Дискретная математика

Коченюк Анатолий

22 сентября 2020 г.

0.1 Введение

Связаться:

- stankev@gmail.com Собирать культуру общения: указывать Фамилию, Имя
- Телеграм @andrewzta (для немедленного ответа. Если нет, оно утонет).
- +79219034426 (для катастрофических ситуаций, ожидается, что звонить никто не будет) (ни в коем случае не писать смс)

Обращаться можно по методическим вопросам. Если проблема группы – пишет староста.

Не писать по учебно-методическим проблемам (общежитие, медосмотр, армия ..) для этого есть зам. декана Харченко (легко найти контакты в ису)

Про отчётность будет на первой практике.

Лекции есть в ютубе andrewzta

Глава 1

1 курс

1.1 Фундамент

Множество – неопределяемое понятие. Множество состоит из элементов. $a \in A$ а-маленькое принадлежит множеству А-большое

$A = \{2, 3, 9\}$

$A = \{n \mid n \text{ чётно}, n \in \mathbb{N}\}$ – фильтр

$A, B:$

- $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ или } a \in B\}$
- $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ и } a \in B\}$
- $A \setminus B = \{a | a \in A \text{ и } a \notin B\}$
- $\overline{A} = \{a | a \notin A\}$??? U – универсум

  $\overline{A} = U \setminus A$

  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \triangle B = A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Замечание. Если множество – любой набор чего-угодно возникает парадокс Рассела

$A = \{a | a \text{ – множество}, \ a \notin a\}$

Вопрос лежит ли в себе A?

Определение 1 (Пара)**.** A, B – множества. Мы можем рассмотреть множество пар, где первый элемент из A, а второй из B

$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

$A \times A = A^2$

$(A \times B) \times C = \{(x, y) | x \in A \times B, y \in C\} = \{((a, b), y) | a \in A, b \in B, y \in C\}$

$A \times (B \times C) = \{(a, (y, z)) | a \in A, y \in B, z \in C\}$

$A \times B \times C = \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$

Для простоты, здесь и далее эта операция будет считаться ассоциативной и первые две строчки будут давать то же, что третья – множество троек.

$A \times A \times A = A^3$ $A^n = \begin{cases} A & , n = 1 \\ A \times A^{n-1} & , n > 1 \end{cases}$

$A^0 = \{[]\} = \{\varepsilon\}$ – пустая последовательность.

Пример. $A = 2, 3, 9$ -> $A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 9), (3, 2), (3, 3), \ldots\}$

Замечание. У множества есть элемента и для любого элемента из универсума, он либо входит (1 раз) либо не входит.

Определение 2. Функция – отображение, которое каждому элементу из одного множества ставит в соответветвие единственный элемент из другого множества

$f : A \to B$

График $\{(x, f(x))\}$.

Формально будем отождествлять функцию и её график.

$f \subset A \times B \quad \forall a \in A \exists! b \in B \quad (a, b) \in f$

Замечание. Не путайте принадлежность и включение

$a \in A$

$A, B, \forall a$ (если $a \in A$, то $a \in B$) $A \subset B$

$D_4 = \{n | n$ кратно $4\}$

$E = \{n | n$ чётно$\}$

$D_4 \subset E$

$\{2, 3, 9\} \subset \{2, 3, 4, \ldots, 9\}$

$A \subset A$

$\emptyset \subset A$

$A \subset U$

Замечание. Необязательно все b попадают в график.

$sqr : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – только квадраты чисел

Определение 3. $\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$ – сюръекция

Определение 4. $\forall a \in A \forall b \in B \quad a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$

Замечание. Принцип Дирихле – нет инъекции из большего в меньшее множества. Если кроликов больше, чем клеток, то какому-то кролику не хватит клетки

Определение 5. Если f – инъекция и сюръекция, то f – называется биекцией

Если между двумя конечными множествами есть биекция, то у низ равное количество элементов.

Определение 6. Два множества называется равномощными, если между ними есть дикция

B^A – множество функций из A в B

$|A| = a, |B| = b \quad |A \times B| = a \cdot b \quad |B^A| = b^a$

$|A^{\emptyset}| = 1$ эфемерная функция, которой ничего не передать

$\emptyset^A = \emptyset, A \neq \emptyset$

$\emptyset^{\emptyset} = 1$

Определение 7. $R \subset A \times B$ – отношение (бинарное)

Пример. $A = B = \mathbb{N} \quad R = \{(a,b) | a < b\} \quad R =<$

$a \vdots b \quad 6 \vdots 2 \quad 6 \not\vdots 5$

$A =$ люди, $B =$ собаки, $R = \{(a,b) | a -$ хозяин$b\}$

Рассмотрим 5 классов отношение на квадрате множества:

1. рефлексивные $\forall a \quad aRa$

$RC(R)$ – рефлексивное замыкание, включаем все пары (a, a)

2. антирефлексивные $\forall a \quad \neg aRa$

3. симметричные $aRb \implies bRa$

4. антисимметричные $aRb, a \neq b \implies \neg bRa$

   или aRb и $bRa \implies a = b$

5. транзитивность $aRb, bRc \implies aRc$

Определение 8. 1+3+5 – рефлексивные, симметричные и тразитивные – называются отношениями эквивалентности.

