Линейный Анализ

Коченюк Анатолий

10 октября 2020 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблицв чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i-той строки и j-того столбца

В матрице выше m строк и n столюцов. $A_{m\times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n\times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ – диагональ матрицы $A_{n\times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\|$ $B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

   $B = \alpha \cdot A \iff \forall i,j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

2. Сложение:

   Пусть A, B – одинакового размера

   $A + B = C: \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i,j$

   Замечание. $\triangleleft \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

   $\mathbb{O}$ – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность (–||–) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

   Пусть $A_{m\times l}, B_{l\times n}$

   $C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m\times n}$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\triangleleft I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность1 $A(B+C) = AB + AC$
- дистрибутивность2 $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Определение 2. $\lhd N \neq \mathbb{O}: \quad N^k = N \cdot N \cdot \ldots \cdot N = \mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k = I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$A_{m\times n} = \|a_{ij}\|$ Пусть $B = A^T = \|b_{ij}\| \implies b_{ij} = a_{ji}$

Свойства:

- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A: \quad A = A^T$ – симметричная/симметрическая матрица.Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A: \quad A = -A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица

1.2 Определитель

$$\sqsupset A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 4. Определитель – это число

$\sqsupset A_{1x1} = (a_{11}) \qquad \det A \equiv |A| = a_{11}$

$\sqsupset A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\sqsupset A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$

Мнемоническое правило для случая с тремя:

берём диагонали в одну сторону с + в другую с -.

Пример. $\sqsupset A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$\det A = -28 - 18 + 4 - (-21 + 4 - 24) = -1$

$\lhd \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$

Определение 5. Дополнительный минор элемента a_{ij} – определитель матрицы, полученной из исходно1 вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Утверждение 1 (Рекуррентная формула вычисления определителя). $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i+j} \cdot M_{ij}$, где j – номер любого столбца. Эта формула называется разложением определителя по j-ому столбцу.

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ – разложение по i-ой строке

$\lhd (-1)^{i+j} M_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = A$

$\det A = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} =$

$= 25 - 22 - 4 = -1$

Пример.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$\dots$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

В нижних (верхних) треугольных матрицах определитель – просто произведение элементов

Свойства определителя:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{vmatrix} = 0$
2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 \cdot a_1 + b_1 & \alpha_2 \cdot a_2 + b_2 & \dots & \alpha_n \cdot a_n + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$
4. $\det(A^T) = \det(A)$ (всё, что работает со строчками, работает и со столбцами)
5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

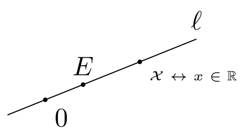
   $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$
6. $\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \dots & \alpha a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

Пример. $\begin{matrix} 1280 \\ 2848 \\ 1184 \\ 3072 \end{matrix}\Bigg| \vdots\, 32$

TODO ––

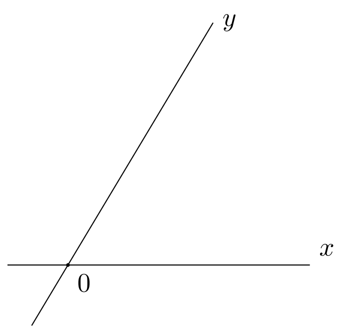
1.3 Лекция 1 - Метод аналитической геометрии

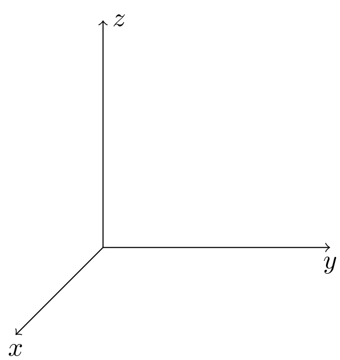
метод – метод координат.



– координатная линия

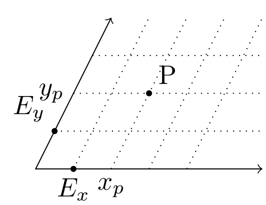
Замечание. Система координат на плоскости – две координатные линии





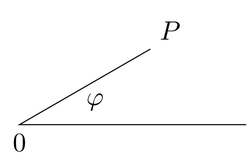
Определение 6. Система координат называется декартовой, если

1. Углы между координатными линиями прямые
2. Масштабы на осях одинаковые



(x_p, y_p) – координаты точки P.

