NM04

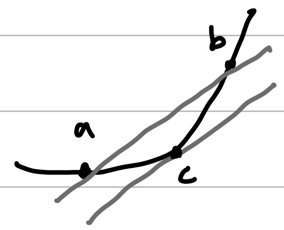
root finding

— Mean-Value 용어

[a, b] 에서 continuous 한 f 가 있다면,

(a, b) 에 다음을 만족하는 c가 최소한 1개 존재한다.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

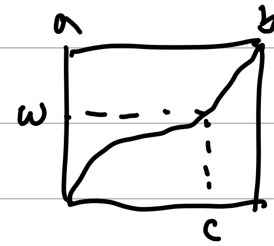


— Intermediate Value 용어

[a, b] 에서 continuous 한 f 가 있다면,

$f(a)$와 $f(b)$ 사이의 어떤 값 w에 대해서

$f(c) = w$ 인 (a, b) 사이의 c가 최소 하나 씩 존재한다.



Bisection Method

$f(a)f(b) < 0$ 이면 값이 0인 지점이 반드시 존재.

$c = \frac{a+b}{2}$ 지점에서 $f(c)f(b) > 0$ 이면 c와 b 에 해가 없음. → (a, c)

< 0 이면 c와 b에 해가 있음. → (c, b)

Stopping : tolerance ε을 정해서

$$|a_n - b_n| < \varepsilon$$

$$\frac{|a_n - b_n|}{|a_n|} < \varepsilon$$

$$|f(a_n)| < \varepsilon$$ 을 만족하면 중단.

- error bound

$c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$, $\alpha \in [a_0, b_0]$ α는 실제 정답.

$\underbrace{|\alpha - c_0|}_{\text{중점과 정답의 거리 (즉, 오차)}} < \underbrace{(b_1 - a_1)}_{\text{다음 시도의 구간}} = \frac{b_0 - a_0}{2}$

$b_1 \downarrow b_0$, $a_1 \downarrow c_0$

⋮

$|\alpha - c_n| < (b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, \cdots$

- Convergence

$|\alpha - c_n| < (b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$

$n \to \infty$ 보내면 error $|\alpha - c_n|$ 가 0에 수렴.

- Convergence rate

$e_{n+1} \approx C e_n^p$

$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n^1$ → linear convergence ($p \approx 1$) 높을수록 빠름.

bisection : $p = 1$ linear

newton's : $p = 2$ quadratic

secant : $p = 1.618\ldots$ super linear

시험 absolute error $< 10^{-6}$ iteration?

$f(x)=x^3-x^2-1$ $[1,2]$에 근이 1개 밖 없을 때

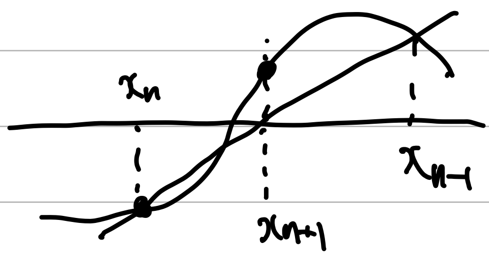
$$|\alpha - c_n| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{2-1}{2^{n+1}} < 10^{-6}$$ ← 양쪽에 log

$$-(n+1)\log 2 < -6$$

$$-(n+1) < -\frac{6}{\log 2}, \quad n+1 > \frac{6}{\log 2}, \quad n > \frac{6}{\log 2} - 1 \approx 19$$

알고리즘 코드 빈칸채우기문제 시험

$\boxed{\text{Secant Method}}$ 증명문제 시험 순서 유의



given 2 initial guesses

secant line $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 대입

$x = x_{n+1}$, $y=0$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ to $(x_n, f(x_n))$

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{y}} - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(\underset{x_{n+1}}{\underset{\shortparallel}{x}} - x_{n-1})$$ ← 직선이 $(x_n, f(x_n))$ 을 지난다고 하면 교점과 같음.

$$-f(x_{n-1}) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_{n-1})$$

$$(x_{n+1} - x_{n-1}) = -f(x_{n-1})\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1})\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

$(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

$x = x_{n+1}$, $y = 0$ 인 점을 지남.

$$0 - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n)$$

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} x_{n+1} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} x_n - f(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

- example

$x_0 = 1$ $\quad\quad x^3 - x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 2$

$$x_2 = 2 - \frac{2-1}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 2 - \frac{1}{3-(-1)} \times 3 = \frac{5}{4}$$

⋮