

UNIVERSITE MOHAMMED V
FACULTE DES SCIENCES DE RABAT

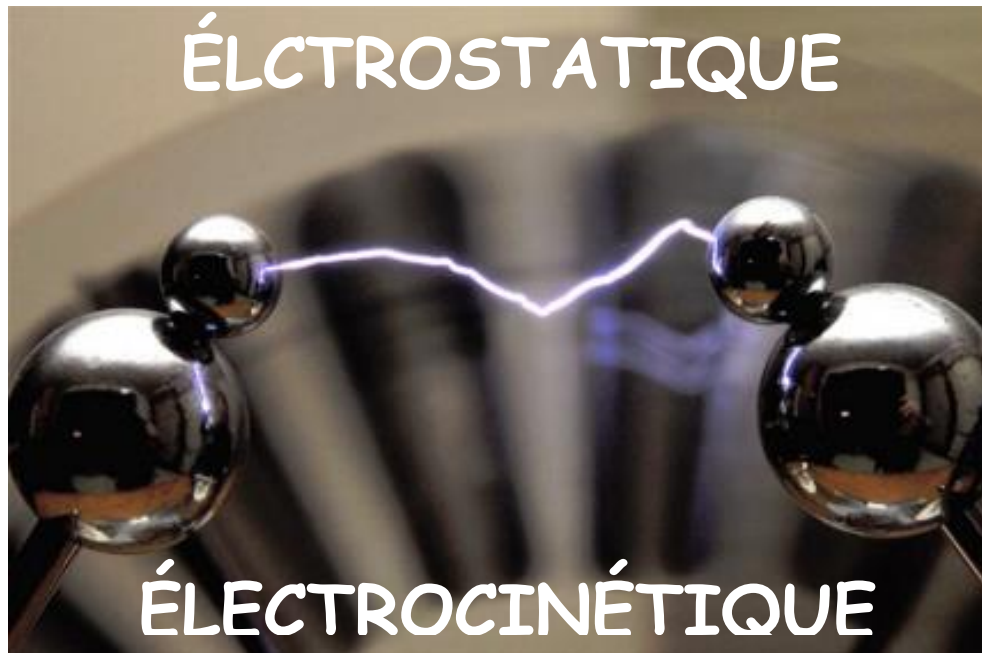


DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

COURS DE PHYSIQUE

SMPC & SMLA

Première Année



Réalisé par : Pr. Boubker FARES

Edition : 2020

FACULTE DES SCIENCES DE RABAT

AVANT-PROPOS

Ce polycopié du module électrostatique et électrocinétique a été destiné aux étudiants inscrits en première année système LMD, Sciences Physiques, « SMIA – SMPC », deuxième semestre de l'année universitaire. Le contenu de ce polycopié, correspond au programme officiel de la matière « Physique 2 » enseigné en première année, socle commun, de domaine scientifique. Il a été rédigé dans le but de permettre d'avoir un outil de travail et de référence recouvrant les connaissances qui leur sont demandés.

Afin de permettre à l'étudiant d'assimiler le cours, nous avons traité plusieurs exemples d'application. L'acquisition de vos connaissances doit être fondée sur un travail personnel préalable important, afin que vous puissiez tirer parti au mieux de l'aide que peut vous apporter votre conférencier pendant les TD.

La partie 1 présente les notions de :

- Calculs du champs et potentiel électriques créés par des charges électriques distinctes ou des distributions linéaires, surfaciques ou volumiques.
- La symétrie et application du théorème de Gauss.
- Lois régissant dans le domaine des conducteurs en équilibre ou un système de conducteurs en équilibre et les méthodes des calculs des champs et potentiels dans ces cas.

La partie 2 traite les notions, les lois et les théorèmes généraux de l'électrocinétique.

Il est possible que cette édition comporte quelques imperfections, nous serions reconnaissants à tous ceux qui nous feraient part de leurs remarques et suggestions.

SOMMAIRE

ÉLECTROSTATIQUE

PETITE HISTOIRE DE L'ÉLECTRICITÉ « STATIQUE »	2
Chapitre 1 : Électrisation – Interactions entre charges – Loi de Coulomb	
I. Électrisation de la matière.....	4
I.1. Électrisation par frottement (triboélectricité).....	4
I.2. Électrisation par contact.....	5
I.3. Électrisation par influence.....	5
II. Charge électrique.....	5
II.1. Définition.....	5
II.2. Quantification de la charge.....	5
II.3. Principe de la conservation de la charge électrique.....	6
III. Différentes distributions de charge.....	6
III.1. Distribution volumique.....	6
III.2. Distribution surfacique.....	6
III.3. Distribution linéique.....	7
IV. Loi de COULOMB.....	7
IV.1. Énoncé de la loi de Coulomb.....	7
IV.2. Validité de la loi de Coulomb.....	8
IV.3. Principe de superposition.....	8
 Chapitre 2 : Champ, Potentiel et Énergie Électrostatique	
I. Champ électrostatique.....	10
I.1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.....	10
I.2. Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles : Principe de superposition.....	10
I.3. Champ créé par une distribution continue de charges.....	11
I.4. Propriétés de symétrie et d'invariance du champ électrostatique.....	12
I.4.1. Symétries.....	12
I.4.2. Invariances.....	13
II. Potentiel électrostatique.....	14
II.1. Circulation du champ électrostatique : le potentiel électrostatique.....	15
II.1.1. Cas d'une seule charge ponctuelle.....	15
II.1.2. Cas d'une distribution de n charges ponctuelles.....	16
II.2. Relation entre champ et potentiel électrostatique.....	16
II.3. Propriétés.....	17
II.4. Topographie d'un champ électrique.....	17
II.4.1. Lignes de champ.....	17
II.4.2. Tube de champ.....	18
II.4.3. Surface équipotentielle.....	19
II.5. Potentiel d'une distribution continue de charges.....	19
II.5.1. Distribution linéique.....	19
II.5.2. Distribution surfacique.....	20
II.5.3. Distribution volumique.....	20
III. Énergie d'une distribution de charge.....	20
Conclusion.....	21
 Chapitre 3 : Théorème de GAUSS	
I. Flux du champ électrostatique.....	22

I.1. Cas d'une charge ponctuelle.....	22
I.1.1. Flux élémentaire.....	22
I.1.2. Flux sortant à travers une surface fermée.....	22
I.2. Cas de n charges ponctuelles.....	25
I.3. Cas d'une distribution continue de charge.....	26
II. Théorème de Gauss.....	26
II.1. Énoncé.....	26
II.2. Application au calcul d'un champ électrostatique.....	27
II.3. Utilisation du théorème de Gauss.....	27
Conclusion.....	30

Chapitre 4 : Dipôle électrostatique

I. Potentiel et champ électrostatique créés par un dipôle.....	31
I.1. Définition.....	31
I.2. Moment dipolaires électriques.....	31
I.3. Calcul du potentiel électrostatique.....	32
I.4. Calcul du champ électrostatique.....	34
I.4.1. Composantes du champ en coordonnées polaires.....	34
I.4.2. Formulation globale du champ.....	35
Conclusion.....	35

Chapitre 5 : Conducteurs en équilibre électrostatique et condensateurs

Introduction.....	36
I. Champ au voisinage d'un conducteur.....	37
II. Répartition des charges sur un conducteur : effet de pointe.....	38
III. Pression électrostatique.....	39
IV. Capacité et énergie d'un conducteur isolé.....	39
IV.1. Capacité d'un conducteur isolé.....	39
IV.2. Énergie d'un conducteur chargé.....	40
V. Systèmes de conducteurs en équilibre.....	41
V.1. Superposition des états d'équilibre.....	41
V.2. Théorème des éléments correspondants.....	41
V.3. Phénomène d'influence électrostatique.....	42
V.3.1. Influence partielle.....	42
V.3.2. Influence totale.....	42
V.3.3. Notion d'écran ou de blindage électrostatique.....	43
VI. États d'équilibre d'un système de conducteurs.....	43
VI.1. Unicité de l'état d'équilibre.....	43
VI.2. Principe de superposition des états d'équilibre.....	44
VI.3. Coefficients d'influence électrostatique.....	44
VII. Condensateurs.....	45
VII.1. Capacité.....	45
VII.2. Énergie d'un condensateur.....	47
VII.3. Associations de condensateurs.....	47
VII.3.1. Condensateurs en parallèle.....	47
VII.3.2. Condensateurs en série.....	47

ÉLECTROCINÉTIQUE

Chapitre 1: Courant et résistance électriques

I. Courant électrique.....	49
II. Densité de courant électrique.....	49
III. Résistance d'un conducteur.....	50

III.1. Loi d'Ohm microscopique (ou locale)	50
III.2. Loi d'Ohm macroscopique	50
III.3. Associations de résistances	51
III.3.1. Résistances en série	51
III.3.2. Résistances en parallèle	51
III.4. Dipôles électrocinétique	52
III.4.1. Dipôles passifs	52
III.4.2. Dipôles actifs	52
III.4.3. Énergie et puissance électrique	53
IV. Générateurs et récepteurs	53
IV.1. Générateur de tension	53
IV.1.1. Générateur de tension idéal	53
IV.1.2. Générateur de tension réel	53
IV.2. Récepteur de tension	54
IV.2.1. Récepteur de tension idéal	54
IV.2.2. Récepteur réel de tension	54
IV.3. Générateur de courant	54
IV.3.1. Générateur de courant idéal	54
IV.3.2. Générateur réel de courant	55
IV.3.3. Récepteur de courant	55

Chapitre 2: Techniques d'analyse de circuits électriques

I. Notion de circuit électrique	56
II. Lois De Kirchhoff	56
II.1. Loi des nœuds (conservation du courant)	56
II.2. Loi des mailles (conservation de l'énergie)	57
II.2.1. Définition	57
II.2.2. Résolution d'un circuit et méthode de travail	58
II.2.3. Exemples	58
III. Courants fictifs de mailles	59
IV. Théorème de superposition	60
V. Théorème de Thévenin	62
VI. Théorème de Norton	64
VII. Théorème de Millman	65

ANNEXES

Annexe 1. Champ scalaire et champ vectoriel & Opérateurs	67
Annexe 2. Flux et circulation d'un champ de vecteurs	72

Partie 1 :

ÉLECTROSTATIQUE

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur.

Objectif général : connaître les propriétés générales du champ électrostatique et du potentiel électrostatique.

PETITE HISTOIRE DE L'ELECTRICITE « STATIQUE »



C'est le fameux mathématicien et philosophe grec **Thalès de Milet** (celui du théorème !) qui fit la première découverte scientifique d'un phénomène électrique.

Au VI^{ème} siècle J.-C., Thalès observe une curieuse propriété de l'ambre jaune appelé *ēlektron* en grec : cette résine fossile attire de petits corps légers lorsqu'on la frotte de la fourrure. Ne disposant pas alors de nos connaissances actuelles, il attribue à l'ambre un caractère divin. Aujourd'hui, nous savons que cette propriété ne se



limite pas à l'ambre : de nombreux matériaux comme le plastique ont la faculté d'attirer de petits objets une fois frottés.

C'est à la fin du XVII^{ème} siècle que reprennent les travaux sur l'électricité grâce notamment à **William Gilbert** (1544-1603). Ce savant anglais qui fut le médecin de la reine Elisabeth I, reprend les expériences des grecs et s'intéresse aussi aux phénomènes magnétiques. Il publie en 1600 un ouvrage *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* (Du magnétisme et des corps magnétiques, et du Grand Aimant de la Terre) dans lequel il utilise le mot *ēlektron* pour qualifier les phénomènes associés à l'électricité.



En 1662, **Otto von Guericke** (1602-1686) qui était alors le maire de la ville de Magdebourg en Allemagne et célèbre pour l'invention de la pompe à vide, met au point la première machine électrostatique qui générerait des décharges électriques. Cette machine sera améliorée par d'autres savants et permettra des découvertes majeures comme la distinction entre conducteur et isolant par **Stephen Gray** (1666-1736). Ce savant anglais est le premier, en 1729, à classer les matériaux en deux catégories : les isolants comme l'ambre, le verre, la soie qui, après frottements, peuvent attirer des corps légers et les conducteurs comme les métaux, le corps humain qui n'ont pas cette faculté. Il établit également que l'on peut électriser un corps non électrisé en les mettant en contact avec un autre corps électrisé.



Au XVIII^{ème} siècle, le chimiste français **Charles François de Cisternay du Fay** (1698-1739) alors Grand Intendant du Jardin du Roi, reprend les expériences de Gray. Il observe alors que deux objets constitués du même matériau et électrisés de la même façon se repoussent. Ainsi, deux tiges de verre frottées avec de la soie se repoussent, tout comme deux morceaux d'ambres frottés avec la fourrure. Il établit aussi que le verre frotté et l'ambre frottée s'attirent. Il fait alors l'hypothèse qu'il existe deux sortes d'électricité comme le montre ce court extrait issu de ces mémoires publiées en 1733

« Il y a deux sortes d'électricité [...] l'une que j'appelle électricité vitrée, et l'autre électricité résineuse. Le caractère de ces deux électricités est de se repousser elles-mêmes et de s'attirer l'une l'autre. Ainsi un corps de l'électricité vitrée repousse tous les autres corps qui possèdent l'électricité vitrée, et au contraire il attire tous ceux de l'électricité résineuse. »

Si **Du Fay** pensait que ces deux types d'électricité étaient liés à la nature des corps, **Benjamin Franklin** (1706-1790), inventeur du célèbre paratonnerre et co-rédacteur de la déclaration d'indépendance des Etats-Unis d'Amérique, attribue ces deux types d'électricité à l'existence de deux types de charges électriques qu'il distingue par les signes + et - ; les électrisations positives et négatives étant liées à l'excès ou à la perte d'un « fluide électrique » unique. Il choisit arbitrairement de donner le signe + aux charges électriques portées par une tige en verre frottée et le signe - aux charges portées par l'ambre frottée.



Il développe cette théorie à partir de 1750, énonce le principe de conservation de la charge électrique, et interprète l'attraction exercée par un corps électrisé sur un corps léger par une action à distance. Cette même théorie a été développée indépendamment par l'anglais **William Watson** (1715-1787).



Il faut attendre 1784 pour qu'un expérimentateur très rigoureux, **Charles Augustin Coulomb** (1736-1806), mette au point une expérience réalisée à l'aide d'une balance de torsion de son invention pour déterminer la force qui s'exerce entre deux corps électriquement chargés. Il énoncera en 1785 une loi mathématique qui porte aujourd'hui le nom de **loi de Coulomb**. En hommage à ses travaux, l'unité de la charge électrique est le Coulomb (C).

Malgré ces progrès importants, cette nouvelle science reste cantonnée aux salons des cours d'Europe où l'on réalise des expériences d'électricité pour se divertir ; elle ne fournit pas d'applications pratiques car il s'agit en effet d'électricité de forme « statique ». C'est grâce aux travaux d'Alessandro Volta (1745-1827) et notamment à l'invention de sa célèbre pile en 1800, que l'électricité entrera dans une ère nouvelle.

Crédits photos : wikipedia (illustrations libres de droits)

Chapitre 1

Electrisation – Interactions entre charges – Loi de Coulomb

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes (champ et potentiel électrostatique) créés par des charges électriques statiques (au repos) pour l'observateur. Les forces électrostatiques sont décrites par la loi de Coulomb qui présente une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

I. Electrification de la matière

I. 1. Electrification par frottement (triboélectricité)

- Une tige en verre bien sèche, frottée à l'aide d'un morceau de drap en soie ou en laine, tenue à la main, attire de petits morceaux de papier (figure 1.a). On dit que le verre a été électrisé, ce phénomène est appelé électrisation et la discipline de la physique qui traite de tels phénomènes est l'électricité.

- On obtient le même résultat si on remplace la tige en verre par un bâton d'ébonite (caoutchouc durci par mélange avec du soufre) et si on répète la même opération (figure 1.b).

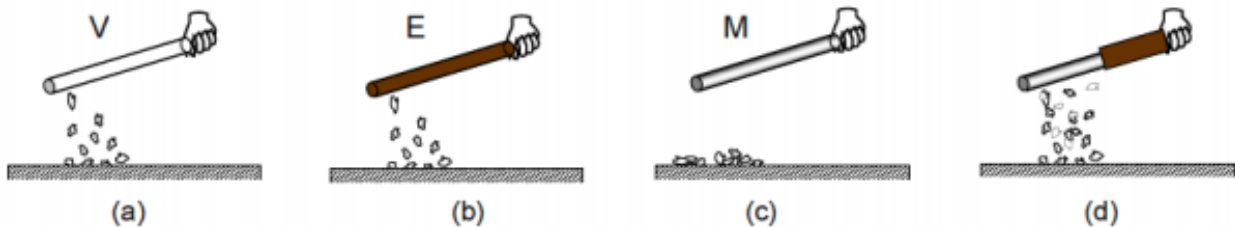


Figure 1. Electrification par frottement

- Si on essaie d'électriser, comme précédemment, une tige métallique, en cuivre par exemple, on n'obtient aucun résultat (figure 1.c). La tige en métal, tenue à la main, n'exerce aucune force sur les morceaux de papier.

- Par contre si on tient, par l'intermédiaire d'un manche en bois, la tige métallique électrisée, on constate que des forces d'attraction se produisent sur toute la surface du métal (figure 1.d).

Interprétation de ces expériences :

On attribue cette propriété, qu'acquiert la matière et qui lui permet d'exercer une force, à l'existence de charges électriques q . Dans le cas du verre et de l'ébonite, ces expériences montrent que les charges restent localisées sur la partie frottée et ne se répandent pas sur toute la surface du matériau. Le verre et l'ébonite sont des isolants électriques.

Par contre les charges dues à l'électrification se déplacent dans les métaux et s'écoulent vers la terre à travers le corps de l'expérimentateur. C'est la raison pour laquelle on ne constate aucun effet de l'électrification dans l'expérience de la figure 1.c. Les métaux sont des corps conducteurs d'électricité. Dans la quatrième expérience, le manche en bois, qui est un isolant, empêche l'écoulement des charges électriques. Néanmoins celles-ci se répandent sur toute la surface du métal.

I.2. Electrification par contact

On constitue, à présent, un pendule électrostatique en suspendant au fil de soie une boule de polystyrène recouverte d'une matière conductrice. Celle-ci est initialement neutre. Approchons une tige en verre, électrisée par frottement, de la boule jusqu'au contact.

On constate que la boule est repoussée sous l'effet de son interaction avec la partie électrisée de la tige (figure 2).

Cette expérience montre que lorsqu'un corps A, initialement neutre, est mis en contact avec un objet B portant une charge q , cette charge se répartit entre A et B. Les deux charges q_A et q_B , obtenues après électrisation par contact, sont de même signe : il en résulte une répulsion.



Figure 2. Electrisation par contact

I.3. Electrisation par influence

Approchons une tige en verre électrisée de la boule B initialement neutre, sans la toucher. Nous constatons que la boule est attirée par la tige, comme l'illustre la figure 3. La boule a été électrisée par influence. Lorsqu'on éloigne la tige électrisée, le pendule reprend sa position initiale.



Figure 3. Electrisation par influence

Il existe d'autres modes d'électrisation. Par exemple, on peut électriser un corps, initialement neutre, en le reliant à une borne d'un générateur électrique (piles, accumulateurs, dynamos).

II. Charge électrique

II.1. Définition

Les résultats des expériences précédentes ont amené les savants (travaux de Coulomb et la découverte de l'électron en 1881 par Joseph J. Thomson) à introduire le concept de charge électrique. Elle joue dans l'interaction électrostatique le même rôle que joue la masse (scalaire positive) dans l'interaction gravitationnelle.

A l'heure actuelle, on explique aisément les expériences d'électrisation (l'apparition d'une charge électrique sur un objet frotté) en faisant appel à la structure atomique de la matière. La matière est constituée d'atomes (de rayon $\approx 10^{-10}$ m).

Chaque atome comporte un noyau (de rayon $\approx 10^{-15}$ m) contenant des protons chargés positivement et des neutrons électriquement neutres. Des électrons, de même charge que les protons, en valeur absolue, mais de signe opposé, en nombre égal aux protons, forment la structure extérieure de l'atome. L'atome est donc électriquement neutre, les charges négatives des électrons compensent les charges positives des protons (voir figure 4). Les expériences précédentes permettent d'énoncer la loi suivante :

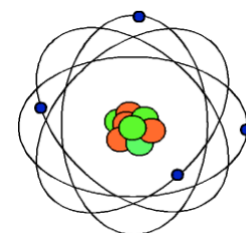


Figure 4. Constituants de la matière

« Deux charges électriques de même signe positif ou négatif, se repoussent ; par contre elles s'attirent si elles sont de signes contraires ».

Concept de charge ponctuelle :

Comme pour la masse, on introduit le concept de charge ponctuelle.

« C'est une charge dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport aux distances d'observation pour être assimilée à un point géométrique ».

II.2. Quantification de la charge

A l'échelle microscopique, l'expérience de Millikan en 1913, montre que la charge électrique varie de façon discontinue et se présente par unité sous forme de quantité bien déterminée. On dit qu'elle est quantifiée. Sa valeur est un multiple entier d'une charge qu'on peut prendre comme charge élémentaire, notée e . C'est la valeur absolue de la charge de l'électron $e = 1,60219 \cdot 10^{-19}$ C.

Les particules élémentaires, constituants de la matière, ont pour charges:

- électron : $q = -e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ C

- proton : $q = +e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- neutron : la charge est nulle.

L'unité de la charge est le coulomb C dans le SI. (MKSA). C'est la quantité de charge transportée par un courant de 1 Ampère pendant 1 seconde ($Q = I t$). $1 \text{ C} = 6,25 \cdot 10^{18} e$. C'est un nombre élevé de particules. Dans la pratique, on utilise le mC et le μC . Notons, qu'à l'échelle macroscopique (grand nombre de charge élémentaires) la nature discontinue de la charge n'a plus de sens : la charge électrique paraît être une grandeur susceptible de variation continue.

II.3. Principe de la conservation de la charge électrique

Le principe de conservation de la charge est des principes fondamentaux de conservation qui sont à la base de la physique, tels que la conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, ...

Lors des expériences précédentes, quand on frotte la tige de verre avec un morceau de drap, la tige de verre acquiert une charge positive, mais en même temps le morceau de drap prend une charge égale et opposée. Dans le système formé par la tige et le drap, la quantité de charge électrique reste constante. Les charges négatives arrachées au verre se retrouvent dans le morceau de drap.

Ce phénomène résulte d'un principe général, c'est le principe de conservation de la charge électrique :

« Dans un système isolé la somme algébrique des charges électriques reste constante ».

La charge totale d'un système n'est pas modifiée par suite du mouvement des charges. La loi de conservation de la charge est valable en relativité, c'est-à-dire même si la charge se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière. On dit que la charge électrique est une grandeur qui est conservée : c'est un invariant relativiste. Des expériences ont permis de montrer que la valeur de la charge d'un électron ne dépend pas de sa vitesse : la valeur est donc la même pour un observateur en mouvement par rapport à la charge. Ce n'est pas le cas de toutes les grandeurs physiques : l'énergie est conservée mais n'est pas un invariant relativiste.