Полярная система координат:



(TODO) ———————————————-

1.4 Практика 3

1.4.1 Обратная матрица

$\sqsupset A, B$ – квадратные матрицы $n \times n$

Матричная алгебра:

1. $A + B$
2. $\lambda \cdot A$
3. $A \cdot B$

Определение 7 (Обратная матрица)**.** $A^{-1} \qquad A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Утверждение 2. Обратная к A матрица существует, если и только если $\det A \neq 0$

Задача 1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$

1. Метод союзной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$

   Определение 8. $\tilde{A}$ союзная матрица – матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A

   $\det A = (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 12 = 38$

   $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -20 \\ -7 & 11 & -12 \\ 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix}$

   $\lhd A \cdot A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Метод Гаусса $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

Элементарные преобразования:

(a) Умножение на число $\lambda \neq 0$ одной строчки

(b) Перестановка двух любых строк

(c) Составление линейной комбинации строк

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & 7 & 0 & -8 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -140 & 30 & 10 & -50 & 0 \\ 0 & -140 & 49 & 0 & -56 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -10 & -6 & 7 \end{array}\right] \sim \ldots$$

Системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -5 \\ x + 3y - 6z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

Заметим, что стандартный способ решения таких систем: упрощение, складывание строк, домножение на число строк, их комбинация – напоминают элементарные преобразования. Т.е. элементарные преобразования – преобразования, приводящие к эквивалентной системе.

1. Метод Гаусса $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & -11 & 20 & 3 \end{array}\right] \sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -55 & 176 & -99 \\ 0 & -55 & 100 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -76 & 114 \end{array}\right]$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 & x = 2 \\ -5y + 16z = -9 & y = -3 \\ -76z = 114 & z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-20) + 4 \cdot (-11) = -12 - 20 - 44 = -76$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 9 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-6) - 1 \cdot 58 + 4 \cdot (-22) = -152$$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-152}{-76} = 2$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

3. метод обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$AX = B \quad X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{76} \begin{bmatrix} -6 & 20 & -11 \\ -10 & -8 & 7 \\ -18 & 16 & 5 \end{bmatrix}^T = \tfrac{1}{76} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 18 \\ -20 & 8 & -16 \\ 11 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}B = X$

1.5 Лекция 3

$V/\sim = W$

$\vec{a} + \vec{b}$

Напоминание:

1. $\exists - (\vec{a})$
2. $\exists \vec{0}$
3. $\lambda\vec{a} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \vec{b}$

1.5.1 Проекция вектора на ось

Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось γ называется класс эквивалентности $a_l^{\|\gamma}$, содержащий вектор, начало которого совпадает с точкой пересечения оси l и прямой парралельной γ и проходящей через начало вектора $\vec{a}$, а конец – с точкой пересечения оси l и прямой, параллельной γ и проходящей через конец вектора $\vec{a}$

Свойства проекции:

1. $(\vec{a} + \vec{b})_l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\|\gamma} + \vec{b}_l^{\|\gamma}$
2. $(\lambda\vec{a})_l^{\|\gamma} = \lambda\vec{a}_l^{\|\gamma}$

$\underline{\text{lim}}$: $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\|\gamma}$

$\sqsupset \vec{e}$ – вектор, параллельный l. Положим $|\vec{e}| = 1 \implies$ орт оси l

$\lessdot \vec{a}_l^{\|\gamma} = \alpha \cdot \vec{e} \quad \alpha = (\text{Пр}_l^{\|\gamma}\vec{a}) \cdot \vec{e} \qquad \alpha$ – длина проекции $\vec{a}_l^{\|\gamma}$ на ось l.

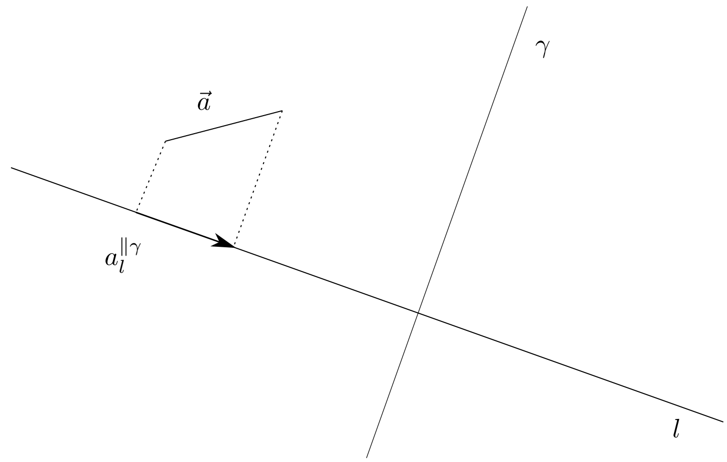


Рис. 1.1: Проекция

Лемма 1. $\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i$

Доказательство. $\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{i_l}^{\|\gamma}$

