随机变量与分布函数.

① 随机试验 ⟶ ② 函向上 ω(结果) 样本空间Ω $\xrightarrow{\text{取子集}}$ $\boxed{A, B, C\ 事件}$ $\xrightarrow{\text{获得概率}}$ P(A). P(B)……

$\boxed{旧时代的概率，没有数字化，不方便数学研究.}$

实数映射 ⟶ $\boxed{随机变量\ X(\omega)}$

是函数　记为 X

通过 ≥, >, <, ≤ ⟶ $\boxed{分布列: X(\omega) \le x}$

也叫分布律、概率分布.

⟶ $\boxed{分布函数: F(x)=P\{X(\omega)\le x\}}$　{ 离散. 分布

{ 真正的函数.
$X(\omega) \longrightarrow F(x)$
实数到实数的映射叫函数.

分布函数 F(x). 性质: $\boxed{① F\uparrow.\quad ② F(-\infty)=0.\ F(+\infty)=1、\quad ③ 右连}$. 右极限=函数值.
☆☆☆　(左空心，右实心)

$0 \le F(x) \le 1$

详解: $F(x)=P(X(\omega)\le x)$　注意区分. X 与 x.

⟶ F 映射关系就是 $X \le x$，小x为F(x)的自变量，取值$(-\infty, +\infty)$

故F(x) 从$(-\infty \sim +\infty)$，将所有随机变量对应的概率累加计算.

即从0 $\xrightarrow{\text{累加}}$ 1 ——

其中 { 离散型: $\sum P_i$.　(P_i为离散事件的概率)
　　 { 连续型: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.　(f(t)为概率密度).
} 结果为1: 归一性.

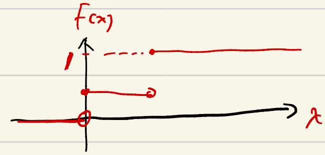
基于分布函数F(x)的累加罗列，便可讨论事件的分布类型
随机变量的组合类型.

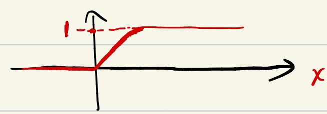
随机变量的八大分布类型

背景：已将Ω样本空间中的各样本点ω，通过$X(\omega)$映射为X实数，再次通过$X \le x$这样"F"关系来抽象划分"A、B、C事件"，并与各事件的概率值P做映射，当$x \xrightarrow{-\infty \sim +\infty}$，便能总得到所有可能的概率组合函数$F(x)$。

也即分布函数. $F(x) = \begin{cases} \sum p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \end{cases}$

由此便轻易得知，
- 离散型$F(x)$的图象必为"步步高阶梯"
- 连续型$F(x)$ ----；





---

① 当计算分布列(概率分布)时，便有不同的分布类型，可根据分布类型计算概率分布，再得出$F(x)$

② 或者，以$F(x)$作为研究基础，再次升维，考虑各种可能的组合或不同分布类型下的各种复杂概率"P"，可通$F(x)$中 x的条件(例：x或$X >, < a$)得，进而使用分布类型公式得出"复杂事件"可能的概率分布。

③ 再或者，概率密度与分布函数(连续型)共同呈某种分布类型分布。

离散型5大分布类型
- 伯努利实验
  - ① 一次：0—1分布. $B(1,p)$，$X \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$
  - ② n重：$B(n,p)$. $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ (也叫二项分布)
    - k：次成功.
- ③ 几何分布：首中即停止. $G(p)$ $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$ $(k=1,2,3\cdots)$
  - └→ 首中n次停止，类推.

离散型5大分布

④ 泊松分布 $P(\lambda)$. $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=0,1,\cdots k)$. λ表强度.

- 某场合某单位时间内源源不断质点来流的个数.
- [或] 稀有事件发生的概率.

⑤ 超几何分布. $H(n,N,m)$. $P\{X=k\}=\dfrac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$

(N件产品, 中M件次品. 从N中取n件. 问正品/次品 概率分布)

连续型3大分布

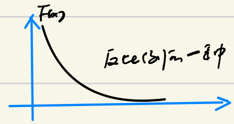
1: 均匀分布.(一维几何概型). $U(a,b)$

概率密度: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$

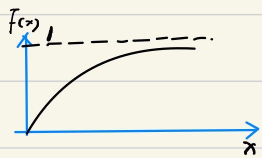
分布函数: $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$

2: 指数分布:(连续等待). $E(\lambda)$

概密: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$



分布 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $\lambda>0$



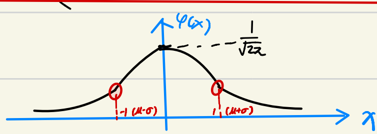
离散型对应: 几何分布
(首中即停止).

