MIT Linear Algebra

§ 矩阵相乘与逆 inverse.

矩阵乘. 向量空间的线性变换.

行: $\begin{pmatrix} 2\ 1\ 3 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{—}\ 1 \\ \text{—}\ 2 \\ \text{—}\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot row1 + 1\cdot row2 + 3\cdot row3 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{pmatrix}$

列: $\begin{pmatrix} | & | & | \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & | \\ 2 & | \\ 3 & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot \underset{row1}{|} + 2\cdot \underset{2}{|} + 3\cdot \underset{3}{|}, & | \end{pmatrix}$

左行右列:

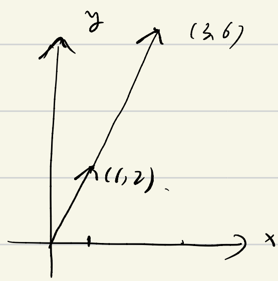
逆 (方阵).

数字: $a\cdot\frac{1}{a}=1$. 称 a 与 $\frac{1}{a}$ 互为倒数, 也可称逆.

普通. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=E$.

什么样的矩阵有逆:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}?\\?\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$



$Ax=0$? $\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=0$ or $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$. A不可逆. A中的向量组线性无关.

高斯一若当尔.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 1 & \end{array}\right)$$

A $\quad$ I $\qquad\qquad$ I.

思考: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{左乘 } E_1 E_2 \cdots} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则. $E_1 E_2 \cdots = A^{-1}$

与此同时: $E_1 E_2 \cdots \cdot I = E_1 E_2 \cdots = A^{-1}$

$A=LU$. 用"左行"可逆矩阵消元. (消元只是行变换)

$$\begin{array}{ccc} E_{21} & A & U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

逆

$$\begin{array}{ccc} A & L & U \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1, 0). 第一行的1倍加第二行的0倍. 得到第一行.

E_{21}. L 互逆, $-4 \to 4$?

$$E_{21} \qquad\qquad\qquad L = E_{21}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

对第一行：没有变化，所以不要逆变

对第二行：E中 将第一行的 -4 倍 + 第二行 $\overset{得}{=}$ 新的第二行.

逆操作：L中 第一行的 4 倍 + 第二行 $\overset{得}{=}$ 原来的第二行.

再次看：

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}} = \underset{L\,(lower)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}} \underset{U\,(upper)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}} \underset{D}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

D: diagonal. 对角.

逆：

$E_1 E_2 E_3 A = U$ (No row exchange)

$\longrightarrow \quad A = E_3^{-1} E_2^{-1} E_1^{-1} U$.

先穿袜子，后穿鞋. $\xrightarrow{逆操作}$ 先脱鞋，后脱袜子.

如果没有互换，那么可以将倍数写入矩阵中.

Permutation (置换). transpose (转置)

$$PA = LU$$

$R^T R = A$ (一定是对称矩阵)

$(R^T R)^T = R^T (R^T)^T = R^T R$. $\longrightarrow$ $A^T = A$. (对称矩阵)

$E \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{置换行}]{\text{任意}} P_1 P_2 \cdots$, 它们的逆矩阵仍是它自己.

且转置矩阵仍是它自己.

即 $P^{-1}P = E$. $P^2 = E$

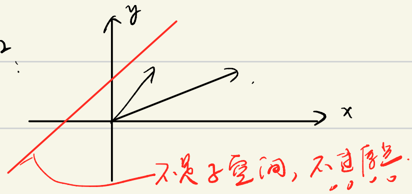
且 $P^T = P$. $\therefore$ $P^T P = E$. (正交矩阵).

5. 向量空间、子空间

space: R^n

一组向量的所有线性组合，构成向量空间，且必过原点 "0" 空间。

R^2:



二维空间的子空间: { R^2 平面、直线、0空间、原点

R^3 三维空间的子空间 { 三维空间、平面、直线、原点

线性组合：对每个向量任意的倍乘，之后向量之间，随意加减的组合

①封闭性

一组向量形成的向量空间，必须包含空间内所有可能，及所有的线性组合

这就要求，必须过原点。因为总能有 $0\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}=0$ ②总能抵消，即0包含在内

疑问：既然原点0是所有向量空间的公共子空间，那0是"虫洞"

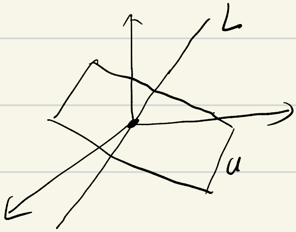
向量空间的组合：

L：向量空间　U：也是一个向量空间.