$\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i \vec{e}$ ■

$\mathbb{R}^1$

$\forall \vec{a} \qquad \vec{a} = x_a \vec{e} \quad x_a$ – координата вектора $\vec{a}$ на ось l

$\mathbb{R}^2$

$\vec{a} = \vec{a}_x^y + \vec{a}_y^{\|x} = \text{Пр}_y^x \vec{\vec{a}} \vec{e}_1 + \text{Пр}_y^{\|x} \vec{a} \vec{e}_2 = x_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2$

Определение 10. Говорят, что в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}(a_x, a_y)$

$\mathbb{R}^3$

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$

Замечание. Если угол между осью l и прямой γ прямой ($l \perp \gamma$) $\implies$ $l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\perp} \overset{\to}{=} \text{Пр}_l^{\perp} \vec{a} \cdot \vec{e}$

$l \perp \Gamma \implies \vec{a} + l^{\perp \Gamma} = \vec{a}_l^{\perp} = -||-$

Рис. 1.2: r1

В декартовой системе координат орты координатных осей обозначаются следующим образом:

x $\vec{e}_1 = \vec{i}$

y $\vec{e}_2 = \vec{j}$

z $\vec{e}_3 = \vec{k}$

Замечание. $\vec{a}(1,2,3) \implies \vec{a} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$

Лемма 2. $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i\right)_x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_{i_x}$

1.6 Лекция 4

1.6.1 Скалярное произведение

$W = V/\sim$

Определение 11. $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{}|\text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}}\vec{b}$

Замечание. $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos gamma$

Алгебраические свойства:

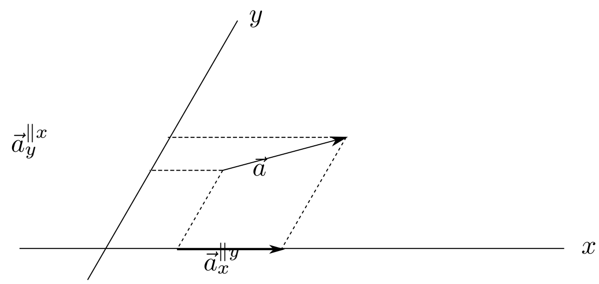


Рис. 1.3: r2

1. $\left(\vec{a}\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\vec{a}\right)$
2. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right) = (\vec{a},\vec{c}) + \left(\vec{b},\vec{c}\right)$

   Доказательство. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}^{\perp}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = |\vec{c}|\left(\text{Пр}_{\vec{c}}^{\perp}\vec{a}\right)$ ■

3. $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$

Геометрические свойства:

1. $\vec{a}\perp\vec{b} \quad \vec{a}\neq\vec{0}\neq\vec{b} \implies (\vec{a},\vec{b}) = 0$
2. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$
3. $\sqsupset |\vec{a}| = 1 \implies (\vec{a},\vec{b}) = \text{Пр}_{\vec{a}}^{\perp}\vec{b}$

   Замечание. $\text{Пр}_{\vec{i}}^{\perp}\vec{b} = (\vec{i},\vec{b})$

Скалярное произведение в координатах:

- Декартова Прямоугольная Система Координат. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$
  $= \mathrm{b}_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

  $(\vec{a}\vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

  $\cos\varphi = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

- Произвольная Система Координат.

  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_j\vec{e}_j$

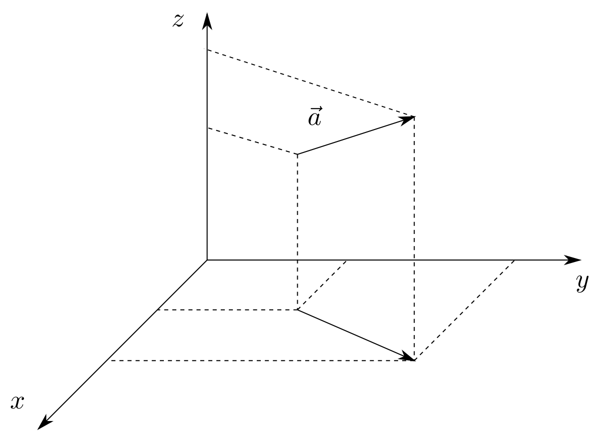


Рис. 1.4: r3

$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} b_k\vec{e}_k$

$(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\sum_{j=1}^{3} a_k\vec{e}_j \cdot \sum_{k=1}^{3} b_k\vec{e}_k\right) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k(\vec{e}_j\vec{e}_k)$ – достаточно знать скалярное произведение базисных векторов. $g_{jk} = \vec{e}_j\vec{e}_k$ называется метрическим тензором.