3: 正态分布: Normal Distribution $N(\mu,\sigma^2)$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

其中 $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<\mu<+\infty$. $\sigma>0$

标准正态:
- $N(0,1)$. $\mu=0$, $\sigma=1$.
- $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
- 分布函数: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. $\Phi(0)=\frac{1}{2}$. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$



离散
- 概率分布(分布列.律) ①
- 分布函数 $F(x)$ ②

连续
- 概率密度 $f(x)$ ③
- 分布函数 $F(x)$ ④

这4个点处均可呈现出某种分布类型,
或者两者结合(③④)
呈现出的分布类型即8大分布类型

$\boxed{\text{二部分互相结合,处理复杂概率}}$

① 0-1分布
② $B(n,p)$. 二项分布
泊松分布
几何分布
⑤ 超几何分布
⑥ 均匀分布
⑦ 指数分布
⑧ 正态分布.

可以看到,离散型分布类型中没有"x",因为它们是离散的. 连续型便引入了x:

对比: 泊松分布: $p=\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

指数分布: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$

三：多维随机变量

与分布：

二维(n维)随机变量. 及分布.

一维. $F(x)=P\{X\le x\}$ $\xrightarrow{\text{多维}}$ $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

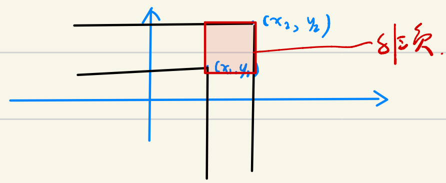
联合分布函数.

重要性质:

① 有界: $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$. $F(+\infty,+\infty)=1$

取"0", 有一个 $-\infty$ 即可. 取"1", 需两个"$+\infty$".

② 区域非负: $P\{x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2\} = F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$



多元里主要研究④点: ①联合 ②边缘 ③条件 ④独立.

边缘分布函数 (不论离散. 连续)

相当于Ω全集. 此时 $P(AB)=P(A)$.

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

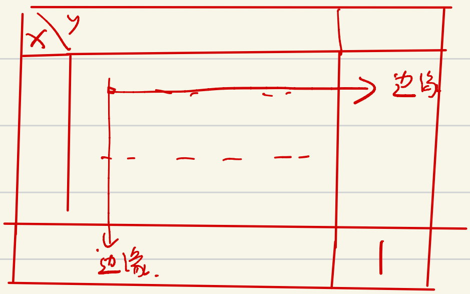
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y).$$

二维离散随机变量的④点讨论.

[注]：这里讨论的是随机变量的问题. (X, Y)，映射后是有限个 (x_1, y_1) (x_2, y_2) ------ 则 (X, Y) 为二维离散随机变量.

①. 联合分布律：
- $P(AB)$. $P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_i\}$, $i, j = 1, 2, 3, \cdots$
- 联合分布函数：$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum\limits_{x}\sum\limits_{y} p_{ij}$.

②. 边缘分布.



③. 条件分布：$\boxed{条件 = \dfrac{联合}{边缘}}$ $\boxed{P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \dfrac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}}$.

[注]：联合分布、边缘分布、条件分布，都指随机变量分布律 而联合分布函数是函数.

④独立性：当：$\boxed{联合 = 边缘 \cdot 边缘}$ $\boxed{P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}}$ 时，则独立.

二维连续型随机变量的各种概率密度

离散

- 一维
  - 概率分布．记 $X \sim p_i$．或．$P\{X=x_i\}=p_i$　　$p_i \geq 0$
  - 分布函数：$F(x)=P\{X \leq x\}$．
- 二维：
  - 概率分布（或分布列）　　$p_{ij} \geq 0$
    - ① 联合　$P\{X=x_i, Y=y_i\}$　记 $(X,Y) \sim p_{ij}$．
    - ② 边缘　$P\{X=x_i\}$ / $P\{Y=y_i\}$
    - ③ 条件．$P\{X=x_i \mid Y=y_i\}$
    - ④ 独立性．$P\{X=x_i, Y=y_i\}=P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_i\}$．
  - 联合分布函数：$F(x,y)=P\{X \leq x, Y \leq y\}$．

