Математический анализ

Коченюк Анатолий

29 сентября 2020 г.

Оглавление

0.1 Введение 4
0.2 Баллы 4

1 Множества, отображения, $\mathbb{R}$ 5

1.1 Множества 5
1.2 Отображения 8
1.3 Вещественные числа 11
1.3.1 Аксиоматическое определение вещественных чисел . . 11
1.4 Модуль 13
1.5 Комплексные числа 14
1.6 Дополнение к разделу "Действия над множествами" 17
1.7 Принцип математической индукции 17
1.8 Метрические пространства 19
1.9 Равномощные множества 23
1.10 Предел числовой последовательности 26

0.1 Введение

Семёнова Ольга Львовна

o_ semenova@mail.ru

Литература:

1. Виноградов О.Л. Курс Математического анализа
2. Виноградов, громов –||–
3. Фихтенгольц (курс)
4. Зорич (курс, двухтомник)
5. Кудрявцев (сборник задач, 1 том из трёх)
6. Виноградова, Олехник, Саровничий (1 том из двух)

0.2 Баллы

практика – 70/100
теория – 30/100 – 2-4 теста по теории (3 балла за присутствие на ∼всех лекциях

Если меньше 18/30 баллов, то всю теорию нужно будет пересдавать. Иначе можно воспользоваться этим как баллами за экзамен.

Глава 1

Множества, отображения, $\mathbb{R}$

1.1 Множества

"Множество" – неопределямое слово. Синонимы: набор, совокупность, класс

Множество состоит из элементов. $M = \{1, 3, 7, 9\}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$

способы описания:

- явное описание $\{1, 2, 3\}$
- через некоторое свойство $M = \{x : P(x)\}$ $\quad$: – читается как "таких что". Тот же смысл имеет $|$. $P(x)$ обозначает какое-то свойство. $M = \{x : xx$ – человек и x 2002 г.р.$\}$

Кванторы:

- $\forall$ – "для любого", любой, каждый, всякий …
- $\exists$ – "существует"

Пример: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \ldots$

Для любого положительного эпсилон существует положительное число дельта, т.ч. … Обозначения:

- $\iff$ – равносильно
- $\wedge$ – "и"
- $\vee$ – "или"
- $\sqsupset$ пусть
- $\vartriangleleft$ – допустим, рассмотрим

Замечание. Множество всех множеств не существует

$\neg$ – отрицания

$\neg\exists$ – не существует

$\emptyset$ – пустое множество

$x \in M \iff x$ – элемент множества M

$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$

$B \supseteq A$ – то же самое

$\forall$ множества $M \quad \emptyset \subseteq M$

$$A = B \iff (x \in A \iff x \in B) \iff \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$$

A, B – множества

$A \cup B = \{x : (x \in A \vee x \in B)\}$

$A \cap B = \{x : (x \in A \wedge x \in B)\}$

$$x \in A \cap B \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

$A \subset C$

$A^c = X \setminus A$ – дополнение A в X

Определение 1. A, X_α – множества, $\forall \alpha \in A$

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство множеств

A – индексное множество

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A \quad x \in x_\alpha\}$$

Пример. $\{(x-1, x+1)\}_{x \in (0;1)}$

$$\bigcup_{x \in (0;1)} (x-1, x+1) = (-1, 2), \bigcap_{x \in (0,1)} (x-1, x+1) = (0; 1)$$

Определение 2 (Формула Де Моргана)**.** $A, B \subseteq X$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\{A_i\}$ – семейство

$(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)^c = \bigcap A_i^c$

$\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup A_i^c$

Замечание. $A^{cc} = A$ – проверить-упражнение

Доказательство. $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)^c \iff x \notin \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \iff \forall i \in I x \notin A_i \iff \forall i \in I x \in A_i^c \iff x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i^c$

$(\bigcap A_i)^c = (\bigcap A_i^{cc})^c = (\bigcup A_i^c)^{cc} = \bigcup A_i$ ■

Определение 3 (упорядоченная пара)**.** A, B

(a, b) – упорядоченная пара, $a \in A, b \in B$. В этой паре важен порядок

$\{a, b\}$ – непорядоченная пара (двухэлементное множество), если $a \neq b$

a,a = a (в множестве не различаются копии)

Пример: координаты точек плоскости.

$X_1, \ldots, X_m \quad x_1 \in X_1 \ldots x_m \in X_m \quad (x_1, \ldots, x_m)$ – упорядоченная пара

Определение 4 (Декартово произведение)**.** $X_1 \times \ldots \times X_m = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_k \in X_k \quad k = 1 : m\}$

$R^m = (R)^m$

Пример. $X = \{1, 2\}$

$Y = \{3, 5\}$

$Z = \{0\}$

$X \times Y \times Z = \{(1, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 5, 0)\}$

1.2 Отображения

формальное определение, которое не будет использовано или потребовано нигде (в том числе на экзамене)

Определение 5. X, Y – множества

если $R \subset X \times Y$ и $(x, y_1) \in R \vee (x, y_2) \in R \iff y_1 = y_2$

R называется отображением или графиком

Определение 6. Отображение – это тройка (X, Y, f), где X, Y – множества, а f – некое правило по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется некоторый единственный элемент $y \in Y$

$f : X \to Y$ – синоним. читают "f действует из X в Y"

X – множество определения отображения

Y – множество значений

$\{y \in Y : \exists x \in X f(x) = y\} \subset Y$ (т.е. Y – необязательно точное множество значений)

Пример. $x = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$

если $y = f(x)$, то y называется образом элемента x при отображении f

$A \subseteq X \quad f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ – образ множества A под действием f

$B \subseteq Y \quad f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$

$f^{-1}(\{y\})$ – необязательно одноэлементное.

