

Математический анализ

Коченюк Анатолий

6 октября 2020 г.

Оглавление

0.1 Введение

Семёнова Ольга Львовна

o_semenova@mail.ru

Литература:

1. Виноградов О.Л. Курс Математического анализа
2. Виноградов, Громов –||–
3. Фихтенгольц (курс)
4. Зорич (курс, двухтомник)
5. Кудрявцев (сборник задач, 1 том из трёх)
6. Виноградова, Олехник, Саровничий (1 том из двух)

0.2 Баллы

практика – 70/100

теория – 30/100 – 2-4 теста по теории (3 балла за присутствие на ~всех лекциях)

Если меньше 18/30 баллов, то всю теорию нужно будет пересдавать. Иначе можно воспользоваться этим как баллами за экзамен.

Глава 1

Множества, отображения, \mathbb{R}

1.1 Множества

”Множество” – неопределяемое слово. Синонимы: набор, совокупность, класс

Множество состоит из элементов. $M = \{1, 3, 7, 9\}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$

способы описания:

- явное описание $\{1, 2, 3\}$
- через некоторое свойство $M = \{x : P(x)\}$: – читается как ”таких что”. Тот же смысл имеет $\{x : P(x)\}$. $P(x)$ обозначает какое-то свойство. $M = \{x : xx - \text{человек и } x \text{ 2002 г.р.}\}$

Кванторы:

- \forall – ”для любого”, любой, каждый, всякий ...
- \exists – ”существует”

Пример: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \dots$

Для любого положительного эпсилон существует положительное число дельта, т.ч. ... Обозначения:

- \Longleftrightarrow – равносильно
- \wedge – ”и”
- \vee – ”или”
- \square пусть
- \triangleleft – допустим, рассмотрим

Замечание. Множество всех множеств не существует

\neg – отрицания

$\neg\exists$ – не существует

\emptyset – пустое множество

$x \in M \iff x$ – элемент множества M

$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$

$B \supseteq A$ – то же самое

\forall множества $M \quad \emptyset \subseteq M$

$A = B \iff (x \in A \iff x \in B) \iff \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$

A, B – множества

$A \cup B = \{x : (x \in A \vee x \in B)\}$

$A \cap B = \{x : (x \in A \wedge x \in B)\}$

$x \in A \cap B \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

$A \subset C$

$A^c = X \setminus A$ – дополнение A в X

Определение 1. A, X_α – множества, $\forall \alpha \in A$

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство множеств

A – индексное множество

$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\}$

$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\}$

Пример. $\{(x-1, x+1)\}_{x \in (0;1)}$

$\bigcup_{x \in (0;1)} (x-1, x+1) = (-1, 2), \quad \bigcap_{x \in (0;1)} (x-1, x+1) = (0; 1)$

Определение 2 (Формула Де Моргана). $A, B \subseteq X$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$\{A_i\}$ – семейство

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Замечание. $A^{cc} = A$ – проверить-упражнение

Доказательство. $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c \iff x \notin \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \iff \forall i \in I, x \notin A_i \iff$
 $\forall i \in I, x \in A_i^c \iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$

$$(\bigcap A_i)^c = (\bigcap A_i^{cc})^c = (\bigcup A_i^c)^{cc} = \bigcup A_i \quad \blacksquare$$

Определение 3 (упорядоченная пара). A, B

(a, b) – упорядоченная пара, $a \in A, b \in B$. В этой паре важен порядок

$\{a, b\}$ – неупорядоченная пара (двухэлементное множество), если $a \neq b$

$a, a = a$ (в множестве не различаются копии)

Пример: координаты точек плоскости.

$X_1, \dots, X_m \quad x_1 \in X_1 \dots x_m \in X_m \quad (x_1, \dots, x_m)$ – упорядоченная пара

Определение 4 (Декартово произведение). $X_1 \times \dots \times X_m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_k \in X_k \quad k = 1 : m\}$

$$R^m = (R)^m$$

Пример. $X = \{1, 2\}$

$$Y = \{3, 5\}$$

$$Z = \{0\}$$

$$X \times Y \times Z = \{(1, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 5, 0)\}$$

1.2 Отображения

формальное определение, которое не будет использовано или потребовано нигде (в том числе на экзамене)

Определение 5. X, Y – множества

если $R \subset X \times Y$ и $(x, y_1) \in R \vee (x, y_2) \in R \iff y_1 = y_2$

R называется отображением или графиком

Определение 6. Отображение – это тройка (X, Y, f) , где X, Y – множества, а f – некое правило по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется некоторый единственный элемент $y \in Y$

$f : X \rightarrow Y$ – синоним. читают ” f действует из X в Y ”

X – множество определения отображения

Y – множество значений

$\{y \in Y : \exists x \in X f(x) = y\} \subset Y$ (т.е. Y – необязательно точное множество значений)

Пример. $x \in \mathbb{R}, Y = \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$

если $y = f(x)$, то y называется образом элемента x при отображении f

$A \subseteq X \quad f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ – образ множества A под действием f

$B \subseteq Y \quad f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$

$f^{-1}(\{y\})$ – необязательно одноэлементное.

упражнения:

1. $f(A \cup B), f(A) \cup f(B)$

2. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B) \quad y \in f(A \cap B) \implies \exists x \in A \cap B : f(x) = y. x \in A, x \in B, y \in f(A), y \in f(B) \implies y \in f(A) \cap f(B)$

$f(x) = \text{const} \quad f(A) \cap f(B) \neq \emptyset, f(A \cap B) = \emptyset$, если $A \cap B = \emptyset$

3. $f^{-1}(A \cup B), f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

4. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B)$

Определение 7. Если $f : X \rightarrow Y, g : X_1 \rightarrow Y \quad X_1 \subseteq X$
и $\forall x \in X_1 \quad g(x) = f(x)$, то g называется сужением f на X_1
Обозначение: $g = f|_{X_1}$
При этом f называется продолжением g с X_1 на X

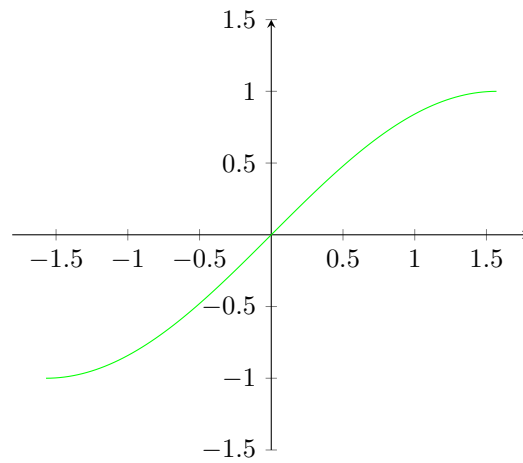


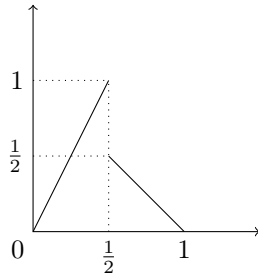
Рис. 1.1: sinus

Пример. $f(x) = \sin x \quad f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

Определение 8. Если $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$
 $g \circ f : X \rightarrow Z$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in X$
 $g \circ f$ называется композицией f и g

Пример. Изобразить эскизы графиков функций для всех случаев

1. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$
3. $f(x) = g(x)$



построить $f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}$ без формул

Определение 9. Пусть $f : X \rightarrow Y$, f называется инъекцией, если

$$\begin{cases} f(x_1) = y \\ f(x_2) = y \end{cases} \implies x_1 = x_2$$

Пример. $f(x) = kx + b$ – инъекция, $k \neq 0$

$f(x) = \sin x$ – не инъекция

$f(x) \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ – инъекция

Определение 10. $f : X \rightarrow Y$, f называется сюръекцией, если $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