连续型：

- 一维
  - 概率密度函数：$f(x)$　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$　　$f(x) \geq 0$
  - 分布函数：$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$．　$F'(x)=f(x)$．在
- 二维．
  - 概率密度函数：　　$f(x,y) \geq 0$
    - ① 联合概率密度．也叫概率密度：$f(x,y)$．$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$
      $F(x,y) \xrightarrow{\text{求二导}} \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)$．
    - ② 边缘概率密度．$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$
      $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$．
      - 求谁不积谁
      - 不积先定限．（确定范围）
      - 限内画条线
      - 先交 ---
      - 后交 ---
    - ③ 条件～：$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$．　条 $=\dfrac{联合}{边缘}$．
    - ④ 独立：$\Longleftrightarrow$．$f(x,y)=f_X(x) \cdot f_Y(y)$．
  - 联合分布函数：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$．在区域 G 上．$P\{(X,Y) \in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

独立性：

$$\begin{cases} \text{连：} f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \\ \text{离：} P_{ij} = P_{i\cdot}\,P_{\cdot j} \\ \text{分布函数：} F(x,y) = F(x)\cdot F(y). \end{cases}$$

连、离：联 $\overset{?}{=}$ 边·边

[注]：在定义域里，X、Y 与 x、y 可互相看作同一变量作不等式变化，确定范围。

多维随机变量函数的分布

$X、Y$（随机变量）$\xrightarrow{g} g(X,Y) = U$，则 U 称是 $X、Y$ 的函数。

二维到一维的映射，结果是一维的

离散型：

[注例]：

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

① $Y_1 = X_1 + X_2$

变为一维

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

主对角平行线5条。

（0, 0）可不写。

② $Y_2 = X_1 - X_2$.

$$\left(\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

副对角线平行的5条

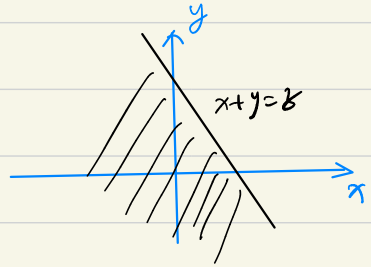
连一连 $\Longrightarrow$ 连续. 相互独立随机变量函数的分布及卷积

[注]. 连续型是通过 $F_Z(x)$ 求导, 得到 $f_Z(x)$

① $(X,Y) \sim f(x,y)$. $\boxed{Z=X+Y}$

定义法: $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$

$$=\iint\limits_{D:\,x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\,dy$$



(求导)

由 $f_Z(z)=\boxed{F_Z'(z)}$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\,dy\right]dx\right)'$$

$$\overset{(*)}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\,dy\right)_z'dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\cdot(z-x)_z'\,dx$$

$$=\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\cdot 1\,dx}\xrightarrow{X、Y独立}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx}$$

卷积公式.

这里如果反常积分收敛. 则求导和积分可内外交换, 思考. Σ 与 $\int$ 都是求和符号. Σ 是离散求和, $\int$ 是连续型求和, 故 $\left(\sum\{X_n\}\right)'=\sum(X_n)'$ 因为求和不过是逐项展开: $(\Sigma)'=(a_1+a_2+a_3\ldots)'$ 对整体求导, 可适当单个求导后在求和、$(\Sigma)'=(a_1)'+(a_2)'+\cdots(a_n)'$ $\int$ 类似, 但要求反常积分收敛.

(+ − × ÷) 直接记. ——
- 积谁不换谁. (类似边缘密度的"求谁不积谁")
- 换完求偏导 (对 z).

(连~连)→连

$(X,Y)\sim f(x,y)$

① $Z=X+Y$:

$$f_Z(z)=\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-y)\,dx}=\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-x,y)\,dy}$$

$$\xrightarrow{X,Y\text{独立}} f_Z(z)=\underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx}=\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)\,dy}}_{\text{(卷积公式)}}$$

② $Z=X-Y$ (注 $Z=Y-X$) 时注意区分, 用口诀.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y+z,y)\,dy$$

卷积: $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(x-z)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y+z)\,f_Y(y)\,dy$$

③ $Z=XY$ $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y},y\right)dy$$

卷积: $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\cdot f_X(x)\cdot f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right)\cdot f_Y(y)\,dy$$

④ $Z=\frac{X}{Y}$ 换分子, 简单. $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,y)\,dy$$ (只记 dy 型, 换分子)

卷: $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz)\cdot f_Y(y)\,dy.$$

数字特征.