L ∪ U：不一定是向量空间.

L ∩ U：必是向量空间.

例如：



与方程关系：

$Ax=b$，是否有解？　b是否在A所形成的向量空间.

列空间：

A的列空间是否包含b，$\longrightarrow$ 方程组有无解.

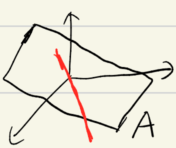
零空间. Null space.　相对而言的：　即：$Ax=0$.

x所有的解 构成了A的零空间

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解x构成了A的零空间. 显然是一条线.

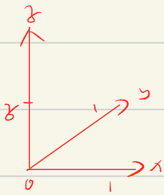
$\because x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，是一条线



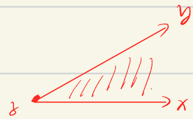
x：A的零空间.

想象. $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 若矩阵不能构成 R^3 向量空间，那么原本在 R_3 的向量

必进入了 A 的零空间



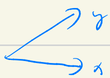
当z轴进入零空间 $\longrightarrow$



便进入二维平面、

Note. $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 行数为本应构成的 R^m 空间，列数为向量个数。

我们假设这 $r(A)=2$, 虽然它的零空间只有一个向量，但这个向量的线性变换可以

抵消  A本身构成的平面内的任一向量.

而物质的存在.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$Ax=b$，$b \neq 0$ 时，解并没有构成子空间。

很明显不包含 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 点。 该例中，$Ax=b$ 的解，构成了一个平面，不过原点。

显然：$Ax=0$，的解，都是子空间

主元个数 = 秩 (rank)

主元：pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

A

解的结构为，A 的零空间。

可简写 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \longrightarrow (I\ F)\begin{pmatrix} -F \\ I \end{pmatrix} = 0$

$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\ \underbrace{\begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix}}_{F}$

即 $x = \begin{pmatrix} -F \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

一组特定的解向量

通解：$c_1\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Ax=b$ 的解 (solution)，为什么是 $Ax=0$ 通 + 特解

$$\begin{cases} Ax_n = 0 & \cdots ① \\ Ax_p = b. & ② \end{cases}$$

① + ②：$A(x_n + x_p) = b.$

显然 $Ax=b$ 的解 不经过原点，所以不是子空间，

可能是不经过原点的，某个"空间"或面、或线或点。

m by n matrix A of rank r.　($r \le m$,　$r \le n$)

$r=n$ 时，pivot variables $= r$.　free variables $= 0$.

so.　Nullspaces = only "0"　零空间仅有 0　大小决定解是否无穷多个

此时：$Ax=b$；$\begin{cases} x = x_p & \text{unique. If it exists.} \\ 0 & \text{solution} \end{cases}$

$Ax=b$

$r=m=n$	$r=m<n$	$r=n<m$	$r<n$, $r<m$
(0 free variables)	free $v = n-r$	0 free v_s	free $v_s = n-r$
b 总在 A 的向量空间下，且唯一	b 总在 A 的向量空间内，且零空间无数向量	b 不一定在 A 的向量空间下	b 不一定在 A 的向量空间下
唯一解	无穷个解	无解或唯一解	无解或无穷多解

"零空间"向量个数决定是否"是无数解"

线性相关、基、维（dependent、basis、dimension）

对向量组而言

① 线性相关（dependent）：使向量组线性组合成为 0 的空间有"非零向量"

即：A 的零空间有非零向量。

② 基：一组刚好能生成 n 维空间的线性无关的向量组

- 1：线性无关
- 2：能撑起这个 n 维空间

③ 维：线性无关的列向量的个数。

对于方阵 $A_{n\times n}$，A 可逆时时，才可生成 n 维空间

矩阵的秩 = 主元的个数 = 空间维度

rank(A)　　pivot numbers　　dimension

零(核)空间、Null space

$A_{n\times n}$ 的零空间的维数：$= n - r(A)$.