Пример. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – не сюръекция

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ – сюръекция

$y = kx + b, k \neq 0$ – сюръекцией

Определение 11 (биективность). $f : X \rightarrow Y$ – инъекция и сюръекция $\implies f$ называется биекцией

Пример. $y = kx + b, k \neq 0$ – биекция

Определение 12. $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$
 g называется обратным к f отображением, если $f(x) = y \iff x = g(y)$
 Обозначается: $g = f^{-1}$

Замечание. Обратимая функция должна быть биективной:

Инъективной – обратная иначе не будет функцией

Сюръективной – обратная не будет определена на всём Y

Замечание. $f^{-1}(A)$ – обычно прообраз A под действием f , а не образ обратной функции (которая может не существовать)

Пример. $\arcsin = (\sin_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$

$$\log_a(x) = (a^x)^{-1}$$

$$\sqrt{x} = (x^2 \mid_{[0, +\infty)}), \sqrt[3]{x} = (x^3)^{-1}$$

1.3 Вещественные числа

1.3.1 Аксиоматическое определение вещественных чисел

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ – множество и две операции, и отношение порядка, удовлетворяющее следующим 16 аксиомам:

Аксиомы поля:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. \exists нейтральный элемент 0 по сложению $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
4. Существует обратный элемент по сложению. $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} : \quad a + (-a) = 0$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$
8. $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$
9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)

примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1\}$ ($1 + 1 = 0$, остальное как обычно)

Элементарные следствия:

- $\forall a \in K$ – поля, обратный по сложению единственный. Если b, b' – два обратных. $b = b + (a + b') = (b + a) + b' = b'$
- обратный по умножению, нейтральные – все единственны

Аксиомы порядка:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \vee b \leq a$

$$2. a \leq b, b \leq c \implies a \leq c \text{ (транзитивность)}$$

$$3. a \leq b, b \leq a \implies a = b$$

$$4. a \leq b, c \in \mathbb{R} \implies a + c \leq b + c$$

$$5. a \geq 0, b \geq 0, \text{ то } a \cdot b \geq 0$$

$$0 \cdot x + x \cdot x = (0 + x) \cdot x = x \cdot x \implies 0 \cdot x = 0$$

Упражнения:

$$1. -x = (-1) \cdot x$$

$$2. (-a)(-b) = a \cdot b$$

$$3. 1 \geq 0$$

Определение 13. Индуктивным множеством в упорядоченном поле $(K, +, \cdot, \leq)$ называется множество N :

$$1. 1 \in N$$

$$2. \forall x \in N \implies x + 1 \in N$$

\mathbb{N} – наименьшее индуктивное множество. $\mathbb{N} = \bigcap_{N - \text{индуктивных}, N \subseteq \mathbb{R}} N$

Замечание. $x > b \iff \begin{cases} x \geq b \\ x \neq b \end{cases}$

Аксиома Архимеда: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > 0, y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

Аксиома вложенных промежутков:

$$\forall \{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

В аксиоме о вложенных промежутках предполагается, что $\forall n \in \mathbb{N}, [a_n, b_n] \neq \emptyset \iff a_n \leq b_n$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ – замкнутый отрезок, промежуток, сегмент, замкнутый промежуток

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – интервал, открытый промежуток

$(a, b], [a, b)$ – полуоткрытый промежуток

$< a, b >$ – некоторый промежуток $a \leq b, < a, b > \neq \emptyset$

Замечание (Расширенная вещественная прямая). $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$$

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$(+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty)$ – не определены

$\forall a > 0$

- $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\pm\infty \cdot (-1) = \mp\infty$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- $(\pm\infty) \cdot 0, 0 \cdot (\pm\infty)$ – не определены

$\forall a \in \mathbb{R}$

- $+\infty \geq a \geq -\infty$

$$[a, +\infty] = [a, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

В “ $+\infty$ ” иногда $+$ опускают, но подразумевают её, если рассматривается $\overline{\mathbb{R}}$

1.4 Модуль

$$a \in \mathbb{R} \quad |a| = \begin{cases} a & , \text{если } a \geq 0 \\ -a & , \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Свойство 1. $b = |a| \iff \begin{cases} b \in \{a, -a\} \\ b \geq 0 \end{cases}$

Элементарные свойства модуля:

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad |-a| = |a|$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \pm a \leq |a|$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Замечание. $a - b := a + (-b)$

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}, b \neq 0$$

Замечание. $a \leq b \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a + c \leq b + c$

$$a \leq b \quad b \leq c \implies a \leq c$$

$$a \leq b, c \leq d \quad a + c \stackrel{?}{\leq} b + d$$

$$a + c \leq b + c \quad b + c \leq b + d \implies a + c \leq b + d$$

Доказательство. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

$$\pm a \leq |a|, \pm b \leq |b| \quad \pm(a + b) \leq |a| + |b| \text{ (аксиома порядка 4)}$$

$$\implies |a + b| \leq |a| + |b| \implies |a - b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

$$||a| - |b|| = \pm(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

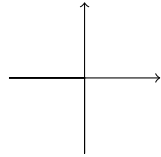
■

Замечание. $|+\infty| := +\infty \quad |-\infty| := +\infty$

1.5 Комплексные числа

\mathbb{C} – обозначение для множества комплексных чисел

$$\mathbb{C} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$



Удобно представлять на плоскости.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Замечание. \mathbb{C} – поле

аксиомы для сложения очевидны.

$$0 = (0, 0)$$

$$1 = (1, 0)$$

$$-(x, y) = (-x, -y)$$

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$i = (0, 1)$$

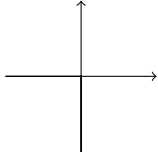
$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

$\mathbb{R} \leftrightarrow \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ (именно такие пары, потому что так сохраняются операции

$F : \mathbb{R} \rightarrow \{(x, 0)\}$ F сохраняет $+$ и сохраняет \cdot .

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$



Оси: вещественная(x) и мнимая(y)

$$(0, y)^2 = (-y^2, 0) \forall y \in \mathbb{R}$$

$(x, y) = x + iy$ $i = (0, 1)$ – мнимая единица. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

$z = x + iy$ x – вещественная часть z , y – мнимая часть z

$Re z = x$, $Im z = y$ иногда встречается rp, ip – real/imaginary part

Замечание (Комплексное сопряжение). $z = x + iy$ $\bar{z} = x - iy$ – отражённое от оси x , если смотреть на плоскость.

$$Re z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \text{ – вещественные числа!}$$

Замечание (Модуль и аргумент). $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$(z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2)$$

$$r = |z|$$

Аргумент – угол (ориентированный) между осью Ox и \vec{Oz}

Аргументов много $Arg z, z \neq 0$ – совокупность всех аргументов

Если $\varphi_0 \in Arg(z)$, то $Arg z = \{\varphi_0 + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$

$\begin{cases} \varphi_0 \in Arg z \\ \varphi_0 \in (-\pi, \pi] \end{cases} \implies \varphi_0$ Называется главным значением аргумента $\varphi_0 = arg(z)$

$z = (x, y) = (r, \varphi)$, r – длина радиус-вектора, φ – аргумент.