упражнения:

1. $f(A \cup B), f(A) \cup f(B)$

2. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B)$ $y \in f(A \cap B) \implies \exists x \in A \cap B : f(x) = y . x \in A, x \in B, y \in f(A), y \in f(B) \implies y \in f(A) \cap f(B)$

   $f(x) = const \quad f(A) \cap f(B) \neq \emptyset, f(A \cap B) = \emptyset$, если $A \cap B = \emptyset$

3. $f^{-1}(A \cup B), f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

4. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B)$

Определение 7. Если $f : X \to Y, g : X_1 \to Y \quad X_1 \subseteq X$

и $\forall x \in X_1 \quad g(x) = f(x)$, то g называется сужением f на X_1

Обозначение: $g = f\mid_{x_1}$

При этом f называется продолжением g с X_1 на X

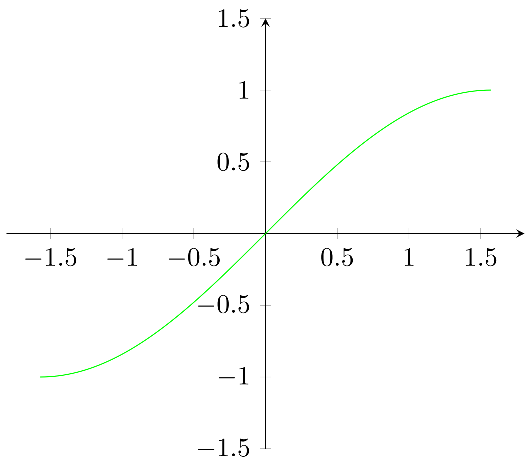


Рис. 1.1: sinus

Пример. $f(x) = \sin x \quad f\mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

Определение 8. Если $f : X \to Y, g : Y \to Z$

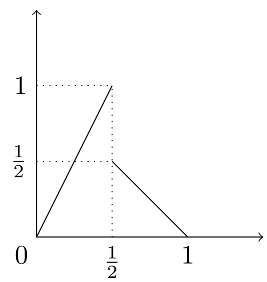
$g \circ f : X \to Z$

$g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in X$

$g \circ f$ называется композицией f и g

Пример. Изобразить эскизы графиков функций для всех случаев

1. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$
3. f(x) = g(x)



построить $f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}$ без формул

Определение 9. Пусть $f : X \to Y, f$ называется инъекцией, если $\begin{cases} f(x_1) = y \\ f(x_2) = y \end{cases} \implies x_1 = x_2$

Пример. $f(x) = kx + b$ – инъекция $, k \neq 0$

$f(x) = \sin x$ – не инъекция

$f(x) \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ – инъекция

Определение 10. $f : X \to Y, f$ называется сюръекцией, если $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$

Пример. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – не сюъекция

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ – сюръекция

$y = kx + b, k \neq 0$ – сюръекцией

Определение 11 (биективность)**.** $f : X \to Y$ – инъекция и сюръекция $\implies f$ называется биекцией

Пример. $y = kx + b, k \neq 0$ – биекция

Определение 12. $f : X \to Y, g : Y \to X$

g называется обратным к f отображением, если $f(x) = y \iff x = g(y)$

Обозначается: $g = f^{-1}$

Замечание. Обратимая функция должна быть биективной:

Инъективной – обратная иначе не будет функцией

Сюръективной – обратная не будет определена на всём Y

Замечание. $f^{-1}(A)$ – обычно прообраз A под действием f, а не образ обратной функции (которая может не существовать)

Пример. $\arcsin = (\sin_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$

$\log_a(x) = (a^x)^{-1}$

$\sqrt{x} = (x_2 \mid_{[0,+\infty)}, \sqrt[3]{(}x) = (x^3)^{-1}$

1.3 Вещественные числа

1.3.1 Аксиоматическое определение вещественных чисел

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ – множество и две операции, и отношение порядка, удовлетворяющее следующим 16 аксиомам:

Аксиомы поля:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists$ нейтральный элемент 0 по сложению $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
4. Существует обратный элемент по сложению. $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} : \quad a + (-a) = 0$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
7. $\exists 1 \in R \setminus \{0\}, \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$
8. $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$
9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)

примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1\}(1 + 1 = 0,$ остальное как обычно

Элементарные следствия:

- $\forall a \in K$ – поля, обратный по сложению единственный. Если b, b' – два обратных.$b = b + (a + b') = (b + a) + b' = b'$
- обратный по умножению, нейтральные – все единственны

Аксиомы порядка:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leqslant b \vee b \leqslant a$

2. $a \leqslant b, b \leqslant c \implies a \leqslant c$ (транзитивность)

3. $a \leqslant b, b \leqslant a \implies a = b$

4. $a \leqslant b, c \in \mathbb{R} \implies a + c \leqslant b + c$

5. $a \geqslant 0, b \geqslant 0$, то $a \cdot b \geqslant 0$

$0 \cdot x + x \cdot x = (0 + x) \cdot x = x \cdot x \implies 0 \cdot x = 0$

Упражнения:

1. $-x = (-1) \cdot x$

2. $(-a)(-b) = a \cdot b$

3. $1 \geqslant 0$

Определение 13. Индуктивным множеством в упорядоченном поле $(K, +, \cdot, \leqslant)$ называется множество N:

1. $1 \in N$

2. $\forall x \in N \implies x + 1 \in N$

$\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество. $\mathbb{N} = \bigcap\limits_{N \text{ – индуктивных}, N \subseteq \mathbb{R}} N$

Замечание. $x > b \iff \begin{cases} x \geqslant b \\ x \neq b \end{cases}$

Аксиома Архимеда: $\forall x, y \in R : x > 0, y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

Аксиома вложенных промежутков:

$\forall \{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

В аксиоме о вложенных промежутках предполагается, что $\forall n \in \mathbb{N}, [a_n, b_n] \neq \emptyset \iff a_n \leqslant b_n$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, : a \leqslant x \leqslant b\}$ – замкнутый отрезок, промежуток, сегмент, замкнутый промежуток

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – интервал, открытый промежуток

$(a, b], [a, b)$ – полуоткрытый промежуток

$< a, b >$ – некоторый промежуток $a \leqslant b, < a, b > \neq \emptyset$

Замечание (Расширенная вещественная прямая). $\overline{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$(+\infty)+(-\infty),(-\infty)+(+\infty)$ – не определены

$\forall a>0$

- $(+\infty)\cdot a=a\cdot(+\infty)=+\infty$
- $(-\infty)\cdot a=a\cdot(-\infty)=-\infty$
- $\pm\infty\cdot(-1)=\mp\infty$
- $(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$
- $(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
- $(\pm\infty)\cdot 0, 0\cdot(\pm\infty)$ – не определены

$\forall a\in\mathbb{R}$

- $+\infty\geqslant a\geqslant-\infty$

$[a,+\infty]=[a,+\infty)\cup\{+\infty\}$

В “$+\infty$” иногда $+$ опускают, но подразумевают её, если рассматривается $\overline{R}$