III. Différentes distributions de charge

III.1. Distribution volumique

L'approximation des milieux continus permet de définir une densité volumique de charge ou charge volumique telle que :

$$\rho = \frac{\delta q}{d\tau} \text{ en } \text{C.m}^{-3}$$

Sachant que :

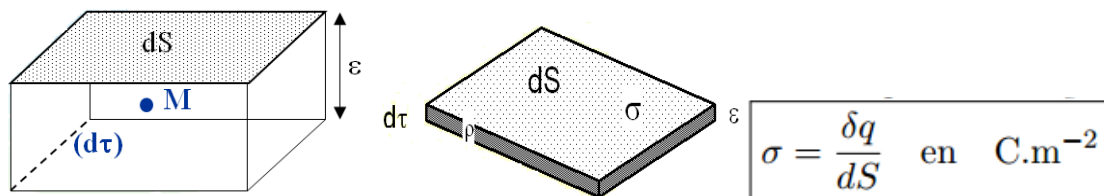
$$dq = \sum_{i=1}^N q_i$$


Avec : $d\tau$ un volume « petit » à l'échelle macroscopique et « grand » à l'échelle microscopique et δq la charge électrique contenue dans ce volume $d\tau$

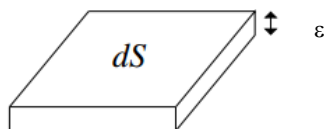
La charge totale Q contenue dans un volume t fini est alors : $Q = \iiint_{(t)} \rho(M) d\tau$

III.2. Distribution surfacique

Si une des dimensions est négligeable devant les deux autres, on définit une densité surfacique de charge ou charge surfacique telle que :



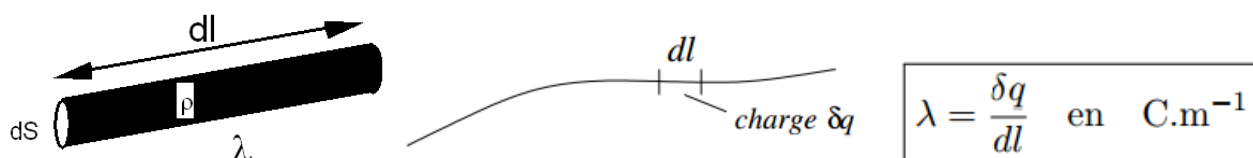
Justification :



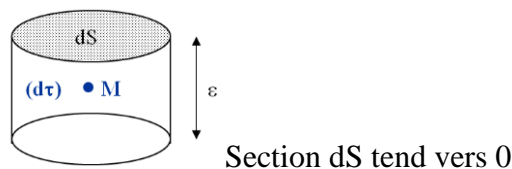
$\delta q = \rho d\tau = \rho(\varepsilon dS) = (\rho\varepsilon)dS = \sigma dS$. Le modèle surfacique correspond au cas limite pour lequel $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow \infty$ avec $\sigma = \rho\varepsilon = \text{cste}$.

III.3. Distribution linéique

Si deux des dimensions sont négligeables devant la troisième, on définit une densité linéique de charge ou charge linéique telle que :



Justification :



IV. Loi de COULOMB

IV.1. Enoncé de la loi de Coulomb

Considérons dans le vide, deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , fixées en M_1 et M_2 . Les deux charges stationnaires q_1 et q_2 exercent l'une sur l'autre une force proportionnelle à chacune des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. La force électrostatique est dirigée suivant la droite qui joint les charges (figure 5). Elle est attractive si les charges sont de signes contraires (figure 5.a), répulsive lorsque les charges sont de même signe (figure 5.b).

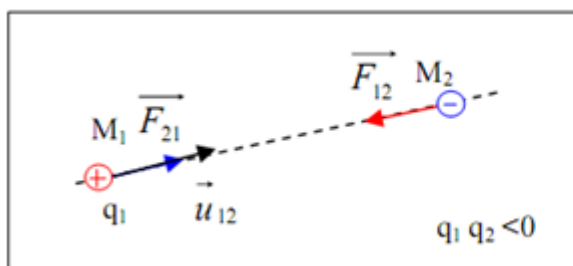


Figure 5.a

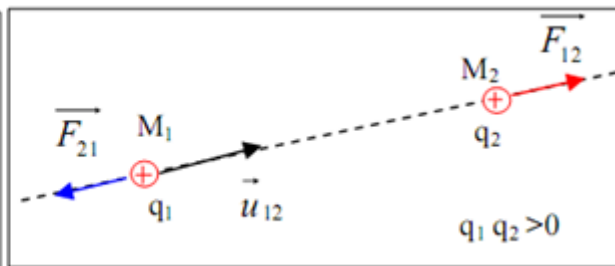


Figure 5.b

La force F_{12} exercée par q_1 sur la charge q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

Où r est la distance entre q_1 et q_2 et \vec{u}_{12} le vecteur unitaire défini par :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$$

□ $|\vec{F}|$ s'exprime en newton (N), q_1 et q_2 en coulomb (C) et r en mètre (m)

□ La constante de proportionnalité K dans le système d'unités international (S.I.), s'écrit :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 910^9 \text{ SI (V m / C)}$$

Où ϵ_0 est la permittivité du vide et a pour valeur : $\epsilon_0 = 8,85410^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force \vec{F}_{21} exercée par q_2 sur la charge q_1 est égale et opposée à \vec{F}_{12} : $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

IV.2. Validité de la loi de Coulomb

La loi de Coulomb est valable pour des charges au repos où à la limite en mouvement relatif lent. Elle est aussi valable dans le vide et approximativement dans l'air. La loi de Coulomb reste valable pour les très grandes distances dans le domaine microscopique : jusqu'à 10^{-15} m , ordre de grandeur des dimensions du noyau atomique. Cette loi n'est pas valable pour des distances inférieures à 10^{-15} m (dimension du noyau atomique). Dans ce dernier cas, il sera nécessaire d'utiliser la mécanique quantique pour l'étude du comportement des particules sous l'effet des forces coulombiennes.

Dans d'autres milieux linéaires homogènes et isotropes (l.h.i.), l'interaction électrostatique est bien décrite par la loi de Coulomb à condition de remplacer ϵ_0 par une constante ϵ différente qui tient compte de l'influence du milieu (ses caractéristiques électriques). ϵ s'appelle la permittivité diélectrique du milieu et l'on pose dans ce cas $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ où ϵ_r est la permittivité diélectrique relative du milieu (quantité sans dimension)

IV.3. Principe de superposition

Considérons trois charges ponctuelles q_1 , q_2 et q fixées respectivement en P_1 , P_2 et M (Figure 6).

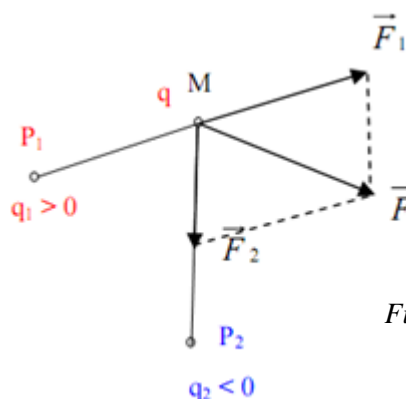


Figure 6. Principe de superposition

Quelle est la force \vec{F} que subit la charge q placée en présence des charges q_1 et q_2 ?

La loi de Coulomb permet de calculer la force \vec{F}_1 subie par la charge q lorsqu'elle est uniquement en présence de q_1 . On peut de la même manière calculer \vec{F}_2 , force subie par q lorsque seule q_2 est en présence de la charge q .

L'expérience montre que la force \vec{F} subie par q lorsqu'elle est en présence des deux charges q_1 et q_2 est la somme vectorielle des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{P_1 M}}{\|\vec{P_1 M}\|^3} + \frac{q q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{P_2 M}}{\|\vec{P_2 M}\|^3}$$

Ce résultat est vérifié quel que soit le nombre de charges en présence. La force \vec{F} subie par une charge q placée en M , en présence de n charges $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixées en $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ est la somme vectorielle des forces dues à l'interaction de chacune des charges avec q , calculées séparément :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{P_i M}}{\|\vec{P_i M}\|^3}$$

Cette expression exprime le principe de superposition. La force totale \vec{F} due à un ensemble de charges est la somme vectorielle de l'effet de chaque charge prise individuellement. Ce qui suppose que la force s'exerçant entre deux charges n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge. Il y a donc indépendance des effets : la solution est simplement la somme des solutions calculées pour chaque couple de charges. Il en résulte que les équations de l'électrostatique sont des équations linéaires. Le principe de superposition s'applique aux phénomènes électromagnétiques : les équations de Maxwell, équations de base de l'électromagnétisme sont des équations linéaires.

Chapitre 2

Champ, Potentiel et Énergie Électrostatique

I. Champ électrostatique

I.1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge q_1 située en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb. Mais comme pour l'attraction gravitationnelle, on peut la mettre sous une forme plus intéressante,

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \vec{E}_1(M)$$

Où

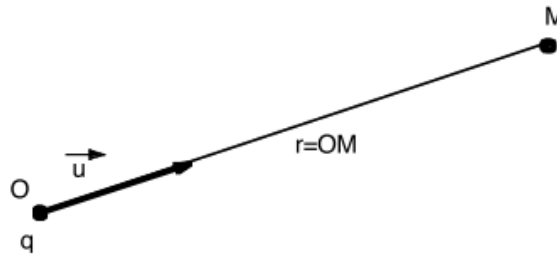
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la particule qui subit la force (ici, c'est sa charge q_2 , pour la gravité c'est sa masse), de ce qui ne dépend que d'une source extérieure, ici le vecteur $\vec{E}_1(M)$.

Définition : Une particule de charge q située en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel $\vec{E}_1(M)$.

On appelle champ une région de l'espace où, en tout point, une particule est soumise à l'action d'une force.

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}}$$



C'est l'expression mathématique du champ électrostatique créé, au point M, par la charge source q placée en O. Son unité est le Volt/mètre (symbole V/m).

La figure 7 montre que le champ est orienté vers la charge lorsqu'elle est négative et en sens inverse lorsqu'elle est positive.

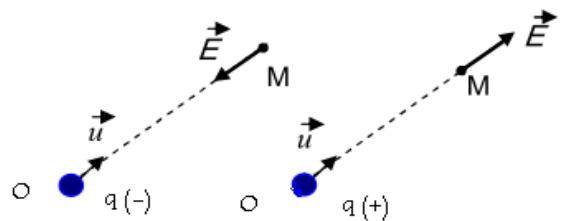


Figure 7. Champ électrostatique suivant le signe de la charge

Champ uniforme : Un champ uniforme est une région de l'espace où le vecteur champ reste constant en tous les points de cette région.

I.2. Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles : Principe de superposition

On considère maintenant n particules de charges électriques q_i , situées en des points P_i . On se propose de déterminer le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M distant de r_i des points P_i .

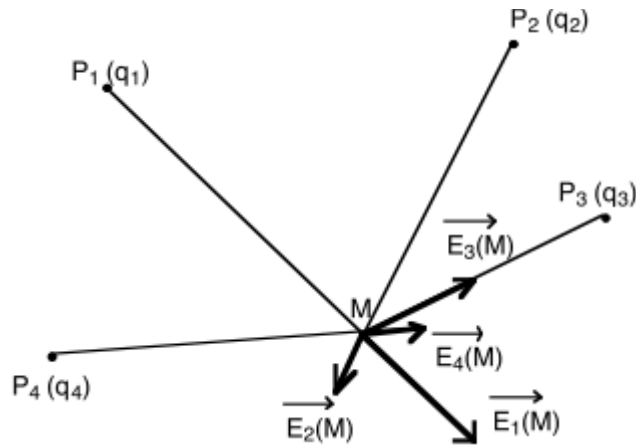


Figure 8. Champ électrostatique créé par l'ensemble des charges

L'expérience montre que la force totale subie par une charge q située en M est simplement la superposition des forces élémentaires,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = q \vec{E}(M)$$

où $r_i = P_i M$, $\vec{P_i M} = P_i M \vec{u}_i$

Ce champ est obtenu par **la superposition** des champs créés par chaque charge q_i . Chacun de ces champs est calculé comme si la charge source était seule. Ce principe de superposition résulte des propriétés d'additivité vectorielle des forces et des champs électrostatiques.

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i}$$

En pratique, cette expression est rarement utilisable puisque nous sommes la plupart du temps amenés à considérer des matériaux comportant un nombre gigantesque de particules. C'est simplement dû au fait que l'on ne considère que des échelles spatiales très grandes devant les distances inter-particulaires, perdant ainsi toute possibilité de distinguer une particule de l'autre. Il est dans ce cas plus habile d'utiliser des distributions continues de charges.

Soit P un point quelconque d'un conducteur et $dq(P)$ la charge élémentaire contenue en ce point. Le champ électrostatique total créé en un point M par cette distribution de charges est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int_{\text{distribution}} d\vec{E}(M) \text{ avec } d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}}$$

I.3. Champ créé par une distribution continue de charges

Mathématiquement, tout se passe donc comme une charge ponctuelle dq était située en un point P de la distribution, créant au point M un champ électrostatique $d\vec{E}(M)$, avec $r = PM$ et $\vec{PM} = PM \vec{u}$. Il s'agit évidemment d'une approximation, permettant de remplacer une somme presque infinie par une intégrale.

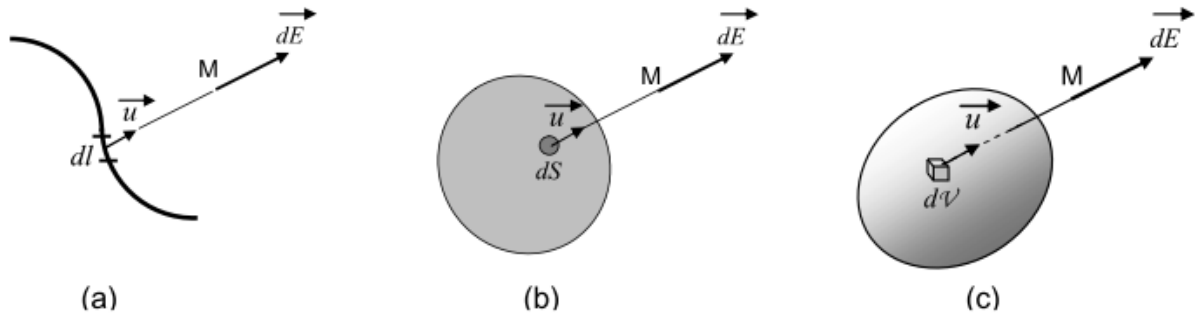


Figure 9. Champ créé par une distribution de charge : (a). linéique, (b). surfacique, (c). volumique

Lorsque la charge q est répartie sur un fil avec une densité linéique λ , chaque élément dl porte une charge $dq = \lambda dl$, et crée un champ élémentaire (figure 9.a):

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}, \quad \text{le champ créé en } q \text{ est :} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

Dans le cas d'une surface chargée avec une densité surfacique σ telle que $dq = \sigma dS$, on trouve de la même façon :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

De même dans le cas d'un volume V chargé avec une densité volumique ρ telle que $dq = \rho dV$ on obtient :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$$

dl , dS et dV désignent respectivement les éléments de longueur, de surface et de volume.

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces trois expressions dépend **de la géométrie** de la distribution de charges considérée.

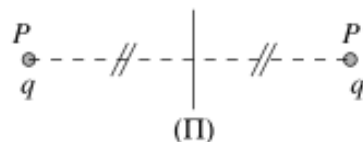
I.4. Propriétés de symétrie et d'invariance du champ électrostatique

Principe de Curie : « Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ».

I.4.1. Symétries

• **Symétrie plane** : « Une distribution de charge admet un plan de symétrie Π , si la distribution de charge, obtenue par symétrie par rapport à Π , lui est identique ».

Exemple :

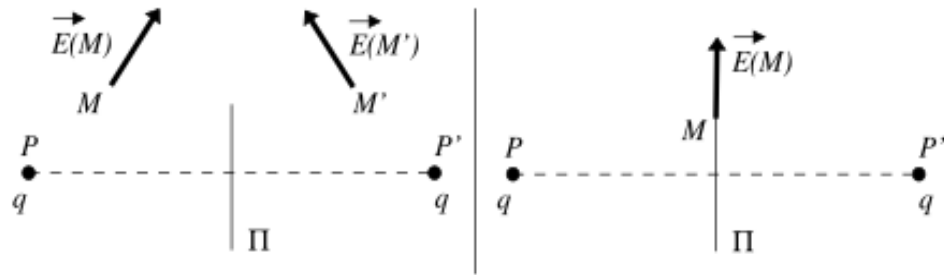


Généralisation :

Soit Π un plan de symétrie de la distribution de charges :

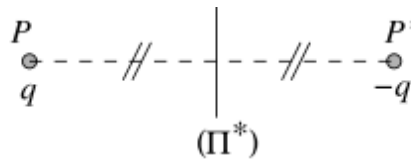
$$\vec{E}(\mathbf{M}') = \text{sym}_{\Pi}(\vec{E}(\mathbf{M})) \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}' = \text{sym}_{\Pi}(\mathbf{M})$$

Conséquence importante : en un point d'un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ électrique est **contenu** dans ce plan.



- **Antisymétrie plane :** « Une distribution de charge admet un plan d'antisymétrie Π^* , si la distribution de charge, obtenue par symétrie par rapport à Π^* , lui est en tout point opposée (charge de signe opposé) ».

Exemple :

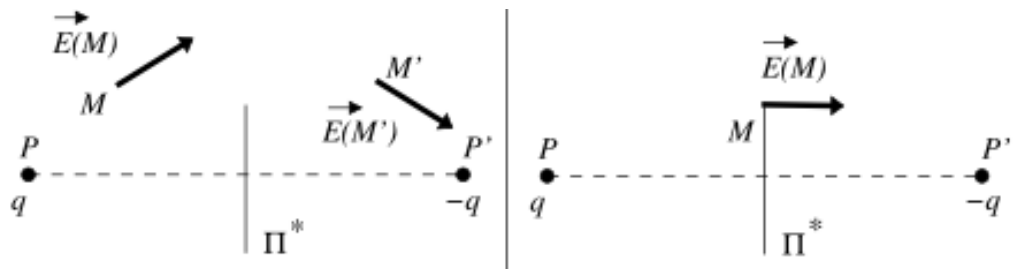


Généralisation :

Soit Π^* un plan d'antisymétrie de la distribution de charges :

$$\vec{E}(\mathbf{M}') = \text{sym}_{\Pi^*}(\vec{E}(\mathbf{M})) \text{ avec } \mathbf{M}' = \text{sym}_{\Pi^*}(\mathbf{M})$$

Conséquence importante : en un point d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrique est **normal** à ce plan.



Aspects pratiques :

- Il suffit de trouver un plan d'antisymétrie de charges pour déterminer la direction de champ électrique sur ce plan.
- Il faut deux plans de symétrie pour déterminer la direction de champ électrique sur son intersection.

I.4.2. Invariances

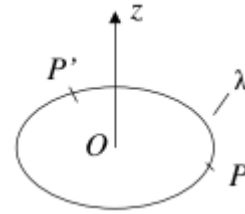
• Invariance par translation selon un axe

- Une distribution de charge est invariante par translation selon un axe Δ si elle reste inchangée par toute translation le long de cet axe.
- Pour une distribution de charge invariante par translation selon un axe Δ , le champ électrique en un point quelconque M de l'espace est **indépendant de la coordonnée** associée à l'axe Δ .

• Invariance par rotation autour d'un axe

- Une distribution de charge est invariante par rotation autour d'un axe Δ si elle reste globalement inchangée par une rotation quelconque autour de cet axe.

Exemple : Une spire d'axe Oz portant une charge linéique uniformément répartie.

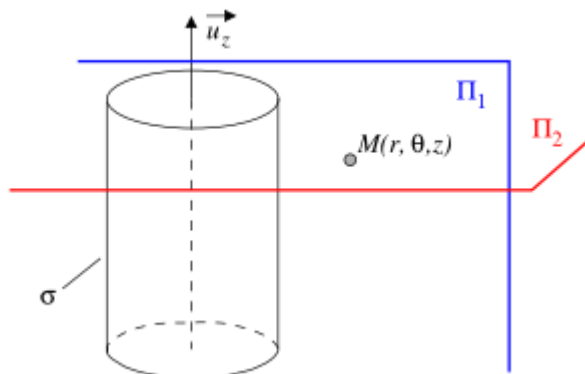


- Pour une distribution de charge invariante par rotation autour d'un axe Δ , la **norme** du champ électrique en un point quelconque M de l'espace est **indépendante de la coordonnée angulaire** associé à la rotation autour de l'axe Δ .

Conséquences

- **Symétrie axiale** : Si un système physique est invariant dans toute rotation θ autour d'un axe Oz, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent pas de θ .
- **Symétrie cylindrique** : Si un système physique est invariant par translation le long de l'axe Oz et rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent que de la distance à l'axe ρ .
- **Symétrie sphérique** : Si un système physique est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) ne dépendent que de la distance au centre r.

Exemple : On considère un cylindre creux infini d'axe oz et de rayon R possédant une charge surfacique σ uniforme sur toute la surface.



→ Direction du champ électrique :

Les plans de symétrie de la distribution de charges sont : $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. $\vec{E}(M)$ est contenu dans ces deux plans et donc dans leur intersection :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

→ Dépendance des composantes en fonction des coordonnées d'espace :

La distribution est invariante par translation selon Oz et par rotation d'angle θ autour de Oz. La composante du champ électrique est donc indépendante de z et θ :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$$

II. Potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique $V(M)$ associé au champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est une fonction scalaire contrairement à \vec{E} . Nous verrons, dans beaucoup de cas, que le potentiel sera un intermédiaire commode dans le calcul du champ vectoriel $\vec{E}(M)$. Le potentiel se rattache physiquement à la notion d'énergie potentielle, d'où son appellation.

II.1. Circulation du champ électrostatique : le potentiel électrostatique

II.1.1. Cas d'une seule charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle $q (>0)$ fixée en P et un point M de l'espace (Figure 10)

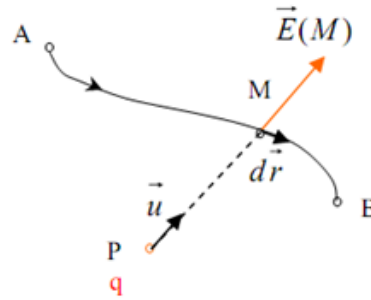


Figure 10. Circulation du champ électrostatique pour une seule charge ponctuelle

La charge ponctuelle q fixée en P crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \text{ avec } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$$

La circulation élémentaire dC du champ correspondant à un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ point M sur la courbe AB est :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Or, } d\vec{r} = d(\vec{PM}) = d(r\vec{u}) = dr\vec{u} + r d\vec{u} \text{ et } d\vec{r} \cdot \vec{u} = (dr\vec{u} + r d\vec{u}) \cdot \vec{u} = dr + r d\vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$\text{Puisque : } d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0 ; \text{ on a : } d\vec{r} \cdot \vec{u} = dr$$

La circulation élémentaire dC s'écrit alors :

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right)$$

Posons alors,

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(r)$$

V est le potentiel électrostatique $V(M)$ créée par la charge q fixée en M :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cste$$

Nous venons de définir un nouveau champ, le potentiel électrostatique ; c'est un champ scalaire défini à une constante près. On choisit en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point M est infiniment éloigné de la charge: $V(r \rightarrow \infty) = 0$.

Dans ce cas, la constante est nulle et le potentiel s'écrit :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Comme le champ \vec{E} , le potentiel V n'est pas défini aux points P_i : $\vec{E}(P_i)$ et $V(P_i)$ ne sont pas définis.

II.1.2. Cas d'une distribution de n charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixés aux points $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$. Soit M un point de l'espace. (Figure 11).