Теорема 1. R – отношение эквивалентности на X, то элементы X можно разбить на классы эквивалентности так, что:

a и b в одном классе $\implies aRb$ a и b в разных классах $\implies \neg aRb$

множество таких классов обозначается X/R

$N/\equiv_3 =$

$$\begin{aligned} &\{\{1, 4, 7, 10, \ldots) \\ &\{2, 5, 8, 11, \ldots)\} \\ &\{3, 6, 9, 12, \ldots)\}\} \\ &. \end{aligned}$$

Замечание. Отношение равномощности – отношение эквивалентности.

Классы эквивалентности – порядки. Для конечного случая обозначаются числами

Определение 9. 1+4+5 – рефлексивные, антисимметричные и транзитивные – частичные порядки

Множество, на котором введён частичный порядок, то оно называется частично упорядоченным. (ч.у.м – частично упорядоченное множество, poset – partially organised set)

$R \subset X \times X$

$X, Y, Z \quad R : X \times Y \quad S : Y \times Z$

Определение 10. Композиция отношений:

$T = R \circ S \quad xTy \iff \exists z : xRz$ и zSy

т.е. есть z, через который можно пройти, чтобы попасть в y из x

Замечание. $R \subseteq X \times X \quad S \subseteq X \times X$

$R \circ S \subseteq X \times X$

$R \circ R \subseteq X \times X$ – пройти два раза по стрелкам

$R^3 = R \circ R^2 = R^2 \circ R$ – пути длины ровно 3

$S \circ T \circ U$ – идём по стрлке из S в T, а потом в U

Определение 11. Транзитивное замыкание.

$R^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R^k$

$R^0 = \{(x,x) | x \in X\}$ – они не включаются по дефолту в R^+

$R^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} R^k = R^+ \cup R^0$ – если между двумя вершинами существует какой-либо путь

Замечание. Транзитивное замыкание – транзитивно

Пусть $xR^+y \implies xR^iy$

Пусть $yR^+z \implies yR^jz$

$\implies x(R^i \circ R^j)z \implies xR^kz$

Замечание. $\forall T : T$ – транзитивно. $T \subset R \implies T^+ \subset R$

Доказательство. По индукции:

База: $R^1 \subset T$ – дано

Переход: $R^i \subset T \implies R^{i+1} \subset T$

$xR^{i+1}y \implies x(R \circ R^i)y \implies \exists z : xRz \& zR^iy \implies xTz \& zTy \implies xTy$ (по транзитивности T) ∎

1.2 Булевы функции

$\emptyset$ – пустое множество. С функциями из/в него всё достаточно грустно.

$\{unit\}$

$void$ – ничего, константная функция

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$

$f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ – функция от нескольких аргументов. Из одного, но декартового произведения

Булева функция: $f : \mathbb{B}^n \to B$

$n = 0$ – ноль аргументов $\mathbb{B}^0 = \{[]\}$

$\mathbb{0}, \mathbb{1}$

$n = 1$

Таблица 1.1: n=1

x	$\mathbb{0}$	id	$\neg$	$\mathbb{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Замечание. Подобные таблицы называются таблицами истинности функций

$n = 2$

Таблица 1.2: n=2

x	y	$\mathbb{0}$	$\wedge$	$\not\rightarrow$	P_1	$\not\leftarrow$	P_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$=$	$\neg P_2$	$\leftarrow$	$\neg P_1$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\mathbb{1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

С помощью стрелки Пирса ($\downarrow$) и штриха Шефера ($\uparrow$) можно выразить любую другую: $\neg x = x \downarrow x$

1.3 Задания булевых функций

Самый простой способ – таблица истинности

$\oplus_n$ – 2^n значений. глупо их все отдельно описывать

1. Задание функции формулой.

   Определим базисные функции, систему связок

   например: $\wedge, \vee, \neg, \oplus$

   $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \ldots$

$\{f_1, f_2, .., f_n\}$ – базисные.

строка – формула. $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ – формула

Определение 12. Дерево разбора формулы. Если у функции арность – k, то у ноды будет ровно k сыновей

$\overline{F}$ – функции, которые записываются формулами, используя F (замыкание F)

Теорема 2 (Теорема о стандартном базисе)**.** $\overline{\{\wedge, \vee, \neg\}} = \mathbb{B}$

Доказательство. Рассмотрим таблицу истинности функции f Она принимает n аргументов и в ней 2^n строк

Пусть $f \neq \mathbb{0}$. Рассмотрим строчки, в которых единицы.

По аргументам запишем с не – аргументы, которые 0, и без не – те, которые 1

$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x^5$ – 1 на ровно одном наборе элементов. А теперь возьмём "или"по всем строкам, в которых 1

Одна такая строка называется термом.

Такая форма называется совершенной дизъюнктивной нормальная формой ∎

Лемма 1. Любая функция, кроме тождественного 0 – есть СДНФ

$x \vee \neg x$ – тождественный ноль