矩阵的四个基本子空间 ☆☆☆

$A_{m\times n}$

① 列空间 $C(A)$ Column.

② A的 Nullspace. 零空间: $N(A)$

③ 行空间 $C(A^T)$. A转置的 Column 向量.

④ A^T 的 Nullspace: $N(A^T)$ — 称 lefe Nullspace of A. 左零空间.

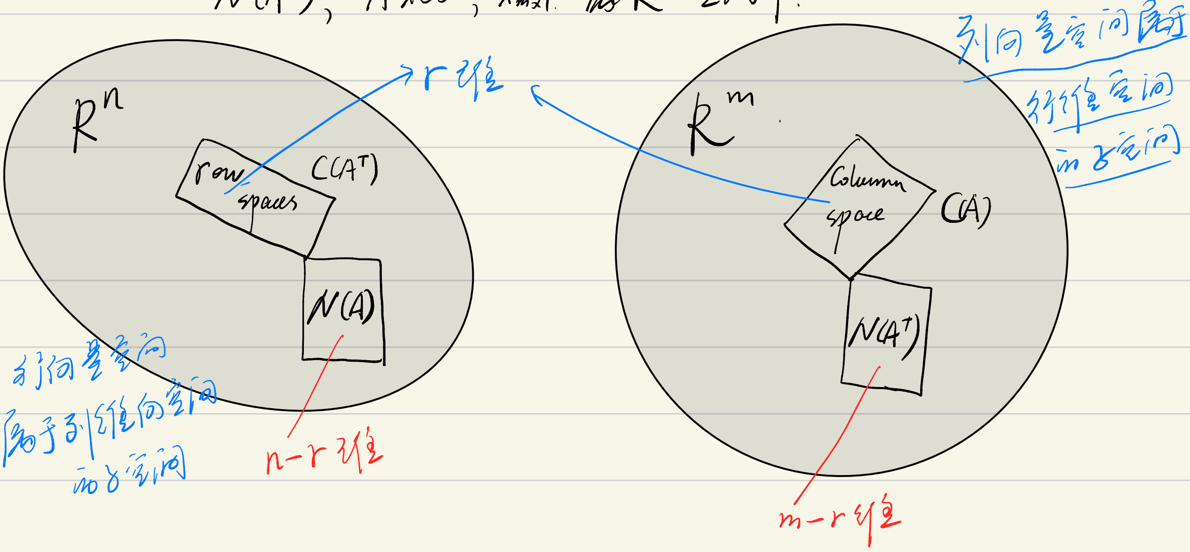
列空间的维数 = 行空间的维数 = $Rank(A)$

对 $A_{m\times n}$. $C(A)$ 即列向量组, 有n列. 但每个只有m维, ∴ $C(A)$ 属于 R^m 空间下.

而 $N(A)$. 即 $Ax=0$, x的解空间. 显然 $x_{n\times 1}$ 包含于 R^n 空间下.

行向量空间 $C(A^T)$, m列, 但每个向量n维. 属 R^n 空间下.

$N(A^T)$, $A^Tx=0$, $x_{m\times 1}$. 属 R^m 空间下.



即
$$\begin{cases} \underbrace{\text{行空间维数}}_{r} + \underbrace{A\text{的零空间维数}}_{n-r} = n\ (\text{列数}) \\ \quad \| \\ \underbrace{\text{列空间维数}}_{r} + \underbrace{A^T\text{的零空间维数}}_{m-r} = m\ (\text{行数}) \end{cases}$$

这和
$$\begin{cases} Ax=0. & \text{解为 } n-r \text{ 维.} \\ A^T y=0. & \text{解为 } m-r \text{ 维.} \end{cases} \qquad (A_{m\times n})$$

结论相同. 即:

再来看"消元法"(行变换)

也是一组行空间的基

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{可用 } E \text{ 记录.}]{\text{行向量的线性组合}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行空间的最简基

在同一个 R 空间下.

可通过 E^{-1} 复原.