$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k g_{jk}$

Замечание. В ДПСК $g_{jk} = \delta jk = \begin{cases} 0 & ,j \neq k \\ 1 & ,j = k \end{cases}$ δ – символ Кронекера

$g_{jk} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ – матрица Грама

$a^T \cdot g \cdot b = (\vec{a}, \vec{b})$

1.6.2 Векторное произведение

$W = V/\sim$

$\vec{a}, \vec{b} \in W$

$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \vec{c}$ – вектор:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\vec{a}_\perp| \left|\vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}_\perp\right|$

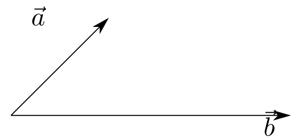


Рис. 1.5: скалярное произведение

2. $\vec{c} \perp \vec{a} \quad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка (Буравчик, штопор)

Алгебраические свойства:

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$

2. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = [\vec{a}, \vec{c}] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$

   Доказательство. $[\vec{a}, \vec{c}] = \left[\vec{a}_\perp, \vec{b}\right]$

   $\left[\vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp, \vec{c}\right] = [\vec{a}_\perp, \vec{c}] + \left[\vec{b}_\perp, \vec{c}\right]$

   Если нарисовать картиночку, там будут углы с перпендикулярными сторонами и всё будет хорошо. ■

3. $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

   Доказательство. $\vec{m} = \left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] \quad \vec{n} = [\vec{a},]vecb]$

   $|\vec{m}| = |\alpha| \, |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin(\alpha\vec{a}, \vec{b}) \qquad |n| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

   Если $\alpha < 0$, то у одного другая ориентация тройки, а у другого отрицательный множитель ■

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$

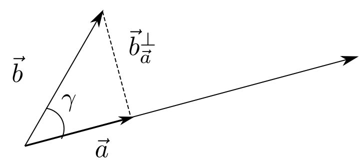


Рис. 1.6: note

2. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi = S_{\varparallelogram}$

Замечание. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = k \times \vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i}$

Можно упростить запоминание: $a_xb_y - a_yb_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Хотя формально так делать плохо, потому что в матрице объекты разной природы: скаляры и векторы.

Общий случай:

$\vec{a} = \sum_{m=1}^{3} a_m\vec{e}_m$

$\vec{b} = \sum_{n=1}^{3} b_n\vec{e}_n$

Точно: $e_m \times e_m = \vec{0} \forall m$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$

$\vec{e}_1\vec{e}_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$

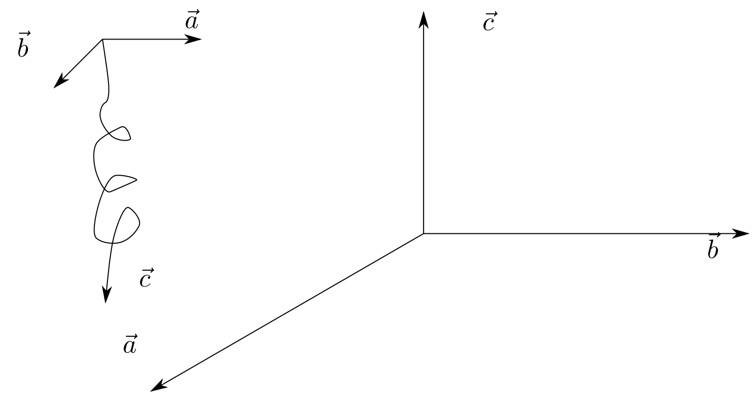


Рис. 1.7: shtopor

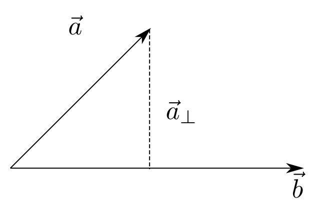


Рис. 1.8: couple