期望的理解：Ex.

随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ 概率分布

则：$Ex = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ $\quad 1 < \frac{5}{3} < 2$

首先期望的结果是一个值，是随机变量的合理平均值.

每一次. $x_i \cdot p_i$. p_i 更像是 x_i 的权重. 影响最终的结果靠近/远离 x_i.

所以我们可以据此可推测一个合理的"平均随机变量"

一：期望：(合理的平均值).

离散：

$$\begin{cases} EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i & (\sum x_i p_i \text{ 级数收敛}) \\ E[g(X)] = \sum g(x_i) p_i & (\sum g(x_i) p_i \text{ 级数收敛}) \end{cases}$$

连续：

$$\begin{cases} EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{f(x)dx}_{\text{面积}} & (\text{绝对收敛}) \\ E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx & (\text{绝对收敛}) \end{cases}$$

二：性质：

① $E\left(\sum a_i X_i\right) = \sum a_i EX_i$ 和差大条件打开.

②. $Ec = c$. (常数). $E(aX+c) = aEX + c$. $E(X \pm Y) = EX \pm EY$

(可以看出，期望只有随机变量有效，常数的期望仍是常数.)

③ X 与 Y 独立. $E(XY) = EX \cdot EY$ $E[g_1(X), g_2(Y)] = Eg_1(X) \cdot Eg_2(Y)$

$E(\prod X_i) = \prod(EX_i)$ $E[\prod g(X_i)] = \prod E[g(X_i)]$.

三：方差：$E[(X-EX)^2]$，可看出，实际上方差为 $g(X)$ 的 E 期望值. 表示的是多次
(DX) 实验值与合理平均值 EX 的(波动情况)

平方防止正负抵消.

$$DX = E[(X-EX)^2] \longrightarrow EX^2 - (EX)^2$$

平方在前，期望在后.

$$E[X^2 - 2EX\,X + (EX)^2] = EX^2 - \underbrace{2EX\,EX}_{2(EX)^2} + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

6). 标准差，也叫均方差：$\sqrt{DX}$，记为 $\sigma(X)$. $X^* = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 为 X 的标准化随机变量

此时有：$EX^*=0$，$DX^*=1$

方差性质：

① $DX \geq 0$　　$DX = EX^2 - (EX)^2 \geq 0$. $EX^2 \geq (EX)^2$.

② $Dc = 0$.（常数没有波动性）.

③ $D(ax+b) = a^2 DX$

④ $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X,Y)$

$D(X_1+X_2+\cdots+X_n) = DX_1 + DX_2 + \cdots DX_n + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j)$

其中：$2\sum\limits_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j) = 2\cdot C_n^2\, Cov(X_i, X_j)$

$= 2\frac{n(n-1)}{2} Cov(X_i, X_j)$

$= n(n-1)\, Cov(X_i, X_j)$

⑤ 若 X.Y 独立：$D(aX+bY) = a^2DX + b^2DY$.

⑥. 若 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 相互独立. $g(x_i)$ 为 x 的连续函数.

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum a_i^2 DX_i$$

$$D\left[\sum g_i(X_i)\right] = \sum D[g_i(X_i)].$$

（乘除在方差里打不开）.

常用分布的期望. 方差.

分布	分布列 / 概率	期望 EX	方差 DX
0—1	$P\{X=k\} = p^k(1-p)^{1-k}$ $(k=0,1)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots)$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,\cdots)$	λ	λ
几何分布	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
均匀分布	$f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

$\sigma^2 \to \sigma$：标准差

$\sqrt{DX}$

$\downarrow n$

切比雪夫不等式：

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2} \quad 或 \quad P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

（波动过大的概率是不大的）

一维随机变量函数的章之题目套路.

$X \longrightarrow f(X)$ — 求 $f(X)$ 的期望

在一些描述性题目里，例如 X 为机器故障台数 $\xrightarrow{\text{映射为}}$ 相关的利润 问平均利润的数学期望.

X	利润 (万)
0台故障	
1	5
2	0
≥3	-2

注意：它们对应的概率不变，只是将随机变量映射为其他含意.

