Линейный Анализ

Коченюк Анатолий

10 октября 2020 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблицв чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i-той строки и j-того столбца

В матрице выше m строк и n столюцов. $A_{m\times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n\times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ – диагональ матрицы $A_{n\times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\|$ $B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

   $B = \alpha \cdot A \iff \forall i, j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

2. Сложение:

   Пусть A, B – одинакового размера

   $A + B = C : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$

   Замечание. $\lhd \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

   $\mathbb{O}$ – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность (–||–) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

   Пусть $A_{m\times l}, B_{l\times n}$

   $C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m\times n}$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\lhd I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность1 $A(B+C)=AB+AC$
- дистрибутивность2 $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$

Определение 2. $\lhd N\neq\mathbb{O}:\quad N^k=N\cdot N\cdot\ldots\cdot N=\mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k=I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$A_{m\times n}=\|a_{ij}\|$ Пусть $B=A^T=\|b_{ij}\| \implies b_{ij}=a_{ji}$

Свойства:

- $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^T\cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A:\quad A=A^T$ – симметричная/симметрическая матрица.Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A:\quad A=-A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & a_4 & a_5\\ 0 & 0 & a_6\end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица

1.2 Определитель

$$\sqsupset A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n_1} & a_{n_2} & .. & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Определение 4. Определитель – это число

$\sqsupset A_{1x1} = (a_{11}) \qquad \det A \equiv |A| = a_{11}$

$\sqsupset A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\sqsupset A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$

Мнемоническое правило для случая с тремя:

берём диагонали в одну сторону с + в другую с -.

Пример. $\sqsupset A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$\det A = -28 - 18 + 4 - (-21 + 4 - 24) = -1$

$\vartriangleleft \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$

Определение 5. Дополнительный минор элемента a_{ij} – определитель матрицы, полученной из исходно1 вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Утверждение 1 (Рекуррентная формула вычисления определителя)**.** $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i+j} \cdot M_{ij}$, где j – номер любого столбца. Эта формула называется разложением определителя по j-ому столбцу.

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ – разложение по i-ой строке

$\vartriangleleft (-1)^{i+j} M_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = A$

$\det A = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} =$

$= 25 - 22 - 4 = -1$

Пример.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$\dots$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

В нижних (верхних) треугольных матрицах определитель – просто произведение элементов

Свойства определителя:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 \cdot a_1 + b_1 & \alpha_2 \cdot a_2 + b_2 & \dots & \alpha_n \cdot a_n + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

4. $\det(A^T) = \det(A)$ (всё, что работает со строчками, работает и со столбцами)

5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

   $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

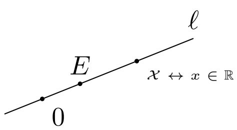
6. $\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \dots & \alpha a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

Пример. $\left.\begin{matrix} 1280 \\ 2848 \\ 1184 \\ 3072 \end{matrix}\right| \vdots\, 32$

TODO ––

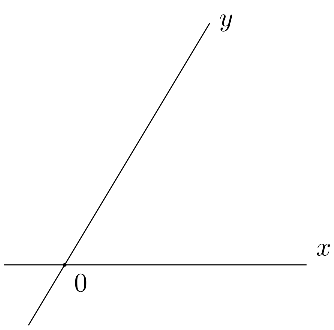
1.3 Лекция 1 - Метод аналитической геометрии

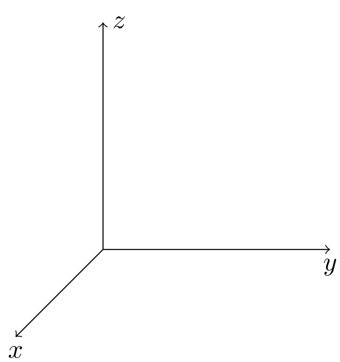
метод – метод координат.