(r, φ) – полярные координаты, совмещённые с прямоугольными

Замечание. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \cos \varphi$$

$$x > 0 \quad \operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y > 0 \quad \operatorname{arg} z = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y < 0 \quad \operatorname{arg} z = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$$

остальное – упражнение

Изобразить кривую заданную в полярных координатах

1. $r = 3$

2. $r = \varphi$ – спираль Архимеда

3. $r = e^\varphi$

4. $r = \frac{1}{\cos \varphi}$

5. $r = \frac{2}{\sin \varphi}$

6. $r = \frac{3}{\cos \varphi + \sin \varphi}$

7. $r = 1 + \cos \varphi$

$(0, 0)$ – полюс

$r(\varphi) \uparrow$ – удаление от полюса

$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – в скобках точка на единичной окружности с аргументом таким же, что и у z

Это называется тригонометрической формой записи числа.

$$-\frac{1}{2}(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\varphi_0 + \pi) + i \sin(\varphi_0 + \pi))$$

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

$r \cdot e^{i\varphi}$ – экспоненциальная (показательная) форма числа

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Если $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (\text{см. курс алгебра})$$

$n \in \mathbb{N} \quad z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ – формула Муавра

1.6 Дополнение к разделу “Действия над множествами”

Утверждение 1. $\sqsubset B - \forall$ множество, $\{A_i\}_{i \in I} - \forall$ семейство множеств

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } x \in B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) &\iff \begin{cases} x \in B \\ x \in \bigcup_{i \in I} A_i \end{cases} \iff \begin{cases} x \in B \\ \exists i : x \in A_i \end{cases} \iff \\ \exists i : \begin{cases} x \in B \\ x \in A_i \end{cases} &\iff \exists i : x \in B \cap A_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.7 Принцип математической индукции

P_n - утверждение, зависящее от n

$$\text{Если } \begin{cases} P_1 - \text{верно} \\ P_n \rightarrow P_{n+1} \end{cases} \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad P_n - \text{верно}$$

$$\{n : P_n - \text{верно}\} - \text{индуктивно} \implies \mathbb{N} \subseteq \{n : P_n - \text{верно}\}$$

Первый шаг (проверка P_1) называется базой индукции, а второй – переходом

Пример. $2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$

$$P_4 \quad 2^4 \geq 4^2 \quad 16 \geq 16 - \text{верно}$$

$$\sqsubset P_n - \text{верно}$$

$$P_{n+1} \quad 2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq n^2 \cdot 2 \stackrel{?}{\geq} (n+1)^2 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leq 2$$

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leq 2$$

Определение 14. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

$0! := 1$ – соглашение

$(n+k)! = n! \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)$

$n!! = n \cdot (n-2) \cdot \dots$ (заканчивается либо 1, либо 2)

n – чётно, $n!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$

n – нечётно, $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$

Определение 15 (биномиальный коэффициент). $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, число сочетаний из n по k

$$\binom{n}{k}$$

Элементарные свойства биномиальных коэффициентов:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$

3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \cdot (n+1-k+k) = C_{n+1}^k$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & & & & & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & & & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Утверждение 2. $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ – бином Ньютона

Замечание. $\sum_{k=1}^N a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_N$

$\sum_{k=m}^{m+p} a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+p}$

$\prod_{k=m}^{m+p} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{m+p}$

Замечание. $x^0 := 1 \forall x \in \mathbb{C}$ – определили функцию

Доказательство бинома по индукции. База: $n = 1$ $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a + b$

Переход: Пусть верно для n . Докажем для $n + 1$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}\right) \cdot (a+b) = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \\ &\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{(j=k+1)}^{n+1} C_n^{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=j}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \\ &\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^k a^k b^{n+1-k}) + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \\ &C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^{n+1} b^{n+1-k} + C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}\right) \cdot (a+b)$$

что и требовалось доказать ■

1.8 Метрические пространства

Определение 16. \square X – любое множество, а $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$

Тогда пара (X, ρ) называется метрическим пространством, если функция ρ удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (невыврожденность)
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника)

Тогда ρ называется метрикой или расстоянием на X .

Пример. 1. (X, ρ_D) – метрическое пространство

$$\rho_D(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{если } x = y \\ 1 & , \text{если } x \neq y \end{cases}$$

2. $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$

$$x - y = a, y - z = b \quad \rho(x, z) = |a - b| \leq |a| + |b| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Обычная или Евклидова метрика

$$\sim 2 \quad X = \mathbb{C} \quad \rho(z, w) = |z - w| \quad (\text{аксиома 3 будет проверена позже})$$

$$\sim 2 \quad X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

$$v = (v_1, \dots, v_n) \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} \text{ – евклидова норма вектора } v$$

3. $\sqsupset (X, \rho)$ – метрическое пространство

$$\sqsupset X_1 \subseteq X \quad \rho_1 = \rho|_{X_1 \times X_1}$$

(X_1, ρ_1) – есть метрическое пространство, а ρ_1 называется индуцированной метрикой.

4. X – множество станций метрополитена г. Санкт-Петербурга. Пусть между соседними станциями расстояние – 2 минуты. $\rho(u, v) = \min$ длин путей из u в v

ρ – метрика

Определение 17. Открытый шар с центром в точке a радиусом R в метрическом пространстве (X, ρ) :

$$B_R(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < R\}$$

$$B_R[a] = \{x \in X : \rho(x, a) \leq R\}$$

Пример. 1. $(0 \vee 1) \quad B_R(a) = \begin{cases} \{a\} & , \text{если } R \leq 1 \\ X & , \text{если } R > 1 \end{cases}$

2. $(a - R, a + R)$

3. круг (без окружности)

4. n -мерный шар

$$\text{в } \mathbb{R}^n \quad \|v\|_1 = \sum_{k=1}^n |v_k| \quad \|v\|_\infty = \max_{k=1:n} |v_k|$$

Определение 18. $E \subseteq \mathbb{R}, \begin{cases} M \in E \\ \forall x \in E \quad M \geq x \end{cases} \implies M := \max E$

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

$$\rho_1(x, y) = \|x - y\|_1 \quad \rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$$

Упражнение: Проверить, что ρ_1, ρ_∞ – метрики, нарисовать шар в \mathbb{R}^2 относительно ρ_1, ρ_∞

Определение 19. $\sqsupset (X, \rho)$ – метрическое пространство

$E \subseteq X, E$ Называется ограниченным, если

$$\exists a \in X, \exists R > 0 : \quad E \subseteq B_R(a)$$

Замечание. Эквивалентное определение: те же слова, но $B_R[a]$

Определение 20. $\sqsubset E \subseteq \mathbb{R}$ E называется ограниченным сверху, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \leq m.$$

При этом такое число m называется мажорантой

Говорят: m мажорирует E

Аналогичное определение для ограниченности снизу. Соответствующее m называется минорантой

Утверждение 3. $\sqsubset E \subseteq \mathbb{R}$

$$E \text{ — ограничено} \iff \begin{cases} E \text{ — ограничено сверху} \\ E \text{ — ограничено снизу} \end{cases}.$$

Доказательство. \implies По условию $\exists a : E \subseteq (a - R, a + R)$

$M := a + R$ — мажоранта $\implies E$ ограничено сверху. снизу — аналогично

$$\iff E \text{ — ограничено сверху} \implies \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \leq M$$

$$\dots \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \geq m$$

$$-x \leq -m \leq |m| \implies |x| = \max\{x, -x\} \leq \max\{|M|, |m|\} = R$$

$$\implies x \in B_R[0]. \text{ Т.к. это верно } \forall x \in E, \text{ то } E \subseteq B_R[0] \quad \blacksquare$$

Замечание. Если $E \subseteq \mathbb{R}$, то

$$E \text{ — ограничено} \iff \exists R : \forall x \in E \quad |x| \leq R.$$

Определение 21. $E \subseteq \mathbb{R}, M \in E$, тогда

$$M = \max E \iff \forall x \in E \quad x \leq M.$$

$\min E$ аналогично

Утверждение 4. $\forall E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ — конечно и } E \neq \emptyset \implies \max E, \min E$

Определение 22. E конечно, если $\exists m \in \mathbb{N}$ и \exists биекция $\varphi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$

доказательство Утверждения. По индукции по числу элементов в E

База: $m = 1 \quad E = \{x\} \quad \max E = \min E = x$

Переход: $m \rightarrow m + 1$

Индукционное предположение: \forall конечное множество из M элементов имеет \max и \min