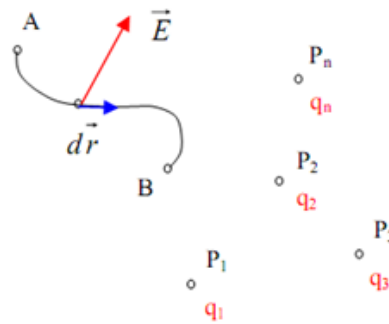


Figure 11. Circulation du champ électrostatique pour n charges ponctuelles

Calculons la circulation élémentaire dC_i du champ \vec{E}_i créée par la charge q_i seule :

$$dC_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -dV_i(r)$$

$$\text{Avec } \vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \text{ et } \vec{P_iM} = r_i \vec{u}_i$$

Ainsi, le potentiel électrostatique $V_i(M)$ dû à la charge q_i .

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \quad \text{avec: } r_i = \|\vec{P_iM}\|$$

Le potentiel $V(M)$ dû à l'ensemble des n charges est la somme des potentiels en application du principe de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

Dans cette relation, nous avons choisi la constante nulle pour chaque potentiel V_i créé par la charge q_i ; ceci n'est pas valable que si les charges q_i sont réparties dans un volume fini.

II.2. Relation entre champ et potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ \vec{E} :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV$$

Or,

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\vec{r}$$

d'où la relation entre \vec{E} et V :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}V}(M) \quad : \text{relation locale}$$

Le champ électrostatique dérive du potentiel scalaire V. Par l'intermédiaire de cette relation locale, qui lie le champ électrostatique et le potentiel électrostatique V, la connaissance de V en un point de l'espace suffit pour la détermination du champ. Cette relation implique des conditions de continuité et de dérivabilité sur la fonction $V(M)$.

Unité : L'unité du potentiel électrostatique dans le système MKSA est le Volt (V). D'après la relation qui lie le champ électrostatique \vec{E} et le potentiel électrostatique V, l'unité du champ électrostatique est le Volt par mètre (V/m).

II.3. Propriétés

- La circulation C_{AB} du champ le long du contour AB est :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

- La circulation du champ le long de AB, est donc égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$. Pour avoir le potentiel en un point, il faudra définir une origine arbitraire des potentiels. Il est commode de choisir le potentiel nul à l'infini quand la distribution de charges est limitée à un domaine fini.
- La circulation du champ le long de AB est indépendante de la forme du contour AB ; elle ne dépend pas du chemin suivi (la circulation élémentaire dC est différentielle totale exacte).
- En conséquence la circulation du champ est nulle le long de tout contour fermé. Le champ \vec{E} est un champ de vecteurs à circulation conservative qui dérive d'une fonction scalaire appelée potentiel électrostatique.

En résumé :

$$C_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

II.4. Topographie d'un champ électrique

II.4.1. Lignes de champ

- Définition : Les lignes de champ sont les lignes tangentes au champ électrostatique en tout point et orientées par ce champ (figure 12).

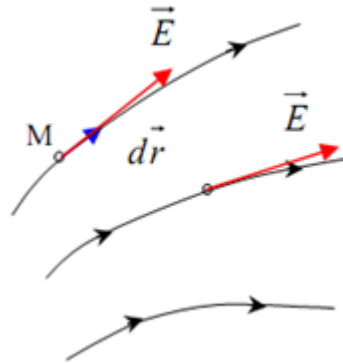


Figure 12. Lignes de champ

Soit M un point d'une ligne de champ et $d\vec{r}$ le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ

Puisque \vec{E} et $d\vec{r}$ sont colinéaires, on a : $d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ (*)

Cette relation permet d'obtenir les équations des lignes de champ. Dans le système de coordonnées cartésiennes, posons :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \text{ et } d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

La relation (*) conduit à :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques $d\vec{l} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$ et l'équation des lignes de champ devient :

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{dl} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$ et on a :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

b. Propriétés :

→ Deux lignes de champ ne peuvent pas se couper en un point où le champ électrostatique a une valeur finie non nulle.

→ Pour que deux lignes de champ se coupent en un point, il faut soit que le champ électrostatique soit nul en ce point soit qu'il ne soit pas défini (présence d'une charge).

c. Exemples :

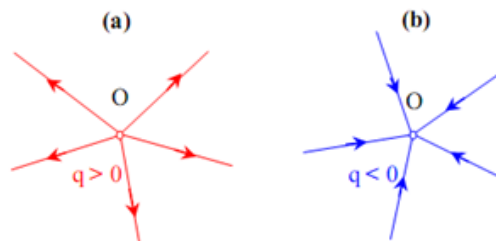


Figure 13. Lignes du champ créé par la charge ponctuelle : (a) divergentes si $q > 0$, (b) convergentes si $q < 0$

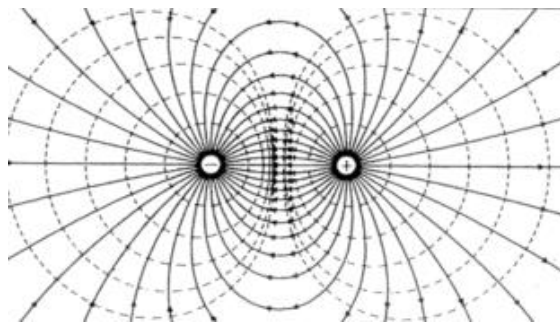


Figure 14. Lignes du champ créé par un doublet de charges $\{-q, +q\}$

II.4.2. Tube de champ

Définition : L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de champ (Figure 5).

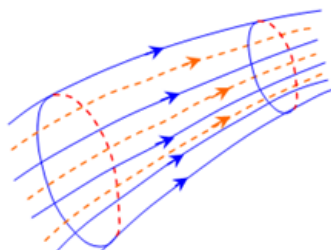


Figure 15. Tube de champ

II.4.3. Surface équipotentielle

Définition : Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points M vérifiant $V(M)=cste$. Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Exemples :

Nous avons représenté sur la figure 16 les surfaces équipotentielles et les lignes du champ E créée par une charge ponctuelle positive. Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en O , point où se trouve la charge. La direction de \vec{E} , c'est à dire du gradient de V est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle où V varie le plus rapidement ; il est clair que pour passer de la valeur V_1 à la valeur V_2 , le chemin le plus court est le segment AB .

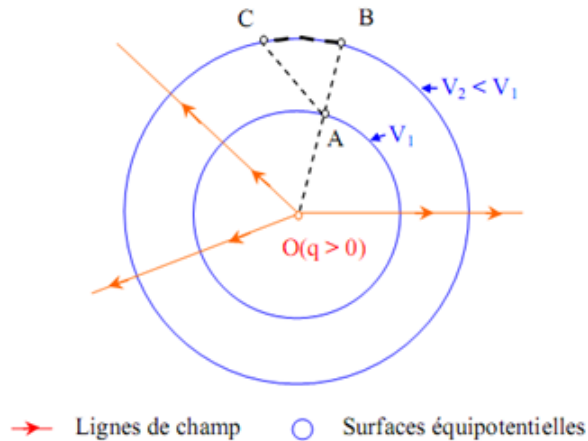


Figure 16. Equipotentielles et lignes de champ créée par une charge ponctuelle positives

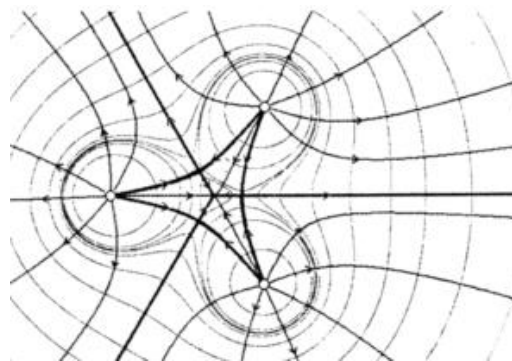


Figure 17. Equipotentielles et lignes de champ de trois charges identiques placées au sommet d'un triangle équilatéral

II.5. Potentiel d'une distribution continue de charges

La distribution de charges peut être découpée en éléments de volume ou de surface ou de courbe qui portent une charge élémentaire dq . Chacune de ces charges élémentaires crée un potentiel électrostatique appelé élémentaires. Le potentiel crée par toute la distribution est, par application du principe de superposition, la somme des potentiels élémentaires créés par les charges.

II.5.1. Distribution linéique

On considère une portion de courbe $\Gamma = AB$ portant une densité linéique de charge λ . Un élément dl entourant un point P porte une charge : $dq = \lambda dl$. Cette charge crée en M un potentiel donné par l'expression suivante :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r} \text{ avec, } \overrightarrow{PM} = \|\overrightarrow{PM}\| \vec{u} = r \vec{u}$$

D'où le potentiel $V(M)$ créés en M par toute la distribution linéique de charge s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(P) dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(P) dl}{\|PM\|}$$

Cette relation n'est valable que si le fil est de dimension finie.

Remarque : On peut montrer que le potentiel $V(M)$ n'est pas défini en un point M situé sur le fil chargé.

II.5.2. Distribution surfacique

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge dq portée par un élément de surface dS . Le potentiel créé en M par dq est donné par :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS_P}{r}$$

D'où le potentiel total $V(M)$ créé par les charges réparties sur la surface Σ :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(P)dS_P}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(P)dS_P}{\|PM\|}$$

Cette relation suppose que la distribution de charges s'étend sur une surface de dimension finie. Dans le cas contraire, on choisira comme origine des potentiels un point à distance finie.

Remarque : On peut montrer que le potentiel est défini sur la surface chargée et continue à la traversée de la surface chargée. Il n'en est pas de même pour le champ \vec{E} qui n'est pas défini sur une surface chargée. Il subit une discontinuité à la traversée de la face chargée.

II.5.3. Distribution volumique

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume v ; $\rho(P)$ est la densité volumique de charges en un point P du volume v . La charge contenue dans l'élément de volume

entourant le point P est : $dq = \rho(P)d\tau_P$

Cette charge crée en M un potentiel dV comme le ferait une charge ponctuelle dq placée en P :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \text{ avec, } \overrightarrow{PM} = \|\overrightarrow{PM}\| \vec{u} = r \vec{u} \text{ et } dq = \rho(P)d\tau_P$$

D'après le principe de superposition, le potentiel est obtenu à partir de l'intégrale de volume :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(P)d\tau_P}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(P)d\tau_P}{\|PM\|}$$

Cette relation suppose que l'on a choisi le potentiel nul à l'infini, donc que la distribution de charges s'étend sur un volume fini. Si ce n'est pas le cas, il faut choisir une autre origine des potentiels.

Remarque : On peut montrer que le potentiel V est défini en un point M intérieur à la distribution de charges.

III. Energie d'une distribution de charge

Définition : L'énergie potentielle d'une distribution de charges $\{q_i\}$, placées aux points P_i , est égale au travail qu'il faut fournir, de l'extérieur, pour amener ces charges,

- d'un état initial où toutes les charges q_i sont immobiles et dispersées à l'infini (de sorte qu'il n'y a aucune interaction entre elles)
- à un état final qui est la distribution à construire i.e. où toutes les charges sont immobiles aux points P_i .

Chacune des charges est soumise à l'action du champ électrostatique créé par les autres charges. Initialement toutes les charges étaient éloignées les unes des autres et à l'infini. On va les amener, l'une après l'autre, depuis l'infini.

- On amène d'abord la première charge q_1 de l'infini (dans une région où le potentiel est nul) à A_1 ; cette opération ne nécessite aucun travail ($W_1 = 0$ car $E = 0$).
- On amène ensuite la seconde charge, q_2 , de l'infini à A_2 : En A_2 le potentiel V_2 créé par q_1 est : $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$, l'énergie potentielle de q_2 est : $q_2 V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$
- q_1 en A_1 , q_2 en A_2 , on amène q_3 de l'infini à A_3 : En A_3 , le potentiel sera : $V_3 = \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}$ et l'énergie de q_3 sera : $q_3 V_3 = \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$
- en poursuivant, pour amener la quatrième charge il faut fournir : $\frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}$
- et ainsi de suite.....

La somme des termes ci-dessus, nous donne :

$$\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} + \frac{q_1 q_5}{r_{15}} + \frac{q_2 q_5}{r_{25}} + \frac{q_3 q_5}{r_{35}} + \frac{q_4 q_5}{r_{45}} + \dots$$

En faisant le bilan, on trouve : $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{k>i} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$ que l'on peut encore mettre sous la forme :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \quad (*)$$

Le facteur $1/2$ provient du fait qu'en remplaçant la somme sur $k > i$ par une somme sur $k \neq i$ on va comptabiliser deux fois chaque interaction.

Dans (*), on peut regrouper les termes de façon à faire apparaître le potentiel V_i au point P_i créé par toutes les charges, autres que q_i , $V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_{ik}}$,

U prend alors la forme : $U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

On peut étendre cette relation à une distribution continue de charges, localisées dans le volume τ et caractérisée par une densité volumique $\rho(\vec{r})$: $U = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau$ où $V(\vec{r})$ est le potentiel au point repéré par le rayon vecteur \vec{r} .

Conclusion

Le champ électrostatique peut être caractérisé simplement à l'aide d'une fonction que nous appellerons potentiel électrostatique. Cette fonction scalaire est souvent plus simple à déterminer que le champ électrostatique.

Chapitre 3

Théorème de GAUSS

I. Flux du champ électrostatique

I.1. Cas d'une charge ponctuelle

I.1.1. Flux élémentaire

Soit une charge ponctuelle $q > 0$ placée en O et M un point de l'espace (figure 18).

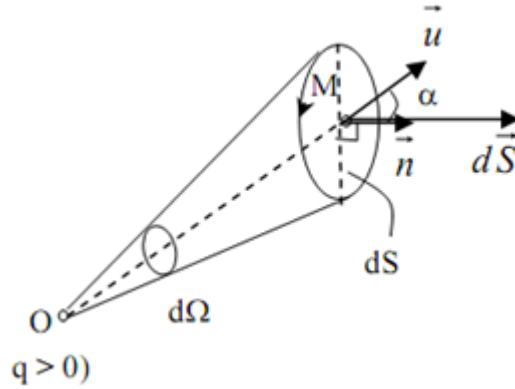


Figure 18.

Le champ $\vec{E}(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \quad \text{avec, } \vec{u} = \overrightarrow{OM} / \|\overrightarrow{OM}\| \quad \text{et } r = \|\overrightarrow{OM}\|$$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface dS (figure 18). Le flux élémentaire de \vec{E} à travers la surface orientée est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1)$$

$$\text{où, } d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS :$$

Angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la surface élémentaire. Le signe de $d\Omega$ dépend de l'orientation de la surface :

- $d\Omega > 0$ si $\alpha = (\vec{u}, \vec{n}) < \pi/2$
- $d\Omega < 0$ si $\alpha > \pi/2$

I.1.2. Flux sortant à travers une surface fermée

Soit une surface fermée Σ . On se propose de calculer le flux du champ électrostatique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q à travers la surface fermée Σ . Plus précisément on s'intéresse au flux sortant, donc on a choisi d'orienter le vecteur \vec{n} dans le sens de la normale sortante à Σ . Deux cas seront envisagés :

- La charge q est située à l'extérieure de la surface Σ

- La charge q est située à l'intérieur de la surface Σ

Nous désignons par l'indice i les charges situées à l'intérieur de Σ et par l'indice e les charges extérieures à Σ . Soit \vec{E}_i le champ créé par q_i et \vec{E}_e le champ créé par q_e .

1^{er} Cas : La charge est située à l'extérieur de Σ

Nous pouvons calculer le flux sortant de la surface fermée Σ à partir des flux élémentaires. En effet, traçons un cône élémentaire de sommet O (où se trouve la charge extérieure à Σ , q_e) et d'angle solide $|d\Omega|$. Ce cône découpe sur la surface Σ deux surfaces élémentaires dS_1 en M_1 et dS_1' en M_1' . Soient \vec{n}_1 et \vec{n}_1' les vecteurs sortant des surfaces dS_1 et dS_1' . L'angle solide sous lequel du point O on voit les surfaces élémentaires orientées dS_1 et dS_1' , a la même valeur absolue, mais de signes opposés à cause de l'orientation du vecteur normal \vec{n} par rapport à \vec{u} (figure 19) :

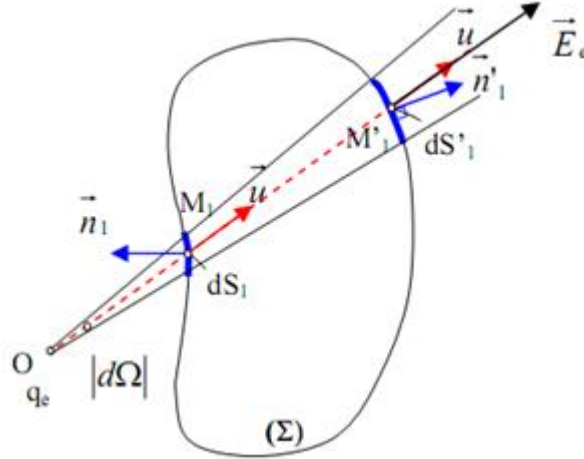


Figure 19.

$$d\Omega_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_1}{r_1^2} dS_1 = -d\Omega'_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}'_1}{r'^2_1} dS'_1 \quad (2)$$

Si on considère le flux du champ \vec{E}_e créé par la charge q_e située en O , sortant des surfaces dS_1 et dS_1' , d'après (1) et (2), on obtient :

$$d\Phi_1 + d\Phi'_1 = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_1 + \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega'_1 = 0$$

Pour obtenir le flux de \vec{E}_e sortant de la surface Σ , $\Phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_e \cdot d\vec{S}$, on peut balayer toute la surface Σ à l'aide de cônes élémentaires tels que celui de la figure 19. Chacun de ces cônes intercepte sur la surface Σ une paire de surfaces élémentaires dS_1 et dS_1' telles que leur contribution au flux total, $d\Phi_1 + d\Phi'_1 = 0$.

On en conclut que le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'extérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est nul :

$$\Phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$$

2ème Cas : La charge est située à l'intérieur de Σ

Soit (C) le cône élémentaire de sommet O et d'angle solide $d\Omega_1$ (figure 20).

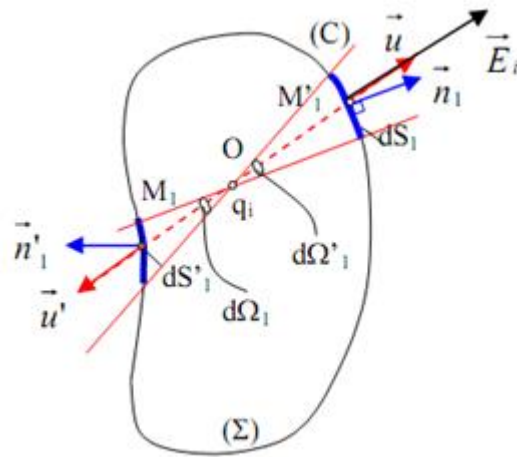


Figure 20.

Dans ce cas, l'angle solide sous lequel du point O on voit dS_1 est égal à l'angle solide sous lequel de O on voit dS_1' :

$$d\Omega_1 = d\Omega'_1 \quad \text{d'où} \quad d\Phi_1 = d\Phi'_1 = d\Phi_i$$

Ainsi, la paire de surface élémentaire dS_1 et dS_1' découpées par un cône élémentaire de sommet O (ou se trouve la charge q_i) donne une contribution $d\Phi_1 + d\Phi'_1$ au flux total, non nulle. Le flux élémentaire $d\Phi_i$ crée par \vec{E}_i à travers une surface élémentaire dS_i (figure 21) est donnée par :

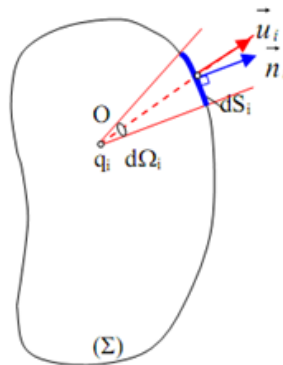


Figure 21.

$$d\Phi_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_i$$

Le flux total sortant de Σ est la somme des flux élémentaires $d\Phi_i$:

$$\Phi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Sigma} d\Omega_i$$

$\oint_{\Sigma} d\Omega_i$ est l'angle solide sous lequel du point O, on voit la surface fermée Σ ; Ω_i est donc l'angle solide sous lequel du point O on voit tout l'espace :

$$\Omega_i = 4\pi \quad \text{d'où} \quad \Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'intérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est égal à :

$$\Phi_i = \oint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Ainsi, le flux total du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Cette relation relie le flux à travers une surface fermée (Σ) et les échanges à l'intérieure de cette surface.

I.2. Cas de n charges ponctuelles

Considérons n_i charges à l'intérieure d'une surface fermée (Σ) et n_e charges situées à l'extérieure de cette surface. Le champ \vec{E} créé par les n charges ($n = n_i + n_e$) est la somme vectorielle des champs créés par chacune des charges :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n_i} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \vec{E}_e$$

Le flux du champ \vec{E} sortant de la surface Σ est :

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} \left(\sum_i \vec{E}_i + \sum_e \vec{E}_e \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_i + \sum_e \Phi_e$$

D'après (3) et (4), on a :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Phi_e = 0$$

d'où :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad , \quad Q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_i} q_i$$

Le flux sortant de la surface fermée Σ est égal à la somme, divisée par ϵ_0 , des charges intérieures à la surface Σ :

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec, Q_{int} : charge totale intérieures à Σ . Ce résultat constitue le théorème de Gauss.

I.3. Cas d'une distribution continue de charge

On peut écrire le théorème de Gauss dans le cas où la distribution de charges est continue et décrite par une densité volumique de charges ρ . La charge totale intérieure à Σ , c'est à dire contenue dans le volume v limité par la surface fermée Σ est :

$$Q_{\text{int}} = \iiint_v \rho d\tau$$

Où v est le volume délimitée par (Σ).

Dans ce cas le théorème de Gauss s'écrit, v étant le volume limité par la surface (Σ) :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_v \rho d\tau$$

C'est l'expression du théorème de Gauss sous la forme intégrale.

II. Théorème de Gauss

II.1. Enoncé

« Le flux du champ électrostatique à travers une surface (Σ) **fermée et orientée vers l'extérieur** est égal à la charge totale Q_{int} contenue dans le volume intérieur à cette surface divisée par ϵ_0 » :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Si le champ électrique, \vec{E} , est créé par une distribution continue caractérisée par sa densité volumique ρ , l'expression devient :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\iiint_{\tau} \rho d\tau}{\epsilon_0}$$

Où l'intégrale triple est étendue au volume τ délimité par la surface fermée S .

Forme locale du théorème de Gauss, équation de Poisson

Par application du théorème de Green-Ostrogradski on obtient :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\iiint_{\tau} \rho d\tau}{\epsilon_0} = \iiint_{\tau} \text{div } \vec{E} d\tau$$

d'où, en égalant les termes situés sous les deux intégrales triples s'appliquant au même volume τ , on obtient :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette équation constitue la forme locale du théorème de Gauss.

Si on souhaite faire intervenir le potentiel, il suffit de remplacer \vec{E} par $-\overrightarrow{\text{grad}} V$ pour obtenir :

$$\text{div } (-\overrightarrow{\text{grad}} V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{où } \Delta \text{ représente le laplacien}$$

D'où l'équation au potentiel (appelée **équation de Poisson**): $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

II.2. Application au calcul d'un champ électrostatique

Le théorème de Gauss est **toujours** vrai; il n'est adapté au calcul du champ électrostatique que si la distribution de charges possède une symétrie élevée.

