Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département d'Informatique

Cours M6 pour SMIA
Introduction à l'Informatique

M. El Marraki
N. El Khattabi

2020 – 2021

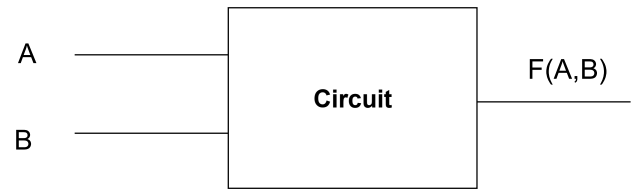
Cours n° 4 - 1

Sommaire

IV. Algèbre de Boole
(Partie 1)

Introduction

- Les machines numériques sont constituées d'un ensemble de circuits électroniques.
- Chaque circuit fournit une fonction logique bien déterminée (addition, comparaison , ….).



La fonction F(A,B) peut être : la somme de A et B , ou le résultat de la comparaison de A et B ou une autre fonction

Introduction

L'**algèbre de Boole** est la partie des mathématiques qui s'intéresse à une approche algébrique de la logique, vue en termes de variables, d'opérateurs et de fonctions sur les variables logiques.

Introduction

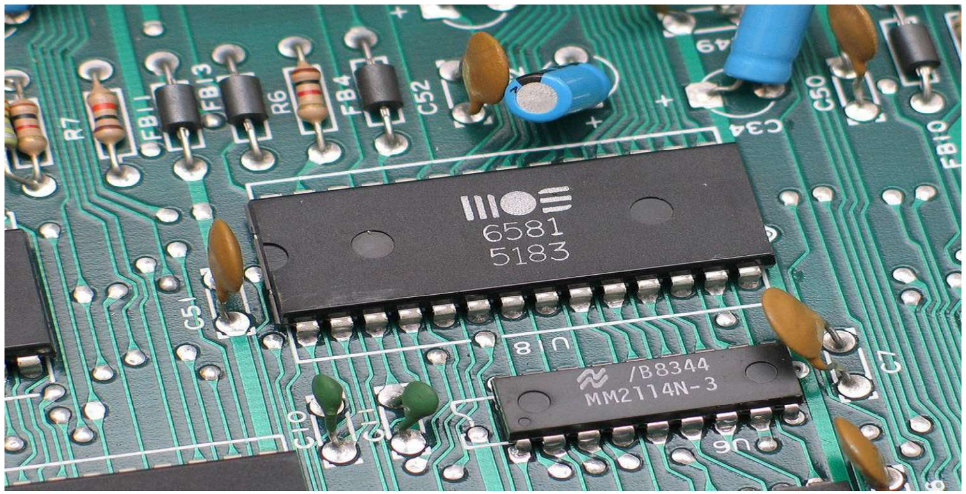
Elle est introduit en 1854 par le mathématicien britannique **George Boole**.

Aujourd'hui, l'algèbre de Boole trouve de nombreuses applications en informatique et dans la conception des circuits électroniques.

Introduction

- L'algèbre de Boole permet de manipuler des valeurs logiques
  - Une valeur logique n'a que deux états possibles : Vraie(1) ou Fausse(0).
  - Plusieurs valeurs logiques peuvent être combinées pour donner un résultat qui est lui aussi une valeur logique
- La manipulation des valeurs logiques repose sur 3 fonctions (ou opérateurs) logiques de base:
  - ET, OU, NON
- Toutes les fonctions logiques sont formées de ces 3 fonctions de base

Circuits électroniques



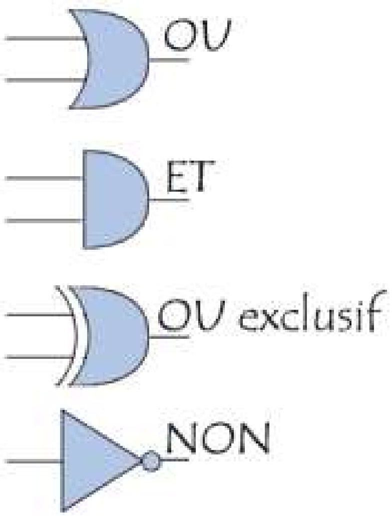
Introduction

- Pour concevoir et réaliser ce circuit on doit avoir un modèle mathématique de la fonction réalisée par ce circuit .
- Ce modèle doit prendre en considération le système binaire.
- Le modèle mathématique utilisé est celui de Boole.

Fonction logique

- C'est une fonction qui relie N variables logiques avec un ensemble d'opérateurs logiques de base.
- Dans l'Algèbre de Boole il existe trois opérateurs de base : NON , ET , OU.
- La valeur d'une fonction logique est égale à 1 ou 0 selon les valeurs des variables logiques.
- Si une fonction logique possède n variables logiques → 2^n combinaisons → la fonction possède 2^n valeurs.
- Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table qui s'appelle table de vérité (TV).

