

Линейный Анализ

Коченюк Анатолий

2 октября 2020 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблица чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i -той строки и j -того столбца

В матрице выше m строк и n столбцов. $A_{m \times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n \times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^n$ – диагональ матрицы $A_{n \times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\| \quad B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j \quad a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

$$B = \alpha \cdot A \iff \forall i, j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

2. Сложение:

Пусть A, B – одинакового размера

$$A + B = C : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$$

Замечание. $\triangleleft \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

\mathbb{O} – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

Пусть $A_{m \times l}, B_{l \times n}$

$$C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m \times n}$$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\triangleleft I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность¹ $A(B + C) = AB + AC$
- дистрибутивность² $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Определение 2. $\triangleleft N \neq \mathbb{O} : N^k = N \cdot N \cdot \dots \cdot N = \mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k = I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$$A_{m \times n} = \|a_{ij}\| \text{ Пусть } B = A^T = \|b_{ij}\| \implies b_{ij} = a_{ji}$$

Свойства:

- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A : A = A^T$ – симметричная/симметрическая матрица. Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A : A = -A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица

1.2 Определитель

$$\square A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 4. Определитель – это число

$$\square A_{1 \times 1} = (a_{11}) \quad \det A \equiv |A| = a_{11}$$

$$\square A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\square A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Мнемоническое правило для случая с тремя:

берём диагонали в одну сторону с + в другую с -.

Пример. $\square A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$$\det A = -28 - 18 + 4 - (-21 + 4 - 24) = -1$$

$$\triangleleft \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Определение 5. Дополнительный минор элемента a_{ij} – определитель матрицы, полученной из исходной вычёркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Утверждение 1 (Рекуррентная формула вычисления определителя).

$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$, где j – номер любого столбца. Эта формула называется разложением определителя по j -ому столбцу.

$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ – разложение по i -ой строке

$$\triangleleft (-1)^{i+j} M_{ij} = \mathcal{A}_{ij} \text{ – алгебраическое дополнение элемента } a_{ij}$$

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = A$

$$\det A = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 25 - 22 - 4 = -1$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$