这就是 $EX=X p_i \longrightarrow E[g(X)]=g(X)\cdot p_i$ 的意义.

二维随机变量函数的数学期望

$X \cdot Y$ 二维随机函数 $g(X,Y) \longrightarrow$ 期望.

离: $E[g(X,Y)] = \sum\sum g(x_i, y_j)\, p_{ij}$

连: $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f(x,y)\, dxdy$

※ 协方差: $E[\underbrace{(X-EX)}_{X\text{波动}}\underbrace{(Y-EY)}_{Y\text{波动}}]$ (可以看出结果实际依然是期望值)

$$\boxed{E[(X-EX)(Y-EY)]} = E[XY - XEY - YEX + EXEY]$$

$$= EXY - EXEY - EYEX + EXEY$$

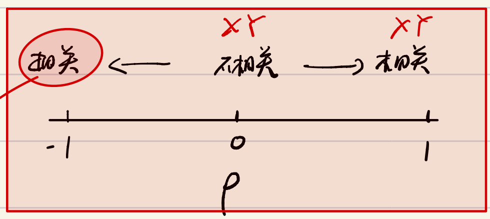
$$\boxed{= EXY - EXEY}$$

记 $Cov(X,Y)$. 乘积在前. 期望在后

的期望 − 期望的乘积.

则 $Cov(X,X) = EX^2 - (EX)^2 = DX$

自己与自己的协方差即方差



相关系数: $\rho_{xy} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$

(不相关, $\rho=0$, 即相关系数无关, 即 $\rho=0$)

指线性相关. $X = \cos Y$

不是线性相关.

$\rho_{xy} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0$. 则 $Cov(X,Y) = 0$. 即 X, Y 不相关.

协方差、相关系数的性质：

①. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$，$\rho_{XY} = \rho_{YX}$.

$\rho_{XX} = 1$. $\quad Cov(X,X) = DX$

② $Cov(X,c) = 0$. $\quad Cov(X,c) = E(Xc) - EX \cdot Ec$

$= cEX - cEX = 0$

$Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

$Cov(aX+b, Y) = aCov(X,Y)$

一般地，$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, Y\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i Cov(X_i, Y)$

$|\rho_{XY}| \le 1$.

如果 $Y = aX + b$，$\rho_{XY} = \begin{cases} 1, & a > 0 \quad \text{存在 100\% 线相关} \\ -1, & a < 0 \quad \text{--} \end{cases}$

独立性与相关性判定:

X、Y 相互独立

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

① 联合分布 = 边·边. $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

② 连: $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$

③ 离: $P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$.

3种方法均可.

X、Y 不相关. 指: 线性不相关. $\rho_{xy}=0 \Leftrightarrow Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow EXY=EX\cdot EY$

$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX\pm DY$

重要结论:

- X、Y 独立, 则必有 X、Y 不相关
- X、Y 相关, 必不独立

互为逆否

如果 (X,Y) 服从二维正态分布. X、Y 独立 $\Longleftrightarrow$ X、Y 不相关.

判相关与独立的步骤:

$$Cov(X,Y)=EXY-EXEY \begin{cases} \neq 0, & X\text{与}Y\text{相关}.\ X、Y\text{必不独立} \\ =0, & X、Y\text{不相关}.\ \text{用分布推}\begin{cases} X、Y\text{独立} \\ X、Y\text{不独立}. \end{cases} \end{cases}$$

统计量.

数理统计

一：$\boxed{\text{总体}}$，即随机变量 X 的全部。

二：样本. 全称简单随机样本（说样本，就是指一组$\boxed{\text{独立同分布}}$的随机变量序列）.

事实上把随机变量序列 $(\underbrace{X_1, X_2, \cdots X_n}_{iid})$ 这个整体来自总体 X. 称为样本.

三、样本的分布：由于样本实际上是多维随机变量组. 且组里每个 X_i 都互相独立.

故. 联合分布函数：$F(x_1, x_2 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$.

分布：
- 离：$P\{X_1=x_1, X_2=x \cdots\} = \prod^{n} P\{X=x_i\}$
- 连：$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$. 概率密度.

统计量：$(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 的具体值 $(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 为一个具体的观测值.（样本值）

$g(\underline{x_1, x_2, \cdots x_n})$ 为一个统计量. 也叫观测值

统计量中没有未知数.