A^T的零空间，为什么叫左零空间 $N(A^T)$

$$A^Ty=0 \xrightarrow[\text{把}A^T\to A]{\text{放左边}} (A^Ty)^T=y^TA$$

在A的左边

即：找到一个 $E_左$，使 $E_左A=(0,0,0,0)$ 即 $E_左$是左零空间基的一个向量。

如：前边例子的消元过程，相当于做行向量的线性组合。

$$\begin{array}{cc} E & A \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=r$

刚好一行 0

根据行运算，第三行为 E 的最后一行与A行向量线性组合的结果。

故 $(-1,0,1)$ 是 A^T 左零向量空间基的一个向量。

而 $N(A^T)$的维度 $=3-2=1$，故 $N(A^T)$ 为一维，一个基向量。

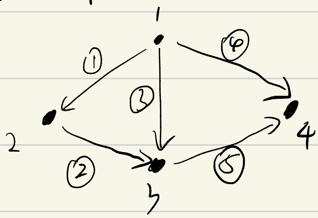
A^T 为3列

A的秩(rank)为2。

5. 矩阵空间

不是向量空间、

图论与矩阵



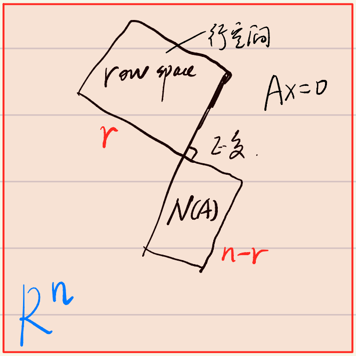
$$\Longrightarrow \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \text{ Node} & \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \text{ edges.}
\end{array}$$

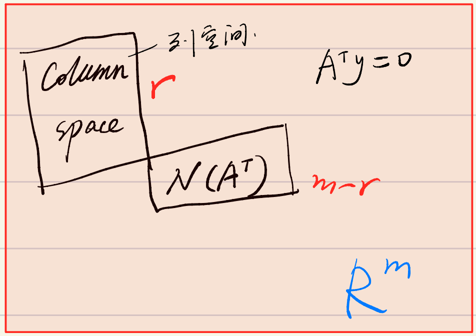
-1: 边的反向. 1: 边的正方向

§ 正交 orthogonal

子空间的正交（∵ $Ax=0$ 或 $A^Ty=0$）故 子空间是正交的

$A_{m\times n}$





子空间与子空间正交，即 子空间中的每个向量都垂直于另一个子空间.

$$Ax = \begin{bmatrix} - - - \\ - - - \\ - - - \\ - - - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

每行 × 每列 = 0.

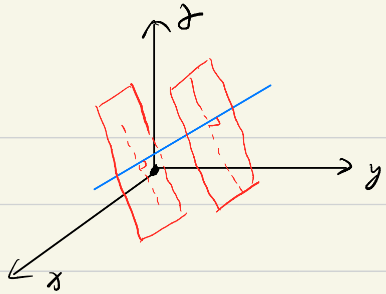
另外 $r + m - r = m$.

以三维空间为例. $A_{3\times 3}x=0$. 解 x. 即: $\underbrace{\text{零子空间}}$

如果 A 是 直线空间. $r(A)=1$

则 解空间就是与A垂直的平面. N(A) 为 2维.

与A垂直的平面有很多，所以是基础解系。



向量垂直与勾股定理

$x^Ty=0$ 垂直　　$x^Tx=|x|^2$

$$|x|^2+|y|^2=(|x|+|y|)^2$$

$$\cancel{x^Tx}+\cancel{y^Ty}=(x+y)^T(x+y)$$

$$=\cancel{x^Tx}+x^Ty+y^Tx+\cancel{y^Ty}$$

$$=x^Ty+y^Tx$$

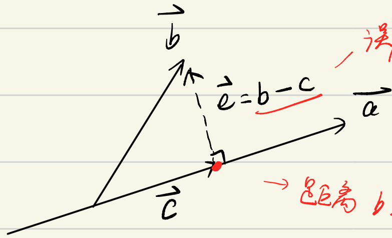
（x^Ty 与 y^Tx 同一个东西）

$$=2x^Ty$$

5. 投影 projection 矩阵(降维).

