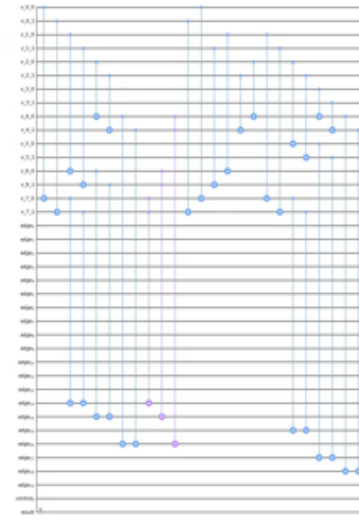
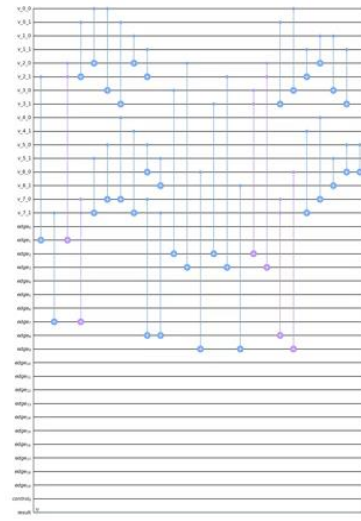
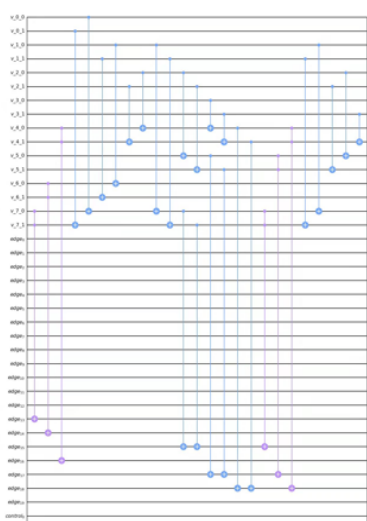
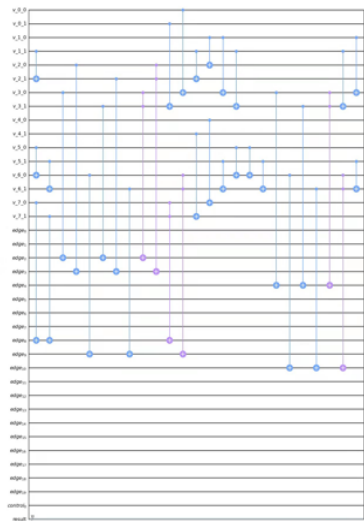
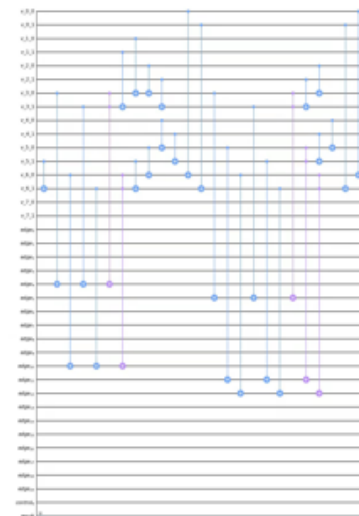
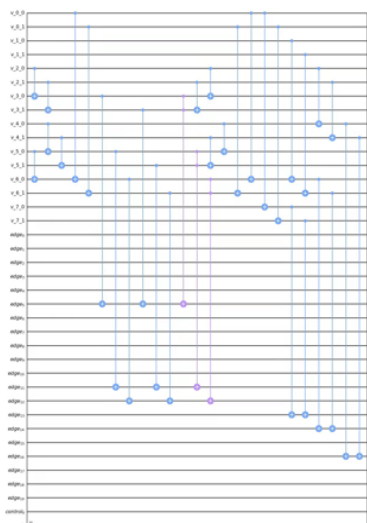
c) 4x2-Sudoku mit 8 Einträgen, davon 3 vorausgefüllt:

X	3	2	X
1	X	X	X

1:Red 2: Blue
3:Green 4: Yellow



Zu viel Qubits und Kosten!!!