1.4 Модуль

$a\in\mathbb{R}\qquad |a|=\begin{cases}a & ,\text{если} a\geqslant 0\\ -a & ,\text{если} a<0\end{cases}$

Свойство 1. $b=|a| \iff \begin{cases}b\in\{a,-a\}\\ b\geqslant 0\end{cases}$

Элементарные свойства модуля:

1. $\forall a\in\mathbb{R}\quad |-a|=|a|$
2. $\forall a\in\mathbb{R}\quad \pm a\leqslant|a|$
3. $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad |a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
4. $\forall a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\quad (\left|\frac{a}{b}\right|)=\frac{|a|}{|b|}$
5. $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad ||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

Замечание. $a-b:=a+(-b)$

$\frac{a}{b}:=a\cdot b^{-1}, b\neq 0$

Замечание. $a \leqslant b \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a + c \leqslant b + c$

$a \leqslant b \quad b \leqslant c \implies a \leqslant c$

$a \leqslant b, c \leqslant d \quad a + c \overset{?}{\leqslant} b + d$

$a + c \leqslant b + c \quad b + c \leqslant b + d \implies a + c \leqslant b + d$

Доказательство. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

$\pm a \leqslant |a|, \pm b \leqslant |b| \quad \pm(a + b) \leqslant |a| + |b|$ (аксиома порядка 4)

$\implies |a + b| \leqslant |a| + |b| \implies |a - b| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$

$|a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b|$

$|a| - |b| \leqslant |a - b| \quad |b| - |a| \leqslant |b - a| = |a - b|$

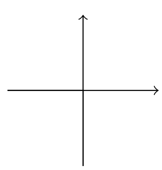
$||a| - |b|| = \pm(|a| - |b|) \leqslant |a - b|$ ∎

Замечание. $|+\infty| := +\infty \quad |-\infty| := +\infty$

1.5 Комплексные числа

$\mathbb{C}$ – обозначение для множества комплексных чисел

$\mathbb{C} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$



Удобно представлять на плоскости.

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

Замечание. $\mathbb{C}$ – поле

аксиомы для сложения очевидны.

$0 = (0, 0)$

$1 = (1, 0)$

$-(x, y) = (-x, -y)$

$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}$

$i = (0, 1)$

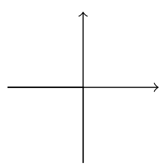
$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$

$\mathbb{R} \leftrightarrow \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ (именно такие пары, потому что так сохраняются операции

$F : \mathbb{R} \to \{(x,0)\}$ $\quad F$ сохраняет $+$ и сохраняет $\cdot$

$(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2, 0)$

$(x_1,0) \cdot (x_2,0) = (x_1 x_2 - 0, 0)$



Оси: вещественная(x) и мнимая(y)

$(0,y)^2 = (-y^2,0) \forall y \in \mathbb{R}$

$(x,y) = x + iy \quad i = (0,1)$ – мнимая единица. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

$z = x + iy \quad x$ – вещественная часть z, $\quad y$ – мнимая часть z

$Rez = x, \quad Imz = y \quad$ иногда встречается rp, ip – real/imaginary part

Замечание (Комплексное сопряжение)**.** $z = x+iy \quad \overline{z} = x-iy$ – отражённое от оси x, если смотреть на плоскость.

$Rez = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad Imz = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ – вещественные числа!

Замечание (Модуль и аргумент)**.** $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$(z \cdot \overline{z} = (x+iy) \cdot (x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2)$

$r = |z|$

Аргумент – угол (ориентированный) между осью Ox и $\overrightarrow{Oz}$

Аргументов много $Argz, z \neq 0$ – совокупность всех аргументов

Если $\varphi_0 \in Arg(z)$, то $Argz = \{\varphi_0 + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$

$\begin{cases} \varphi_0 \in Argz \\ \varphi_0 \in (-\pi, \pi] \end{cases} \implies \varphi_0$ Называется главным значением аргумента $\varphi_0 = arg(z)$

$z = (x,y) = (r,\varphi), r$ – длина радиус-вектора, φ – аргумент.

(r,φ) – полярные координаты, совмещённые с прямоугольными

Замечание. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\cos\varphi$

$x > 0 \quad argz = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y > 0 \quad argz = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y < 0 \quad argz = -\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad argz = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$$

остальное – упражнение

Изобразить кривую заданную в полярных координатах

1. $r = 3$
2. $r = \varphi$ – спираль Архимеда
3. $r = e^{\varphi}$
4. $r = \frac{1}{\cos\varphi}$
5. $r = \frac{2}{\sin\varphi}$
6. $r = \frac{3}{\cos\varphi+\sin\varphi}$
7. $r = 1 + \cos\varphi$

$(0, 0)$ – полюс

$r(\varphi)\uparrow$ – удаление от полюса

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – в скобках точка на единичной окружности с аргументом таким же, что и у z

Это называется тригонометрической формой записи числа.

$-\frac{1}{2}(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\varphi_0+\pi) + i\sin(\varphi_0+\pi))$

$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \varphi \in \mathbb{R}$

$r\cdot e^{i\varphi}$ – экспоненциальная (показательная) форма числа

$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2i}$

Если $z_1 = r_1\cdot e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2\cdot e^{i\varphi_2}$, то

$z_1\cdot z_2 = r_1r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ (см. курс алгебра)

$n \in \mathbb{N} \quad z^n = r^n\cdot(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ – формула Муавра

1.6 Дополнение к разделу "Действия над множествами"

Утверждение 1. $\sqsupset B - \forall$ множество, $\{A_i\}_{i\in I} - -\forall$ семейство множеств $B \cap \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} (B \cap A_i)$

Доказательство. $x \in B \cap \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \iff \begin{cases} x \in B \\ x \in \cup A_i \end{cases} \iff \begin{cases} x \in B \\ \exists i : x \in A_i \end{cases} \iff \exists i : \begin{cases} x \in B \\ x \in A_i \end{cases} \iff \exists i : x \in B \cap A_i \iff x \in \bigcup\limits_{i\in I} (B \cap A_i)$ ■

1.7 Принцип математической индукции

P_n - утверждение, зависящее от n

Если $\begin{cases} P_1 - \text{верно} \\ P_n \to P_{n+1} \end{cases} \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad P_n$ – верно