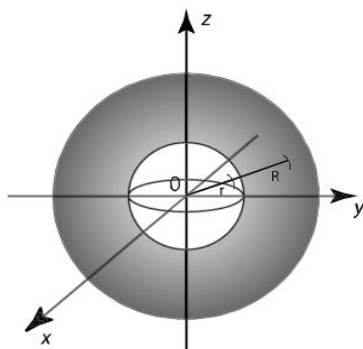
Méthode :

- Étude des symétries et invariances : déterminer la direction du champ et la dépendance du champ vis à vis des coordonnées.
- Choix de la surface de Gauss : choisir une surface Σ permettant un calcul élémentaire du flux du champ électrique.
- Appliquer le théorème de Gauss et obtenir ainsi \vec{E} .

II.3. Utilisation du théorème de Gauss

« On ne peut pratiquement l'utiliser que si la distribution de la charge présente une symétrie suffisante ».

a. Champ créé par une boule sphérique uniformément chargée



On considère une boule (sphère pleine) de centre O et rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges ρ .

La distribution de la charge présente donc une symétrie sphérique de centre O. Il en est donc de même pour le potentiel et le champ.

Pour appliquer le théorème de Gauss, on définit une "surface de Gauss" : la sphère $S(O, r)$ de volume intérieur V.

On utilise les coordonnées sphériques. Au point M (r, θ, φ) , $V = V(r)$ et $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$.

Un vecteur surface élémentaire de S est radial et vers l'extérieur : $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$.

Le flux de \vec{E} à travers S est : $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E_r(r) dS = 4\pi r^2 E_r$ car E_r est uniforme sur S.

Pour $r > R$: Le théorème de Gauss donne : $\Phi = \frac{\iiint_V \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$. On a donc $E_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ et

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$ donc, avec $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$ on obtient $V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$.

On constate que **le potentiel et le champ sont les mêmes que si toute la charge $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$ était**

placée au centre de la sphère : $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ et $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.

Pour $r < R$: Une partie seulement de la sphère chargée est dans le volume V :

$$\Phi = \frac{\iiint_V \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} = 4\pi r^2 E_r \text{ donc } E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \text{ d'où } \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r} \text{ et } V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + K.$$

La continuité de $V(r)$ pour $r = R$ implique : $-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + K = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$ donc $K = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$. $\boxed{V = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)}$

Pour $r = R$: Il y a continuité du champ et du potentiel, $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \vec{u}_r}$ et $\boxed{V = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}}$.

b. Champ créé par une surface plane uniformément chargée

Soit un plan Π portant une charge surfacique de densité uniforme σ .

La distribution de la charge est symétrique par rapport à Π et par rapport à tout plan perpendiculaire à Π et invariante par toute translation parallèle à Π . Il en est de même pour V et pour \vec{E} .

Soit O (quelconque) un point de Π et Oz normal à Π .

En un point M quelconque, le champ est dans tous les plans contenant M et perpendiculaires à Π donc $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$. L'invariance par toute translation parallèlement à Π implique $E_z = E_z(z)$.

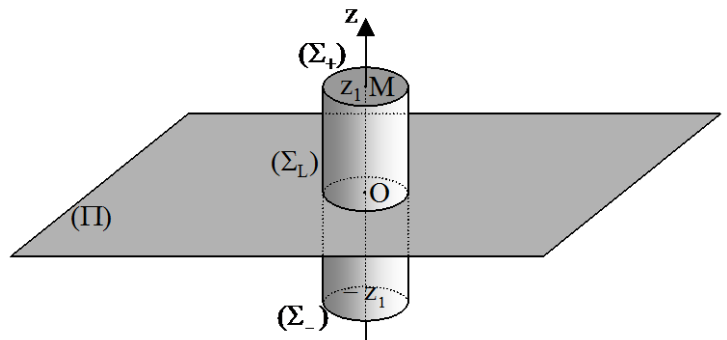
Donc $\boxed{\vec{E} = E_z(z) \vec{u}_z}$ et $\boxed{V = V(z)}$.

La symétrie par rapport à Π implique que V est une fonction paire de z et E_z une fonction impaire de z :

$$V(-z) = V(z) \text{ et } E_z(-z) = -E_z(z).$$

Soit une surface de Gauss $\Sigma = \Sigma_L \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, cylindrique, d'axe Oz , de

section droite quelconque d'aire S , limitée par les sections droites Σ_+ (de cote $z_1 > 0$) et Σ_- (de cote $z_1 < 0$).



En tout point M de cote z_1 : $\vec{E} = E_z(z_1) \vec{u}_z$, en tout point de cote $-z_1$: $\vec{E} = -E_z(z_1) \vec{u}_z$.

Le flux à travers Σ est $\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_+} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_-} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}$.

Sur Σ_L , $\vec{E} \perp d\vec{S}$ en tout point, donc le troisième terme est nul.

Sur Σ_+ , $\vec{E} = E_z(z_1) \vec{u}_z$ et $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$. Sur Σ_- , $\vec{E} = -E_z(z_1) \vec{u}_z$ et $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$.

$\Phi = E_z(z_1) \left(\iint_{\Sigma_+} dS + \iint_{\Sigma_-} dS \right)$ soit $\Phi = 2 S E_z(z_1)$. La charge intérieure à Σ est $Q_{\text{int}} = \sigma S$.

Le théorème de Gauss donne : $2 S E_z(z_1) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ d'où $E_z(z_1) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -E_z(-z_1)$.

On a donc un champ uniforme au dessus du plan de symétrie et un champ uniforme opposé du précédent de l'autre côté : $\forall z > 0 \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$ et $\forall z < 0 \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$.

On remarque qu'à la traversée du plan chargé dans le sens de \vec{u}_z , le champ présente une **discontinuité** $\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$.

Le potentiel s'obtient avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = E_z \vec{u}_z$:

Pour $z > 0$: $-\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ donc $V = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + A$. Pour $z < 0$: $-\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ donc $V = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + B$.

Il est impossible de prendre $V = 0$ pour z infini, (ceci est dû à la présence de charges à l'infini dans les directions de Π). On pose alors $V = 0$ pour $z = 0$, ce qui assure la continuité de $V(z)$.

$$\forall z > 0 \quad V = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \forall z < 0 \quad V = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}.$$

Les surfaces équipotentielles sont les plans // Π . Les lignes de champ sont les demi-droites normales à Π et orientées de Π vers l'infini si $\sigma > 0$ ou de l'infini vers Π si $\sigma < 0$.

c. Champ créé par une droite uniformément chargée

Soit une droite z/z chargée uniformément avec la densité linéique de charge λ .

La distribution de la charge est invariante par translation parallèlement à Oz et par rotation autour de Oz (symétrie cylindrique). Tous les plans contenant Oz et tous les plans perpendiculaires à Oz sont des plans de symétrie. Le champ et le potentiel présentent les mêmes invariances et les mêmes symétries.

En coordonnées cylindropolaires d'axe Oz , Au point $M(r, \theta, z)$,

$V = V(r)$, $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$ (voir 27-5-5).

On choisit une surface de Gauss cylindrique, d'axe Oz , de hauteur

$L : \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_L$.

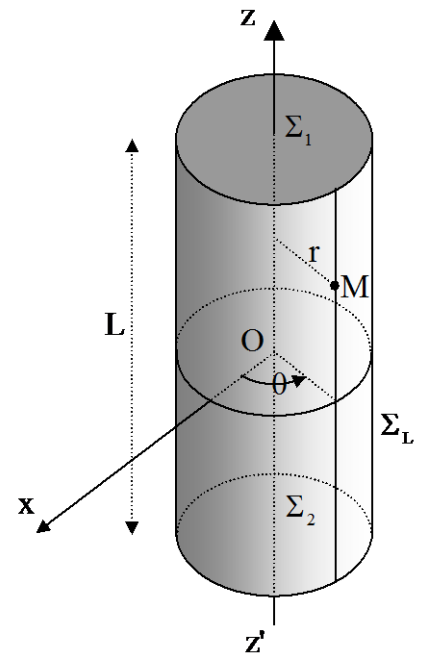
Le flux du champ à travers Σ est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Pour Σ_1 et Σ_2 , $\vec{E} \perp d\vec{S}$ en tout point. Pour Σ_L , $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ donc

$$\Phi = \iint_{\Sigma_L} E_r(r) dS = E_r \iint_{\Sigma_L} dS = 2\pi r L E_r.$$

La charge intérieure à Σ est $Q_{\text{int}} = \lambda L$.



D'après le théorème de Gauss, on a donc $2\pi r L E_r = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$ et $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$. $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r}$.

Le potentiel s'obtient avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = E_r \vec{u}_r$ donc $\frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ et

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{K}{r}\right).$$

On ne peut pas choisir $V = 0$ pour $r \rightarrow \infty$ car il y a des charges à l'infini dans la direction de Oz.

On choisira donc arbitrairement $V = 0$ à une distance r_0 du fil : $\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}$.

On remarque que V n'est pas défini pour $r = 0$.

Les lignes de champ sont les demi-droites perpendiculaires à la droite chargée $z'z$, orientées de cette droite vers l'infini si $\lambda > 0$ et de l'infini vers cette droite si $\lambda < 0$. Les surfaces équipotentiellles sont les cylindres de révolution d'axe $z'z$.

Conclusion

Le théorème de Gauss établit une relation entre le flux du champ électrique à travers une surface fermée et la charge à l'intérieur de cette surface. Cette relation a les propriétés suivantes :

- elle reflète les propriétés générales des champs électriques et ne se limite pas aux champs électrostatiques (contrairement à la loi de Coulomb);
- elle permet de déterminer plus simplement l'expression du champ électrostatique créé par les distributions de charges qui présentent une symétrie appropriée (sphérique, cylindrique, plan, etc.).

Chapitre 4

Dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique se définit par une répartition particulière de charges électriques telles que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives (le système est globalement neutre). Le dipôle le plus simple est donc un couple de deux charges de signe opposé distantes d'une longueur a non nulle. Cette notion est principalement utilisée en électromagnétisme et par suite en chimie où certaines liaisons entre molécules peuvent être expliquées en modélisant ces molécules par un dipôle (liaison hydrogène par exemple). En physique, on s'intéresse au champ électrostatique $\vec{E}(r)$ créé en un point r éloigné du dipôle (on parle alors de dipôle actif). Mais on peut aussi étudier le comportement du dipôle lorsqu'il est placé dans un champ extérieur (on parle alors de dipôle passif).

I. Potentiel et champ électrostatique créés par un dipôle

I.1. Définition

Le dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges électriques égales et de signes contraires $(-q)$ et $(+q)$ ($q > 0$), (figure 1). Ces deux charges sont fixées respectivement en deux points A et B séparées d'une distance ($a = \|\vec{AB}\|$). On se propose d'étudier les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatique créés par ces deux charges en un point M très éloigné des charges : $a \ll r = \|\vec{OM}\|$: approximation dipolaire.

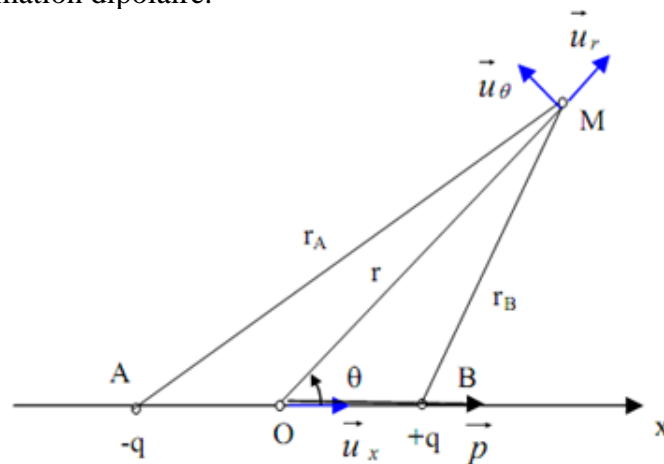


Figure 22.

I.2. Moment dipolaires électriques

Soient deux charges ponctuelles $-q$, $+q$ fixées respectivement en A et B ($q > 0$). Le moment dipolaire électrique (ou moment du dipôle) est une grandeur vectorielle définie par (figure 22):

$$\vec{p} = -q\vec{OA} + q\vec{OB} = q\vec{AB}$$

En désignant par a la distance séparant A et B, la norme du moment dipolaire vaut :

$$p = \|\vec{p}\| = qa$$

Le moment dipolaire décrit la charge et sa géométrie. Il permet de caractériser le dipôle. Son unité dans le système International (SI) est le Coulomb-mètre (C m).

I.3. Calcul du potentiel électrostatique

Soient deux charges ponctuelles $-q, +q$ fixées respectivement en A et B (figure 22) distant de (a) . Considérons un point M très éloigné des charges, ce qui revient à considérer la distance a très inférieure à celle qui sépare M de l'une ou l'autre charge (la distance a est agrandie pour des raisons de clarté).

La position de M est repérée dans le système des coordonnées polaires (r, θ) . Nous choisissons de prendre pour axe (Ox) , la droite qui joint les deux charges tel que l'origine O soit au milieu du segment AB qui joint les charges (Ox est l'axe de révolution de la distribution). D'après le principe de superposition, le potentiel $V(M)$ créé par le dipôle en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (r_B^{-1} - r_A^{-1})$$

avec,

$$\begin{aligned} * r_B &= \|\overrightarrow{BM}\| \\ \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} \\ r_B^2 &= \|\overrightarrow{BM}\|^2 = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{BO}^2 + 2\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2 \\ \text{où, } \|\overrightarrow{OM}\| &= r ; \|\overrightarrow{OB}\| = \frac{a}{2} \text{ et } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r \cos(\pi - \theta) = -\frac{ar}{2} \cos \theta \\ \text{on a :} \\ r_B^2 &= \|\overrightarrow{BM}\|^2 = r^2 - ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right) \\ * r_A &= \|\overrightarrow{AM}\| \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \\ r_A^2 &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA}^2 \\ \text{où, } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AO} &= \frac{ar}{2} \cos \theta \text{ et } \|\overrightarrow{OA}\| = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$r_A^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2 + ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} r_A &= \|\overrightarrow{AM}\| = r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{1/2} \text{ et } r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \\ r_B &= \|\overrightarrow{BM}\| = r \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{1/2} \text{ et } r_B^{-1} = r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Puisque $a/r \ll 1$, on a : $a^2/(4r^2) \ll a/r$, on peut négliger les termes en $(a/r)^2$ devant le terme en (a/r) :

$$r_A^{-1} \cong r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2}$$

$$r_B^{-1} \cong r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2}$$

Etant donné que $a \ll r$, on peut développer r_A^{-1} et r_B^{-1} en puissance de (a/r) et ne retenir que le terme du premier ordre

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots$$

$$r_A^{-1} \cong r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$\text{et } r_B^{-1} \cong r^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

d'où :

$$r_B^{-1} - r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right) - r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right) = \frac{a}{r^2} \cos \theta$$

Le potentiel $V(M)$ est donc donné par :

$$V(M) = \frac{qa \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M par rapport au point O (milieu de [A,B]) et \vec{p} le moment dipolaire (figure 23).

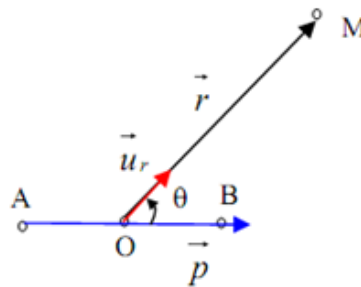


Figure 23.

On a :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta$$

Le potentiel $V(M)$ s'écrit donc :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Cette expression qui fait intervenir un produit scalaire est indépendante de tout système de coordonnées. Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en créant par un dipôle ($1/r^2$) est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle qui est en ($1/r$).

I.4. Calcul du champ électrostatique

I.4.1. Composantes du champ en coordonnées polaires

Le dipôle présente une symétrie de révolution autour de (AB). Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est donc contenu dans le plan (M, AB) (figure 24).

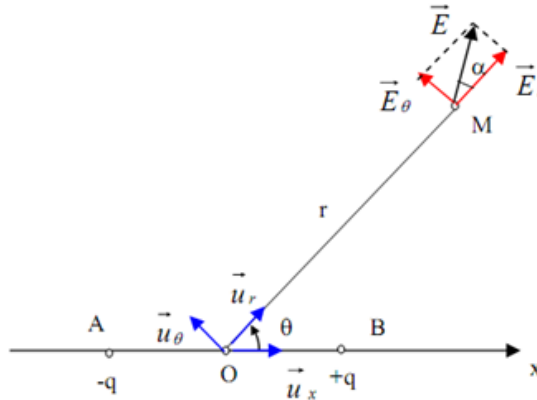


Figure 24.

D'après le principe de superposition, le champ en M est donné par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \quad (\vec{E}_z = \vec{0})$$

Pour calculer les composantes du champ, utilisons la relation :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}V(M)$$

avec, $\vec{\text{grad}}V(M) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$ et $V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

Les composantes du champ dérivant du potentiel V(M) s'écrivent dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \frac{2p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

θ	0	$\Pi/2$	Π	$3\Pi/2$
\vec{E}_r	$\vec{E}_1 = \frac{2p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$	$\vec{E}_r = \vec{0}$	$\vec{E}_3 = \vec{E}_r = \vec{E}_1$	$\vec{E}_r = \vec{0}$
\vec{E}_θ	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_2 = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$ $E_2 = E_1/2$	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_4 = \vec{E}_2$

Il faut remarquer que la décroissance du champ en $(1/r^3)$ créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle qui est en $(1/r^2)$.

Le module de $\vec{E}(M)$ est :

$$\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Soit α l'angle que fait \vec{E} avec la radiale : $\alpha = (\vec{E}, \vec{u}_r)$

$$\tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\tan \theta}{2}$$

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant Ox et Oy (du plan AMB) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \text{ et } \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{E} &= \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \\ \vec{E} &= \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \vec{i} + \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3 \sin \theta \cos \theta) \vec{j}\end{aligned}$$

I.4.2. Formulation globale du champ \vec{E}

Nous pouvons exprimer \vec{E} uniquement en fonction de \vec{p} et de \vec{r} en calculant le gradient de V(M) :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

Or,

En posant : $\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$ et $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

$$* \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = \vec{p}$$

$$* \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^5} \vec{r}$$

D'où l'expression intrinsèque de \vec{E} en fonction de \vec{p} et de \vec{r} :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

Les effets électriques \vec{E} et V produits par le dipôle sont entièrement déterminés par son moment dipolaire \vec{p} . Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en $(1/r^2)$ et du champ en $(1/r^3)$ créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle. Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant Ox et Oy (du plan AMB) peuvent être également obtenues en écrivant :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta ; \vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} \text{ et } \vec{p} = p \vec{i}$$

Ce qui donne d'après l'expression intrinsèque du champ indépendante du système de coordonnées :

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{3pr \cos \theta}{r^5} (r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}) - \frac{p}{r^3} \vec{i} \right)$$

On retrouve donc les composantes calculer à partir des composantes polaires du champ :

$$\vec{E}_x = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \vec{i} \text{ et } \vec{E}_y = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3 \sin \theta \cos \theta) \vec{j}$$

Conclusion

Le champ créé par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire est proportionnel à $1/r^3$ et le potentiel à $1/r^2$, alors que pour une charge ponctuelle, le champ créé est proportionnel à $1/r^2$ et le potentiel à $1/r$.

Chapitre 5

Conducteurs en équilibre électrostatique et condensateurs

Introduction

Définition d'un conducteur (en électrostatique) : un conducteur est un matériau possédant des porteurs de charges susceptibles de se mettre en mouvement sous l'action d'un champ électrique extérieur, aussi faible soit-il.

Si un champ électrique est appliqué à un conducteur, il en résulte un mouvement d'ensemble des porteurs de charge (qui se superpose à l'agitation thermique) ; ce mouvement constitue le courant électrique qui sera étudié dans la deuxième partie de ce manuscrit.

Dans les métaux, seuls les électrons sont mobiles. Le réseau de charges positives ne possède qu'une faible mobilité et peut être considéré comme fixe. Dans les liquides et les gaz, les ions se déplacent aussi.

Définition d'un conducteur en équilibre électrostatique : un conducteur est dit en équilibre électrostatique s'il n'est le siège d'aucun courant et donc d'aucun mouvement d'ensemble des charges par rapport au réseau (cas d'un conducteur métallique par exemple).

- On en déduit que le champ électrique ne peut être que nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre (si ce n'était pas le cas, la force $\vec{F} = q\vec{E}$ entraînerait les porteurs dans un mouvement d'ensemble => Équilibre électrostatique impossible à obtenir).

► *A l'intérieur d'un conducteur en équilibre : $\vec{E} = \vec{0}$*

- La densité volumique de charges ρ est **nulle**, puisque :

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ et d'après l'équation de Maxwell-Gauss, } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ donc } \rho = 0$$

Conséquence : Si le conducteur est chargé, l'excès de charges est obligatoirement situé à la surface du conducteur, correspondant à une densité superficielle σ .

► *La charge électrique d'un conducteur en équilibre est entièrement répartie sur sa surface*

- Le potentiel V est **constant** dans le volume d'un conducteur en équilibre électrostatique puisque : $\vec{E} = \vec{0}$ et d'après la relation $\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} V$, donc $V = \text{cte}$

► *Un conducteur en équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel*

Conséquence : La surface du conducteur est alors une **équipotentielle**, et les lignes de champ lui sont donc **normales**.

Par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut « **revenir** » vers le conducteur (figure 25). En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si les points A et B appartiennent au même conducteur, alors la circulation doit être nulle, ce qui est impossible le long d'une ligne de champ (où, par définition \vec{E} est parallèle à $d\vec{l}$).

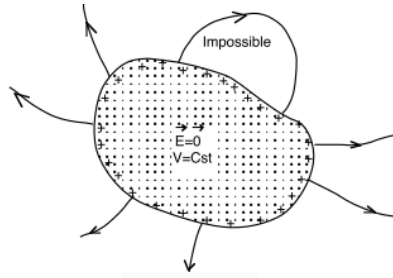


Figure 25.

En résumé, à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique :

$$\vec{E} = \vec{0} \quad ; \quad V = \text{Cst} \quad ; \quad \rho = 0$$

I. Champ au voisinage d'un conducteur

On considère un conducteur chargé et on s'intéresse au calcul du champ électrique en un point au voisinage immédiat de la surface externe de ce conducteur. On construit, pour cela, une surface de Gauss cylindrique aplatie, dont une base se trouve à l'extérieur de la surface et l'autre base à une profondeur telle que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre (figure 26). En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

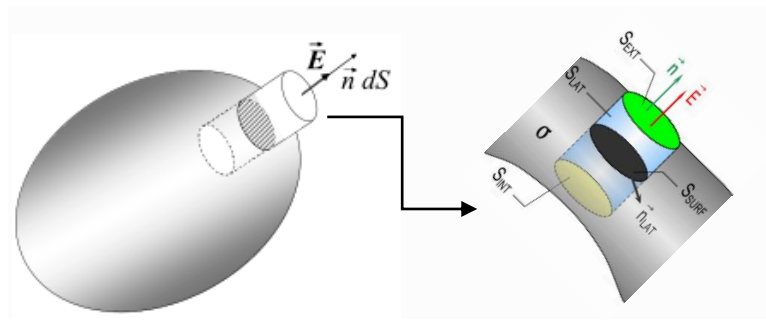


Figure 26.