Opérateurs de base



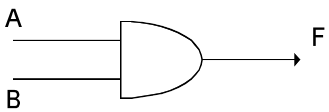
Boole : calcul binaire et calcul logique

⌘ Représentation:

F = A et B, A * B, A • B ou AB

Table de vérité

Entrée		Sortie
B	A	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Symbole graphique

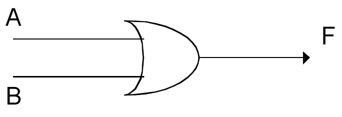
Boole : calcul binaire et calcul logique

⌘ Représentation:

F = A ou B, A + B

Table de vérité

Entrée		Sortie
B	A	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Symbole graphique

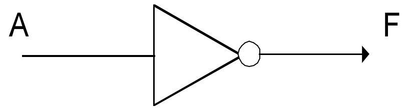
Boole : calcul binaire et calcul logique

⌘ Représentation:

F = A ou \A

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	F
0	1
1	0



Symbole graphique

Exercice

Théorème de De Morgan

Montrer que

et

Correction

Vérification :

0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Equivalent

Vérification :

0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Equivalent

Remarques

- Dans la définition des opérateurs ET , OU , nous avons juste donner la définition de base avec deux variables logiques.
- L'opérateur ET peut réaliser le produit de plusieurs variables logique (ex : A . B . C . D).
- L'opérateur OU peut aussi réaliser la somme logique de plusieurs variables logiques (ex : A + B + C +D).
- Dans une expression on peut aussi utiliser les parenthèses.

Priorité des opérateurs

Pour évaluer une expression logique (fonction logique) :

- on commence par évaluer les sous expressions entre les parenthèses.
- puis le complément (NON) ,
- en suite le produit logique (ET)
- la somme logique (OU)

L'opérateur nand (non et)

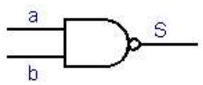


Fig. 1. - Symbole du circuit NAND.

≡

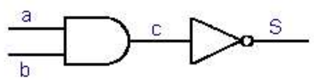


Fig. 2. - Décomposition du circuit NAND.

a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fig. 5. - Table de vérité du circuit NAND.

L'opérateur nor (non ou)

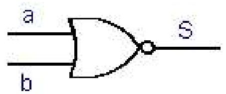


Fig. 10-a. - Symbole graphique du circuit NOR.

≡

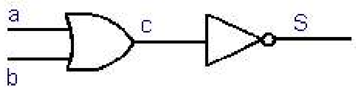


Fig. 10-b. - Schéma équivalent du circuit NOR.

a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Fig. 13. - Table de vérité du circuit NOR.

Priorité des opérateurs

Exemple :

$$F(A,B,C) = (\overline{A\,.\,B})\,.\,(\,C + B) + A.\overline{B}.C$$

$$\text{si on veut calculer } F(0,1,1) \text{ alors :}$$

$$F(0,1,1) = (\overline{0.1})(1+1) + 0.\overline{1}.1$$

$$F(0,1,1) = (\overline{0}\,)\,(\,1\,) + 0.0.1$$

$$F(0,1,1) = 1.1 + 0.0.1$$

$$F(0,1,1) = 1 + 0$$

$$F(0,1,1) = 1$$

Exercice :
Trouver la table de vérité de la fonction précédente ?

Solution

Pour trouver la table de vérité , il faut trouver la valeur de la fonction F pour chaque combinaisons des trois variables A, B , C
3 variables → 2^3 = 8 combinaisons

$$F(A,B,C) = (\overline{A\,.\,B})\,.\,(\,C + B) + A.\overline{B}.C$$

$$F(0,0,0) = (\overline{0.0}).(0+0) + 0.\overline{0}.0 = 0$$
$$F(0,0,1) = (\overline{0.0}).(1+0) + 0.\overline{0}.1 = 1$$
$$F(0,1,0) = (\overline{0.1}).(0+1) + 0.\overline{1}.0 = 1$$
$$F(0,1,1) = (\overline{0.1}).(1+1) + 0.\overline{1}.1 = 1$$
$$F(1,0,0) = (\overline{1.0}).(0+0) + 1.\overline{0}.0 = 0$$
$$F(1,0,1) = (\overline{1.0}).(1+0) + 1.\overline{0}.1 = 1$$
$$F(1,1,0) = (\overline{1.1}).(0+1) + 1.\overline{1}.0 = 0$$
$$F(1,1,1) = (\overline{1.1}).(1+1) + 1.\overline{1}.1 = 0$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

Lois fondamentales de l'Algèbre de Boole

L'opérateur NON

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A} + A = 1$$

$$\overline{A}.A = 0$$

L'opérateur ET

$(A.B).C = A.(B.C) = A.B.C$	Associativité
$A.B = B.A$	Commutativité
$A.A = A$	Idempotence
$A.1 = A$	Elément neutre
$A.0 = 0$	Elément absorbant

L'opérateur OU

$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$ Associativité

$A+B = B+A$ Commutativité

$A+A = A$ Idempotence

$A+0 = A$ Elément neutre

$A+1 = 1$ Elément absorbant

Distributivité

$A.(B+C) = (A.B)+(A.C)$ Distributivité du ET sur le OU

$A+(B.C) = (A+B).(A+C)$ Distributivité du OU sur le ET

Exercices : Autres relations utiles

$$A + (A.B) = A$$

$$A.(A + B) = A$$

$$(A + B).(A + \overline{B}) = A$$

$$A + \overline{A}.B = A + B$$

Correction

Montrons que $A + A.B = A$

$$A + A.B = A.(1 + B) = A.1 = A$$

Montrons que $A.(A + B) = A$

$$A.(A + B) = A.A + A.B = A + A.B = A$$

Montrons que $(A + B).(A + \bar{B}) = A$

$$(A + B).(A + \bar{B}) = A + B.\bar{B} = A + 0 = A$$

Montrons que $A + \bar{A}.B = A + B$

$$A + \bar{A}.B = (A + \bar{A}).(A + B) = 1.(A + B) = A + B$$

Fin du cours