$\{n : P_n - \text{верно}\}$ – индуктивно $\implies \mathbb{N} \subseteq \{n : P_n - \text{верно}\}$

Первый шаг (проверка P_1) называется базой индукции, а второй – переходом

Пример. $2^n \geqslant n^2 \quad \forall n \geqslant 4, n \in \mathbb{N}$

$P_4 \quad 2^4 \geqslant 4^2 \quad 16 \geqslant 16$ – верно

$\sqsupset P_n$ – верно

$P_{n+1} \quad 2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geqslant n^2 \cdot 2 \overset{?}{\geqslant} (n+1)^2 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leqslant 2$

$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{4}$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leqslant 2$

Определение 14. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$0! := 1$ – соглашение

$(n+k)! = n! \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)$

$n!! = n \cdot (n-2) \cdot \ldots$ (заканчивается либо 1, либо 2)

n – чётно, $n!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

n – нечётно, $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$

Определение 15 (биноминальный коэффициент)**.** $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, число сочетаний из n по k

$\binom{n}{k}$

Элементарный свойства биномиальных кэффициентов:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$
3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

   $\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \cdot (n+1-k+k) = C_{n+1}^k$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Утверждение 2. $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ – бином Ньютона

Замечание. $\sum_{k=1}^{N} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_N$

$\sum_{k=m}^{m+p} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+p}$

$\prod_{k=m}^{m+p} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{m+p}$

Замечание. $x^0 := 1 \forall x \in \mathbb{C}$ – определили функцию

Доказательство бинома по индукции. База: $n = 1 \quad (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a + b$

Переход: Пусть верно для n. Докажем для $n+1$

$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right) \cdot (a+b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} \underset{(j=k+1)}{=} \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} \underset{k=j}{=} \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} = C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^k a^k b^{n+1-k}\right) + C_n^0 a^0 b^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n+1} b^{n+1-k} + C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right) \cdot (a+b)$$

.

что и требовалось доказать ■

1.8 Метрические пространства

Определение 16. $\sqsupset X$ – любое множество, а $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$

Тогда пара (X, ρ) называется метрическим пространствам, если функция φ удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (невырожденность)
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника)

Тогда ρ называется метрикой или расстоянием на X.

Пример. 1. $(X, \rho_D$ – метрическое пространство

$$\rho_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{, если} x = y \\ 1 & \text{, если} x \neq y \end{cases}$$

2. $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$

   $x - y = a, y - z = b \quad \rho(x, z) = |a - b| \leqslant |a| + |b| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$

   Обычная или Евклидова метрика

$\tilde{2}$ $X = \mathbb{C} \quad \rho(z, w) = |z - w|$ (аксиома 3 будет проверена позже)

$\tilde{\tilde{2}}$ $X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$

$v = (v_1, \ldots, v_n) \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$ – евклидова норма вектора v

3. $\sqsupset (X,\rho)$ – метрическое пространство

   $\sqsupset X_1 \subseteq X \quad \rho_1 = \rho|_{X_1\times X_1}$

   (X_1,ρ_1) – есть метрическое пространство, а ρ_1 называется индуцированной метрикой.

4. X – множество станций метрополитена г. Санкт-Петербурга. Пусть между соседними станциями расстояние – 2 минуты. $\rho(u,v) = \min$ длин путей из u в v

   ρ – метрика

Определение 17. Открытый шар с центром в точке a радиусом R в метрическом пространстве (X,ρ) :

$B_R(a) = \{x \in X : \quad \rho(X,a) < R\}$

$B_R[a] = \{x \in X : \quad \rho\,(x,a) \leqslant R)\}$

Пример. 1. $(0 \vee 1)$ $B_R(a) = \begin{cases} \{a\} & \text{, если } R \leqslant 1 \\ X & \text{, если } R > 1 \end{cases}$

2. $(a-R, a+R)$

3. круг (без окружности)

4. n-мерный шар

в $\mathbb{R}^n \quad \|v\|_1 = \sum_{k=1}^n |v_k| \quad \|v\|_\infty = \max\limits_{k=1:n} |v_k|$

Определение 18. $E \subseteq \mathbb{R}, \begin{cases} M \in E \\ \forall x \in E \quad M \geqslant x \end{cases} \implies M := \max E$

$\rho(x,y) = \|x-y\|$

$\rho_1(x,y) = \|x-y\|_1 \qquad \rho_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$

Упражнение: Проверить, что ρ_1, ρ_∞ – метрики, нарисовать шар в $\mathbb{R}^2$ Относительно ρ_1, ρ_∞

Определение 19. $\sqsupset (X,\rho)$ – метрическое пространство

$E \subseteq X, E$ Называется ограниченным, если

$$\exists a \in X, \exists R > 0 : \quad E \subseteq B_R(a)$$

Замечание. Эквивалентное определение: те же слова, но $B_R[a]$

Определение 20. $\sqsupset E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad E$ называется ограниченным сверху, если

$$\exists m \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in E \quad x \leqslant m.$$

При этом такое число m называется <u>мажорантой</u>

Говорят: m мажорирует E

Аналогичное определение для ограниченности снизу. Соответствующее m Называется <u>минорантой</u>

Утверждение 3. $\sqsupset E \subseteq \mathbb{R}$

$$E \text{ – ограничено} \iff \begin{cases} E \text{ – ограничено сверху} \\ E \text{ – ограничено снизу} \end{cases}.$$

Доказательство. $\implies$ По условию $\exists a : E \subseteq (a - R, a + R)$

$M := a + R$– мажоранта $\implies$ E оргграничено сверху. снизу – аналогично

$\impliedby$ E – ограничено сверху $\implies \exists M \in R : \forall x \in E \quad x \leqslant M$

$\ldots \exists m \in \exists : \forall x \in E \quad x \geqslant m$

$-x \leqslant -m \leqslant |m| \implies |x| = max\{x, -x\} \leqslant max\{|M|, |m|\} = R$

$\implies x \in B_R[0]$. Т.к. это верно $\forall x \in E$, то $E \subseteq B_R[0]$ ■

Замечание. Если $E \subseteq \mathbb{R}$, то

$$E \text{ – ограничено} \iff \exists R: \quad \forall x \in E \quad |x| \leqslant R.$$

