Линейный Анализ

Коченюк Анатолий

27 сентября 2020 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблицв чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i-той строки и j-того столбца

В матрице выше m строк и n столюцов. $A_{m\times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n\times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^n$ – диагональ матрицы $A_{n\times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\|$ $B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

   $B = \alpha \cdot A \iff \forall i, j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

2. Сложение:

   Пусть A, B – одинакового размера

   $A + B = C : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$

   Замечание. $\triangleleft \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

   $\mathbb{O}$ – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность (–||–) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

   Пусть $A_{m\times l}, B_{l\times n}$

   $C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m\times n}$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\triangleleft I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность1 $A(B+C) = AB + AC$
- дистрибутивность2 $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Определение 2. $\lhd N \neq \mathbb{O} : \quad N^k = N \cdot N \cdot \ldots \cdot N = \mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k = I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$A_{m\times n} = \|a_{ij}\|$ Пусть $B = A^T = \|b_{ij}\| \implies b_{ij} = a_{ji}$

Свойства:

- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A : \quad A = A^T$ – симметричная/симметрическая матрица.Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A : \quad A = -A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица