|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Лабораторная работа № 1 | | |
| по дисциплине «Создание современных кроссплатформенных приложений на основе web-технологий» | | |
| **Создание страниц на HTML и CSS** | | |
|  | | |
|  |  |  |
| Группа ПМ-21 | ЯКОВЛЕВ СЕРГЕЙ |
| Место для ввода текста. | ГОЛЫШЕВ ДАНИЛА |
|  | ПОРСИН ДАНИЛ |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватели | ПЕТРОВ Р.В. |
|  |  |
| Новосибирск, 2025 | | |

1. **Постановка задачи**

Условие задачи

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Исходный вид решаемого уравнения

В общем виде уравнение, определяющее эллиптическую краевую задачу для функции , имеет вид

В заданной системе координат и с заданными краевыми условиями имеем систему

заданную в некоторой расчётной области c границей

1. **Теоретическая часть**

Вариационная постановка

Для исходной краевой задачи имеем эквивалентную вариационную постановку в форме уравнения Галеркина

где – пространство пробных функций , которые вместе со своими производными до 1-го порядка включительно интегрируемы с квадратом на и удовлетворяют нулевым первым краевым условиям на границе , – множество функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные и удовлетворяющих только первым краевым условиям на границе .

Конечноэлементная дискретизация и переход к локальным матрицами

Рассмотрим конечномерное пространство размерности с базисом из финитных кусочно-полиномиальнаых функций , аппроксимирующее пространство . Заменим в записанном выше уравнении Галёркина функцию аппроксимирующей её функцией , а функцию – функцией , где - конечномерные пространства размерности , аппроксимирующие исходные пространства соответственно. Тогда получаем аппроксимацию данного уравнения

Так как , то имеем следующие представление для данной функции

Подставив данное представление в полученную аппроксимацию уравнения Галёркина, получаем следующую систему уравнений

где – множество индексов таких, что базисные функции пространства являются и базисными функциями пространства и .

Так как , то имеем следующее представление для данной функции

где компоненты вектора весов определяются следующим образом:



Для данных компонент имеем СЛАУ

Данные компоненты должны быть фиксированы и могут быть определены из условия

Конечноэлементная СЛАУ для компонент вектора весов может быть записана в матричном виде

где компоненты матрицы и вектора , введя следующие обозначения

где , – компонента матрицы жёсткости исходной расчётной области , – вклад от элемента в компоненту матрицы жёсткости , – компонента матрицы массы исходной расчётной области , – вклад от элемента в компоненту матрицу массы , – вклад от краевого условия третьего рода в компоненту глобальной матрицы ,– вклад от исходной расчётной области в компоненту глобальной матрицы , – вклад от исходной расчётной области в компоненту глобального вектора правой части , – вклад от элемента в компоненту вектора , – вклад от краевого условия второго рода в компоненту глобального вектора правой части , – вклад от ребра в компоненту вектора , – вклад от краевого условия третьего рода в компоненту глобального вектора правой части , – вклад от ребра в компоненту вектора ,определяются следующим образом

Аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц и векторов правой части

Рассмотрим -координаты треугольника с вершинами , представляющие собой множество из 3 линейных функций вида

заданные на данном треугольном элементе так, что каждая из них равно единице на одной вершине треугольника и нулю на двух остальных. Для данных функций верно

Рассмотрим локальную задачу треугольного элемента

или, используя введённые выше определения,

заключающуюся в построении размерности количества узлов на элементе , следовательно размерности 3 локальной матрицы и локального вектора правой части . Посредством - координат на треугольном элементе простроим линейные на треугольнике локальные базисные функции для вычисления компонент и локальных матриц жесткости и массы соответственно, компонент локального вектора правой части и для построения локального линейного интерполянта функции правой части и построим квадратичные на треугольниках локальные базисные функции для построения локального квадратичного интерполянта коэффициента диффузии :

Тогда, исходя из свойств - координат и заменяя коэффициент диффузии своим локальным на квадратичным интерполянтом

где – значение коэффициента диффузии в соответствующем узле элемента , при этом значение соответствует серединному узлу соответствующего ребра, и функцию правой части своим локальным на линейным интерполянтом

где – значение функции правой части в соответствующих узле элемента , получаем следующие аналитические выражения для вычисления компонент и локальных матриц жёсткости и массы соответственно и компонент локального вектора правой части :

Рассмотрим ребра с координатами , и с координатами , , на которых заданы краевые условия второго и третьего рода соответственно. Построим на них линейные одномерные базисные функции и соответственно так, что каждая из функция равна 1 на одной вершине и нулю на оставшейся вершине соответствующего ребра, и локальные линейные интерполянты и параметров и соответственно на основе соответствующих построенных базисов

где – значения параметров в соответствующей вершине ребра , – значение параметра в соответствующей вершине ребра . Тогда получаем следующие аналитические выражения для вычисления компонент локальной матрицы ребра , компонент локального вектора ребра и компонент локального вектора ребра

где .

.