Определение 21. $E \subseteq R, M \in E$, тогда

$$M = \max E \iff \forall x \in E \quad x \leqslant M.$$

$\min E$ аналогично

Утверждение 4. $\forall E \subseteq R: \quad E$ – конечно и $E \neq \emptyset \quad \exists \max E, \min E$

Определение 22. E конечно, если $\exists m \in \mathbb{N}$ и $\exists$ биекция $\varphi : E \to \{1, 2, \ldots, n\}$

доказательство Утверждения. По индукции по числу элементов в E

База: $m = 1 \quad E = \{x\} \quad \max E = \min E = x$

Переход: $m \to m + 1$

Индукционное предаоложение: $\forall$ конечное множество из M элементов имеет max и min

Пусть E содержит $m + 1$ элементов

$E = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\} = \widetilde{E} \cup \{x_{m+1}\}$

$M = \max\{\max \widetilde{E}, x_{m+1}\}$

$$\begin{cases} M \in \widetilde{E} & \subseteq E \\ M = x_{m+1} & \in E \end{cases} \implies M \in E$$

$$\begin{cases} M \geqslant x_{m+1} \\ M \geqslant x \forall x \in \widetilde{E} \end{cases} \implies M \geqslant x \forall x \in E, \text{ т.о. } M = \max E$$ ■

Следствие 1. $\sqsupset E \subseteq \mathbb{Z}, E$ – ограничено сверху (снизу).
Тогда $\exists \max(\min) E$

Доказательство. По условию существует $M \in R : \forall x \in E \quad x \leqslant M, \widetilde{\sqsupset}\ M \geqslant M$

$\sqsupset n \in E \quad \lessdot \widetilde{E} = \{x \in E : n \leqslant x \leqslant \widetilde{M}\}$

В $\widetilde{E}$ не более $\widetilde{M} - n + 1$ элементов, оно конечно $\implies$ (по утверждению) $\exists \max \widetilde{E} = C$

$\forall x \in E^x < n \vee x \geqslant n$

$x < n \qquad n \in \widetilde{E} \implies n \leqslant C \implies x \leqslant C$

$x \geqslant n \qquad x \in \widetilde{E} \implies x \leqslant C$ ■

Следствие 2. $\sqsupset E \subseteq \mathbb{N} \quad E \neq \emptyset$ Тогда $\exists \min E$

(вытекает из следствия 1, т.к. $\mathbb{N}$ ограничено снизу)

$\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : l \leqslant x\}$ (Существует по следствию 1)

$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

Утверждение 5. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad \exists c \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$

Доказательство. $b - a > 0 \implies \frac{1}{b-a} > 0$
$\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{1}{b-a} \iff b - a > \frac{1}{N}$

$c = \frac{\lfloor Na \rfloor + 1}{N} \in \mathbb{Q}$

$Na - 1 < \lfloor Na \rfloor \leqslant Na \implies a = \frac{Na}{N} < c \leqslant \frac{Na+1}{N} = a + \frac{1}{N} < a + b - a = b$

$\implies c \in (a, b)$

■

1.9 Равномощные множества

Определение 23. $\sqsupset A, B$ – множества.

$A \sim B$ равномощны, если $\exists$ биекция между A и B

Пример. 1. $(a, b), a < b \sim (0, 1)$

$f(x) = a + (b - a) \cdot x, x \in (0, 1)$

$\bar{1}$ $\forall (a, b)$ и (c, d) равномощны

2. $a < b \implies (a, b) \sim [a, b) \sim [a, b]$

3. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R} \quad (\mathrm{tg})$

Замечание. (равномощность) $\sim$ – отношение эквивалентности.

1. $X \sim X \qquad id(x) \equiv x$ – тождественное отображение id_X
2. $X \sim Y \implies Y \sim X$
3. $X \sim Y \quad Y \sim Z \implies X \sim Z$

Определение 24. Множество, равномощное $\mathbb{N}$ называется счётным

Пример.

- $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ – счёттно. $f(x) = x^2$
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$ – считаем ихнатуральными числами в таком порядке
- $\{m, m+1, m+2, \ldots\}, m \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = m + x - 1$

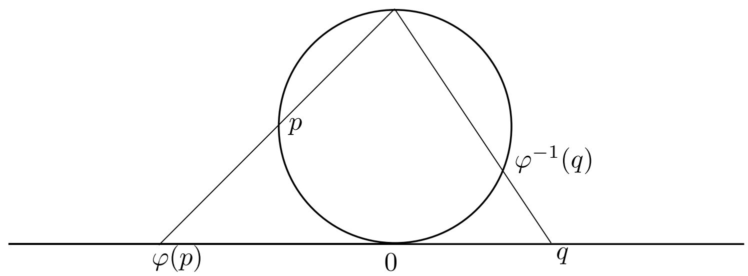


Рис. 1.2: circ

Теорема 1. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество

Доказательство. $\sqsupset X$ – бесконечное множество. $\implies \exists a_1 \in X \quad X \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ (Иначе $X = \{a_1\}$!!!) $\implies \exists a_2 \in X \setminus \{a_1\} \quad a_2 \neq a_1$

Так можно продолжать для любого n. $X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \neq \emptyset$ (иначе X конечно) $\implies \exists a_{n+1} \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad an + 1 \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi : n \to a_n \qquad A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \varphi$ – инъекция по построению. A – счётное ∎

Определение 25. Если X – конечно $\vee X$ – счётно, то X называется <u>не более чем счётным</u> (нбчс).

Замечание (уточнение понятие конечного)**.** X конечно $\iff \begin{cases} X \sim \{1, \ldots, n\} \\ X = \emptyset \end{cases}$

Теорема 2. $\forall$ счётного E, если $X \subseteq E$, X – бсконечно, то X –счётно.

Замечание. Любое подмножество счётного не более чем счётно.

Доказательство. E – счётно по условию $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots\}$

В данном наборе есть элементы из X. Пронумеруем их в порядке возникновения в наборе (*). ■

Теорема 3. Произведение счётных множеств счётно.

A, B – счётны $\implies A \times B$ – счётно

Доказательство. Если $A = B = \mathbb{N}$ $\mathbb{N}^2$ счётно

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,2) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \text{ – нумеруем по диагоналям}$$

$A \times B = \{(a_K, b_j)\}_{k,j\in\mathbb{N}} \qquad l \to (k,j) \qquad = \{(k,j)_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ ■

Замечание. Любое конечное произведение $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{m} = (\mathbb{N}^m) \sim \mathbb{N}$ не более чем счётно

Теорема 4. Объединение счётного количества счётных множеств счётно.

