Palabras y autómatas

Clase 01

IIC 2223

Prof. Dante Pinto

Outline

Outline

Palabras

Autómatas

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- Un **alfabeto** Σ es un conjunto finito.
- Un elemento de Σ lo llamaremos una **letra** o **símbolo**.
- Una **palabra** o **string** sobre Σ es una secuencia finita de letras en Σ.

Ejemplo

- $\Sigma = \{ a, b, c \}$
- Palabras sobre Σ:

$$aaaaabb \ , \ bcaabab \ , \ a \ , \ bbbbbb \ , \ \ldots$$

¿Cuál es el alfabeto preferido en computación?

Alfabetos, letras y palabras

Más definiciones

- El **largo** $|w|$ de una palabra w es el número de letras.

$$|w| \stackrel{\text{def}}{\equiv} \#\text{ de letras en } w$$

- Denotaremos ε como la **palabra sin símbolos** de largo 0.

$$|\varepsilon| \stackrel{\text{def}}{\equiv} 0$$

- Denotaremos por Σ^* como el **conjunto de todas las palabras** sobre Σ.

Ejemplo

Para $\Sigma = \{0, 1\}$:

- $|00011001| = ?$
- $\Sigma^* = ?$

Concatenación entre palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$ tal que $u = a_1 \dots a_n$ y $v = b_1 \dots b_m$:

$$u \cdot v \overset{\text{def}}{\equiv} a_1 \dots a_n \, b_1 \dots b_m$$

Decimos que $u \cdot v$ es la palabra "u **concatenada** con v".

Ejemplo

Para $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$:

- $0123 \cdot 9938 \; = \; ?$
- $3493 \cdot \varepsilon \; = \; ?$

Concatenación sobre palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$ tal que $u = a_1 \dots a_n$ y $v = b_1 \dots b_m$:

$$u \cdot v \stackrel{\text{def}}{\equiv} a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$

Decimos que $u \cdot v$ es la palabra "u **concatenada** con v".

Algunas propiedades:

- ¿Es la concatenación **asociativa**: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$?
- ¿Es la concatenación **conmutativa**: $u \cdot v = v \cdot u$?
- ¿Es verdad que $|u \cdot v| = |u| + |v|$?

Lenguajes

Definición

Sea Σ un alfabeto y $L \subseteq \Sigma^*$.

Decimos que L es un **lenguaje** sobre el alfabeto Σ.

Ejemplos de lenguajes

Sea $\Sigma = \{a, b\}$:

- $L_0 \;=\; \{\varepsilon, a, aa, b, ba\}$
- $L_1 \;=\; \{\varepsilon, b, bb, bbb, bbbb, \ldots\}$
- $L_2 \;=\; \{w \mid \exists u \in L_1.\ w = a \cdot u\}$
- $L_3 \;=\; \{w \mid \exists u, v \in \Sigma^*.\ w = u \cdot abba \cdot v\}$
- $L_4 \;=\; \{w \mid \exists u \in \Sigma^*.\ w = u \cdot u\}$

Un **lenguaje** puede ser visto como una **propiedad** de palabras

Ocuparemos estas definiciones durante TODO el curso

Convenciones

Durante todo el curso:

- Para **letras** usaremos los símbolos: $a, b, c, d, e, \ldots$
- Para **palabras** usaremos los símbolos: $w, u, v, x, y, z, \ldots$
- Para **alfabetos** usaremos los símbolos: $\Sigma,\ \Gamma, \ldots$
- Para **lenguajes** usaremos los símbolos: $L, M, N, \ldots$
- Para **números** usaremos los símbolos: $i, k, j, l, m, n, \ldots$

¡No olvidar!

Outline

Autómatas finitos

- Modelo de computación más sencillo,
  basado en una cantidad **finita** de memoria.
- Procesa cada **palabra** de principio a fin en **una sola pasada**.
- Al terminar, el autómata decide si **acepta** o **rechaza** el input.

Usaremos los autómatas finitos para definir **lenguajes**

Autómata finito determinista

Definición

Un autómata finito determinista (DFA) es una tupla:

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

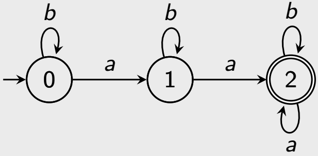
- Q es un conjunto finito de **estados**.
- Σ es el alfabeto de **input**.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es la función de **transición**.
- $q_0 \in Q$ es el **estado inicial**.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de **estados finales** (o aceptación).

Autómata finito determinista

Ejemplo

- $Q = \{0, 1, 2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ se define como:

$$\begin{array}{rcll} \delta(0, a) & = & 1 & \\ \delta(1, a) & = & 2 & \\ \delta(2, a) & = & 2 & \\ \delta(q, b) & = & q & \forall\ q \in \{0, 1, 2\} \end{array}$$



- $q_0 = 0$
- $F = \{2\}$

$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es el **código** de la máquina

¿cómo se ejecuta un autómata sobre una palabra?

Sea:

- Un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- Un input $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$.

Una **ejecución** (o run) ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es una secuencia:

$$\rho : \quad p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} \ldots \xrightarrow{a_n} p_n$$

- $p_0 = q_0$ y
- para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\delta(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$.

Una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es de **aceptación** si:

$$p_n \in F.$$

Desde ahora hablaremos de **LA** ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w

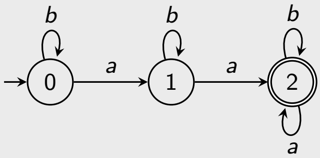
¿Cómo se ejecuta un autómata sobre una palabra?

Una **ejecución** (o run) ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es una secuencia:

$$\rho : \quad p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} \ldots \xrightarrow{a_n} p_n$$

- $p_0 = q_0$ y
- para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\delta(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$.

Ejemplo



- ¿Cuál es la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre $bbab$?
- ¿Cuál es la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre $abab$?

¿Cuál(es) de las dos ejecuciones son de **aceptación**?

Lenguaje aceptado por un autómata

Sea un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y $w \in \Sigma^*$.

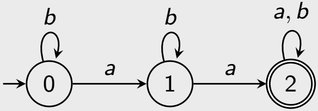
Definiciones

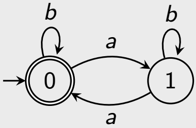
- $\mathcal{A}$ **acepta** w si la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w es de aceptación.
- $\mathcal{A}$ **rechaza** w si la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w NO es de aceptación.
- El **lenguaje aceptado** o definido por $\mathcal{A}$ se define como:

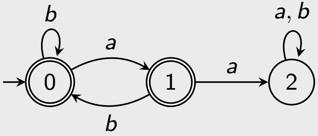
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \quad = \quad \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

Lenguaje aceptado por un autómata

¿Qué lenguaje define cada autómata?

1. 

2. 

3. 

Lenguaje aceptado por un autómata

Defina un autómata para los siguientes lenguajes

1. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$ tal que
   cada a-letra esta seguida de una b-letra.

2. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$ que terminan con ab.

3. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$
   con una cantidad par de a-letras tal que no hay dos a-letras seguidas.

Lenguaje aceptado por un autómata

Sea un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y $w \in \Sigma^*$.

Definiciones

- $\mathcal{A}$ **acepta** w si la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w es de aceptación.
- $\mathcal{A}$ **rechaza** w si la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w NO es de aceptación.
- El **lenguaje aceptado** por $\mathcal{A}$ se define como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

- Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ se dice **regular** si, y solo si, **existe** un autómata finito determinista $\mathcal{A}$ tal que:

$$L \;=\; \mathcal{L}(\mathcal{A})$$