Пусть E содержит $m + 1$ элементов

$$E = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\} = \tilde{E} \cup \{x_{m+1}\}$$

$$M = \max\{\max \tilde{E}, x_{m+1}\}$$

$$\begin{cases} M \in \tilde{E} & \subseteq E \\ M = x_{m+1} & \in E \end{cases} \implies M \in E$$

$$\begin{cases} M \geq x_{m+1} \\ M \geq x \forall x \in \tilde{E} \end{cases} \implies M \geq x \forall x \in E, \text{ т.о. } M = \max E \quad \blacksquare$$

Следствие 1. $\sqsupset E \subseteq \mathbb{Z}, E$ – ограничено сверху (снизу).
Тогда $\exists \max(\min)E$

Доказательство. По условию существует $M \in R : \forall x \in E \quad x \leq M, \tilde{\sqsupset} M \geq M$

$$\sqsupset n \in E \quad \triangleleft \tilde{E} = \{x \in E : n \leq x \leq \tilde{M}\}$$

В \tilde{E} не более $\tilde{M} - n + 1$ элементов, оно конечно \implies (по утверждению)
 $\exists \max \tilde{E} = C$

$$\forall x \in E^x < n \vee x \geq n$$

$$x < n \quad n \in \tilde{E} \implies n \leq C \implies x \leq C$$

$$x \geq n \quad x \in \tilde{E} \implies x \leq C \quad \blacksquare$$

Следствие 2. $\sqsupset E \subseteq \mathbb{N} \quad E \neq \emptyset$ Тогда $\exists \min E$
(вытекает из следствия 1, т.к. \mathbb{N} ограничено снизу)

$[x]$ – целая часть числа. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ (Существует по следствию 1)

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

Утверждение 5. \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R}

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad \exists c \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$$

Доказательство. $b - a > 0 \implies \frac{1}{b-a} > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{1}{b-a} \iff b - a > \frac{1}{N}$$

$$c = \frac{\lfloor Na \rfloor + 1}{N} \in \mathbb{Q}$$

$$Na - 1 < \lfloor Na \rfloor \leq Na \implies a = \frac{Na}{N} < c \leq \frac{Na+1}{N} = a + \frac{1}{N} < a + b - a = b$$

$$\implies c \in (a, b)$$

■

1.9 Равномощные множества

Определение 23. $\sqsubset A, B$ – множества.

$A \sim B$ равномощны, если \exists биекция между A и B

Пример. 1. $(a, b), a < b \sim (0, 1)$

$$f(x) = a + (b - a) \cdot x, x \in (0, 1)$$

2. $\forall (a, b)$ и (c, d) равномощны

$$2. a < b \implies (a, b) \sim [a, b] \sim [a, b]$$

$$3. \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R} \quad (\text{tg})$$

Замечание. (равномощность) \sim – отношение эквивалентности.

$$1. X \sim X \quad id(x) \equiv x \text{ – тождественное отображение } id_X$$

$$2. X \sim Y \implies Y \sim X$$

$$3. X \sim Y \quad Y \sim Z \implies X \sim Z$$

Определение 24. Множество, равномощное \mathbb{N} называется счётным

Пример. • $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ – счётно. $f(x) = x^2$

• $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$ – считаем их натуральными числами в таком порядке

$$\bullet \{m, m+1, m+2, \dots\}, m \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = m + x - 1$$

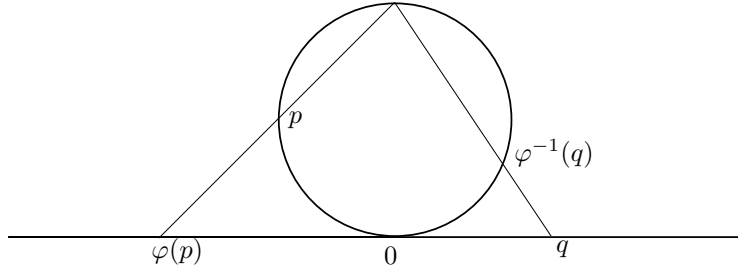


Рис. 1.2: circ

Теорема 1. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество

Доказательство. \square X – бесконечное множество. $\implies \exists a_1 \in X \quad X \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ (Иначе $X = \{a_1\}$!!!) $\implies \exists a_2 \in X \setminus \{a_1\} \quad a_2 \neq a_1$

Так можно продолжать для любого n . $X \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ (иначе X конечно) $\implies \exists a_{n+1} \in X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \quad a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi : n \rightarrow a_n \quad A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \varphi$ – инъекция по построению. A – счётное ■

Определение 25. Если X – конечно $\vee X$ – счётно, то X называется не более чем счётным (нбчс).

Замечание (уточнение понятие конечного). X конечно $\iff \begin{cases} X \sim \{1, \dots, n\} \\ X = \emptyset \end{cases}$

Теорема 2. \forall счётного E , если $X \subseteq E$, X – бесконечно, то X – счётно.

Замечание. Любое подмножество счётного не более чем счётно.

Доказательство. E – счётно по условию $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \dots\}$

В данном наборе есть элементы из X . Пронумеруем их в порядке возникновения в наборе (*). ■

Теорема 3. Произведение счётных множеств счётно.

A, B – счётны $\implies A \times B$ – счётно

Доказательство. Если $A = B = \mathbb{N}$ счётно

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \text{ – нумеруем по диагоналям}$$

$$A \times B = \{(a_k, b_j)\}_{k,j \in \mathbb{N}} \quad l \rightarrow (k, j) \quad = \{(k, j)_l\}_{l \in \mathbb{N}} \quad \blacksquare$$

Замечание. Любое конечное произведение $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_m = (\mathbb{N}^m) \sim \mathbb{N}$ не более чем счётно

Теорема 4. Объединение счётного количества счётных множеств счётно.

$\{\{A_j\}_{j \in J} : J \text{ – не более чем счётно } \forall j \in J \ A_j \text{ не более чем счётно}\}$

$\bigcup_{j \in J} A_j$ – не более чем счётно

Не умаляя общности (н.у.о.) $J = \mathbb{N} \vee J = \{1, 2, \dots, n\}$

Элементы A_1, A_2, \dots (счётных!) множеств можно занумеровать.

$$A_1 : \quad a_{11}, a_{12} \dots$$

$$A_2 : \quad a_{21}, a_{22} \dots$$

$$A_3 : \quad a_{31}, a_{32} \dots$$

Перенумеруем по диагоналям лишь те, который встречаем в первый раз

Следствие 3. 1. \mathbb{Q} счётно. $\mathbb{Q} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_N \quad \mathbb{Q}_N = \{\frac{p}{n}\}_{p \in \mathbb{Z}}$

2. $A = \{x : \exists \text{ многочлен с целыми коэффициенты } P(\cdot) : P(x) = 0\}$

$$\mathbb{P}_n = \{p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\} \quad \mathbb{P}_n \leftrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$A_n = \{x : \exists p \in \mathbb{P}_n : p(x) = 0\} \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Задача 1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots$ – несчётно

Теорема 5. Сегмент несчётен ($\forall a, b : a < b \quad [a, b]$ – не является счётным)

Доказательство. Доказательство от противного.