$C_{proj} = P\vec{b}$ $\qquad C = \frac{aa^T}{a^Ta} b$

投影矩阵



分析过程.

由垂直: $a^T(b - xa) = 0$ $\qquad C = xa$.

$x a^T a = a^T b$

$x = \frac{a^T b}{a^T a}$ 为一个数

$a x = \frac{aa^T}{a^Ta} b$

$\vec{c} = P b$

tip: $r(\alpha\beta^T)=1$: 原因: $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1 \cdots b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 \cdots a_1b_n \\ a_nb_1 \cdots \end{pmatrix}$ 每行都是 $b_1 \cdots b_n$ 的倍数

$r(aa^T)=1$. $\qquad a^Ta$ 是一个数.

方阵. 秩为1.

$(aa^T)^T = aa^T$

且 aa^T 为对称矩阵. 令 $aa^T = P$.

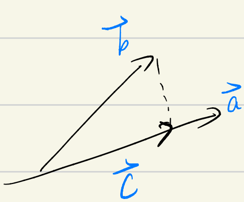
$P^T = P$ ①

☆

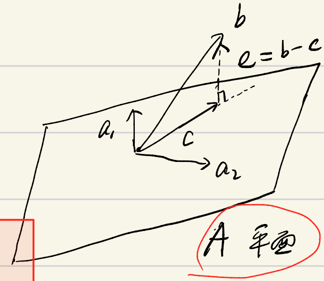
$P^2 = P$ ② why? ☆

because: $\vec{c} = P\vec{b}$. 表b在a上的投影. P^2. 不过是多一次投影.

不管投影多少次, 依旧是 $\vec{c}$.



多维投影：



$r(A)=2$

平面 $A(a_1,a_2)$. c 为 b 在 A 上的投影.

显然 $Ax=b$ 无解，因为 b 不在 A 的向量空间内.

但可找最优解：$A\hat{x}=c$ （c 为 b 在 A 中的投影）.

$e=b-c=b-A\hat{x}$，显然 $e\perp a_1, a_2$ ~~垂直于A平面~~.

A^T 每一向量都垂直

故：$\begin{cases} a_1^T(b-A\hat{x})=0 \\ a_2^T(b-A\hat{x})=0 \end{cases} \Rightarrow A^T(b-A\hat{x})=0$.

in $N(A^T)$ 左零空间.

统计学上最重要的公式

$\therefore \boxed{A^TA\hat{x}=A^Tb} \xrightarrow[\text{可逆}]{A^TA\text{为对称阵}} \boxed{\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb}$ ☆☆☆

（投影系数向量）

线性组合作用在 A 上，投影就是 c

$c=A\hat{x} \longrightarrow$ 投影 $c=A(A^TA)^{-1}A^Tb$

$\boxed{P=A(A^TA)^{-1}A^T}$ 投影矩阵　　$c=Pb$.

Note: A 不一定是方阵. $(A^TA)^{-1}$ 展开成 $A^{-1}(A^T)^{-1}$ 不恒成立！

但 $r(A)\geq 2$. 若 A 刚好是三维. $r(A^TA)=r(A)=2$. 故 $(A^TA)_{2\times 2}$ 一定可逆.

A 可能是

$(\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots)$

则 $P=I$ 单位阵。

（b 在A的空间内，投影就是自身）

再来看 P^2

$$P^2 = A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^TA(A^TA)^{-1}}_{E}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P$$

注意一维 $P^2 = \frac{aa^T}{a^Ta} \cdot \frac{aa^T}{a^Ta} = \frac{a\overbrace{a^Ta}a^T}{(a^Ta)^2} = \frac{aa^T}{a^Ta} = P$ 依然成立。