D'après les propriétés d'un conducteur en équilibre, le champ est normal aux points situés au voisinage immédiat de la surface. Le champ étant nul partout à l'intérieur du conducteur, on ne tient compte que du flux à travers la surface située à l'extérieur du conducteur. Le flux sortant de la surface latérale du cylindre étant nul, il ne reste plus que celui qui sort de la base, soit :

$$\phi = E S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \text{ sachant que } \iint_{S_{\text{INT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \text{ et } \iint_{S_{\text{LAT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Où σS est la charge nette comprise à l'intérieur de la surface de Gauss.

Le champ électrique à la surface d'un conducteur chargé s'exprime en fonction de la densité surfacique de charges (c'est la formulation du **théorème de Coulomb**) :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \vec{n} : \text{vecteur unitaire } \perp \text{ à la surface et dirigé vers l'extérieur du conducteur}$$

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul, en son voisinage immédiat extérieur, il vaut :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Remarque :

Il existe donc une discontinuité de la composante normale du champ électrique à la surface du conducteur : on passe de $\vec{E} = \vec{0}$ dans le conducteur à $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ à la traversée de la surface du conducteur.

II. Répartition des charges sur un conducteur : effet de pointe

« A proximité d'une pointe, le champ électrostatique est très intense. Cela résulte du fait que la densité surfacique de charges est très élevée au voisinage d'une pointe ».

Ce phénomène peut être expliqué en considérant deux sphères conductrices de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 > R_2$) portées au même potentiel (reliées par un fil conducteur mince). Les deux sphères ont une densité de charge uniforme σ_1 et σ_2 (figure 27).

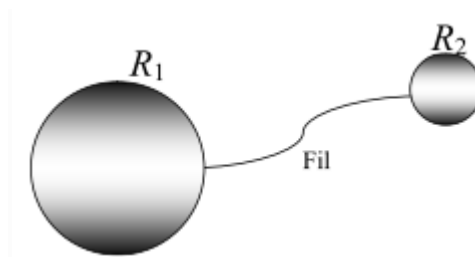


Figure 27.

De ce fait, les deux sphères sont portées au même potentiel ; et comme elles sont très éloignées l'une de l'autre, on peut écrire :

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS}{R_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

Si $R_1 \gg R_2$, alors $\sigma_2 \gg \sigma_1$

Donc, À potentiel égal, la densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon). Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure. Le résultat ci-dessus nous montre l'effet d'une pointe (accumulation de charges, figure 28,).

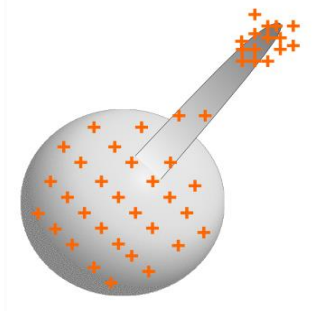


Figure 28.

Application :

Le pouvoir de pointe est utile pour faciliter la décharge de l'électricité ; c'est le rôle des **paratonnerres** qu'on place sur les édifices pour les protéger contre la foudre.



La foudre est un phénomène naturel de décharge électrique qui se produit, lors d'un orage, entre deux nuages chargés d'électricité statique, ou entre un nuage électriquement chargé et la Terre qui est un conducteur électrique.

Lors d'un orage, les constituants d'un nuage, gouttes de pluie, grêlons, particules de glace, se heurtent à très grandes vitesses et s'électrisent par triboélectricité (voir chapitre I). La décharge se produit lorsque la différence de potentiel entre le nuage et la Terre, par exemple, dépasse un certain seuil (plusieurs millions de volts).

La foudre s'accompagne d'un phénomène lumineux l'éclair et d'une détonation le tonnerre.

III. Pression électrostatique

Calculons maintenant les forces auxquelles sont soumises les charges électriques situées à la surface d'un conducteur en équilibre. Ces charges de surface sont soumises à des forces répulsives de la part **des autres charges** du conducteur.

Considérons un élément de surface dS , portant une charge $dq = \sigma dS$.

Le champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$ exerce sur la charge dq une force électrostatique :

$$\overrightarrow{dF} = dq \vec{E} = \sigma ds \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{soit :} \quad \overrightarrow{dF} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ds \vec{n}$$

Cette force est donc normale à la surface et dirigée vers l'extérieur quelque soit le signe de la charge. Elle est proportionnelle à l'élément de surface dS et présente, par conséquent, le caractère d'une force de pression. La force par unité de surface, c'est-à-dire la pression électrostatique, est alors donnée par :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

IV. Capacité et énergie d'un conducteur isolé

IV.1. Capacité d'un conducteur isolé

Il est possible de faire une analogie entre la température d'un corps et le potentiel électrostatique. Or, pour une quantité de chaleur donnée, la température d'un corps dépend en fait de sa capacité calorifique. Il en va de même pour le potentiel électrostatique : il dépend de la capacité du corps à « absorber » les charges électriques qu'il reçoit. On peut donc suivre cette analogie et définir une nouvelle notion, la capacité électrostatique :

$$\text{Capacité électrostatique} \quad \Rightarrow \quad \text{Capacité calorifique}$$

Pour un conducteur en équilibre électrostatique, le potentiel auquel ce conducteur se trouve est lié à la charge répartie sur sa surface avec une distribution surfacique σ . En effet, le potentiel en tout point M à l'intérieur du conducteur peut s'écrire :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_{\text{Gauss}}} \frac{\sigma dS}{r}$$

Par ailleurs, la charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit :

$$Q = \iint_{S_{\text{Gauss}}} \sigma dS$$

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant a , on obtient une nouvelle charge totale $Q' = a Q$ et un nouveau potentiel $V' = a V$. On a ainsi un nouvel état d'équilibre électrostatique, parfaitement défini. On voit donc que, quoi qu'on fasse, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par Q et V) est tel que le rapport Q/V reste constant (cela résulte de la linéarité de Q et V en fonction de σ).

Définition : La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par :

$$C = \frac{Q}{V}$$

Où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V . L'unité de la capacité est le Farad (symbole F). On a $1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$ et $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$, $1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$.

Exemple : Capacité d'une sphère de rayon R , chargée avec une densité surfacique σ .

$$V = V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{surface}} \frac{\sigma(P) dS}{OP} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{surface}} \frac{\sigma dS}{R} = \frac{\iint \sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Application numérique : pour la terre, $C = 700 \mu\text{F}$

IV.2. Énergie d'un conducteur chargé

L'énergie potentielle d'une distribution de charge à la surface d'un conducteur est donné par :

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(M) V(M) ds$$

$$E_p = \frac{1}{2} V \iint_S \sigma(M) ds$$

Comme le conducteur est équipotentiel :

Donc : $E_p = \frac{1}{2} Q \cdot V$ (avec $Q = C \cdot V$) $\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} C \cdot V^2$, $E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

V. Systèmes de conducteurs en équilibre

V.1. Superposition des états d'équilibre

Nous avons vu qu'un conducteur isolé, à l'équilibre électrostatique, est caractérisé par sa charge Q et son potentiel V , qui sont reliés entre eux par la capacité C du conducteur. Inversement, étant donné un conducteur de capacité C , la donnée de sa distribution surfacique σ détermine complètement son état d'équilibre, puisque : $Q = \iint_{\text{surface}} \sigma dS$ et $V = \frac{Q}{C}$.

Soit maintenant un autre état d'équilibre du même conducteur défini par une densité surfacique σ' . Le conducteur porte alors une charge Q' et a un potentiel V' . Du fait de la linéarité de Q et V avec σ , toute combinaison linéaire de σ et σ' est encore un état d'équilibre :

$$\sigma'' = a\sigma + b\sigma' \Leftrightarrow \begin{cases} Q'' = aQ + bQ' \\ V'' = \frac{Q''}{C} = aV + bV' \end{cases}$$

« Toute superposition d'états d'équilibre (d'un conducteur ou d'un ensemble de conducteurs) est également un état d'équilibre ».

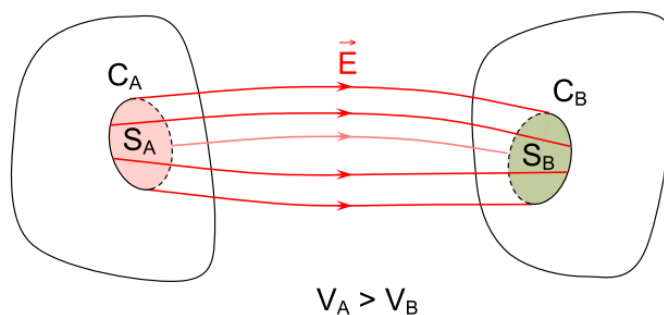
V.2. Théorème des éléments correspondants

Soient deux conducteurs A et B initialement éloignés l'un de l'autre (ne se perturbant pas), à l'équilibre électrostatique et portant des densités de charges surfaciques σ_A et σ_B .

On rapproche les deux conducteurs. S'ils ne sont pas au même potentiel, un champ électrique apparaît entre les deux. De plus, ce champ électrique modifie la répartition des charges à la surface des deux conducteurs.

Nous allons examiner en détail aux répartitions de charges entre les deux conducteurs.

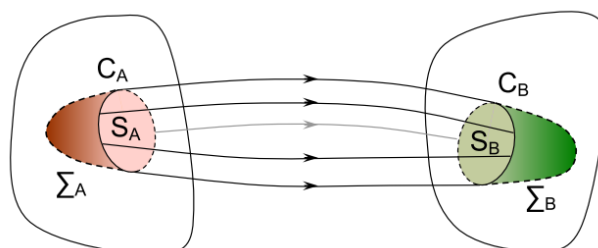
On considère un contour C_A sur A. Celui-ci définit une surface S_A . C_A et S_A sont **sur la surface** du conducteur A. Les lignes de champs issus du contour C_A rejoignent le conducteur B et définissent alors un contour C_B sur le conducteur B. Le contour C_B définit la surface S_B . C_B et S_B sont **sur la surface** du conducteur B. Les lignes de champ reliant les contours C_A et C_B forment **un tube de flux**.



Par construction, le flux de \vec{E} à travers ce tube de flux est nul (les lignes de champ sont parallèles à \vec{E} en tout point)

Nous allons utiliser le théorème de Gauss sur la surface fermée Σ définie par :

- le tube de flux
- la surface Σ_A située à l'intérieur de A et s'appuyant sur le contour C_A ;
- la surface Σ_B située à l'intérieur de B et s'appuyant sur le contour C_B .



$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\phi = \iint_{\Sigma_A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \iint_{tube} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

- $\iint_{\Sigma_A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ car \vec{E} est nul dans le conducteur A
- $\iint_{\Sigma_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ car \vec{E} est nul dans le conducteur B
- $\iint_{tube} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ par construction

D'autre part,

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_A}{\epsilon_0} + \frac{Q_B}{\epsilon_0}$$

Où Q_A et Q_B sont les charges portées respectivement par les éléments de surface S_A et S_B .
Il apparaît donc que :

$$Q_A = -Q_B$$

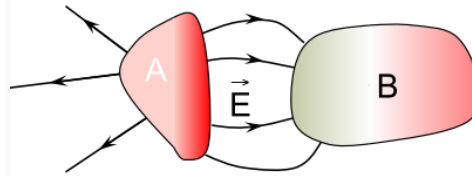
Théorème : Les charges électriques portées par deux éléments correspondants (reliés par des lignes de champ) sont opposées.

V.3. Phénomène d'influence électrostatique

La répartition des charges sur la surface d'un conducteur ne dépend pas seulement de sa géométrie propre mais aussi de la présence ou non d'autres conducteurs chargés dans son voisinage, ainsi que de leurs positions. Le phénomène qui résulte de cette interaction est appelé **influence électrostatique**.

V.3.1. Influence partielle

On considère un conducteur A chargé s'approchant d'un conducteur B neutre. Sous l'influence de A, B se polarise et B augmente à son tour la densité de charge de A à proximité de B :



On parle alors d'une influence électrostatique réciproque. De plus, dans ce cas, toutes les lignes de champ issues du conducteur A ne convergent pas vers B ; on parle alors d'une **influence partielle**.

V.3.2. Influence totale

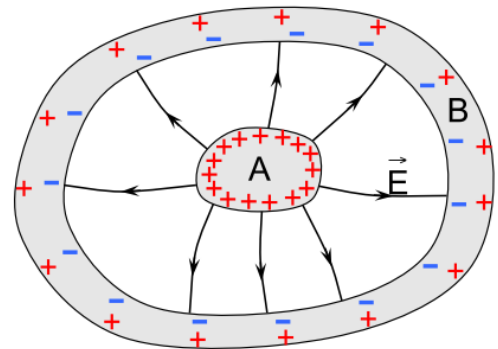
Il y a **influence totale** lorsque le conducteur B (influencé) entoure complètement le conducteur A (influençant).

Dans ce cas, l'ensemble des lignes de champ issues de A arrive sur B. De plus :

$$Q_B^{int} = -Q_A$$

La charge totale sur le conducteur B est :

$$Q_B = Q_B^{int} + Q_B^{ext} = -Q_A + Q_B^{ext}$$



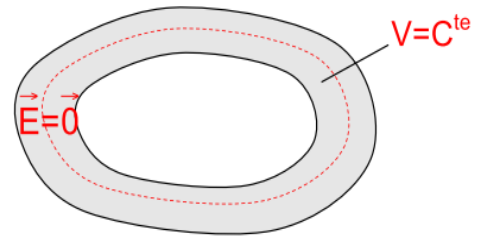
V.3.3. Notion d'écran ou de blindage électrostatique : la cage de Faraday

• Cavity dans un conducteur (creux)

On considère un conducteur possédant une cavité vide (sans charge) :

Dans le conducteur à l'équilibre, le champ électrique est nul : $\vec{E} = \vec{0}$. Le conducteur est équipotentiel :

$$V = Cte = V_{\text{surf.}}$$



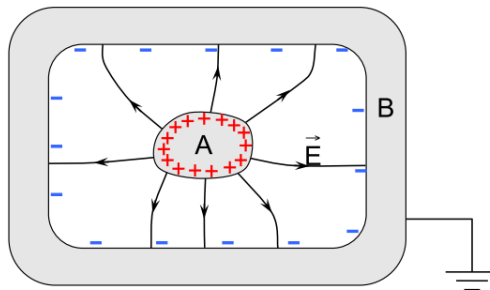
À l'intérieur de la cavité, au voisinage de la surface interne du conducteur, le potentiel est le même que dans le conducteur (continuité du potentiel).

Comme il n'y a pas de charges dans la cavité, il n'y a pas d'extremum du potentiel, le potentiel est donc constant.

« On définit par écran électrostatique parfait tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant ».

• Cage de Faraday

On considère un conducteur creux B relié à la terre. Il est donc à un potentiel nul (par convention). Plaçons un conducteur chargé A dans la cavité de B.



Comme le conducteur B est relié à la terre, la charge Q_{Bext} est nulle ; l'éventuel excès de charges (+) est compensée par des charges provenant de la Terre.

Le champ régnant dans le conducteur est nul et par continuité, le champ régnant à l'extérieur du conducteur B est nul aussi.

► L'espace extérieur est protégé de l'influence du conducteur A placé dans la cavité. Un tel dispositif est appelé **cage de Faraday**.

Applications :

- Protection contre la foudre : un paratonnerre est en général complété par un réseau de câbles entourant l'édifice à protéger, reliés à la Terre.
- Tout conducteur transportant un courant faible est entouré d'une gaine métallique (appelée blindage) reliée au sol. Cette gaine est parfois simplement le châssis de l'appareil.

VI. États d'équilibre d'un système de conducteurs

Un état d'équilibre d'un système de conducteurs est défini par la connaissance du potentiel ou/et de la charge de chaque conducteur.

VI.1. Unicité de l'état d'équilibre

Pour un conducteur isolé dans le vide, l'état d'équilibre est défini de façon unique si l'on connaît son potentiel V_0 :

- $V(M)$ est défini de façon unique.
- $\vec{E}(M)$ est défini de façon unique.

- La densité de charge σ est définie en tout point de la surface du conducteur.

Pour un système de n conducteurs isolés et chargés :

- La connaissance des potentiels V_1, V_2, \dots, V_n définit de manière unique le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace.
- Q_1, Q_2, \dots, Q_n sont définies de façon unique.
- $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sont définies.

VI.2. Principe de superposition des états d'équilibre

Soit un système de conducteurs et 2 états d'équilibre:

Etat 1: $\sigma = \sigma_{1i}$ et $V = V_{1i}$ sur le conducteur i

Etat 2: $\sigma = \sigma_{2i}$ et $V = V_{2i}$ sur le conducteur i

Le principe de superposition des états d'équilibre affirme que l'état défini par :

$\sigma = \sigma_{1i} + \sigma_{2i}$ et $V = V_{1i} + V_{2i}$ sur le conducteur i est aussi un état d'équilibre.

VI.3. Coefficients d'influence électrostatique

Quand plusieurs conducteurs sont mis en présence les uns des autres, ils exercent une influence électrostatique réciproque. Pour déterminer les conditions d'équilibre, il faut tenir compte des charges et potentiels individuels mais aussi **des influences mutuelles**.

Soit un ensemble de n conducteurs (A_i) de charge électrique totale Q_i et potentiel V_i , en équilibre électrostatique. Prenons (A_1) et appliquons la notion vue précédemment de superposition des états d'équilibre. La densité surfacique de A_1 peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^n \sigma_{1j}$$

Où :

- σ_{11} est la densité surfacique de charges apparaissant sur (A_1) si tous les autres conducteurs étaient portés au potentiel nul (c.a.d. n'influençant pas directement la densité de charges portée par A_1)
- σ_{1j} est la densité surfacique qu'aurait A_1 en présence du conducteur A_j porté seul à son potentiel V_j ; les autres, y compris A_1 étant portés au potentiel nul.

On peut alors écrire que la charge totale sur (A_1) est :

$$Q_1 = \iint_{S_1} \sigma_1 dS = \sum_{j=1}^n \iint_{S_1} \sigma_{1j} dS = q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1n}$$

Pour connaître Q_1 il faut donc connaître les n états d'équilibre électrostatique. Considérons le premier, celui où tous les autres conducteurs en présence sont mis au potentiel nul. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} q_{11} &= C_{11} V_1 \\ q_{21} &= C_{21} V_1 \\ \vdots &= \vdots \\ q_{n1} &= C_{n1} V_1 \end{aligned}$$

En effet, la charge apparaissant sur (A_1) ne peut être due qu'à V_1 , C_{11} étant la capacité du conducteur (A_1) **en présence des autres conducteurs**. Mais par influence, une distribution σ_{j1} apparaît sur tous les autres conducteurs (A_j). Celle-ci dépend du nombre de lignes de champ qui joignent (A_1) à chaque conducteur (A_j). En vertu du théorème des éléments correspondants, la charge qui « apparaît » est de signe opposé à celle sur (A_1), elle-même proportionnelle à q_{11} donc à V_1 : **les coefficients d'influence C_{j1} sont donc négatifs**.

Considérons maintenant le deuxième état d'équilibre, où tous les conducteurs sauf (A_2) sont mis au potentiel nul. On a alors dans ce cas :

$$\begin{aligned} q_{12} &= C_{12} V_2 \\ q_{22} &= C_{22} V_2 \\ &\vdots \\ q_{n2} &= C_{n2} V_2 \end{aligned}$$

Bien évidemment, en reproduisant cette opération, on obtient que l'état d'équilibre le plus général est décrit par :

$$Q_i = q_{i1} + q_{i2} + \dots + q_{in} = \sum_{j=1}^n q_{ij} = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j$$

Ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients C_{ij} sont appelés coefficients d'influence. Les coefficients C_{ii} sont appelés coefficients de capacité ou capacités des conducteurs en présence des autres.

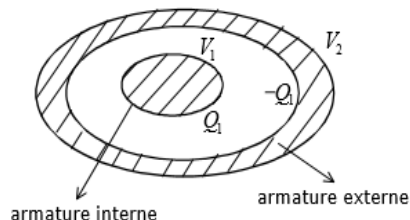
Il ne faut pas les confondre avec les capacités propres C_i des conducteurs isolés, seuls dans l'espace. D'une façon générale, on a:

- Les C_{ii} sont toujours positifs.
- Les C_{ij} sont toujours négatifs et $C_{ij} = C_{ji}$ (matrice symétrique).

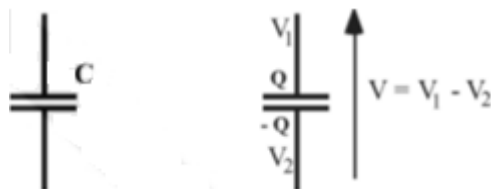
VII. Condensateurs

Définition :

On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence totale. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur. En général, les deux armatures sont séparées par un matériau isolant (un diélectrique), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur.



Représentation symbolique :



- Un condensateur sert à emmagasiner de l'énergie électrique.
- L'intérêt est de stocker beaucoup de charges sur ses armatures, ce qui dépend de sa différence de potentiel, de la nature du diélectrique et de sa géométrie

VII.1. Capacité

Dans ce qui suit on suppose qu'il n'y a que du vide entre les deux armatures. Soient donc deux conducteurs (A_1) et (A_2) portant une charge totale Q_1 et Q_2 et de potentiels V_1 et V_2 . D'après la section précédente, on a :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

Les coefficients C_{ij} étant indépendants des valeurs de Q et de V , il suffit, pour les trouver, de considérer des cas particuliers simples (formellement on a ici 2 équations à 4 inconnues).

Regardons ce qui se passe dans le cas d'un condensateur à influence totale, c'est à dire un condensateur pour lequel on a :

$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^{int} = Q_2^{ext} - Q_1$$

Si on relie (A_2) à la masse ($V_2=0$, $Q_{2ext}=0$, car on néglige toute influence extérieure), alors on obtient :

$$\begin{cases} Q_1 = -Q_2 \\ C_{11} = -C_{21} \end{cases}$$

La première relation n'est vraie que si (A_2) est à la masse, mais la seconde est générale. Par ailleurs, on sait que $C_{12} = C_{21}$ (on peut aussi le redémontrer en reliant les deux conducteurs par un fil ($V_1=V_2$) et choisir $Q_1=0$).

Par convention, la capacité C du condensateur, sa charge Q et sa tension entre armatures sont alors définies de la façon suivante,

$$\begin{aligned} C &= C_{11} \\ U &= V_1 - V_2 \\ Q &= Q_1 \end{aligned}$$

ce qui fournit la relation des condensateurs

$$Q = CU$$

C s'appelle la capacité du condensateur. Elle ne dépend que de la géométrie du système, pas de la charge Q , ni de la différence de potentiel U .

Méthode de Calcul de capacités :

- On calcul le champ \vec{E} entre les armatures (en utilisant le théorème de Gauss)
- On calcul la circulation du champ d'une armature à l'autre, $v_1 - v_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- Connaissant la charge $Q = \iint \sigma \cdot dS$ on calcul $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

Exemple :

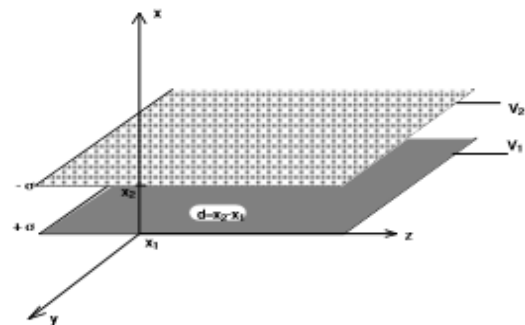
Condensateur plan

Soient deux armatures (A_1) et (A_2) planes parallèles infinies, orthogonales à un même axe Ox de vecteur unitaire \vec{i} et situées à une distance $d = x_2 - x_1$ l'une de l'autre. L'armature (A_1) porte une densité surfacique de charges σ et (A_2) , en vertu du théorème des éléments correspondants, porte une densité $(-\sigma)$.