$\square [a, b]$ – счётен $\implies [a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

\triangleleft три замкнутые “трети” $\Delta = b - a \quad [a, a + \frac{\Delta}{3}], [a + \frac{\Delta}{3}, a + \frac{2\Delta}{3}], [a + \frac{2\Delta}{3}, b]$

$x_1 \notin$ одной из третей. Эту треть назовём I_1 . Повторим действие для I_1 и x_2

$I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_0, x_1 \notin I_1, x_2 \notin I_2$

$I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \dots \subseteq I_2 \quad x_n \notin I_n$

По аксиоме №16 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \quad \square x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \implies c \in [a, b] \implies \exists n : c = x_n \notin I_n \implies c \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n !!!$

Т.о. $[a, b]$ – несчётно ■

Следствие 4. несчётные: $\mathbb{R}, (a, b), \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 $a < b$

$X \sim [0, 1]$, то говорят, что X – мощности континуум (мощности \mathbb{C})

Задача 2. 1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

2. X – множество, то $X \not\sim 2^X \quad 2^X = \{A : A \subseteq X\}$

$X = \emptyset \quad 2^X = \{\emptyset\}$

$X = \{a\} \quad 2^X = \{\emptyset, \{a\}\}$

3. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim [0, 1]$

Определение 26. $\square X$ – любое множество. Отображение из \mathbb{N} в X называется последовательностью в X

вместо $f(n), n \in \mathbb{N} \quad f : \mathbb{N} \rightarrow X$ используют $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $(x_n)_{n=1}^{\infty} \quad n \rightarrow x_n \in X$

1.10 Предел числовой последовательности

Определение 27. $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность вещественных чисел. $x_+ \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_+ \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |x_n - x_+| < \varepsilon.$$

В метрическом пространстве (X, ρ) шар $B_R(a)$ называется также R -окрестностью точки a

Определение 28 (Определение предела на языке окрестностей).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \iff \forall \text{ окрестности } U \text{ точки } x_* \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n \in U$$

Пример. $x_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_* = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad N := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

Замечание. Определение предела на “языке окрестностей” справедливо в случае последовательностей в метрическом пространстве

$$x_n \rightarrow x_* \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \rho(x_n, x_*) < \varepsilon$$

Утверждение 6. $\square x_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}, c \in X, X$ – метрическое пространство $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

Доказательство. $x_* = c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_*) = 0 < \varepsilon \forall \varepsilon > 0$

$N = 1$ ■

Замечание. $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности в метрическом пространстве X и $\exists m \in \mathbb{N} \quad x_n = y_n \forall n \geq m$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ совпадают (если существует один, то существует другой и равны при существовании)

Утверждение 7 (единственность предела). $\square (X, \rho), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X, y, z \in X$

Если $x_n \rightarrow y$ и $x_n \rightarrow z$, то $y = z$

Доказательство. Если $y \neq z$, то $\rho(y, z) = \Delta > 0 \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{2}$

Т.к. $x_n \rightarrow y, x_n \rightarrow z$, то $\exists N_1, N_2 :$

$$\forall n > N_1 \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon$$

$$\forall n > N_2 \quad \rho(x_n, z) < \varepsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad \begin{cases} \rho(x_n, y) < \varepsilon \\ \rho(x_n, z) < \varepsilon \end{cases} \implies \Delta = \rho(y, z) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, z) < 2\varepsilon = \Delta \implies \Delta < \Delta !!! \quad \blacksquare$$

Пример. $x_n = (-1)^{-1} \forall n \in \mathbb{N} \not\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$

Если бы $\exists x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$, то для $\varepsilon = 1 \exists N$

$$n = 2N \quad |(-1)^{n-1} - x_*| = |-1 - x_*| < 1$$

$$n = 2N + 1 \quad |(-1)^{n-1} - x_*| = |1 - x_*| < 1$$

$$2 = |1 - (-1)| \leq |1 - x_* + x_* - (-1)| \leq |1 - x_*| + |x_* - (-1)| < 2$$

Определение 29. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если ограничено множество её значений $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Определение 30. В метрическом пространстве сходящейся последовательностью называется последовательность, у которой существует предел (в этом пространстве)

Теорема 6. Сходящаяся в метрическом пространстве последовательность ограничена.

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся в метрическом пространстве (X, ρ) последовательность, т.е. $\exists x^* \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x^*) < \varepsilon$

$$\square \varepsilon = 1, \square N = N(\varepsilon), \text{ т.е. } \forall n > N \quad \rho(x_n, x^*) < 1$$

$$R = \max\{\rho(x_1, x^*), \rho(x_2, x^*), \dots, \rho(x_N, x^*), 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_r[x^*] \implies \{x_n\} \text{ – ограничена} \quad \blacksquare$$

Теорема 7 (предельный переход в неравенствах). $\square \{x_n\}, \{y_n\}$ – вещественные последовательности. $x_n \rightarrow x_*, y_n \rightarrow y_* \quad x_*, y_* \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad x_n \leq y_n \implies x_* \leq y_*$

Отметим, что из $x_n < y_n$ НЕ следует, что $x_* < y_*$.

Пример: $x_n = 0, y_n = \frac{1}{n}, x_* = y_* = 0$, но при этом $x_n < y_n \forall n \in \mathbb{N}$

Доказательство. от противного. $\square x_* > y_* \quad \varepsilon = \frac{x_* - y_*}{2}$

Т.к. $x_n \rightarrow x_*$, то $\exists N_1 (= N(\varepsilon)) : \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \quad |x_n - x_*| < \varepsilon$

$\exists N_2 (= N(\varepsilon)) \forall n > N_2 \quad |y_n - y_*| < \varepsilon$

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$ и $n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies \begin{cases} |x_n - x_*| < \varepsilon \\ |y_n - y_*| < \varepsilon \end{cases} \implies$
 $\begin{cases} x_n - x_* > -\varepsilon \\ y_n - y_* > -\varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x_n > x_* - \varepsilon = x_* - \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \\ y_n < y_* + \varepsilon = y_* + \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \end{cases} \implies y_n < x_n$
!!! ■

Частные случаи(следствия): Пусть $\{x_n\}$ – вещественная последовательность

1. $\square \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq b, b \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$
2. $\dots \geq a \dots \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a$
3. $\square n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [a, b]$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$

Теорема 8 (о зажатой последовательности. “Принцип двух милиционеров”). $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вещественные последовательности.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n \leq z_n$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ (и пределы существуют), то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и $a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Доказательство. $\triangleleft \forall \varepsilon > 0$

Т.к. $x_n \rightarrow a$, то $\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon$

Т.к. $z_n \rightarrow a$, то $\exists N_2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > N_2, \quad |z_n - a| < \varepsilon$

$N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда $n \in \mathbb{N} \quad n > N$

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |z_n - a| < \varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x_n > a - \varepsilon \\ y_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies |y_n - a| < \varepsilon \implies y_n \rightarrow a$ ■

Определение 31. $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой, $x_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$

Замечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м. $\iff \{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.

$\{x_n\}$ – б.м. $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| < \varepsilon \implies |x_n| -$
б.м. $(||x_n| - 0| < \varepsilon)$

Определение 32. Число N из определения предела последовательности x_n называется ε -допуском этой последовательности, $\mathcal{D}(\varepsilon)$ – набор всех ε -допусков для данной последовательности

Пример. Найти (какой-нибудь) ε -допуск для последовательности $\sqrt{\frac{n+1}{n}} = x_n$ для $\varepsilon > 0$

Доказательство. Найти $N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad \left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon \quad \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \quad \blacksquare$

Определение 33. (X, K) – X – множество, K – поле ($K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}$)

“+” определено в X , \cdot на элемент K

$$\forall x, y \in X \quad x + y \in X \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot k \in X$$

(X, K) называется векторным (линейным) пространством, если

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = z + (y + z)$
3. $\exists 0 \in X \quad x + 0 = x$
4. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
5. $\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x \in X \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
6. $\forall \alpha \in K \forall x, y \in X \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7. $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$

Пример. 1. $X = \mathbb{R} = K \quad X = \mathbb{C} = K \quad X = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$

2. $X = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$ – основной пример векторного пространства.

3. $X = \{f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}\}, K = \mathbb{R} \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \forall \alpha \in K, \forall f \in X$
 $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$$0(x) \equiv 0$$

Определение 34. $\square (X, K)$ – векторное пространство.

$p : X \rightarrow [0, +\infty)$ называется нормой на X , если

1. $p(x) = 0 \iff x = \mathbb{0}$ (невырожденность)
2. $\forall \alpha \in K \forall x \in X \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ (положительная однородность)
3. $\forall x, y \in X \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника)

Функция $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ и обладает свойствами 2, 3 называется полунормой.