样本数字特征：

① 样本均值：$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

② 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ （一组随机变量的方差）

③ 标准差：$S = \sqrt{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

④ 样本k阶（原点）矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \quad (k=1,2,\ldots,n) \to (x_i - 0)^k$ 原点

⑤ 样本k阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k \quad (k=1,2,\ldots,n)$ 中心值

顺序统计量：

$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ 则 $X_{(k)}$ 称为第k顺序统计量.

$X_1 = \min\{X_1, X_2 \cdots X_n\}$.　　$X_n = \max\{X_1, X_2 \cdots X_n\}$.

推导：

$\boxed{X_n} = \max\{X_1, X_2 \cdots X_n\}$

$= P\{X_n \le x\} = P\{X_1 \le x, X_2 \le x, \cdots X_n \le x_n\}$

$\overset{独立}{=} P\{X_1 \le x\} \cdot P\{X_2 \le x\} \cdots\cdots P\{X_n \le x\}$

$\overset{同分布}{=} [F(x)]^n \longrightarrow \boxed{f_{X_{(n)}}(x)} = F'_{X_{(n)}}(x) = \boxed{n[F(x)]^{n-1} \cdot f(x)}$

$\boxed{X_1} = \min\{X_1, X_2 \cdots X_n\} = P\{X_{(1)} \le x\}$

$= 1 - P\{\min\{X_1, X_2 \cdots X_n\} \ge x\} = 1 - P\{X_1 > x\} \cdot P\{X_2 > x\} \cdots P\{X_n > x\}$

$= 1 - [1 - P\{X_1 \le x\}] \cdot P[1 - P\{X_2 \le x\}] \cdot P[1 - P\{X_n \le x\}]$

$= 1 - [1 - F(x)] \cdot [1 - F(x)] \cdots [1 - F(x)]$

$= \boxed{1 - [1 - F(x)]^n} \longrightarrow \boxed{f_{X_{(1)}}(x)} = \boxed{\{1 - [1 - F(x)]^n\}'} = \boxed{(n-1)[1 - F(x)]^{n-1} \cdot f(x)}$

统计量性质,

从总体 X 中拿一组 $X_1\ X_2 \cdots X_n$, 即容量为 n 的样本. 总体的期望: $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$

则: $\boxed{EX_i=\mu}$. $\boxed{DX_i=\sigma^2}$. $\boxed{E\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\mu}$. $\boxed{D\bar{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{\sigma^2}{n}}$. $\boxed{E(S^2)=DX=\sigma^2}$

$$S^2=\boxed{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\sum_{i=1}^{n}X_i\bar{X}+\bar{X}^2\sum_{i=1}^{n}(1)\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\bar{X}^2+n\bar{X}^2\right)$$

$$=\boxed{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)}$$

$$\boxed{E(S^2)}=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-nE\bar{X}^2\right)$$

$(DX=EX^2-(EX)^2)$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n(DX_i+(EX)^2)-n(D\bar{X}+(E\bar{X})^2)\right]$$

$$=\frac{n}{n-1}\left[DX_i+(EX)^2-D\bar{X}-(E\bar{X})^2\right]$$

$$=\frac{n}{n-1}\left[\sigma^2+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2\right]$$

$$=\frac{n}{n-1}\ \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$$

$$=\boxed{\sigma^2}=DX_i$$

[例题] $X_1, X_2 \cdots X_n$ $(n>2)$ 为独立同分布, 且均 $\sim N(0,1)$. $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $Y_i=X_i-\bar{X}$. 求 DY_i

[解]: $DY_i=D(X_i-\bar{X})$ (注意 $\bar{X}$ 的计算里包含了 X_i, 故 X_i 与 $\bar{X}$ 不独立)

$$DY_i\xrightarrow{\text{从 }\bar{X}\text{ 中拿掉 }X_i}D\left[X_i-\frac{1}{n}\left(X_i+\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right)\right]=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right]$$

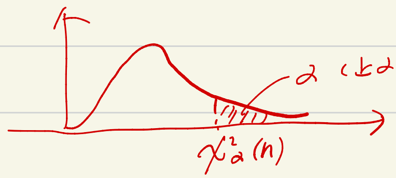
独立

$$\text{此时}\xrightarrow{\text{用 }D(X\pm Y)=DX+DY}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2DX_i-\frac{1}{n^2}\sum_{k\neq i}^{n}DX_k=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{n^2}(n-1)=\frac{n-1}{n}$$

三大统计.