事实上：$\frac{1}{a^Ta} \xrightarrow{多维} (A^TA)^{-1}$

总结：矩阵 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$，能产生投影。

$c=Pb$，可以将 b 向量投影到 A的列空间最近的点上。

① 如果 b 在 A的列空间内，则 $Pb=b$，

证：Ax 表示 A的所有列向量的线性组合，当 b 在A的列空间内时，

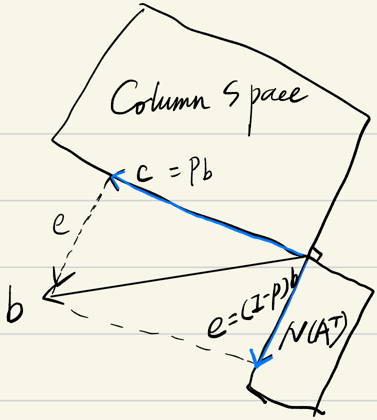
一定有 $Ax=b$

$$\therefore Pb = \underbrace{A(A^TA)^{-1}A^TA}_{E}\overbrace{x}^{b} = Ax = b$$

② 如果 $b \perp$ A的列向量空间，$Pb=0$。此时 b in $N(A^T)$

即：b 在 A^T 的零向量空间内。

↓ 同为



A的列向量空间与 $N(A^T)$ 垂直.

显然: $e+c=b$. 其中 c为b在列空间上的投影, e 称为误差, e为 b 在 $N(A^T)$ 上的投影.

$e+Pb=b$. $e=(I-P)b$ $c=Pb$

单位阵.

★★ $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$

Note

① $C_{proj}=A(A^TA)^{-1}A^Tb$

② $A^TA\hat{x}=A^Tb$ (统计学上非常重要的估算式).

$A\hat{x}=C_{proj}$ 可得①

③ 误差 e 在 $N(A^T)$ 内, 与列空间垂直。

④ $P=A(A^TA)^{-1}A^T$ $C_{proj}=Pb$. $e=(I-P)b$.

⑤ A^TA 当 A 列满秩 A^TA 一定可逆.

$A_{m\times n}$, $A^T_{n\times m}$. $A^T_{n\times m}\cdot A_{m\times n} = [\ ]_{n\times n}$

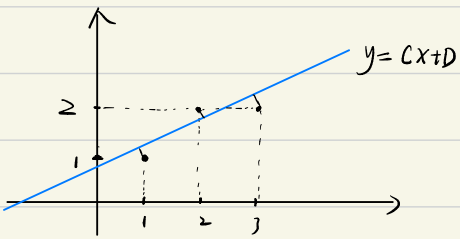
⑥ AA^T. 当 A 行满秩 AA^T 一定可逆.

$A_{m\times n}\cdot A^T_{n\times m} = [\ \ ]_{m\times m}$

投影矩阵的两个性质:
$$\begin{cases} P^T = P & (\text{对称}) \\ P^2 = P. & (\text{一次投影后, 之后投影不再变化}) \end{cases}$$

最小二乘法、最优解

(在不同的维度下看待问题，解决问题).



找出离 (1, 1)、(2, 2)、(3, 2) 距离最近的直线 $y=Cx+D$

成功的开始是，大胆的列出下列的无解方程组.

$$\begin{cases} C+D=1 \\ 2C+D=2 \\ 3C+D=2 \end{cases}$$

(原题两点确定一条直线，三个点都在直线上，这是最理想的情况).

⟶ 找出误差: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. 问题转变为 ⟶ $Ax=b$ 的解.

显然无解. A 的列向量空间构成了平面，b 在 A 上的投影，即 A 上离 b 最近的点。显然在二维平面下，问题的变量变为单一因素.

投影方程. $A\hat{x}=c$. c 为 b 在 A 上的投影. $e=b-A\hat{x}$

e 与 A^T 列空间垂直

有: $A^T(b-A\hat{x})=0$. $\Longrightarrow$ $A^TA\hat{x}=A^Tb$ ☆

统计学误差估计最重要的公式.

$\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$

由: $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$. $b\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$. $A^TA=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&6\\6&3\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}14&6\\6&3\end{bmatrix}\hat{x}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}14C+6D=11\\6C+3D=5.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}C=\frac{1}{2}\\D=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

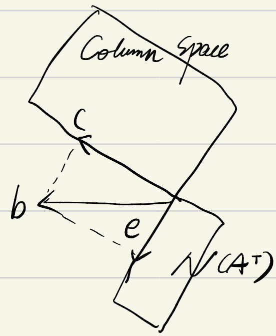
$$\hat{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

得: $y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$. $\begin{cases}x=1\\y=\frac{7}{6}\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=\frac{5}{3}\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=\frac{13}{6}\end{cases}$

参考点. $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

误差: $e_1=-\frac{1}{6}$ $e_2=\frac{2}{6}$ $e_3=-\frac{1}{6}$

误差向量: $e=(-\frac{1}{6},\ \frac{2}{6},-\frac{1}{6})$.