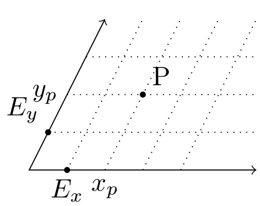
– координатная линия

Замечание. Система координат на плоскости – две координатные линии



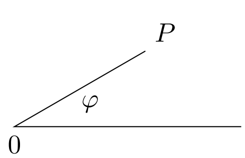


> **Определение 6.** Система координат называется декартовой, если
>
> 1. Углы между координатными линиями прямые
> 2. Масштабы на осях одинаковые



(x_p, y_p) – координаты точки P.

Полярная система координат:



(TODO) ————————————————-

1.4 Практика 3

1.4.1 Обратная матрица

$\sqsupset A, B$ – квадратные матрицы $n \times n$

Матричная алгебра:

1. $A + B$
2. $\lambda \cdot A$
3. $A \cdot B$

Определение 7 (Обратная матрица). $A^{-1} \qquad A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Утверждение 2. Обратная к A матрица существует, если и только если $\det A \neq 0$

Задача 1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$

1. Метод союзной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}^T$

   Определение 8. $\widetilde{A}$ союзная матрица – матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A

   $\det A = (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 12 = 38$

   $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -20 \\ -7 & 11 & -12 \\ 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix}$

   $\lhd A \cdot A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Метод Гаусса $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

Элементарные преобразования:

(a) Умножение на число $\lambda \neq 0$ одной строчки

(b) Перестановка двух любых строк

(c) Составление линейной комбинации строк

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & 7 & 0 & -8 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -140 & 30 & 10 & -50 & 0 \\ 0 & -140 & 49 & 0 & -56 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -10 & -6 & 7 \end{array}\right] \sim \dots$$

Системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -5 \\ x + 3y - 6z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

Заметим, что стандартный способ решения таких систем: упрощение, складывание строк, домножение на число строк, их комбинация – напоминают элементарные преобразования. Т.е. элементарные преобразования – преобразования, приводящие к эквивалентной системе.

1. Метод Гаусса $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & -11 & 20 & 3 \end{array}\right] \sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -55 & 176 & -99 \\ 0 & -55 & 100 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -76 & 114 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 & x = 2 \\ -5y + 16z = -9 & y = -3 \\ -76z = 114 & z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-20) + 4 \cdot (-11) = -12 - 20 - 44 = -76$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 9 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-6) - 1 \cdot 58 + 4 \cdot (-22) = -152$$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-152}{-76} = 2$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

3. метод обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \quad X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{76} \begin{bmatrix} -6 & 20 & -11 \\ -10 & -8 & 7 \\ -18 & 16 & 5 \end{bmatrix}^T = \tfrac{1}{76} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 18 \\ -20 & 8 & -16 \\ 11 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = X$$

1.5 Лекция 3

$V/\sim = W$

$\vec{a} + \vec{b}$

Напоминание:

1. $\exists - (\vec{a})$
2. $\exists \vec{0}$
3. $\lambda\vec{a} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \vec{b}$

1.5.1 Проекция вектора на ось

Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось γ называется класс эквивалентности $a_l^{\|\gamma}$, содержащий вектор, начало которого совпадает с точкой пересечения оси l и прямой парралельной γ и проходящей через начало вектора $\vec{a}$, а конец – с точкой пересечения оси l и прямой, параллельной γ и проходящей через конец вектора $\vec{a}$

Свойства проекции:

1. $(\vec{a} + \vec{b})_l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\|\gamma} + \vec{b}_l^{\|\gamma}$
2. $(\lambda\vec{a})_l^{\|\gamma} = \lambda\vec{a}_l^{\|\gamma}$

<u>lim</u>: $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\|\gamma}$

$\sqsupset \vec{e}$ – вектор, параллельный l. Положим $|\vec{e}| = 1 \implies$ орт оси l

$\sphericalangle \vec{a}_l^{\|\gamma} = \alpha \cdot \vec{e} \quad \alpha = (\text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}) \cdot \vec{e} \qquad \alpha$ – длина проекции $\vec{a}_l^{\|\gamma}$ на ось l.