Элементарные свойства полнормы:

1. $\forall x, y \in X \forall \alpha, \beta \in K \quad p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$
2. $\forall x \in X \quad p(-x) = p(x)$
3. $p(x - y) \geq |p(x) - p(y)|$
 $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$
 $p(x) - p(y) \leq p(x - y) \quad p(y) - p(x) \leq p(y - x) = p(x - y)$

Замечание. Норма порождает метрику. (X, p) , X – векторное пространство.

$$\rho(x, y) = p(x - y) \leq p(x - z) + p(z - y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Замечание. “Обычное” обозначение нормы $\|x\|$ вместо $p(x)$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \text{ – евклидова норма, } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1:n} |x_k|$$

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty) \text{ – норма (проверка позже)}$$

Пример. $F(x)$ – строго монотонное возрастает, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rho_F(x, y) = |F(x) - F(y)| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$|F(x) - F(z)| = |F(x) - F(y) + F(y) - F(z)| \leq |F(x) - F(y)| + |F(y) - F(z)| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

“ $\|x\|$ ” = $\rho(x, \cdot)$ – не обязательно положительно однородна, т.е не всякая метрика порождена нормой.

Забегая вперёд: $C[a, b] = \{f \text{ – непрерывная на } [a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\}$. Упражнение: доказать, что это норма

Определение 35. $\square (X, K)$ – векторное пространство.

$\langle x, y \rangle: X \times Y \rightarrow K$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется скалярным произведением на X , если

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \mathbf{0}$
2. $\forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in K \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
3. $\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Элементарные следствия:

1. $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\alpha} \langle z, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, y \rangle$
 $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\langle \alpha x + \beta y, z \rangle} = \overline{\alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle x, z \rangle} + \overline{\beta} \overline{\langle y, z \rangle} = \overline{\alpha} \langle z, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, y \rangle$
- 2.

Утверждение 8. Если (X, K) – векторное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, то $\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Доказательство. 1. $y = \mathbf{0}, y = 0 \cdot \mathbf{0} \quad \langle x, y \rangle = \langle x, 0 \cdot \mathbf{0} \rangle = 0$

2. $y \neq \mathbf{0} \implies \langle y, y \rangle \neq 0 \quad z = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \in K$

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \cdot \overline{\alpha} \langle y, y \rangle$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \operatorname{Re} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}$$

3. $2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \cdot \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

■

Утверждение 9 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца). $x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle_2 = \sum x_k y_k$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

$$\langle y, y \rangle = \|y\|_2^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

Теорема 9 (О связи пределов и арифметических действий в нормированных пространствах). \square (X, K) – нормированное векторное пространство (векторное пространство, снабжённое нормой)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности в X , $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ в K

$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, x, y \in X \quad \alpha_n \rightarrow \alpha \in K$ Тогда

1. $x_n \pm y_n \rightarrow x \pm y$
2. $\alpha_n \cdot x_n \rightarrow \alpha x$
3. $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$
4. Если $X = \mathbb{R} \vee X = \mathbb{C}, K = X, y \neq 0, \forall n y_n \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y}$

Доказательство. 1. $x_n + y_n \rightarrow x + y$?

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -допуск для $x_n + y_n$

$\square N_1 \in \mathcal{D}(\frac{\varepsilon}{2}, \{x_n\})$

$\square N_2 \in \mathcal{D}(\frac{\varepsilon}{2}, \{y_n\})$

$N = \max\{N_1, N_2\}$, если $n \in \mathbb{N}, n > N$

$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.о. $N \in \mathcal{D}(\varepsilon, \{x_n + y_n\})$

Для разности аналогично

Лемма 1. $\square \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности, $\{a_n\}$ – ограничена, $\{b_n\}$ – б.м. $\implies \{a_n b_n\}$ – б.м.

Доказательство леммы. $\{a_n\}$ – ограничено $\implies \exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq R$

b_n – б.м. \implies для $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \in \mathcal{D}(\frac{\varepsilon}{R}, \{b_n\})$, т.е. $|b_n| < \frac{\varepsilon}{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N$
Тогда $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < R \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon \implies N \in \mathcal{D}(\varepsilon, \{a_n b_n\}) \implies a_n b_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ ■

Доказательство теоремы:

2. $\alpha_n x_n - \alpha x = \alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x = (\alpha_n - \alpha)x_n + \alpha(x_n - x)$

$\|(\alpha_n - \alpha) \cdot x_n\| = |\alpha_n - \alpha| \|x_n\| \quad \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha| \|x_n - x\|$

В каждой один из множителей ограничен, а другой бесконечно малый

$\implies \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \text{ – б.м. } \implies \alpha_n x_n - \alpha x \rightarrow 0 \implies \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$

3. $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \text{ – б.м.}$

4. $\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \rightarrow x \cdot \frac{1}{y} \iff (2), \text{ если } \frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y} \iff \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \text{ – б.м.}$
 $\frac{y - y_n}{y y_n} = (y - y_n) \frac{1}{y} \frac{1}{y_n}$

$$\begin{aligned}\varepsilon = \frac{1}{2}|y| > 0 \quad \sqsupset N \in \mathbb{D}(\varepsilon, \{y_n\}) \quad n > N \implies |y_n - y| < \varepsilon \\ m = \min\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|, \varepsilon\} \text{ и } m > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} n \leq N \vee n > N \quad |y_n| \geq m \vee |y_n| \geq |y| - |y_n - y| = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \geq \\ m \implies \left| \frac{1}{y_n} \right| \leq \frac{1}{m} \implies \left\{ \frac{1}{y_n} \right\} - \text{ограничено}\end{aligned}$$

■

Определение 36. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ – вещественная последовательность

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n > M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < M$$

$$\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad |x_n| > M$$

Замечание. 1. $x_n \rightarrow \infty \iff |x_n| \rightarrow +\infty$

$$2. x_n \rightarrow +\infty \vee x_n \rightarrow -\infty \implies x_n \rightarrow \infty \text{ (обратное неверно: } x_n = (-1)^n \cdot n \text{)}$$

Определение 37. Последовательности $x_n : x_n \rightarrow \infty$ называются бесконечно большими

Замечание. $\{x_n\}$ – б.б. \implies неограничена (обратное неверно: $x_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$ – неограничена и не б.б.)

Лемма 2 (О связи бесконечно больших и бесконечно малых). $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ – числовая последовательность и $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq 0$. Тогда x_n – б.б. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.м.
 x_n – б.м. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.б.

Доказательство. x_n – б.б. $\iff \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| > M \iff \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} \quad M = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \dots \dots \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$$

■

$\{x_k\}_{k=1}^\infty, n \in \mathbb{N} \quad \{x_k\}_{n=k}^\infty$ – хвост последовательности x_k

Если $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, то последняя лемма применима к некоторому хвосту этой последовательности.