$\{\{A_j\}_{j\in J}: \quad J$ – не более чем счётно $\quad \forall j \in J \quad A_j$ не более чем счётно$\}$

$\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ – не более чем счётно

Не умаляя общности (н.у.о.) $J = \mathbb{N} \vee J = \{1, 2, \ldots, n\}$

Элементы $A_1, A_2, \ldots$ (счётных!) множеств можно занумеровать.

$$\begin{aligned} A_1: &\quad a_{11}, a_{12}\ldots \\ A_2: &\quad a_{21}, a_{22}\ldots \\ A_3: &\quad a_{31}, a_{32}\ldots \end{aligned}$$

Перенумеруем по диагоналям лишь те, который встречаем в первый раз

Следствие 3.
1. $\mathbb{Q}$ счётно. $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_N \qquad \mathbb{Q}_N = \{\frac{p}{n}\}_{p\in\mathbb{Z}}$
2. $A = \{x : \exists$ многочлен с целыми коэффициенты $P(\cdot): \quad P(x) = 0\}$

   $\mathbb{P}_n = \{p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n : \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\} \quad \mathbb{P}_n \leftrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$

   $A_n = \{x : \exists p \in \mathbb{P}_n : p(x) = 0\} \qquad A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Задача 1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots$ – несчётно

Теорема 5. Сегмент несчётен ($\forall a, b : a < b \quad [a, b]$ – не является счётным)

Доказательство. Доказательство от противного.

$\sqsupset [a, b]$ – счётен $\implies [a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

$\lhd$ три замкнутые "трети" $\Delta = b - a \qquad [a, a + \frac{\Delta}{3}], [a + \frac{\Delta}{3}, a + \frac{2\Delta}{3}], [a + \frac{2\Delta}{3}, b]$

$x_1 \notin$ одной из третей. Эту треть назовём I_1. Повторим действие для I_1 и x_2

$I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_0 x_1 \notin I_1, x_2 \notin I_2$

$I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq I_2 \qquad x_n \notin I_n$

По аксиоме №16 $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \quad \sqsupset x \in \bigcap\limits_{n \in N} I_n \implies c \in [a, b] \implies \exists n : c = x_n \notin I_n \implies c \notin \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$!!!

Т.о. $[a, b]$ – несчётно ∎

Следствие 4. несчётные: $\mathbb{R}, \underset{a<b}{(a, b)}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$X \sim [0, 1]$, то говорят, что X – мощности континуум (мощности $\mathbb{C}$)

Задача 2.

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$
2. X – множество, то $X \not\sim 2^X \qquad 2^X = \{A : A \subseteq X\}$

   $X = \emptyset \quad 2^X = \{\emptyset\}$

   $X = \{a\} \quad 2^X = \{\emptyset, \{a\}\}$
3. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim [0, 1]$

Определение 26. $\sqsupset X$ – любое множество Отображение из $\mathbb{N}$ в X называется последовательностью в X

вместо $f(n), n \in \mathbb{N} \quad f : \mathbb{N} \to X$ используют $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $(x_n)_{n=1}^{\infty} \qquad n \to x_n \in X$

1.10 Предел числовой последовательности

Определение 27. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность вещественных чисел. $x_+ \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_+ \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |x_n - x_+| < \varepsilon.$$

В метрическом пространстве (X, ρ) шар $B_R(a)$ называется также R-окрестностью точки a

Определение 28 (Определение предела на языке окретсностей)**.**

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_* \iff \forall$ окрестности U точки $x_* \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n \in U$

Пример. $x_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}\ x_* = 0$

$\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad N := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$

Замечание. Определение предела на "языке окрестностей" справедливо в случае последовательностей в метрическом пространстве

$x_n \to x_* \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \rho(x_n, x_*) < \varepsilon$

Утверждение 6. $\sqsupset x_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}, c \in X, X$ – метрическое пространство $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

Доказательство. $x_* = c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_*) = 0 < \varepsilon \forall\varepsilon > 0$

$N = 1$ ∎

Замечание. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности в метрическом пространстве X и $\exists m \in \mathbb{N} \quad x_n = y_n \forall n \geqslant m$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ совпадают (если существует один, то существует другой и равны при существовании)

Утверждение 7 (единственность предела)**.** $\sqsupset (X, \rho), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X, y, z \in X$

Если $x_n \to y$ и $x_n \to z$, то $y = z$

Доказательство. Если $y \neq z$, то $\rho(y, z) = \Delta > 0 \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{2}$

Т.к. $x_n \to y, x_n \to z$, то $\exists N_1, N_2 :$

$\forall n > N_1 \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon$

$\forall n > N_2 \quad \rho(x_n, z) < \varepsilon$

$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \quad \begin{cases} \rho(x_n, y) < \varepsilon \\ \rho(x_n, z) < \varepsilon \end{cases} \implies \Delta = \rho(y, z) \leqslant \rho(y, x_n) + \rho(x_n, z) <$ $2\varepsilon = \Delta \implies \Delta < \Delta$!!! ■

Пример. $x_n = (-1)^{-1} \forall n \in \mathbb{N} \nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$

Если бы $\exists x_* = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$, то для $\varepsilon = 1 \exists N$

$n = 2N \quad \left|(-1)^{n-1} - x_*\right| = |-1 - x_*| < 1$

$n = 2N + 1 \quad \left|(-1)^{n-1} - x_*\right| = |1 - x_*| < 1$

$2 = |1 - (-1)| \leqslant |1 - x_* + x_* - (-1)| \leqslant |1 - x_*| + |x_* - (-1)| < 2$

Определение 29. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если ограничено множество её значений $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Определение 30. В метрическом пространстве сходящейся последовательностью называется последовательность, у которой существует предел (в этом пространстве)

Теорема 6. Сходящаяся в метрическом пространстве последовательность ограничена.