Prunning

$x_1 \in \{4\}$	3	2	$x_2 \in \{1,4\}$
1	$x_3 \in \{2,4\}$	$x_4 \in \{3,4\}$	$x_5 \in \{3,4\}$

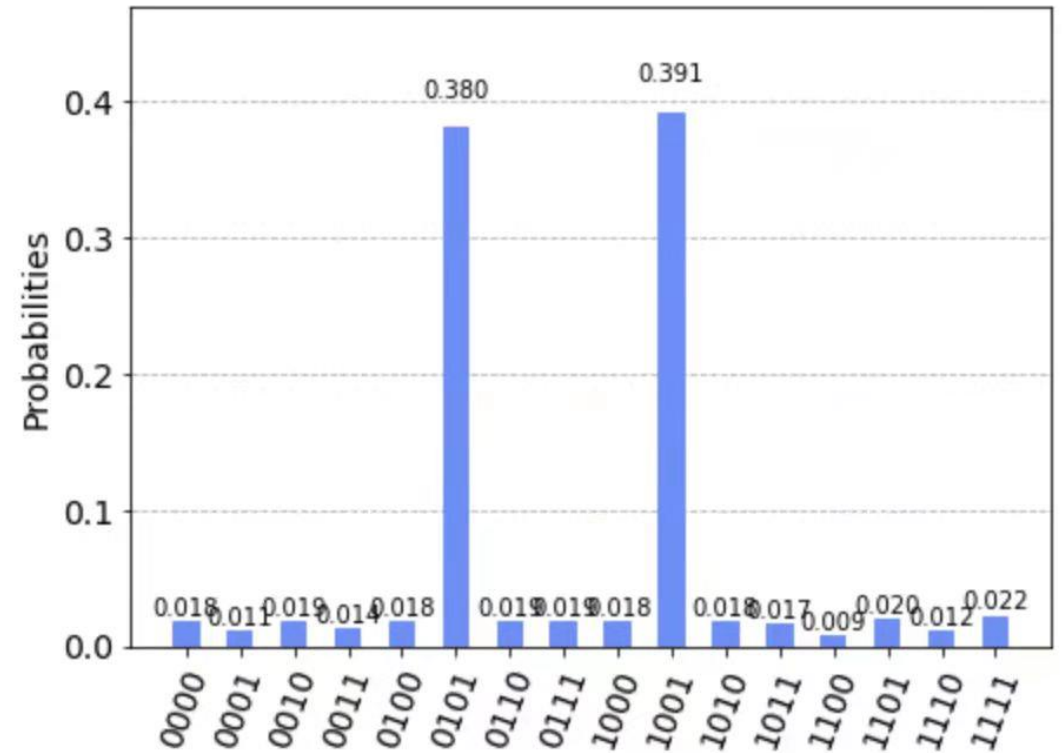
$|\psi_0\rangle : |0\rangle : x_1 = 2, x_3 = 4; |1\rangle : x_1 = 4, x_3 = 2$

$|\psi_1\rangle : |0\rangle : x_2 = 1; |1\rangle : x_2 = 4$

$|\psi_2\rangle : |0\rangle : x_4 = 3; |1\rangle : x_4 = 4$

$|\psi_3\rangle : |0\rangle : x_5 = 3; |1\rangle : x_5 = 4$

Der Schaltkreis und das Ergebnis nach Pruning



Analyse von Ergebnissen

- “1001”:

4	3	2	1
1	2	3	4

- “1010”:

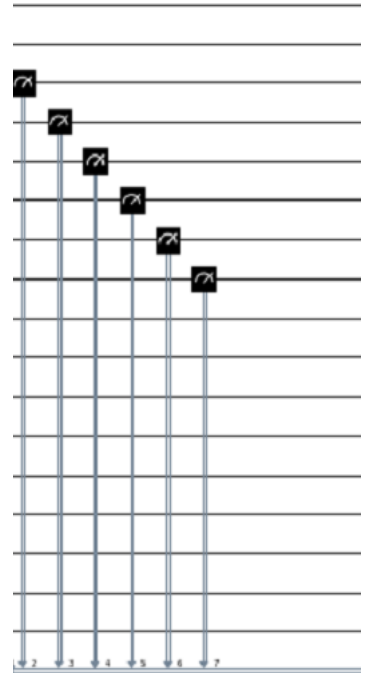
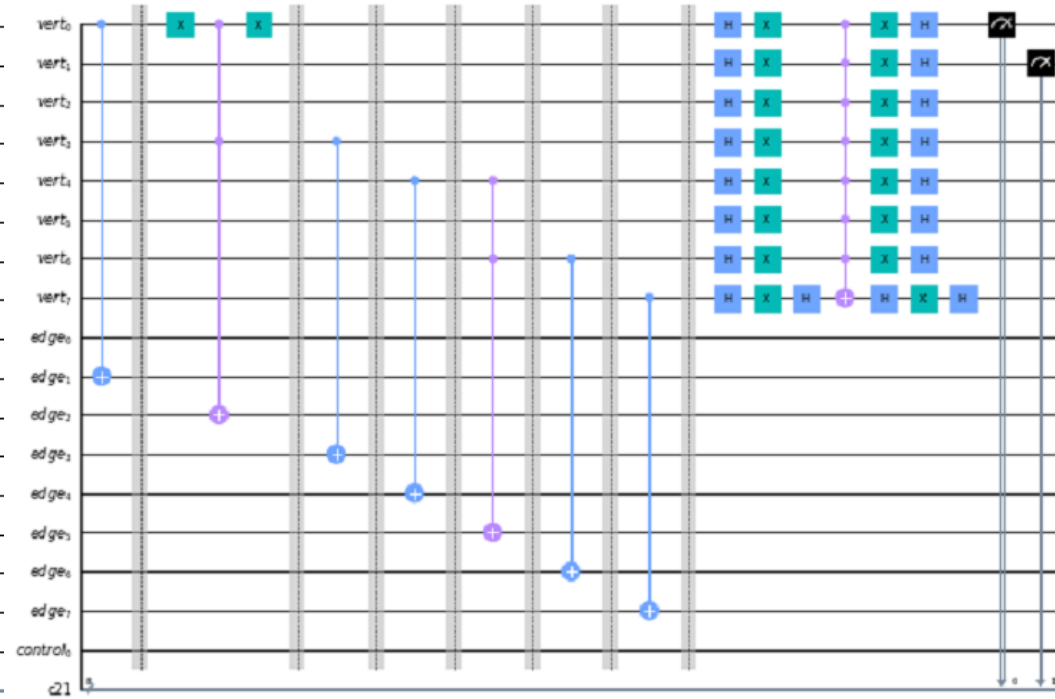
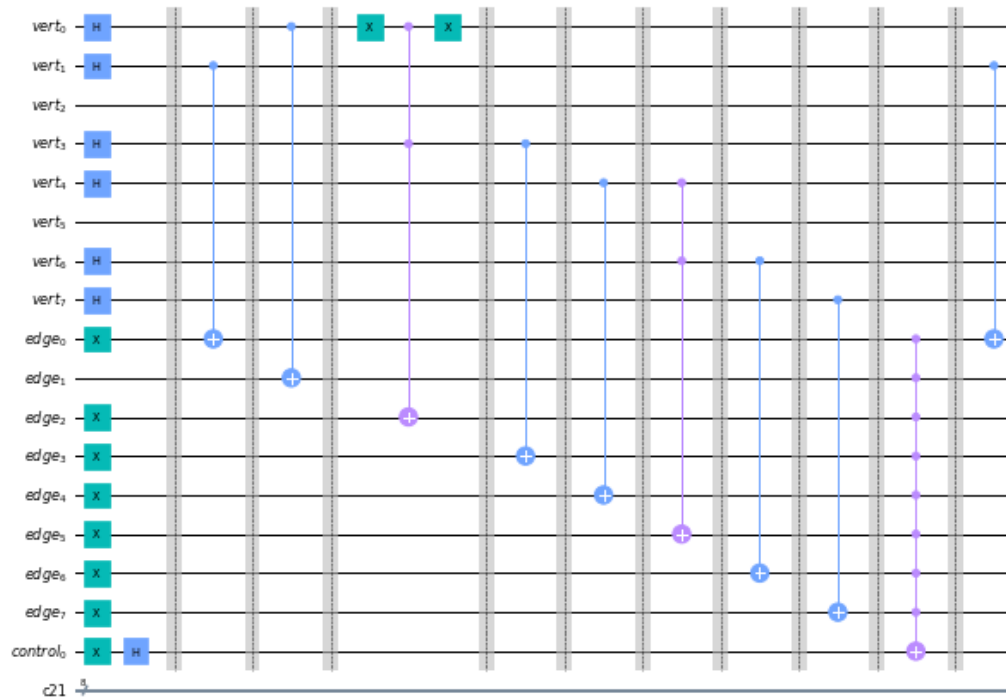
4	3	2	1
1	2	4	3