Entre les deux armatures, le champ électrostatique est la superposition des champs créés par ces deux plans infinis, c'est-à-dire :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{i}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors :



$$U = V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, \text{ donc } Q = \frac{\epsilon_0 (V_1 - V_2)}{e} S = C (V_1 - V_2)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

d'où la capacité C :

VII.2. Énergie d'un condensateur

L'énergie d'un condensateur vaut :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C}$$

On peut retrouver ce résultat en intégrant la densité d'énergie, $\epsilon E^2/2$. Dans l'espace entre les armatures, $E = \sigma/\epsilon$. Hors de cet espace, $E = 0$. On a donc :

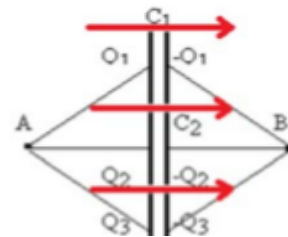
$$\mathcal{E}_p = \iiint_{\text{entre}} \epsilon \frac{(\sigma/\epsilon)^2}{2} d\tau + \iiint_{\text{hors}} \epsilon_0 \frac{0^2}{2} d\tau = \frac{\sigma^2 S e}{2 \epsilon} = \frac{Q_1^2}{2C}$$

VII.3. Associations de condensateurs

VII.3.1. Condensateurs en parallèle

Dans ce groupement tous les condensateurs ont la même d.d.p V à leurs bornes. Le Condensateur équivalent aura la charge $Q=Q_1+Q_2+Q_3$ sous la d.d.p V.

Sa capacité C_{eq} est donnée par :



$$Q = C_{eq} V = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V \rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

► Pour un groupement en parallèle de n condensateurs, la capacité du condensateur équivalente

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

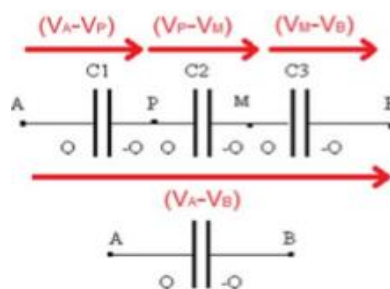
sera :

VII.3.2. Condensateurs en série

Dans ce groupement tous les condensateurs portent la même charge Q.

Le Condensateur équivalent aura la même charge Q sous la d.d.p V de l'ensemble en série.

Sa capacité C_{eq} est donnée par :



$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

► Pour un groupement en série de n condensateurs, la capacité du condensateur équivalente sera :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Partie 2 :

ÉLECTROCINÉTIQUE

L'électrocinétique est l'étude des courants électriques, c'est à dire des déplacements de charges dans des milieux matériels appelés conducteurs. Ces charges se déplacent sous l'effet d'un champ électrique extérieur.

Chapitre 1

Courant et résistance électriques

I. Courant électrique

Le courant électrique est dû au déplacement de charges dans un conducteur. Ces charges peuvent être :

- Des électrons
 - Dans un solide conducteur (cuivre, aluminium, etc).
 - Dans un liquide conducteur (mercure à la température de 20°C).
 - Dans le vide (tube électronique ou tube cathodique d'écran de télévision).
- Des trous (mais on se ramène à des électrons, voir cours d'électronique).
- Des ions dans une solution ($2H^+ SO_4^{2-}$), par exemple dans l'électrolyte d'un accumulateur au plomb.

Si on met un conducteur en contact avec un autre, le deuxième sera à son tour électrisé par l'acquisition d'une certaine charge Q . Cela signifie que lors du contact des conducteurs, les charges se sont déplacées de l'un vers l'autre. Par conséquent, l'intensité du courant, à l'instant t , est représentée par le débit des charges par la relation suivante :

$I = \frac{dQ}{dt}$, avec t en secondes, Q en Coulomb (C) et i en Ampères (A). Dans le système international, l'Ampère est l'une des quatre unités fondamentales de telle sorte que : $1\text{ C} = 1\text{ A.S}$

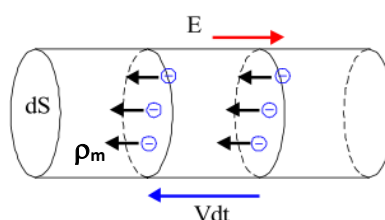


Pour des raisons historiques, le sens conventionnel d'un courant positif est celui du déplacement de charges positives. Il est donc opposé à la direction de déplacements des électrons.

II. Densité de courant électrique

Considérons un fil conducteur de section S dans lequel se trouvent n porteurs de charge q animées d'une vitesse \vec{v} . Pendant un intervalle de temps dt , ces charges parcourent une distance égale à $\vec{v}.dt$. Soit $dS. \vec{n}$, un élément infinitésimal de surface mesuré sur la section du fil et orienté dans une direction arbitraire. La quantité de charge électrique qui traverse cette surface pendant un intervalle de temps égale à dt est celle contenue dans le volume élémentaire dV associé. Son expression est donnée par :

$$dQ = nq dV = n. q. \vec{v}. dt. \overline{dS}$$



On voit alors apparaître un vecteur qui décrit les caractéristiques du milieu conducteur. Ce vecteur est appelé la **densité de courant électrique**, son unité est l'ampère par mètre carré ($A m^{-2}$).

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v} = \rho_m \cdot \vec{v}$$

Avec : ρ_m , la densité de charges mobiles dans le conducteur

Le courant I circulant dans le fil est relié à la densité par :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{dt} \iint_S dQ = \frac{1}{dt} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On dit que le courant dans un circuit est le flux à travers la section du fil de la densité de courant. Le sens du courant (grandeur algébrique) est alors donné par le sens du vecteur densité de courant.

III. Résistance d'un conducteur

III.1. Loi d'Ohm microscopique (ou locale)

Dans un conducteur électrique, la densité de courant est proportionnelle au champ électrostatique local. Cette relation peut être démontrée comme suite :

Soit une charge mobile q se déplaçant dans un milieu conducteur soumis à un champ électrostatique. Cette charge est soumise à deux forces :

$\vec{F} = q\vec{E}$: Force motrice et $\vec{f} = -K\vec{v}$, $K > 0$: Force résistante

En régime permanent, on peut écrire: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{f} \rightarrow q\vec{E} - K\vec{v} = \vec{0}$

C'est à dire : $\vec{j} = \rho_m \cdot \vec{v} = \frac{\rho_m q}{K} \vec{E} = \frac{nq^2}{K} \vec{E}$

Donc, la loi d'Ohm locale est donnée par : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

Où le coefficient de proportionnalité γ est appelé la **conductivité** du milieu (unités : voir plus bas). On définit également $\rho = 1/\gamma$, la **résistivité** du milieu. La conductivité est une grandeur locale positive, dépendant uniquement des propriétés du matériau.

Exemple : Le Cuivre possède une conductivité $\gamma_{Cu} = 58106 (\Omega m)^{-1}$, tandis que celle du verre (isolant) vaut $\gamma_{verre} = 10^{-11} (\Omega m)^{-1}$.

Une telle loi implique que les lignes de champ électrostatique sont également des lignes de courant, indiquant donc le chemin pris par les charges électriques. Par ailleurs, comme γ est positif, cela implique que le courant s'écoule dans la direction des **potentiels décroissants**.

III.2. Loi d'Ohm macroscopique

Considérons maintenant une portion AB d'un conducteur parcouru par un courant I . S'il existe un courant, cela signifie qu'il y a une chute de potentiel entre A et B, par conséquent :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Dans ce cas, la résistance de cet élément est donnée par :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \gamma \vec{E} d\vec{S}}$$

L'unité de la résistance est l'Ohm de symbole Ω . Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section S et d'une longueur L où le champ électrostatique est uniforme, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) et sa résistivité (propriété microscopique)

$$R = \frac{E L}{\gamma E S} = \rho \frac{L}{S}$$

La résistivité ρ est exprimée en Ohm mètre de symbole $\Omega \text{ m}$.

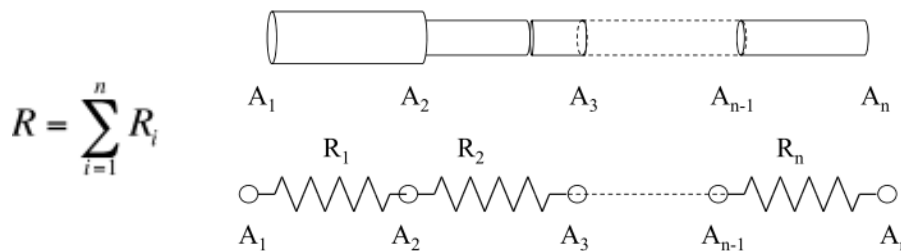
III.3. Associations de résistances

III.3.1. Résistances en série

Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I . La tension aux bornes de la chaîne est la somme des tensions aux bornes de chaque élément telle que :

$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I$$

Elle est analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est :



III.3.2. Résistances en parallèle

Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U = V_1 - V_2$ et parcourues par un courant I . Le courant se sépare dans les n branches en n courants tel que :

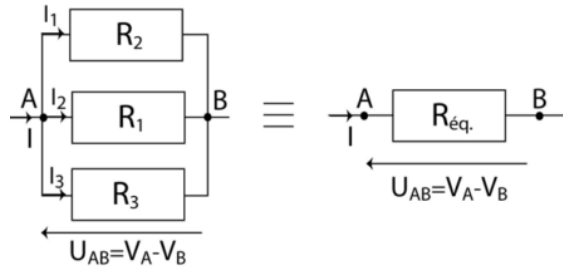
$$I_i = \frac{U}{R_i}$$

Dans chacune des n branches et en vertu de la conservation de la charge électrique, on obtient :

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} = \frac{U}{R}$$

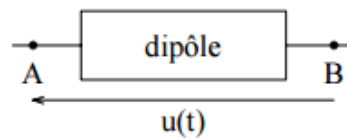
C'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente exprimée par la relation suivante :

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$



III.4. Dipôles électrocinétique

Un dipôle électrocinétique est un ensemble de conducteurs possédant une borne d'entrée et une borne de sortie du courant. Il est caractérisé par deux grandeurs algébriques : l'intensité qui le traverse I et la tension entre ses bornes $U_{AB} = U_A - U_B$.



► Dans un récepteur (Résistance, bobine, condensateur...), les charges s'écoulent des potentiels élevés vers les potentiels faibles : les flèches représentatives de la tension et du courant sont de sens **contraires**.

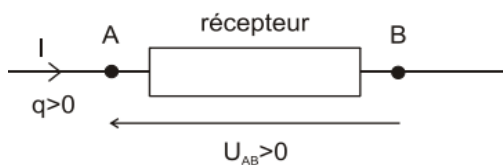
► Dans un générateur (Pile, source de tension...), la situation est inversée et les flèches représentatives du courant et de la tension sont alors de **même sens**.

On distingue deux catégories :

III.4.1. Dipôles passifs

Il reçoit de l'énergie électrique qu'il transforme en une autre forme d'énergie (thermique, mécanique,...). Sa caractéristique passe par l'origine. ($I = 0$ si $U = 0$).

Exemples : conducteur ohmique, diode,



$$U_{AB} = U_A - U_B$$

ddp aux bornes (pôles) du récepteur

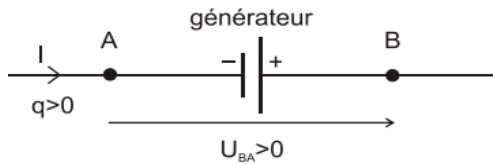
Le courant circule à travers le récepteur du potentiel plus élevé vers le potentiel moins élevé.

III.4.2. Dipôles actifs

Un dipôle actif fournit à l'extérieur de l'énergie thermique et une autre forme d'énergie :

- Un générateur fournira de l'énergie thermique et de l'énergie électrique ;
- Un récepteur comme un moteur fournit de l'énergie thermique et de l'énergie mécanique à partir d'énergie électrique.

La caractéristique de ces dipôles ne passe pas par l'origine.



$$U_{BA} = U_B - U_A$$

ddp aux bornes (pôles) du générateur

Le courant circule à travers le générateur du potentiel moins élevé vers le potentiel plus élevé.

III.4.3. Energie et puissance électrique

► L'énergie mise en jeu par le déplacement d'une charge q se déplaçant sous la différence de potentiel ($V_A - V_B$) est $w = q (V_A - V_B) = i \times t \times (V_A - V_B) = U_{AB} \times i_{AB} \times t$ en Joules (J)

► La puissance reçue par le dipôle est définie par l'énergie reçue par unité de temps par un dipôle à l'instant t , est : $P(t) = u(t)i(t)$. Unité: Watt (W ou $J.s^{-1}$).

- Si $P > 0 \Rightarrow$ Dipôle récepteur. Le dipôle absorbe de l'énergie électrique.
- Si $P < 0 \Rightarrow$ Dipôle générateur. Le dipôle fournit de l'énergie électrique.

Exemple : Effet joule

On appelle effet Joule la dissipation de l'énergie électrique reçue par énergie thermique dans un dipôle.

Le conducteur ohmique dissipe sous forme de chaleur la puissance : $P = R i^2$

IV. Générateurs et récepteurs

Les générateurs (ou sources) sont des appareils qui fournissent de l'énergie électrique. Les récepteurs sont des appareils qui absorbent de l'énergie électrique.

Il existe des générateurs de tension et de courant, il existe des récepteurs de tension et de courant.

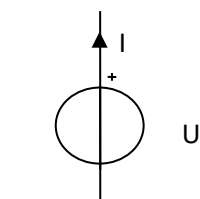
IV. 1. Générateur de tension

Pour les tensions continues, ce sont les batteries d'accumulateurs, les piles, les alimentations stabilisées ou régulées. En régime variable, ce sont les alternateurs, les sorties d'amplificateurs, d'oscillateurs, etc.

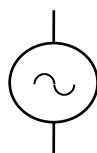
IV.1.1. Générateur de tension idéal

C'est un générateur qui maintient une différence de potentiel fixe, constante entre ses bornes quel que soit le courant débité. On appelle cette d.d.p. la force électromotrice du générateur (f.é.m.) et on la note U ou E (en Volts). Sa caractéristique électrique est une droite horizontale.

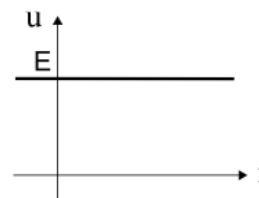
Symbole :



Source de tension idéale continue



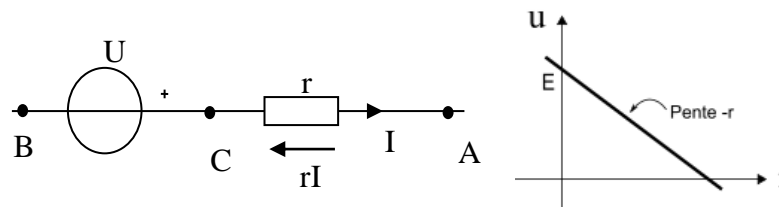
Source de tension idéale alternative



Le courant sort par la borne (+) du générateur. La puissance fournie par le générateur est $P_f = UI$.

IV.1.2. Générateur de tension réel

C'est l'association en série d'un générateur idéal de tension et d'une résistance (dite interne). La caractéristique électrique est une combinaison linéaire de la caractéristique électrique d'un générateur idéal de tension et de celle d'une résistance. C'est donc une droite elle aussi.



La d.d.p. aux bornes du générateur est : $V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = U - r I$.

La puissance totale fournie par le générateur idéal est $P_f = UI$

Les pertes par effet Joule dans la résistance interne sont $P_J = rI^2$.

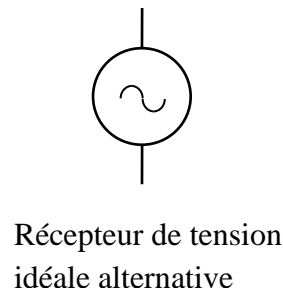
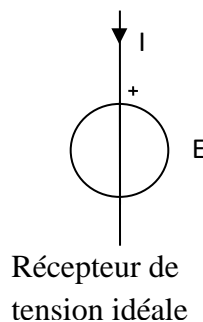
La puissance utilisable dans le circuit extérieur est $P_u = (V_A - V_B) I = (U - r I) I = U I - r I^2$.

IV.2. Récepteur de tension

IV.2.1. Récepteur de tension idéal

C'est un appareil qui absorbe de l'énergie électrique sous tension constante, appelée force contre électromotrice (f.c.é.m.), ceci quel que soit le courant qui le traverse.

Symbole :

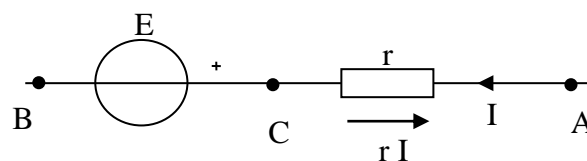


A un instant donné, le récepteur de tension alternative peut être modélisé par un récepteur de tension idéal continu.

Il est important de noter que l'intensité rentre par la borne (+). La puissance absorbée par le récepteur est $P_a = E I$

IV.2.2. Récepteur réel de tension

Ce sont des accumulateurs en charge, des moteurs à courant continu, etc. C'est l'association en série d'un récepteur de tension idéal et d'une résistance interne.



La d.d.p. aux bornes du récepteur est $V_A - V_B = E + r I$.

La puissance absorbée par le récepteur idéal et transformée (en énergie mécanique, par exemple, si l'on modélise un moteur à courant continu) est $P_r = E I$.

Les pertes par effet Joule dans la résistance interne sont : $P_J = rI^2$.

La puissance totale absorbée par le récepteur réel est : $P_a = (V_A - V_B) I = (E + r I) I = E I + r I^2$.

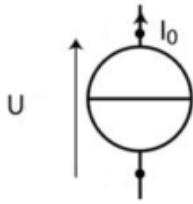
IV.3. Générateur de courant

Ce sont les photodiodes, les photopiles, les inductances transformant l'énergie magnétique stockée en énergie électrocinétique durant un court intervalle de temps.

IV.3.1. Générateur de courant idéal

Un générateur de courant débite un courant I_0 constant quel que soit la d.d.p. à ses bornes et doit posséder une résistance interne infinie. La caractéristique $I = f(U)$ est une droite horizontale.

Lorsque le générateur de courant fonctionne comme générateur dans un circuit la tension est comptée positive et orientée comme le courant.

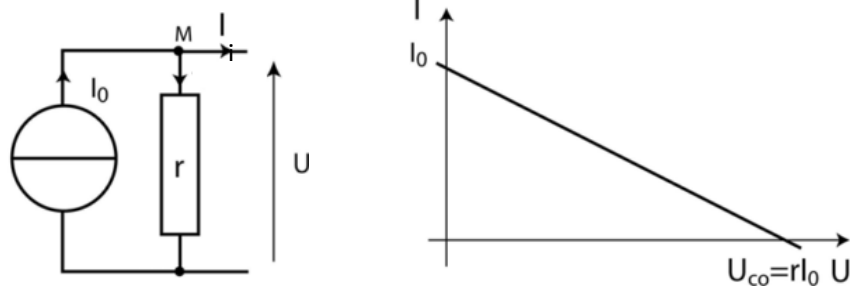


Symbole :

IV.3.2. Générateur réel de courant

C'est l'association, en parallèle, d'un générateur idéal de courant et d'une résistance interne.

La d.d.p. aux bornes du générateur réel est $V_A - V_B = r i$. La caractéristique $I = f(U)$ est une droite ne passant pas par l'origine, de pente négative.



La loi des nœuds appliquée en M donne : $I_0 = I + i$

La puissance totale débitée par le générateur est $P_f = (V_A - V_B) I_0$

Les pertes par effet Joule sont : $P_J = r i^2$

La puissance fournie au circuit extérieur est :

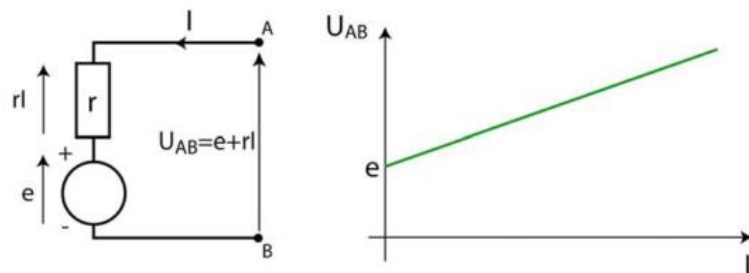
$$P_u = (V_A - V_B) I = (V_A - V_B) (I_0 - i) = (V_A - V_B) I_0 - (V_A - V_B) i, \text{ soit } P_u = P_f - (r i) i = P_f - P_J$$

IV.3.3. Récepteur de courant

Ce sont des dipôles consommant de l'énergie électrique et qui en transforme une partie sous une autre forme d'énergie. Pour ces dipôles actifs récepteurs, l'intensité entre toujours par le pôle (+) et ressort par le pôle (-) à l'inverse d'un dipôle actif générateur. Ils sont de deux types :

- polarisés si leurs bornes sont indépendantes du sens du courant,
- polarisables si leurs bornes sont dépendantes du sens du courant.

Dans les deux cas le modèle équivalent sera :



La caractéristique d'un dipôle actif récepteur est une droite ne passant pas par l'origine de pente positive. L'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées correspond la tension relevée aux bornes du dipôle lorsque celui-ci est en circuit ouvert ($I=0$).

Remarque :

Le symbole que nous utilisons pour le récepteur est différent de celui du générateur pour bien montrer qu'il s'agit d'un récepteur. La f.é.m. du dipôle actif récepteur est notée « e » également pour la distinguer de celle d'un dipôle actif générateur.

Chapitre 2

Techniques d'analyse de circuits électriques

Cette partie présente différentes méthodes d'analyse de circuits. Ces méthodes permettent de simplifier l'analyse de circuits contenant plusieurs éléments.

I. Notion de circuit électrique

♦ Un **circuit électrique** est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés dipôles, reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure fermée, dans lequel le courant électrique peut circuler. Le circuit électrique peut contenir un certain nombre d'appareils aux propriétés différentes:

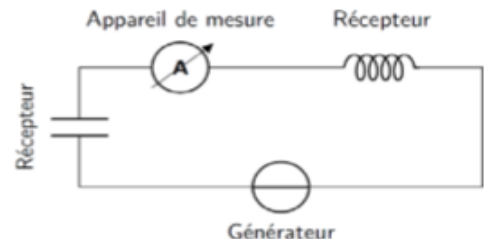
Générateurs : batteries, générateurs de tension, piles. . .

Récepteurs : résistances, bobines, condensateurs. . .

Appareils de mesure : voltmètres, ampèremètres. . .

Appareils de sécurité : disjoncteurs, fusibles. . .

Appareils de manœuvre : inverseurs. . .



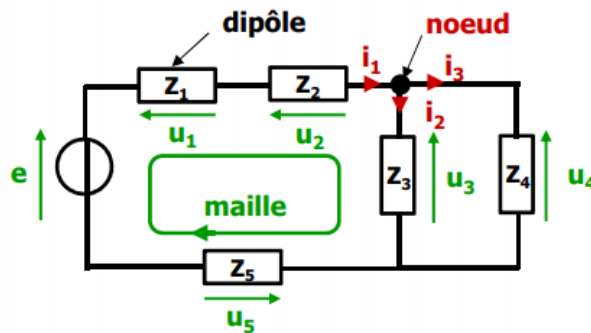
♦ Un **réseau électrique** est constitué d'un ensemble de dipôles linéaires (dont la courbe caractéristique est une droite) ; ceux-ci sont reliés par des fils de résistance négligeable. Le réseau est formé de branches, reliées entre elles par des nœuds, et formant des mailles. L'ensemble est appelé graphe du réseau.