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся в метрическом пространстве (X, ρ) последовательность, т.е. $\exists x^* \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in N \quad \rho(x_n, x^*) < \varepsilon$

$\sqsupset \varepsilon = 1, \sqsupset N = N(\varepsilon)$, т.е. $\forall n > N \quad \rho(x_n, x^*) < 1$

$R = max\{\rho(x_1, x^*), \rho(x_2, x^*), \ldots, \rho(x_N, x^*), 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_r[x^*] \implies$ $\{x_n\}$ – ограничена ■

Теорема 7 (предельный переход в неравенствах)**.** $\sqsupset \{x_n\}, \{y_n\}$ – вещественные последовательности. $x_n \to x_*, y_n \to y_* \quad x_*, y_* \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad x_n \leqslant y_n \implies x_* \leqslant y_*$

Отметим, что из $x_n < y_n$ НЕ следует, что $x_* < y_*$.

Пример: $x_n = 0, y_n = \frac{1}{n}, x_* = y_* = 0$, но при этом $x_n < y_n \forall n \in \mathbb{N}$

Доказательство. от противного. $\sqsupset x_* > y_* \quad \varepsilon = \frac{x_* - y_*}{2}$

Т.к. $x_n \to x_*$, то $\exists N_1 \,(= N(\varepsilon)) : \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \quad |x_n - x_*| < \varepsilon$

$\exists N_2 \,(= N(\varepsilon))\, \forall n > N_2 \quad |y_n - y_*| < \varepsilon$

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$ и $n \in \mathbb{N}\ n > N \implies \begin{cases} |x_n - x_*| < \varepsilon \\ |y_n - y_*| < \varepsilon \end{cases} \implies$
$\begin{cases} x_n - x_* > -\varepsilon \\ y_n - y_* > -\varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x_n > x_* - \varepsilon = x_* - \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \\ y_n < y_* + \varepsilon = y_* - \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \end{cases} \implies y_n < x_n$
!!! ■

Частные случаи(следствия): Пусть $\{x_n\}$ – вещественная последовательность

1. $\sqsupset \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant b, b \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$
2. $\ldots \geqslant a \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a$
3. $\sqsupset n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [a,b]$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$

Теорема 8 (о зажатой последовательности. “Принцип двух милиционеров”). $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вещественные последовательности.

$\forall n \in \mathbb{N} x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ (и пределы существуют), то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Доказательство. $\vartriangleleft \forall \varepsilon > 0$

Т.к. $x_n -> a$, то $\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon$

Т.к. $z_n \to a$, то $\exists N_2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > N_2, \quad |z_n - a| < \varepsilon$

$N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда $n \in \mathbb{N} \quad n > N$

$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |z_n - a| < \varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} x_n > a - \varepsilon \\ y_n < a + \varepsilon \end{cases}$

$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \implies |y_n - a| < \varepsilon \implies y_n \to a$ ■

Определение 31. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется <u>бесконечно малой</u>, $x_n \to 0, n \to +\infty$

Замечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м. $\iff \{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.

$\{x_n\}$ – б.м. $\iff \forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| < \varepsilon \implies |x_n|$ – б.м. $(||x_n| - 0| < \varepsilon)$

> **Определение 32.** Число N из определения предела последовательности x_n называется ε -допуском этой последовательности, Д(ε) – набор всех ε -допусков для данной последовательности

Пример. Найти (какой-нибудь) ε-допуск для последовательности $\sqrt{\frac{n+1}{n}} = x_n$ для $\varepsilon > 0$

Доказательство. Найти $N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\, n > N \quad \left|\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right| < \varepsilon \qquad \sqrt{\frac{n+1}{n} - 1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ ■

> **Определение 33.** $(X, K) \quad X$ – множество, K – поле $(K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C})$
>
> “$+$” определено в X, $\cdot$ на элемент K
>
> $\forall x, y \in X \quad x + y \in X \qquad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot k \in X$
>
> (X, K) называется векторным (линейным) пространством, если
>
> 1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$
> 2. $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = z + (y + z)$
> 3. $\exists 0 \in X \quad x + 0 = x$
> 4. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
> 5. $\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x \in X \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
> 6. $\forall \alpha \in K \forall x, y \in X \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
> 7. $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$

Пример.

1. $X = \mathbb{R} = K \quad X = \mathbb{C} = K \quad X = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$
2. $X = \mathbb{R}^n, K + \mathbb{R}$ – основной пример векторного пространства.
3. $X = \{f :< a, b >\to \mathbb{R}\}, K = \mathbb{R} \qquad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \forall \alpha \in K, \forall f \in X \qquad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

   $\not\vdash(x) :\equiv 0$

Определение 34. $\sqsupset (X, K)$ – векторное пространство.

$p : X \to [0, +\infty)$ называется нормой на X, если

1. $p(x) = 0 \iff x = \nvdash$ (невырожденность)
2. $\forall \alpha \in K \forall x \in X \quad p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ (положительная однородность)
3. $\forall x, y \in X \quad p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника)

Функция $p : X \to [0, +\infty)$ и обладает свойствами $2, 3$ называется полунормой.

Элементарные свойства полнормы:

1. $\forall x, y \in X \forall \alpha, \beta \in K \quad p(\alpha x + \beta y) \leqslant |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$
2. $\forall x \in X \quad p(-x) = p(x)$
3. $p(x - y) \geqslant |p(x) - p(y)|$

   $p(x) = p(x - y + y) \leqslant p(x - y) + p(y)$

   $p(x) - p(y) \leqslant p(x - y)$ $p(y) - p(x) \leqslant p(y - x) = p(x - y)$

Замечание. Норма порождает метрику. (X, p), X – векторное пространство.

$\rho(x, y) = p(x - y) \leqslant p(x - z) + p(z - y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Замечание. “Обычное” обозначение нормы $\|x\|$ вместо $p(x)$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ – евклидова норма, $x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$

$\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1:n} |x_k|$

$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$ – норма (проверка позже)

Пример. $F(x)$ – строго монотонное возрастает, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\rho_F(x, y) = |F(x) - F(y)| \, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$|F(x) - F(z)| = |F(x) - F(y) + F(y) + F(z)| \leqslant |F(x) - F(y)| + |F(y) - F(z)| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$

“$\|x\|$” $= \rho(x,)$ – не обязательно положительно однородна, т.е не всякая метрика порождена нормой.

Забегая вперёд: $C[a, b] = \{f -$ непрерывная на $[a, b], f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ $\quad \|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\}$. Упражнение: доказать, что это норма

Определение 35. $\sqsupset (X,K)$ – векторное пространство.