Problem_e

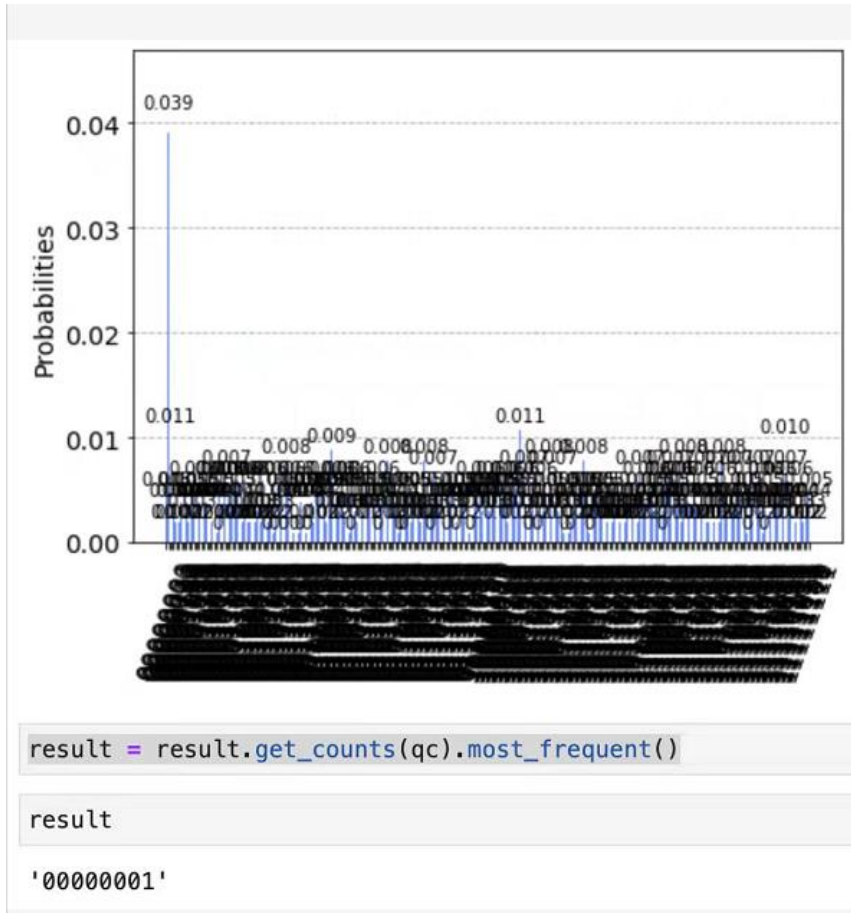
e) 4x4-Sudoku mit 16 Einträgen, davon 6 vorausgefüllt:

X	3	2	X
1	X	X	X
X	X	X	2
X	1	3	X

Der Schaltkreis von Problem_e



Das Ergebnis von Problem_e



4	3	2	1
1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4

Grover und QAOA Kosten Vergleich

	A	B	C	D	E	F
	<div> <div>0</div> <div>1</div> </div>	<div> <div></div> <div></div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>4</div> <div>1</div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>4</div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>1</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>4</div> </div>	<div> <div>1</div> <div>4</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>4</div> </div>
QAOA	4 qubits, 95	8 qubits, 268	8* qubits, 231	8 qubits, 274	12* qubits, 240	22* qubits, 986
Grover	9 qubits, 579	9 qubits, 725	9* qubits, 1022	5* qubits, 95	17* qubits, 13011	X

- Kosten von einem Schlatkreis wurden folgendes berechnet:
 $K(qc) = \text{Num_of}('u3') + 10 * \text{Num_of}('cx')$

QA, QAOA und Grover Vergleich

	A	B	C	D	E	F
	<div> <div>0</div> <div>1</div> </div>	<div> <div></div> <div></div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>4</div> <div>1</div> <div></div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>4</div> <div></div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> <div></div> <div>1</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>2</div> <div>1</div> <div>3</div> <div></div> </div>	<div> <div>1</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>4</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>3</div> <div>3</div> <div></div> <div></div> </div>
	4 Variablen	8 Variablen	8* Variablen (mit Pruning)	8 Variablen	16* Variablen (mit Pruning)	22* Variablen (mit Pruning)
QA	✓	✓	✓	✓	✓	✓
QAOA	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Grover	✓	✓	✓	✓	✓	X

QA, QAOA und Grover Vergleich

	A	B	C	D	E	F	Extra
	<div> <div>0</div> <div>1</div> </div>	<div> <div></div> <div></div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>4</div> <div>1</div> <div></div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>2</div> <div>3</div> <div>4</div> <div></div> </div>	<div> <div>3</div> <div>2</div> <div>1</div> <div>4</div> <div>1</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>2</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>1</div> <div>3</div> <div></div> </div>	<div> <div>1</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>4</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>3</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>3</div> <div></div> </div>	<div> <div>5</div> <div>3</div> <div></div> <div>7</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>6</div> <div></div> <div>1</div> <div>9</div> <div>5</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>8</div> <div>9</div> <div>8</div> <div></div> <div></div> <div></div> <div>6</div> <div></div> <div>8</div> <div></div> <div>6</div> <div></div> <div>3</div> <div></div> <div>1</div> <div></div> <div>6</div> <div></div> <div>2</div> <div>8</div> <div></div> <div>5</div> <div></div> <div>8</div> <div></div> <div>7</div> <div>9</div> </div>
	4 Variablen	8 Variablen	8* Variablen (mit Pruning)	8 Variablen	12* Variablen (mit Pruning)	22* Variablen (mit Pruning)	149* Variablen (mit Pruning)
QA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
QAOA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X
Grover	✓	✓	✓	✓	✓	X	X

Auf DWave Leap

Q

&

A