$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2 \sim \chi^2(n)$. n — 自由度. (且 $X_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$)

(卡方分布).



自由度之和.

① $X_1 \sim \chi^2(n_1)$. $X_2 \sim \chi^2(n_2)$. X_1, X_2 互相独立. 则 $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

$\xrightarrow{n个} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} n_i\right)$

② $X \overset{服从}{\sim} \chi^2(n)$. $EX = n$. $DX = 2n$.

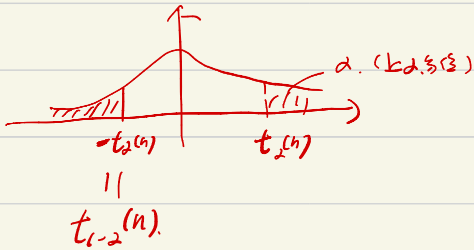
[注]. $\chi^2(n)$ 要求序列中的每一个 X_i 都服从 $N(0,1)$. 标准正态分布.

t分布：学生分布.

$X\sim N(0,1)$. $Y\sim \chi^2(n)$. $(\chi^2(n)=X_1^2+X_2^2\cdots X_n^2)$

故不刻值理解：$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$. 为t分布.

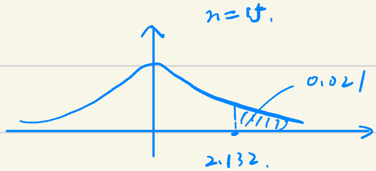
图像很像正态分布.



性质 { ① 偶函数.

② $P\{t>-t_\alpha(n)\}=P\{t>t_{1-\alpha}(n)\}$

若有 $t_{0.021}^{(15)}=2.132$，也即：



F 分布:

$X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$. $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度 (n_1, n_2) 的 F 分布.

$F(n_1, n_2)$

性质:

① 若 $F \sim F(n_1, n_2) \Longrightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

② 记 $\boxed{F \sim F(n_2, n_1)}$, 若: $P\{F > F_\alpha(n_2, n_1)\} = \alpha$.

则: $P\{F \le F_\alpha(n_2, n_1)\} = 1-\alpha$.

对立事件

$\xrightarrow{\text{取倒}} P\left\{\dfrac{1}{F} \ge \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}\right\} = 1-\alpha$.

令 $T = \dfrac{1}{F}$ $\Longrightarrow$ 则 $T \sim F(n_1, n_2)$

则: $P\{T \ge F_{1-\alpha}(n_1, n_2)\} = 1-\alpha$.

故: $\boxed{F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}}$

正态总体条件下的常用结论.

设 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一样本. $\bar{X}$. S^2 分别为样本均值.与方差.

也即: $X_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.

σ — 标准差
S — 样本标准差

① $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 即. $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$.

(二维中有. $aX+bY$ $(a\neq 0$ 或 $b\neq 0)$ 服从正态分布. 这里推广到 n 维).

② $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

μ 未知, 用 $\bar{X}$ 代替.

自由度 -1

③ $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$. ($\mu$ 未知时, 用 $\bar{X}$ 代替 μ)

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \overset{(*)}{=\!=\!=} \frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$

$(*)$: 由 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = (n-1)S^2 \cdots$

④ 用 $\frac{①}{③}$ 即. $\frac{1\text{(自由度)}}{(n-1)\text{(自由度)}}$ $\xrightarrow{\text{对分母}/n-1\text{. 开根号}}$ $\frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{S}$

$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立 $\boxed{\Longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$ $\longrightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$

[注] ①中 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. 但往往 σ. 或 μ 并不知道. 反而 μ, σ 是我们的研究目标.

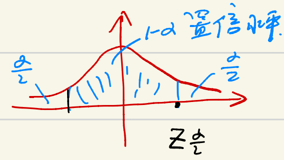
故用 $t(n-1)$ 近似代替来研究, 因为 t 分布与 $N(0,1)$ 极近似. (特别当 n 很大时).

④. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$. 而 ② — ③. 类似.

S ↓ 样本标准差

参数的区间估计 （都研究正态分布，不是正态？用中心极限定理 → N）

$\bar{X}$（样本均值）与 X 的期望 μ，应相去不远。



即：$P\{|\bar{X}-\mu|<\Delta\}=1-\alpha$ —— 置信水平

α（显著性水平）

$\bar{X}\sim(\mu,\frac{\sigma^2}{n}) \longrightarrow P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<\frac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$

记. $P\left\{|Z|<\frac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$.