♦ Un **nœud** d'un circuit est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus.

♦ **Dipôle** : Tout ensemble d'éléments électriques situés entre deux nœuds.

♦ **Branche** : Ensemble de dipôles placés en série entre deux nœuds.

♦ **Maille** : Ensemble de branches constituant une boucle fermée. On choisit une orientation sur chaque maille.



II. Lois De Kirchhoff

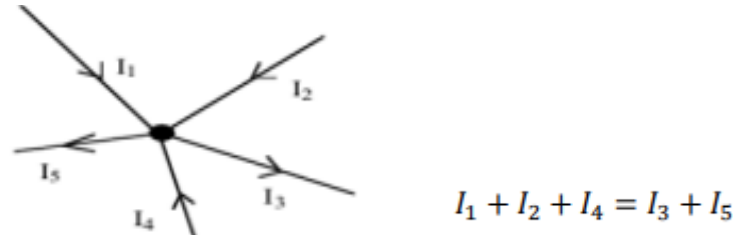
Les lois de l'électrocinétique, connues sous le nom de lois de Kirchhoff, sont en fait de simples lois de conservation (conservation du courant et d'énergie)

II.1. Loi des nœuds (conservation du courant)

Soit un nœud quelconque du circuit sur lequel arrive un certain nombre de fils. Sur chacun de ces fils, circule un courant. En régime permanent, la conservation de la charge électrique se traduit par la conservation du courant : en aucun point du circuit il ne peut y avoir accumulation (ou perte) de charges. Cela signifie donc que l'ensemble des courants entrants compense exactement les courants sortants. Ceci constitue la loi des nœuds ou l'équation aux nœuds :

$$\sum I_{entrants} = \sum I_{sortants}$$

Exemple :



La somme algébrique de toutes les intensités de courant en un nœud doit être nulle.

II.2. Loi des mailles (conservation de l'énergie)

II.2.1. Définition

Soit une maille d'un circuit constituée de n branches. L'équation aux branches pour la k -ième branche s'écrit :

$$U_k = R_k I_k - e_k$$

Où R_k , I_k et e_k sont respectivement la résistance totale, le courant et la f.é.m. contenues dans cette branche. La conservation de l'énergie pour cette maille s'exprime par le fait que, partant du nœud 1 et revenant à ce nœud, on retrouve le même potentiel, c'est-à-dire :

$$V_1 - V_1 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = U_1 + \dots + U_n = 0$$

La loi des mailles (ou équation de maille) s'exprime tout simplement par :

$$\sum_k (R_k I_k - e_k) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sum \pm u_k = 0$$

La somme algébrique de toutes les différences de potentiel le long d'une maille est nulle.

Règles d'application :

- Un sens de rotation arbitraire de la maille est fixé ;
- On met un signe (+) devant les tensions dont les flèches suivent le sens de rotation, et un signe (-) si les flèches sont en sens inverse.

Exemple :

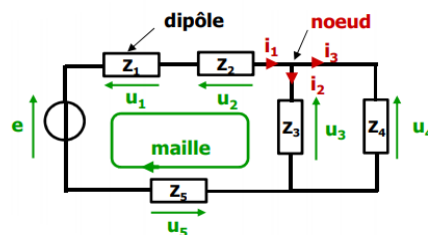
Loi des mailles pour la maille orientée (ADCBA):

$$-u_4 + u_3 - u_2 + u_1 = 0$$

Soit : $u_{DA} + u_{CD} + u_{BC} + u_{AB} = 0$

Deuxième méthode :

$$\sum \pm e_k = \sum \pm Z_k i_k$$



$$e = Z_1 i_1 + Z_2 i_1 + Z_3 i_3 + Z_5 i_1$$

Règles d'application :

- Un sens de rotation arbitraire de la maille est fixé ;
- On met un signe (+) devant les tensions e_k dont les flèches suivent le sens de rotation, et un signe (-) si les flèches sont en sens inverse ;
- On met un signe (+) devant les $Z_k i_k$ quand le sens du courant coïncide avec le sens de rotation arbitraire de la maille et un signe (-) dans le cas contraire.

II.2.2. Résolution d'un circuit et méthode de travail

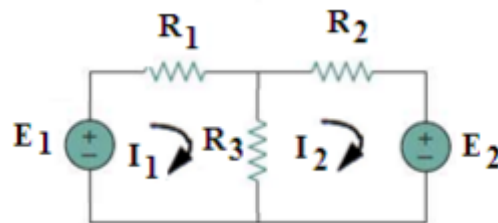
Les problèmes posés comporteront un certain nombre de données et d'inconnues. Connaître un circuit, c'est disposer de tous les paramètres des éléments du circuit et des intensités des courants qui les traversent.

Méthode de travail

1. Tracer le schéma du circuit en y représentant tous les éléments présents et les fils qui les relient ;
2. Sur ce schéma :
 - Attribuer une lettre à chaque noeud, puis compter le nombre de noeuds N du circuit ;
 - Compter le nombre de branches B , puis indiquer les courants qui passent dans chacune d'elles sans oublier de leur donner arbitrairement un sens ;
3. Appliquer la première loi de Kirchhoff aux nœuds, (on obtient $N-1$ équations indépendantes) ;
4. Appliquer la deuxième loi de Kirchhoff pour les mailles \Rightarrow Il faut $B - (N - 1)$ équations de mailles ;
5. Résoudre le système d'équations et en tirer les réponses demandées ;
6. Vérifier si les résultats obtenus sont plausibles : par exemple, la somme des différences de potentiel au long d'une maille doit être nulle et que la somme des courants doit s'annuler en chaque nœud.

II.2.3. Exemples

1. Calculer les courants qui circulent dans chaque branche du circuit suivant en utilisant la méthode des mailles indépendantes.



Solution :

$$n = 2 \text{ et } b = 3 \Rightarrow m = b - (n - 1) = 2 \text{ équations relatives aux mailles}$$

$$\text{Maille 1 : } E_1 = R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2)$$

$$\text{Maille 2 : } -E_2 = R_2 I_2 + R_3 (I_2 - I_1)$$

On peut les mettre sous forme d'une matrice :

$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_3)I_1 - R_3 I_2 \\ -E_2 = -R_3 I_1 + (R_3 + R_2)I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix}$$

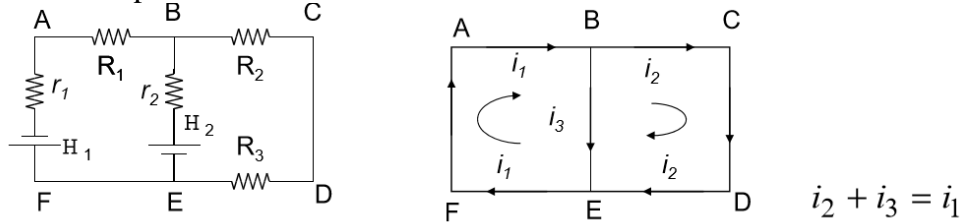
$$\text{D'où : } I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ et } I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\text{Avec } \Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} = (R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_1 & -R_3 \\ -E_2 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} = E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & E_1 \\ -R_3 & -E_2 \end{vmatrix} = -E_2(R_1 + R_3) + E_1 R_3$$

2. Loi des mailles pour le circuit ci-contre :



On choisit un sens arbitraire de parcours de la maille

Maille ABEFA: $-R_1 i_1 - r_2 i_3 - H_2 - H_1 - r_1 i_1 = 0$

Maille BCDEB: $-R_2 i_2 - R_3 i_2 + H_2 + r_2 i_3 = 0$

A résoudre:
$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ -r_1 i_1 - H_1 - r_2 i_3 - H_2 - R_1 i_1 = 0 \\ -R_2 i_2 - R_3 i_2 + r_2 i_3 + H_2 = 0 \end{cases}$$

III. Courants fictifs de mailles

Principe : Le principe est le suivant : on imagine que chacune des mailles d'un réseau est parcourue par un courant qui est précisément le **courant fictif de maille**. Ces courants fictifs parcourent tous des mailles forcément indépendantes et une fois connus, on peut déterminer les courants réels circulant dans les branches.

Exemple :

On a ici trois mailles indépendantes. Nous noterons j_1, j_2, j_3 les courants fictifs de maille, parcourant toutes les mailles dans le même sens.

On écrit maintenant la loi de Kirchhoff pour chaque maille :

- maille (1) : $R_5 (j_1 - j_2) + R_2 (j_1 - j_3) + r_1 j_1 + e_1 = 0$
- maille (2) : $R_3 j_2 + R_4 (j_2 - j_3) + R_5 (j_2 - j_1) = 0$
- maille (3) : $R_2 (j_3 - j_1) + R_4 (j_3 - j_2) + R_3 j_3 - e = 0$

Cela s'arrange sous la forme matricielle :

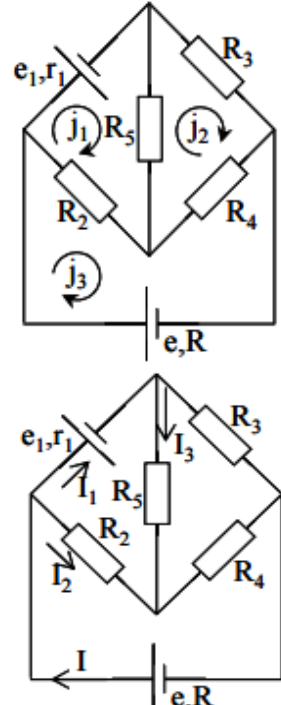
$$\begin{pmatrix} r_1 + R_2 + R_5 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_4 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite les intensités fictives j_1, j_2 et j_3 .

Ceci étant fait, on introduit les courants réels tels que :

$$\begin{aligned} I &= j_3, \\ I_1 &= j_1, \\ I_2 &= -j_1 + j_3, \\ I_3 &= j_1 - j_2. \end{aligned}$$

L'avantage de la méthode est certain lorsque l'on a un réseau très complexe. L'écriture de la matrice est immédiate. Par inversion, on peut en déduire la matrice des courants fictifs de maille et,

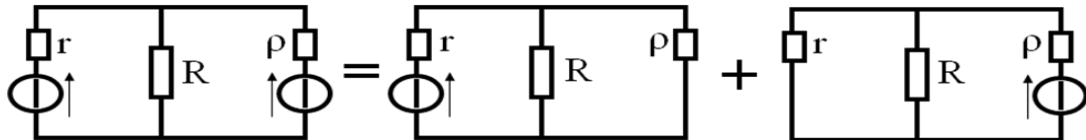


par suite, déterminer les seuls courants fictifs intéressant pour ce que l'on cherche. On en déduit alors les courants de branches.

IV. Théorème de superposition

Principe : Soit un circuit linéaire comportant plusieurs sources autonomes (indépendantes) de tension et de courant. Le courant dans une branche (ou la tension aux bornes d'une branche) est égal à **la somme algébrique des courants (ou des tensions) produits séparément par chaque source autonome, toutes les autres sources autonomes étant éteintes.**

Si le circuit contient des générateurs de courant, le principe reste valable si les sources sont indépendantes : on effectue les calculs avec chaque source prise séparément en remplaçant les générateurs de courant par des circuits ouverts.



Remarque : Un générateur de courant ou de tension est dit "source autonome" si sa f.e.m. ou son courant électromoteur sont indépendants des autres grandeurs du circuit. Dans le cas contraire, la source est dite **liée**.

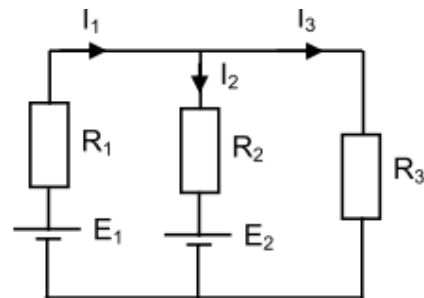
Exemples :

1. Soit le circuit suivant, on se propose de déterminer les intensités des courants dans les trois branches par la méthode de superposition.

Avec :

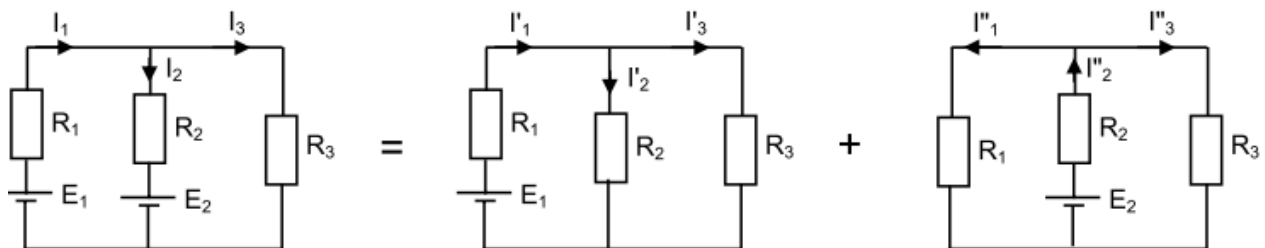
$$R_1 = 2 \, \Omega ; R_2 = 5 \, \Omega ; R_3 = 10 \, \Omega$$

$$E_1 = 20 \, \text{V} ; E_2 = 70 \, \text{V}$$



Solution :

D'après le théorème de superposition, l'état initial est équivalent à la superposition des états distincts.



Les courants réels I_1 ; I_2 et I_3 sont données par :

$$\begin{cases} I_1 = I'_1 - I''_1 \\ I_2 = I'_2 - I''_2 \\ I_3 = I'_3 + I''_3 \end{cases} \Rightarrow \text{Il faut donc calculer : } I'_1 ; I'_2 ; I'_3 \text{ et } I''_1 ; I''_2 ; I''_3$$

a) Calcul de I'_1 ; I'_2 et I'_3 dans le premier cas :

$$\begin{cases} I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{20}{2 + \frac{5 \times 10}{15}} = 3,75 \text{ A} \\ I_2' = \frac{R_3}{R_1 + R_2} \cdot I_1' = 3,75 \cdot \frac{10}{15} = 2,5 \text{ A} \\ I_3' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot I_1' = 3,75 \cdot \frac{5}{15} = 1,25 \text{ A} \end{cases}$$

b) Calcul de I_1'' ; I_2'' et I_3'' dans le deuxième état :

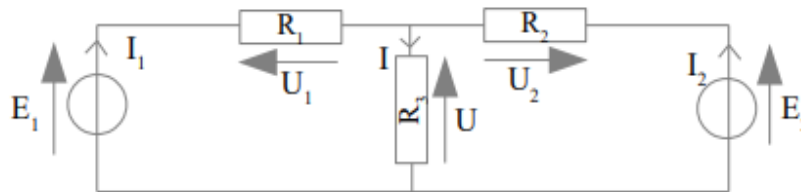
$$\begin{cases} I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{70}{5 + \frac{2 \times 10}{12}} = 10,5 \text{ A} \\ I_1'' = \frac{R_3}{R_1 + R_2} \cdot I_2'' = 10,5 \cdot \frac{10}{12} = 8,75 \text{ A} \\ I_3'' = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot I_2'' = 10,5 \cdot \frac{2}{12} = 1,75 \text{ A} \end{cases}$$

c) Calcul de I_1 ; I_2 et I_3 dans l'état réel :

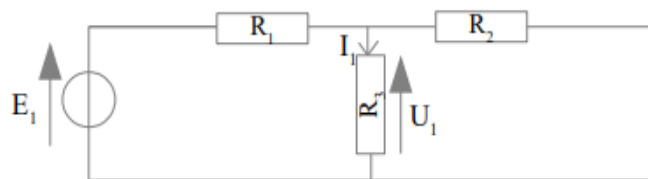
$$\begin{cases} I_1 = I_1' - I_1'' = 3,75 - 8,75 = -5 \text{ A} \\ I_2 = I_2' - I_2'' = 10,5 - 2,5 = 8 \text{ A} \\ I_3 = I_3' + I_3'' = 1,25 + 1,75 = 3 \text{ A} \end{cases}$$

Remarque : I_1 est négatif, donc son vrai sens est l'inverse du sens choisi.

2. Déterminer U par la méthode de superposition

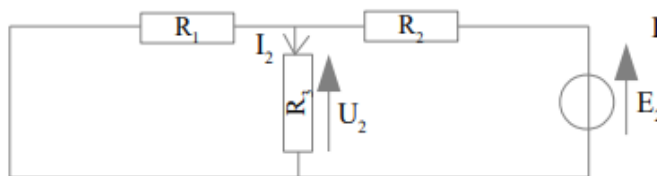


1^{ère} étape : On garde E_1 allumée mais on éteint E_2 .



Détermination de U_1 par un pont diviseur de tension.
(Calcul de R_{eq} entre R_3 et R_2)

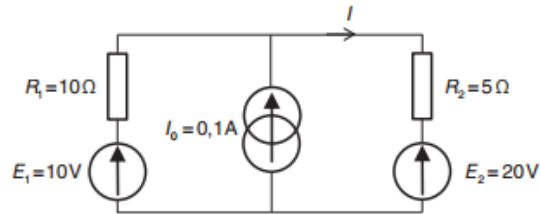
2^{ème} étape : On garde E_2 allumée mais on éteint E_1 .



Détermination de U_2 par un pont diviseur de tension.

Donc: $U = U_1 + U_2$

3. Dans le circuit de la figure ci-dessus, on cherche à calculer le courant I dans la résistance R_2 .



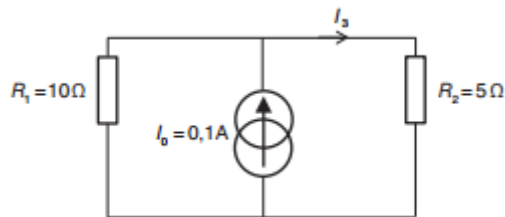
D'après le principe de superposition, ce courant est la somme de trois courants I_1 , I_2 et I_3 correspondant respectivement aux contributions de chaque générateur E_1 , E_2 et I_0 . On calcule alors successivement chaque courant en ne laissant subsister, à chaque fois, qu'un seul des trois générateurs.

- Avec E_1 seul, on a : $I_1 = E_1/(R_1+R_2) = 10/15 = 0.66$ A.



- Pour calculer I_2 , il suffit de court-circuiter E_1 , de laisser I_0 éteinte (en circuit ouvert) et de « rallumer » E_2 pour obtenir : $I_2 = -E_2/(R_1+R_2) = -20/15 = -1.33$ A.
- Pour le calcul de I_3 , le circuit est un simple pont diviseur de courant :

$$I_3 = R_1/(R_1+R_2) I_0 = 0.066 \text{ A.}$$



- Au final, on fait la somme algébrique des trois courants calculés indépendamment :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0.66 - 1.33 + 0.066 = -0.6 \text{ A.}$$

V. Théorème de Thévenin

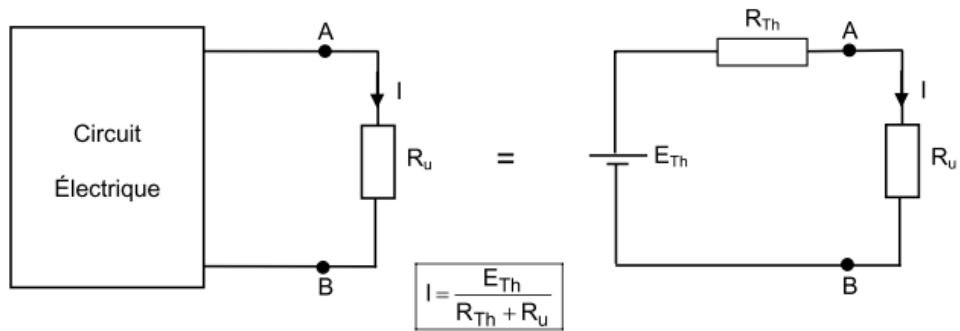
Les trois méthodes précédentes permettent de calculer tous les courants dans le réseau alors que ceci n'est pas toujours indispensable. Souvent on est appelé à connaître le courant dans une seule branche, pour cette raison on se propose de chercher une méthode pratique appelée **théorème de Thévenin**.

Principe : En régime continu, tout réseau linéaire dipolaire qui comporte une ou plusieurs sources de courant ou de tension est équivalent à un générateur de tension dit de Thévenin, de force électromotrice E_T et de résistance interne R_T .

► La résistance R_{Th} (ou R_T) est égale à la résistance équivalente du réseau mesurée entre A et B lorsque tous ses générateurs sont éteints (inactives).

- Annuler une source de tension consiste à la remplacer par un court-circuit;
- Annuler une source de courant consiste à la remplacer par un circuit ouvert.

► La tension E_{Th} (ou E_T) est égale à la tension en circuit ouvert (tension à vide) du réseau entre A et B.

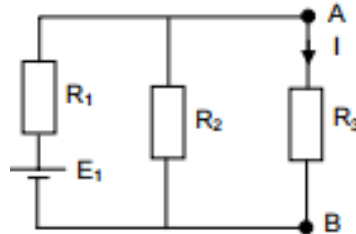


Le but est de remplacer un circuit complexe par un circuit composé d'une source de tension et une résistance.

Exemples :

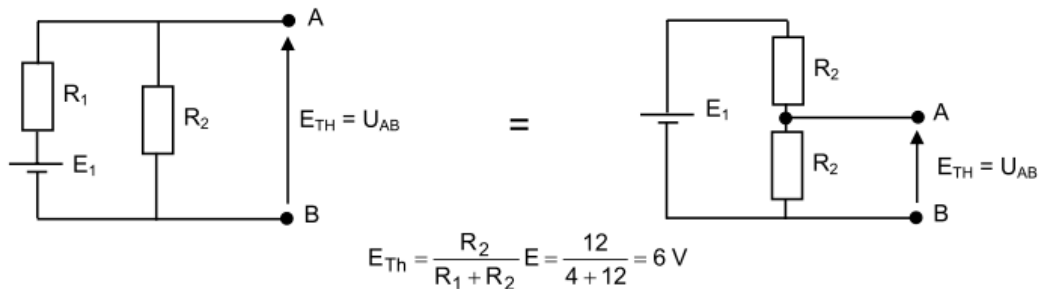
1. On considère le circuit électrique donné par la figure ci-dessus. Calculer le courant I qui traverse la résistance R_3 en appliquant le théorème de Thevenin.

On donne : $E_1 = 8 \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $R_3 = 9 \Omega$.