Замечание. $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Теорема 10 (Арифметические действия над бесконечно большими).
 $\sqsubset \{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$

Замечание. $x_n \rightarrow \pm\infty$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $x_n \in \mathbb{R}$

- I) Если $\{x_n\} \rightarrow +\infty, \{y_n\}$ ограничено снизу $\implies x_n + y_n \rightarrow +\infty$
- II) Если $\{x_n\} \rightarrow -\infty, \{y_n\}$ ограничена сверху $\implies x_n + y_n \rightarrow -\infty$
- III) Если $\{x_n\} \rightarrow \infty, y_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ ограничено снизу $\implies x_n + y_n \rightarrow \infty$
- IV) Если $\{x_n\} \rightarrow +\infty(-\infty) \quad \exists \delta > 0 : y_n > \delta \forall n \in \mathbb{N} \implies x_n \cdot y_n \rightarrow +\infty(-\infty)$
- V) Если $\{x_n\} \rightarrow +\infty(-\infty) \quad \exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n < -\delta \implies x_n \cdot y_n \rightarrow -\infty(+\infty)$
- VI) Если $\{x_n\} \rightarrow \infty \quad \exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| > \delta \implies x_n * y_n \rightarrow \infty$
- VII) Если $\{x_n\} \rightarrow a \in \mathbb{C}, \quad y_n \rightarrow \infty \& \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \neq 0 \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
- VIII) Если $x_n \rightarrow a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad y_n \rightarrow 0 \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$
- IX) Если $\{x_n\} \rightarrow \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \neq 0 \quad y_n \rightarrow a \in \mathbb{C} \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

Доказательство. (III) $z_n \rightarrow \infty \iff \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, n \in \mathbb{N} \quad |z_n| > M$

$\triangleleft \forall M > 0$ По условию $y_n \rightarrow a \in \mathbb{C} \implies \exists C : \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leq C$

Т.к. $\{x_n\} \rightarrow \infty \exists N' \in \mathbb{N} : \quad x_n > M + C \forall n > N', n \in \mathbb{N}$

$$a_n = |x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > M + C - C = M$$

$$N = N'$$

(V) $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n y_n < -M$

Т.к. $x_n \rightarrow +\infty$, то для $\frac{M}{\delta} \exists N' \in \mathbb{N} : \forall n > N' \quad n \in \mathbb{N} \quad x_n > \frac{M}{\delta} \implies x_n y_n < \frac{M}{\delta} \cdot (-\delta) = -M, \quad N = N'$

(IX) $y_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

1. $a \neq 0 \implies \frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{a}, \exists \delta > 0 : \left| \frac{1}{y_n} \right| > \delta$ (см теорему об арифметических действиях над сх. последовательностями) $\implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty \infty$ (по пункту VI)

■

$$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Окрестность точки ∞ в $\hat{\mathbb{R}}$ – множество вида $\{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x| > R\}$

Замечание. $x_n \rightarrow a \quad a \in \hat{\mathbb{C}}, a \in \overline{\mathbb{R}}, a \in \hat{\mathbb{R}} \iff \forall$ окрестности U_a в пространстве $X \exists$ окрестность $V_{+\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \cap V_{+\infty} \implies x_n \in U_a$ (ещё одна формулировка на языке окрестностей)

Замечание (замечание к теореме). $x_n \rightarrow \pm\infty(\infty), y_n \rightarrow \pm\infty(\infty) \quad -\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, +\infty + (-\infty), \infty + (\infty)$ – неопределённость, т.е. нет универсального утверждения про предел.

Пример. $\frac{\infty}{\infty}$

1. $x_n = n = y_n \rightarrow \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1$
2. $x_n = n^2, y_n = n \rightarrow \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$
3. $x_n = n, y_n = n^2 \rightarrow \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
4. $x_{2n} = 2n, x_{2n+1} = n^2 \quad y_{2n} = x_{2n+1}, y_{2n+1} = x_{2n}$

$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ – упражнение

Продолжение доказательства неравенства Коши-Буняковского-Шварца. $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad \forall$ скалярного произведения

Пример (Примеры скалярных произведений). $C([a, b]) = \{f : f \text{ непрерывна на } [a, b]\} \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\ell^2 = \{(x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{C} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} < +\infty\} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

$$y = 0 \implies \langle x, y \rangle = \langle x, \mathbf{0} \rangle = \langle x, 0 \cdot \mathbf{0} \rangle = 0 \cdot \langle x, \mathbf{0} \rangle = 0 \quad \langle y, y \rangle = 0 \implies \text{КБШ верно}$$

$$y \neq 0 \implies \langle y, y \rangle > 0 \quad \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda x, \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \cdot \bar{\lambda} \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \implies \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0$$

$$\text{Равенство в КБШ} \iff x - \lambda y = 0 \quad x = \lambda y \quad (x \text{ коллинеарен } y)$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^n x_k y_k| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \\
x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^n & (|x_1|, \dots, |x_n|), (|y_1|, \dots, |y_n|) \\
\sum_{k=1}^n |x_k y_k| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2}
\end{aligned}$$

■

Утверждение 10. \square (X, \mathcal{K}) – векторное пространство над полем $\mathcal{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$, в котором определено скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ Тогда $p(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ есть норма на X

Доказательство. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \lambda \in \mathcal{K}$

$$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

$$p^2(x + y) \stackrel{?}{\leq} (p(x) + p(y))^2 = p^2(x) + p^2(y) + 2p(x)p(y) = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

$$p^2(x + y) = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$$

$$2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

■

Неравенство КБШ через норму: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \|x\| = P(x)$ для любой нормы порождённой скалярным произведением.

Утверждение 11. \square (X, \mathcal{K}) – векторное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X \quad x, y \in X \quad x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \quad n \rightarrow +\infty \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle, n \rightarrow +\infty$

Доказательство. $\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle \rightarrow 0$

$$(\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle) + (\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle) = \langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle \rightarrow 0$$

Потому что $|\langle x_n, y_n - y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| = \text{огр.} \cdot (\rightarrow 0) \rightarrow 0$. И аналогично со вторым

■

1.11 Топологические свойства множеств в метрических пространствах

Определение 38. \square (X, ρ) – метрическое пространство. $E \subseteq X, a \in E$
 a называется внутренней для $E \quad (a \in \operatorname{Int} E)$ если $\exists R > 0 : B_E(a) \subset E$

Определение 39. Множество в метрическом пространстве называется открытым, если $E = \text{Int}E$

Для “Остальных” множеств верно $\text{Int}E \subseteq E$

Пример. 1. $E = X, X = \text{Int}E, X$ - открыто

2. \emptyset – открыто

3. $(0, 1)$ – открытое множество $R = \min\{1 - a, a\}$

Утверждение 12. В любом метрическом пространстве открытый шар является открытым множеством.

Доказательство. $\triangleleft \forall$ открытый шар $B_R(a)$ в метрическом пространстве (X, ρ)

$$\triangleleft \forall b \in B_R(a) \implies \rho(b, a) < r < R$$

$$\delta = R - r > 0 \quad \triangleleft B = B_\delta(b)$$

$$\sqsubset c \in B \implies \rho(c, a) \leq \rho(c, b) + \rho(b, a) < \delta + r = R - r + r = R$$

$$\text{Т.о. } b \in \text{Int}(B_R(a)) \implies B_R(a) - \text{открытое} \quad \blacksquare$$

Замечание. Свойство внутренней точки (и внутренности) зависит от объемлющего пространства.

$$E \subseteq X, \quad E \subseteq Y, \text{Int}_X E \neq \text{Int}_Y E \text{ (может оказаться неравным)}$$

Пример. $E = [0, 1], X = \mathbb{R}, Y = E \quad \text{Int}_X[0, 1] = (0, 1), \text{Int}_E E = [0, 1]$

Теорема 11 (свойства открытых множеств в метрических пространствах). $\sqsubset (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство. Тогда

(I) \emptyset, X – открыты

(II) $\forall \{O_i\}_{i \in I}$ – открытых $\implies \bigcup_{i \in I} O_i$

(III) $\forall n \in \mathbb{N} \{O_1, \dots, O_n\}$ открытых $\implies O_1 \cap \dots \cap O_n$ открыто

Замечание. $O_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{0\}$ – не открыто

Доказательство. (II) $\sqsubset x \in \bigcap_{i \in I} O_i \implies \exists i \in I : x \in O_i \quad O_i - \text{открыто}$
 $\implies x \in \text{Int}O_i \implies \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subseteq O_i \implies B_\delta(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies$

$$x \in \text{Int} \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \implies \bigcup O_i - \text{открыто.}$$

$$(III) \sqsupset x \in \bigcap_{i \in I} O_i \implies \forall i = 1 : n \quad x \in O_i \implies \forall i = 1 : N \quad \exists \delta_i > 0 : B_{\delta_i}(x) \subseteq O_i$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0 \implies B_\delta(x) \subseteq O_i \implies B_\delta(x) = \bigcap_{i=1}^N O_i \implies x \in \text{Int} \bigcap_{i=1}^N O_i \implies \bigcap O_i - \text{открыто}$$

■

Определение 40.