$\frac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}=Z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\Delta=Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{n}$

由 $|\bar{X}-\mu|<\Delta \longrightarrow |\mu-\bar{X}|<\Delta \longrightarrow \bar{X}-\Delta<\mu<\bar{X}+\Delta$

$\bar{X}-\Delta$ $\quad$ $\bar{X}$ $\quad$ $\bar{X}+\Delta$

（μ 落到 $\bar{X}\pm\Delta$ 概率很大）

$\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad$ $\bar{X}$ $\quad$ $\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

我以 $(1-\alpha)$ 的把握，保 μ 落入区间 $\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$

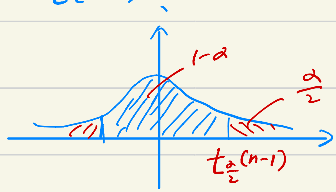
[思考] 当 σ 未知时，我们可用 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$，因为 t 分布与 $N(0,1)$ 很接近

此时：$P\{|\bar{X}-\mu|<\Delta\}=1-\alpha$.

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \longrightarrow P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{n}}<\frac{\Delta}{S/\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$.

记：$P\left\{|t|<\frac{\Delta}{S/\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$

$t(n-1)$：



$\frac{\Delta}{S/\sqrt{n}}=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \longrightarrow \Delta=\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\quad$ $\bar{X}$ $\quad$ $\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

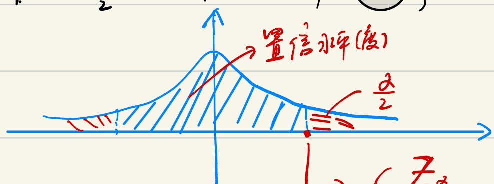
表格:

待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$
μ	σ^2 未知. 用S.	$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1).$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

[注意] $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ 和 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 中取的都是 $\frac{\alpha}{2}$, 而 $1-\alpha$ 为置信水平.



$Z_{\frac{\alpha}{2}}$, $N(0,1)$ 函数分布

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, $t(n-1)$ 函数分布.

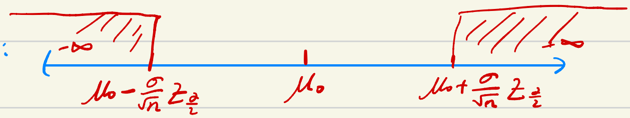
假设检验: (刚才是不知 μ, 估计 μ,) 现在是已经有了设法. $\boxed{H_0: \mu=\mu_0}$ 原假设 (保护)

$P\{|X-\mu_0|<\Delta\}=1-\alpha \longrightarrow \boxed{P\{|X-\mu_0| \geq \Delta\}=\alpha}$ (小概率原理).

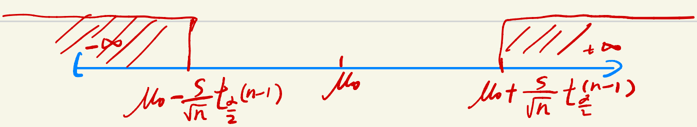
如果 μ (小概率) 发生了, 就拒绝. 同理可推 拒绝域

对立假设 $\mu \neq \mu_0$. 也叫备择假设

σ^2 已知. μ 未知:



σ^2 未知. μ 未知



两类错误　更加能理解 α（小概率事件）

$p\{$判无病 $|$ 有病$\} = \underline{\alpha}$　（太危险了，不能发生事故）

显著性水平

$p\{$判有病 $|$ 无病$\} = \beta$　（β 没有 α 那么要命）

参数的点估计　$\begin{cases} \text{矩法估计} \\ \text{最大似然估计} \end{cases}$

所求的是 X 分布中的未知参数：$\underbrace{\theta_1, \theta_2 \cdots,}_{\theta\text{为}}$ $X_1 \cdots X_n$

矩法估计：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xlongequal{\text{令其}} EX = \mu$　$\hat{\theta}$

（一阶原点矩）

会得到含二，加总估计值

最大似然估计　$p\{x_1, x_2, x_3 - - x_n | \theta = ?\}$，$p$ 最大？

离散型似然函数：$L(\theta) = L(x_1, x_2 \cdots \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$

连续型似然函数：$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$

求 max