$< x,y >: X \times Y \to K, \quad < \cdot,\cdot >$ называется скалярным произведением на X, если

1. $< x,x > \geqslant 0$ и $\forall x \in X \quad < x,x >= 0 \iff x = \not\vdash$
2. $\forall x,y,z \in X \forall \alpha,\beta \in K \quad < \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x,z > + \beta < y,z >$
3. $\forall x,y \in X \quad < x,y >= \overline{< y,x >}$

Элементарные следствия:

1. $< z, \alpha x + \beta y >= \overline{\alpha} < z,x > + \overline{\beta} < z,y >$

   $< z, \alpha x + \beta y >= \overline{< \alpha x + \beta y, z} = \overline{\alpha < x,z > + \beta < y,z >} = \overline{\alpha}\overline{< x,z >} + \overline{\beta}\overline{< y,z >} = \overline{\alpha} < z,x > + \overline{\beta} < z,y >$

2.

Утверждение 8. Если (X,K) – векторное пространство, $< \cdot,\cdot >$ – скалярное произведение, то $\forall x,y \in X \quad |< x,y >|^2 \leqslant < x,x >< y,y >$

Доказательство. 1. $y = \not\vdash, y = 0 \cdot \not\vdash \quad < x,y >=< x, 0 \cdot \not\vdash >= 0$

2. $y \neq \not\vdash \implies < y,y > \neq 0 \quad z = \frac{<x,y>}{<y,y>} \in K$

   $0 \leqslant < x - \alpha y, x - \alpha y >=< x,x > - \overline{\alpha} < x,y > - \alpha < x,y > + \alpha \cdot \overline{\alpha} < y,y >$

   $0 \leqslant < x,x > - Re\frac{<x,y>}{<y,y>} \cdot < x,y > + \frac{<x,y>^2}{<y,y>}$

3. $2Re < x,y > \cdot < x,y > - < x,y >^2 \leqslant < x,x >< y,y >$

■

Утверждение 9 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** $x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$

$\langle x,y \rangle_2 = \sum x_k y_k$

$\langle x,x \rangle = \|x\|_2^2$

$\langle y,y \rangle = \|y\|_2^2$

$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$

$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$

Теорема 9 (О связи пределов и арифметических действий в нормированных пространствах)**.** $\sqsupset (X, K)$ – нормированное векторное пространство (векторное пространство, снабжённое нормой)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности в X, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ в K

$x_n \to x, y_n \to y, x, y \in X \quad \alpha_n \to \alpha \in K$ Тогда

1. $x_n \pm y_n \to x \pm y$
2. $\alpha_n \cdot x_n \to \alpha x$
3. $\|x_n\| \to \|x\|$
4. Если $X = \mathbb{R} \vee X = \mathbb{C}, K = X, y \neq 0, \forall n y_n \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$

Доказательство. 1. $x_n + y_n \to x + y$?

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon$-допуск для $x_n + y_n$

$\sqsupset N_1 \in$Д$(\frac{\varepsilon}{2}, \{x_n\})$

$\sqsupset N_2 \in$Д$\left(\frac{\varepsilon}{2}, \{y_n\}\right)$

$N = \max\{N_1, N_2\}$, если $n \in \mathbb{N}, n > N$

$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.о. $N \in$Д$(\varepsilon, \{x_n + y_n\})$

Для разности аналогично

Лемма 1. $\sqsupset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности, $\{a_n\}$ – ограничена, $\{b_n\}$ – б.м. $\implies \{a_n b_n\}$ – б.м.

Доказательство леммы. $\{a_n\}$ – ограничено $\implies \exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant R$

b_n – б.м. $\implies$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in$ Д $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \{b_n\}\right)$, т.е. $|b_n| < \frac{\varepsilon}{R} \forall n \in \mathbb{N}\ n > N$
Тогда $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < R \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon \implies N \in$ Д $(\varepsilon, \{a_n b_n\}) \implies a_n b_n \to 0, n \to +\infty$ ■

Доказательство теоремы:

2. $\alpha_n x_n - \alpha x = \alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x = (\alpha_n - \alpha) x_n + \alpha(x_n - x)$

   $\|(\alpha_n - \alpha) \cdot x_n\| = |\alpha_n - \alpha| \|x_n\| \qquad \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha| \|x_n - x\|$

   В каждой один из множителей ограничен, а другой бесконечно малый

   $\implies \|\alpha_n x_n - \alpha x\|$ – б.м. $\implies \alpha_n x_n - \alpha x \to 0 \implies \alpha_n x_n \to \alpha x$

3. $|\|x_n\| - \|x\|| \leqslant \|x_n - x\|$ – б.м.

4. $\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to x \cdot \frac{1}{y} \impliedby (2)$, если $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y} \iff \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}$ – б.м.
   $\frac{y - y_n}{y y_n} = (y - y_n) \frac{1}{y} \frac{1}{y_n}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}|y| > 0 \quad \exists N \in Д(\varepsilon, \{y_n\}) \quad n > N \implies |y_n - y| < \varepsilon$

$m = \min\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|, \varepsilon\}$ и $m > 0$

$\forall n \in N n \leqslant N \vee n > N \quad |y_n| \geqslant m \vee |y_n| \geqslant |y| - |y_n - y| = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \geqslant m \implies \left|\frac{1}{y_n}\right| \leqslant \frac{1}{m} \implies \{\frac{1}{y_n}\}$ – ограничено

■

Определение 36. $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вещественная последовательность

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n > M$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < M$

$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad |x_n| > M$

Замечание. 1. $x_n \to \infty \iff |x_n| \to +\infty$

2. $x_n \to +\infty \vee x_n \to -\infty \implies x_n \to \infty$ (обратное неверно: $x_n = (-1)^n \cdot n$

Определение 37. Последовательности $x_n : \quad x_n \to \infty$ называются <u>бесконечно большими</u>

Замечание. $\{x_n\}$ – б.б. $\implies$ неограничена (обратное неверно: $x_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$ – неограничена и не б.б.)

Лемма 2 (О связи бесконечно больших и бесконечно малых)**.** $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность и $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq 0$. Тогда x_n – б.б. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.м.

x_n – б.м. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.б.

Доказательство. x_n – б.б. $\iff \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| > M \iff \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} \quad M = \frac{1}{\varepsilon}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \dots\dots \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ ■

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, n \in \mathbb{N} \quad \{x_k\}_{n=k}^{\infty}$ – хвост последовательности x_k

Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то последняя лемма применима к некоторому хвосту этой последовательности.