X – множество, $\Omega \subseteq 2^X$. Ω называется топологической структурой (или топологией) на X , если

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $\forall \{O_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega \implies \bigcup_{i \in I} O_i \in \Omega$
3. $\forall N \in \mathbb{N} \forall O_1, \dots, O_N \in \Omega \implies O_1 \cap \dots \cap O_N \in \Omega$

При этом (X, Ω) называют топологическим пространством. Элементы Ω называют открытыми множествами в X (в (X, Ω))

Т.о. любое метрическое пространство является топологическим.

- Пример.**
1. X – \forall множество $\Omega = \{\emptyset, X\}$ – антидискретная (не метризуемо, если состоит больше, чем из одной точки)
 2. X – \forall множество, $\Omega = 2^X$ – дискретная топология.
 3. $X = \mathbb{R}, \Omega = \{\mathbb{R} \setminus A : A - \text{конечное множество}\}$ или $\Omega_2 = \{\mathbb{R} \setminus A : A - \text{не более, чем счётное множество}\}$ или $\Omega_2 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

Определение 41. $\sqsupset (X, \Omega)$ – топологическое пространство, $E \subseteq X, a \in X$.

a называется предельной для R (или точкой сгущения, $a \in E'$) $\iff \forall$ открытого $O : a \in O \implies O \setminus \{a\} \cap E \neq \emptyset$

“открытая окрестность” точки a в топологическом пространстве X – это любое открытое, содержащее точку a

$\dot{U}(a) = U \setminus \{a\}$ – проколота окрестность точки a

Утверждение 13. $\square E \subseteq X, (X, \rho)$ – метрическое пространство.

$$a \in E' \iff \exists \{x_n\} \subseteq E \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a, n \rightarrow +\infty$$

Доказательство. \Leftarrow из определения

$$\begin{aligned} \implies \triangleleft B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\} \cap E \neq \emptyset &\implies \exists x_n \in (B_{\frac{1}{n}} \setminus \{a\}) \cap E \quad \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \rightarrow \\ 0, n \rightarrow +\infty &\implies x_n \rightarrow a \end{aligned}$$

■

Определение 42. Множество E в топологическом пространстве (X, Ω) называется замкнутым, если $E' \subseteq E$

Пример. 1. $E = (0, 1] \quad E' = [0, 1]$

$$2. E = \{\frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}, E' = \{0\}$$

$$3. E = \mathbb{R}, E' = \mathbb{R}$$

Теорема 12. В \forall топологическом пространстве множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто

Доказательство. $\square (X, \Omega)$ – топологическое пространство, $\square O \subseteq X$

O – открыто. $F = X \setminus O$ – замкнуто?

$$\triangleleft a \in F', a \in F?$$

Пусть нет, тогда $a \in O \implies (O \setminus \{a\}) \cap F = \emptyset !!! \implies a \in F \implies F$ – замкнуто

$\square F$ – замкнуто $\implies ? \quad O = X \setminus F$ – открыто. Если $O = \emptyset \implies O$ – открыто.

Если $O \neq \emptyset, \triangleleft a \in O \implies a \notin F \implies a \notin F' \implies \exists$ окрестность U точки $a : (U \setminus \{a\}) \cap F = \emptyset \implies U \cap F = \emptyset$ (т.к. $a \notin F$) $\implies U \subset O = X \setminus F \implies X \in U \subseteq O \implies x \in \text{Int}O \implies (a - \forall)O$ – открытое. ■

Следствие 5. 1. $\square (X, \Omega)$ – топологическое пространство. Тогда

I) \emptyset, X – замкнутые

II) \forall семейства $\{F_i\}_{i \in I}$ замкнутых $\implies \bigcap_{i \in I} F_i$ – замкнуто

III) $\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{F_1, \dots, F_N\}$ замкнутых $F_1 \cup \dots \cup F_N$ – замкнуто.

Определение 43. $\square (X, \Omega)$ – топологическое пространство. $E \subseteq X, a \in E$

a называется изолированной точкой E , если \exists окрестность U точки a : $U \cap E = \{a\}$

Определение 44. $\square (X, \rho)$ – метрическое пространство, $E \subseteq X, a \in X$

a называется точкой прикосновения E ($a \in Cl E$), если \forall окрестности U точки a $U \cap E \neq \emptyset$

$Cl E$ – замыкание множества E $E \subseteq Cl E$

Теорема 13 (О замыкании). $\square E \subseteq X, (x, \rho)$ – топологическое пространство. Тогда

- (I) $Cl E = E \cup E' = E' \cup (E \setminus E')$ – последнее является множеством изолированных точек.
- (II) $Cl E = \cap \{F : F - \text{замкнуто}, E \subseteq F\}$
- (III) $Cl E$ – минимальное (по включению) замкнутое, содержащее E
(Если F – замкнуто, и $E \subseteq F$, то $Cl E \subseteq F$)
- (IV) Если X – метрическое пространство, то $x \in Cl E \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \rightarrow x$

Доказательство. (I) $x \in Cl E \iff \begin{cases} x \in E \\ x \notin E \quad \forall \text{ окрестности } U \text{ точки } x : U \cap E \neq \emptyset \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x \in E \\ x \in E' \end{cases} \iff x \in E \cup E'$$

(II) $x \in Cl E \iff F - \text{замкнуто} : E \subseteq F \implies x \in F \implies x \in \text{Пр.ч. (правой части)}$

$\square x \in \text{Пр.ч.} = F$, если $x \notin Cl E \implies \exists$ окрестность U точки x : $U \cap E = \emptyset$

$\triangleleft F_1 = F \setminus U - \text{замкнуто}, F_1 \supseteq E$, т.к. $E \subseteq F$ $E \cap U \neq \emptyset$, $F = F_1 \cup U$
... $x \in F = F_1, x \notin F_1!!!$

III F – правая часть равенства в II. F – замкнуто как пересечение и \forall замкнутого $F_1 : E \subseteq F_1 \implies F \subseteq F_1$ (по определению пересечения)

IV $?x \in Cl E \iff \begin{cases} x \text{ изолированная для } E & x_n \equiv x \\ x \text{ предельная для } E & \text{тогда по характеристике предельной точки} \end{cases}$

Задача 3. 1. $Int(E) \subseteq E$ $Int(Int(E)) = Int(E)$

2. $(Int E)^c = Cl(E^c)$

3. $Cl(Cl(E)) = CL(E)$

4. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

$Cl(A \cap B) = Cl(A) \cap Cl(B)$

$Int(A \cup B) \neq Int(A) \cup Int(B)$

$CL(A \cap B) = \dots$

Замечание. $Int O$ – наибольшее открытое множество, содержащееся в O

Определение 45. $\square (X, \Omega)$ – топологическое пространство, $E \subseteq X$ $a \in X$

a называется граничной точкой для E , если \forall окрестности U точки a $U \cap E \neq \emptyset$ И $U \cap (E^c) \neq \emptyset$

$FrE = \{x : x - \text{граничная для } E\} = \partial E$

Пример. 1. $X = \mathbb{R}, E = [0, 1]$ $IntE = (0, 1), ClE = [0, 1]$ $FrE = \{0, 1\}$

2. $X = \mathbb{R}^2, E = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$ $IntE = \emptyset, ClE = E, FrE = R$

3. $X = [0, 1], E = [0, 1]$ $IntE = E, ClE = E, FrE = \emptyset$