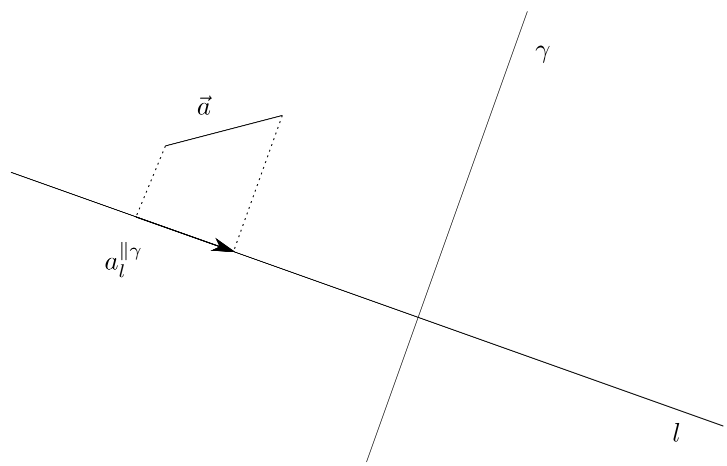


Рис. 1.1: Проекция

Лемма 1. $\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i$

Доказательство. $\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{i_l}^{\|\gamma}$

$\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i \vec{e}$ ∎

$\mathbb{R}^1$

$\forall \vec{a} \qquad \vec{a} = x_a \vec{e} \quad x_a$ – координата вектора $\vec{a}$ на ось l

$\mathbb{R}^2$

$\vec{a} = \vec{a}_x^y + \vec{a}_y^{\|x} = \text{Пр}_y^x \vec{a} \vec{e}_1 + \text{Пр}_y^{\|x} \vec{a} \vec{e}_2 = x_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2$

Определение 10. Говорят, что в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}(a_x, a_y)$

$\mathbb{R}^3$

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$

Замечание. Если угол между осью l и прямой γ прямой ($l \perp \gamma$) $\implies l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\perp} \overset{\to}{=} \text{Пр}_l^{\perp} \vec{a} \cdot \vec{e}$

$l \perp \Gamma \implies \vec{a} + l^{\perp\Gamma} = \vec{a}_l^{\perp} = -||-$

Рис. 1.2: r1

В декартовой системе координат орты координатных осей обозначаются следующим образом:

x $\vec{e}_1 = \vec{i}$

y $\vec{e}_2 = \vec{j}$

z $\vec{e}_3 = \vec{k}$

Замечание. $\vec{a}(1, 2, 3) \implies \vec{a} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$

Лемма 2. $\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i\right)_x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_{i_x}$

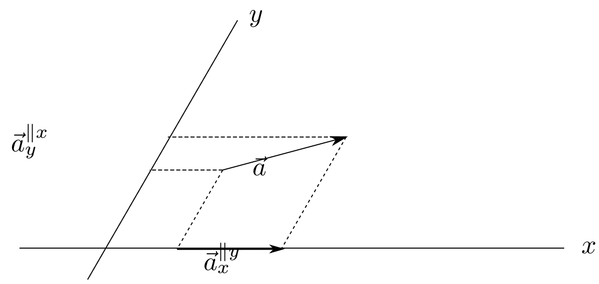


Рис. 1.3: r2

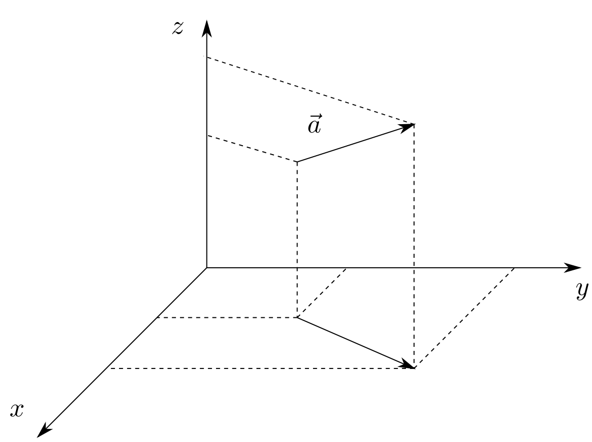


Рис. 1.4: r3