- a. Calcul de E_{Th}

On débranche la résistance R_3 , la configuration sera donc :

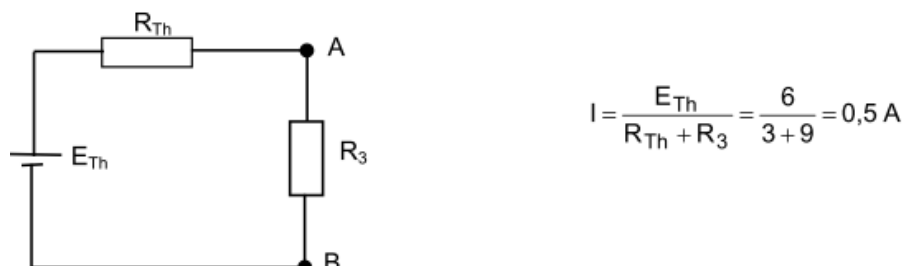


- b. Calcul de R_{Th}

R_3 étant toujours débranchée, on court-circuite E , la configuration sera donc :

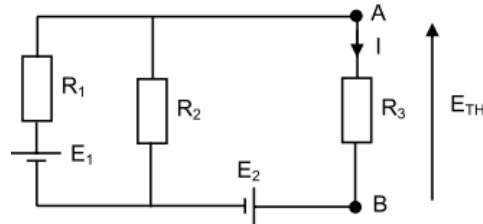


- c. Calcul de I



2. Appliquons le théorème de Thevenin pour calculer le courant I du circuit suivant :

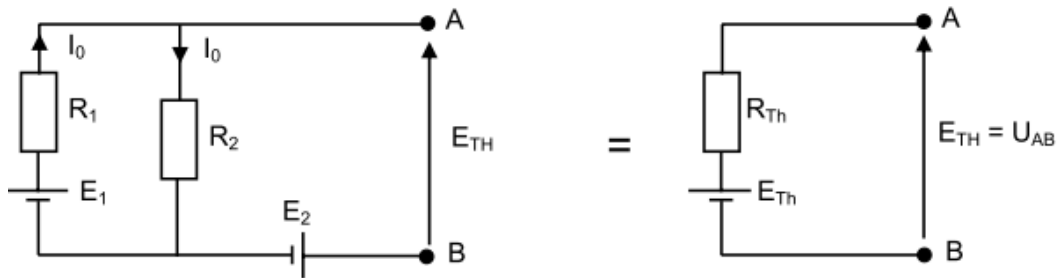
On donne : $E_1 = 20 \text{ V}$; $E_2 = 70 \text{ V}$; $R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$



Solution :

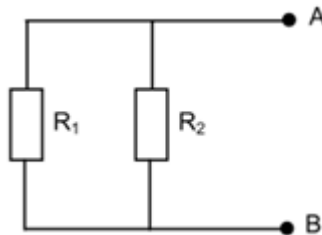
- Supprimons la résistance dont nous voulons déterminer le courant, soit R_3 ,
- Calculons les grandeurs caractéristiques du générateur équivalent de Thevenin,

a. Déterminons E_{Th} :



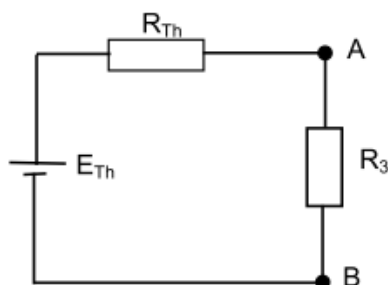
$$\begin{cases} I_0 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{20}{10 + 2} = \frac{5}{3} \text{ A} \\ E_{Th} = R_3 \cdot I_0 - E_2 = 10 \cdot \frac{5}{3} - 70 = -\frac{160}{3} \text{ V} \end{cases}$$

b. Déterminons R_{Th}



$$R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \times 10}{12} = \frac{5}{3} \Omega$$

c. Calcul de I



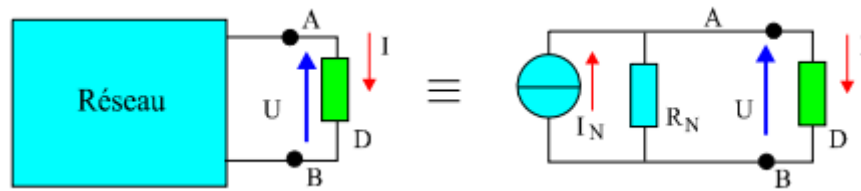
$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_3} = \frac{-\frac{160}{3}}{\frac{5}{3} + 5} = -8 \text{ A}$$

Remarque : Le signe (-) veut dire que le courant dans la branche 3 circule dans le sens inverse.

VI. Théorème de Norton

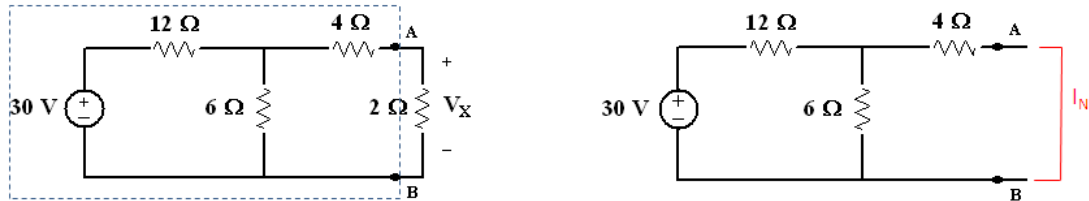
Une autre méthode pour calculer l'intensité de courant dans une branche déterminée d'un réseau, est de modéliser le reste du réseau à l'aide du théorème de Norton. En régime continu, tout réseau linéaire dipolaire, vu entre deux bornes A et B, est équivalent à un générateur de courant dit de Norton, de courant I_N et de résistance interne R_N égale à la résistance interne du générateur de Thévenin R_T .

- I_N est le courant de court-circuit entre A et B.
- R_N est la résistance mesurée entre A et B quand D est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont remplacés par leurs résistances internes.

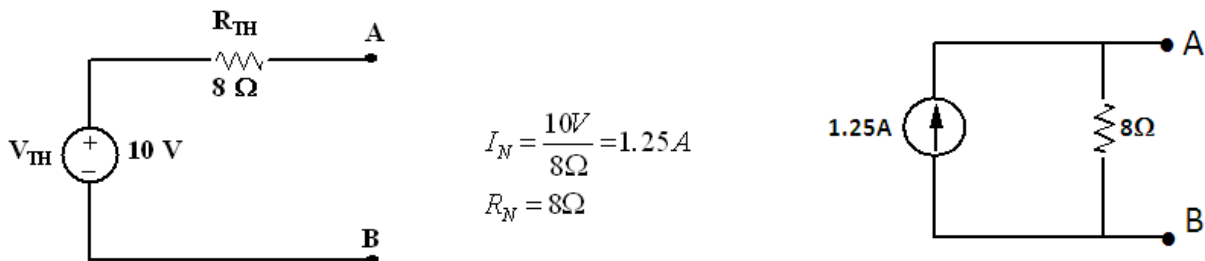


Exemple :

Considérer le circuit suivant avec et sans charge :



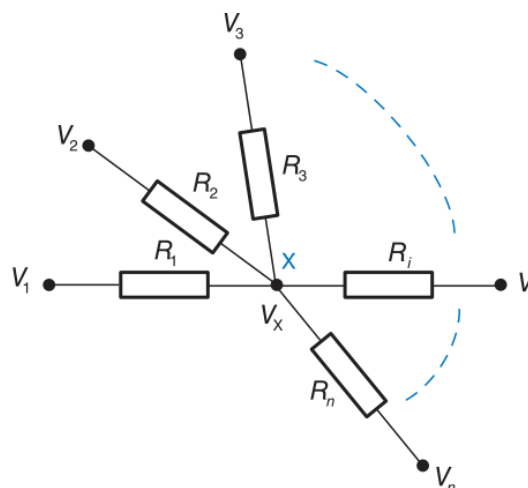
I_N et R_N par l'équivalent de Thévenin, par conséquent :



VII. Théorème de Millman

Le théorème de Millman permet d'exprimer le potentiel en un nœud quelconque d'un réseau en fonction des potentiels aux nœuds voisins. L'avantage réside dans le fait qu'on exprime des relations sans courant, uniquement à l'aide de tensions. En utilisant à la fois le théorème de Millman et la loi des mailles, on dispose de deux outils qui permettent de résoudre pratiquement n'importe quel problème d'électrocinétique.

Considérons un nœud quelconque d'un circuit. Ce nœud est relié à n points du circuit par l'intermédiaire de n branches possédant chacune une résistance R_i . Soient V_i les tensions aux n points voisins du nœud X.



Le potentiel V_X s'exprime en fonction des potentiels aux nœuds voisins de la manière suivante :

$$V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{V_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

On peut définir également la conductance d'un dipôle résistif par l'inverse de sa résistance. Soit :

$$G_i = \frac{1}{R_i} \text{ unité : siemens (S).}$$

Ainsi, le théorème de **Millman** peut aussi s'écrire :

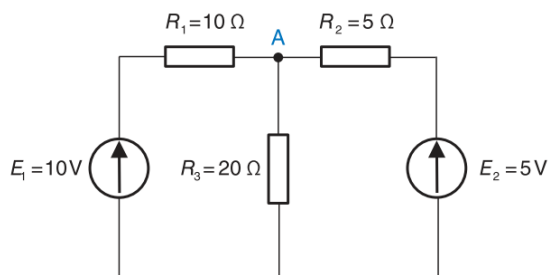
$$V_X = \frac{\sum_{i=1}^n G_i V_i}{\sum_{i=1}^n G_i}.$$

Ce qui revient à dire que le potentiel en un nœud quelconque d'un circuit est la moyenne des potentiels aux nœuds voisins, pondérée par les conductances des différentes branches.

Exemple :

On considère le circuit de la figure ci-dessus dans lequel on cherche à calculer le potentiel au point A. L'application du théorème de Millman en ce point est immédiate.

Attention : même si la résistance R_3 est reliée à la masse et qu'elle ne correspond à aucun terme au numérateur, elle est néanmoins présente au dénominateur.



$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{0}{R_3} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{10}{10} + \frac{5}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 5,7 \text{ V}$$

Annexe 1.

Champ scalaire et champ vectoriel & Opérateurs

I.1. Champ scalaire

Un champ scalaire est une fonction à plusieurs variables qui, à chaque point M de l'espace fait correspondre un scalaire $f(x,y,z)$.

- Exemples : Température $T(x,y,z)$, densité $\rho(x,y,z)$, etc.
- Surface de niveau : Une surface de niveau est une surface où la fonction scalaire à la même valeur.
- En pratique, si on échantillonne les points de l'espace, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 4 colonnes $|x|y|z|f|$.
- Si à tout point d'un plan on associe un nombre alors on définit une surface. Par exemple, topographie d'un terrain avec l'altitude de chaque point.

I.2. Champ vectoriel

Un champ vectoriel est une fonction vectorielle à plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace fait correspondre un vecteur $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = F_x(x,y,z) \vec{e}_x + F_y(x,y,z) \vec{e}_y + F_z(x,y,z) \vec{e}_z$

- Exemples : Champ électrique \vec{E} , champ des vitesses \vec{v} , etc.
- En pratique, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 6 colonnes $|x|y|z|F_x|F_y|F_z|$
- F_x ne dépend pas uniquement de x, mais dépend de x, y et z.
- Ligne de champ : Une ligne de champ est une courbe tangente au champ vectoriel.
- Tube de champ : C'est un ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée.
- Champ uniforme : C'est un champ où tout les vecteurs ont le même module, même direction et même sens.

Exemple : Champ de pesanteur (ligne de champ des droites parallèles).

- Champ radial : C'est un champ dans lequel les vecteurs passent par un point fixe O. Dans ce cas les lignes de champ sont des droites passant par O.

II. Opérateurs de l'analyse vectorielle

Il existe trois opérateurs différentiels principaux appelés gradient, divergence, rotationnel, qui généralisent la notion de **dérivée**. Ces trois opérateurs peuvent s'exprimer avec l'**opérateur nabla** $\vec{\nabla}$. Son expression en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \vec{\nabla} \cdot f \\ \text{div}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\ \text{rot}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \end{aligned} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{bmatrix}$$

II.1. Opérateur Gradient : $\vec{\nabla} \cdot f(x,y,z)$

- s'applique à un champ de scalaires
- donne un champ vectoriel

Définition : Soit une fonction $f(x, y, z)$ c'est à dire une fonction des trois variables cartésiennes x, y et z .

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Dans la pratique : le gradient d'un champ scalaire en un point M est un vecteur dirigé dans la direction dans laquelle f possède la pente la plus forte et dont le module est égal à la pente dans cette direction.

Conséquences :

- plus les lignes sont serrées, plus le module du gradient est grand.
- le gradient est perpendiculaire à la surface $f(x,y,z) = \text{cste}$.
- le vecteur pointe des valeurs basses vers les valeurs plus hautes

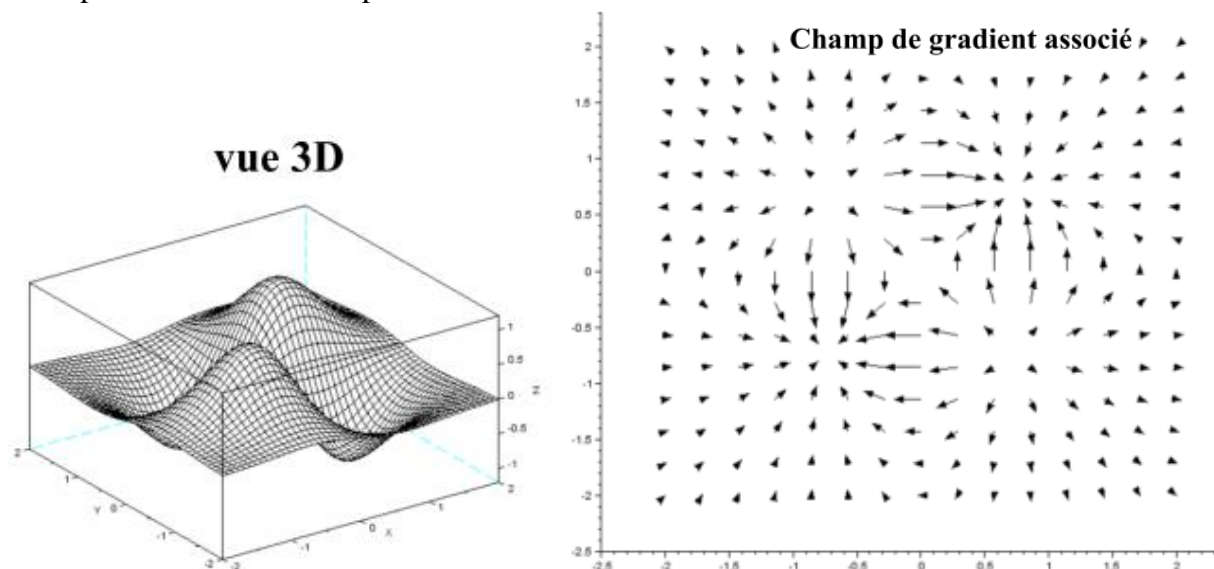
Propriété :

Soient $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ le vecteur position et $d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Exemple :

Champ de scalaires f défini par : $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$



Les vecteurs semblent « s'éloigner » des minima et semblent « attirés » par les maxima.

II.2. Opérateur Divergence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ scalaire

Définition :

Soit un vecteur $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ où les composantes sont des fonctions des variables x, y, z.

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

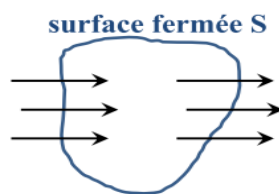
- En coordonnées sphériques :

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \cdot a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

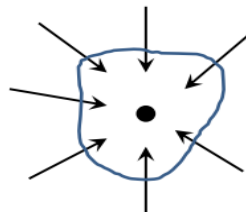
Propriété :

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \Delta f$$

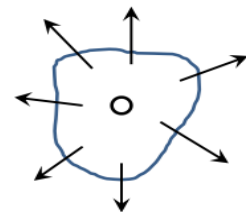
Exemples :



$$\text{div}(\vec{F}) = 0$$



$$\text{div}(\vec{F}) < 0$$



$$\text{div}(\vec{F}) > 0$$

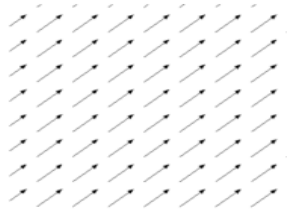
II.3. Opérateur Rotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ de vecteurs

Définition :

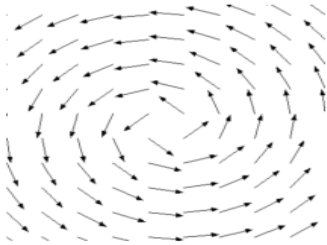
Soit un vecteur $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ où les composantes sont des fonctions des variables x, y, z.

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$



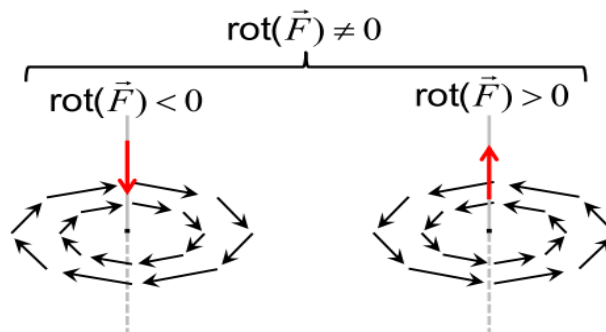
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

- champ « irrotationnel »



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} \neq \vec{0}$$

- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut



- En coordonnées cylindriques :

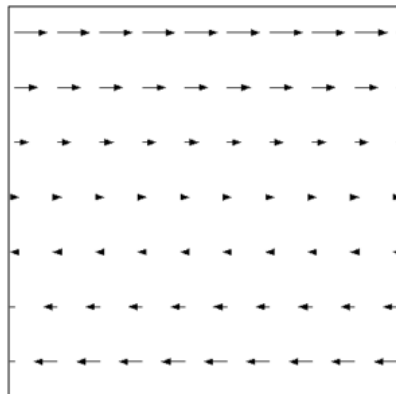
$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r a_\varphi) \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \vec{k}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\theta) \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (a_\varphi \sin \theta) \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Exemples :

$$\vec{F}(y) = y \vec{e}_x = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{div} \vec{F} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = -\vec{e}_z$$

Remarque : pour avoir un rotationnel non nul, il faut avoir des termes croisés entre les variables et les directions.

II.4. Opérateur Laplacien : $\Delta f(x, y, z)$ $\Delta \vec{F}(x, y, z)$

- peut s'appliquer à un champ de scalaires ou vectoriel
- donne un champ du même type.

Définition :

Soit une fonction $f(x, y, z)$ c'est à dire une fonction de trois variables indépendantes x, y et z .

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Propriété :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad} f}) = \Delta f$$

Exemples :

- l'équation de Laplace pour le potentiel V : $\Delta V = 0$
- l'équation de Poisson pour le potentiel V : $\Delta V = -\rho / \epsilon_0$

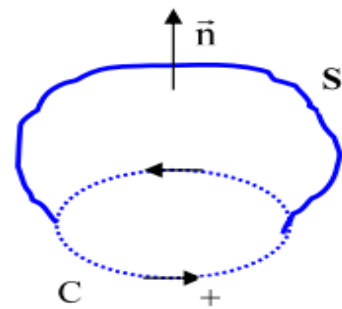
Annexe 2.

Flux et circulation d'un champ de vecteurs

III. Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

III.1. Orientation d'une surface

- Si la surface S est fermée, elle est orientée de l'intérieur vers l'extérieur.
- Si la surface est non fermée et s'appuie sur une courbe C fermée : On choisit un sens positif sur C ; par la règle du tire-bouchon, on définit le sens positif de la normale à la surface S .



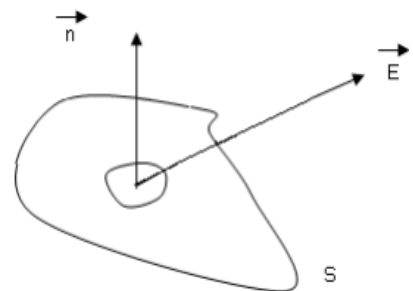
III.2. Flux d'un champ

Considérons un élément de surface dS traversé par un champ \vec{E} . Par définition le flux élémentaire est donné par :

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

A travers la surface entière S :

$$\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E \cdot dS \cdot \cos \alpha$$



Par convention le flux est positif s'il quitte une surface fermée

- S est une surface orientée)

- Une surface fermée S entoure un volume V (on ajoute un rond sur l'intégrale double \oiint)

Exemples :

- l'intensité du courant électrique I est le flux du courant volumique J à travers une surface S
- l'angle solide Ω est le flux de e_r/r^2 à travers la surface interceptée S' .

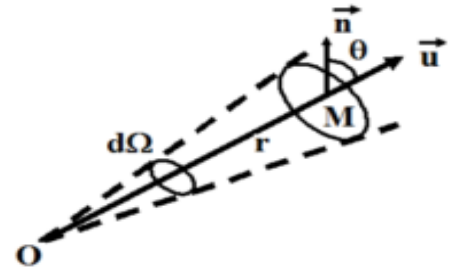
III.3. Angle solide

Par définition l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit à partir d'un point O, un élément de surface $d\vec{S}$ placé en M est égal au flux de vecteur \vec{u}/r^2 à travers cet élément de surface :

$$d\Omega = \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot d\vec{S} \text{ où } \vec{r} = \overrightarrow{OM} \text{ et } \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Par extension l'angle solide sous lequel on voit une surface quelconque est égal au flux du vecteur \vec{u}/r^2 à travers cette surface.

$$\Omega = \int_S d\Omega = \int_S \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \int_S \frac{dS \cos \theta}{r^2}; \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$



III.4. Théorème d'Ostrogradsky

Nous avons défini la divergence d'un champ à partir de l'opérateur nabla. Cette définition n'est pas intrinsèque, puisqu'elle se fait à partir des coordonnées cartésiennes x, y, z. La définition *intrinsèque de la divergence* utilise la notion de flux et s'énonce ainsi :

Soit dV un volume infinitésimal entourant le point M ; orientons la surface infinitésimale dS qui délimite dV vers l'extérieur (surface fermée). Alors le flux du champ E à travers dS vaut :

$$\iint_{S \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \cdot dV$$

S est la surface fermée contenant le volume V ; $d\vec{S}$ est orienté vers l'extérieur de la surface fermée S . $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ est le **flux du champ de vecteurs \vec{E}** .

Ainsi la divergence mesure-t-elle la quantité de champ qui sort localement (diverge) du point M.

Ce théorème est couramment utilisé, il permet de passer d'une intégrale surfacique à une intégrale volumique.

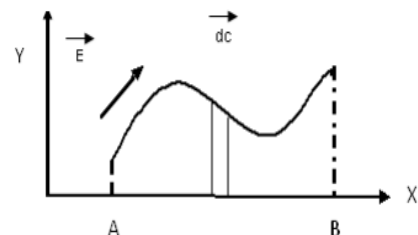
IV. Circulation d'un vecteur sur une courbe C

IV.1. Définition

Par définition, la circulation d'un champ de vecteur le long d'un chemin délimité par deux points A et B est déterminée par : $\overrightarrow{dC} = \vec{E} \cdot d\vec{c}$. Ce chemin est découpé en une infinité de vecteurs infinitésimaux $d\vec{c}$.

La circulation de A vers B est donné par :

$$\int_{C_A}^{C_B} dC = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{c}$$



On dit que le champ vecteur \vec{E} dérive du potentiel scalaire f si en tout point M du domaine la relation $\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} f(M)$ est vérifiée :

$$C_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{c} = \overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot d\vec{c} = df = f(A) - f(B)$$

Alors, la circulation du vecteur \vec{E} est indépendante du chemin choisi, puisqu'elle ne dépend que du point initial et du point final.

Exemple : Travail d'une force $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

IV.2. Théorème de Stokes

La circulation d'une grandeur vectorielle \vec{E} sur un parcours fermé C est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot } E}$ à travers une surface quelconque s'appuyant sur C.

$$\oint_{C \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } E} \cdot d\vec{S}$$

Ce théorème est couramment utilisé, il permet de passer d'une intégrale simple à une intégrale surfacique.