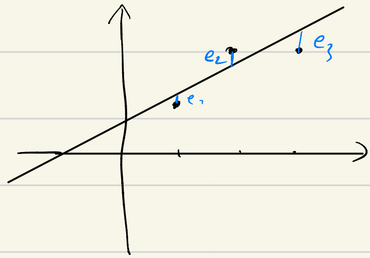


投影向量: $A\hat{x}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\\frac{5}{3}\\\frac{13}{6}\end{pmatrix}=c$

验算:

$c+e=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$. 即. $e\perp A^T\to e\perp\vec{c}$: $(-\frac{1}{6},\frac{2}{6},-\frac{1}{6})\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\\frac{5}{3}\\\frac{13}{6}\end{pmatrix}=0$

用微积分的思想求解:



由最初的无解方程组:

$$\begin{cases} C+D=1 \\ 2C+D=2 \\ 3C+D=2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rightarrow e_1 = \overbrace{C+D}^{\text{实际}y}-1 \\ &\rightarrow e_2 = 2C+D-2 \\ &\rightarrow e_3 = 3C+D-2 \end{aligned}$$

总体误差: $|Ax-b|^2 = |e|^2$. 用平方来避免正负性 (正负性无法判断大小)

$$|e|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

即函数: $u = (C+D-1)^2 + (2C+D-2)^2 + (3C+D-2)^2$

转变为 $u(C,D)$ 函数的最小值. $\boxed{\text{无条件极值}}$ ☆☆☆

$$u'_C = 2(C+D-1)+2(2C+D-2)\cdot 2 + 2(3C+D-2)\cdot 3$$
$$= 28C+12D-22 = 0$$

$$u'_D = 2(C+D-1)+2(2C+D-2)+2(3C+D-2)$$
$$= 12C+6D-10 = 0$$

手算可以 但如果用 计算机实现 就不太容易, 这时需用 梯度下降法

$$\begin{cases} 12C+6D=10 \\ 28C+12D=22 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{2} \\ D=\frac{2}{3} \end{cases}$$

同样的结果.

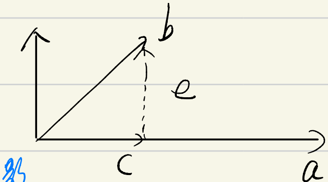
§ 正交、正交基

正交矩阵：$\begin{cases} ① \text{ 两两正交.} \\ ② \text{ 每个列向量为单位向量.} \end{cases}$

正交化 （即 投影）

$e \perp a$

↑ 目标



$$\boxed{e = b - c}$$

$$= b - \frac{aa^Tb}{a^Ta}$$

$e = b -$ b在a上的投影

$$= b - \frac{a^Tb}{a^Ta}a$$

取a为A. $B = b - \frac{A^Tb}{A^TA}A$.

投影矩阵：$P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 若 A为正交矩阵.（方阵）.

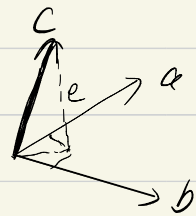
$$P = AA^T = I$$

估算统计（在正交矩阵下进行）.

$A^TA\hat{x} = A^Tb$ Now A is Q. $A^TA = I$.

$$\hat{x} = A^Tb$$

$\boxed{\hat{x}_i = q_i^T b.}$ 第i基向上的投影 $= q_i^T b$.



多个向量正交：

让 c 与 a、b 同时垂直。

正交的解

$\beta_c = c -$ a方向的分量 $-$ b方向上的分量。

a上投影　　　　b上的投影

$$\beta_c = c - \frac{a^Tc}{a^Ta}a - \frac{b^Tc}{b^Tb}b$$

c在a的投影　　　　c在b的投影

写作 $$C = c - \frac{A^Tc}{A^TA}A - \frac{B^TC}{B^TB}B.$$

C在A上的投影　　　　C在B上的投影

A的列向量线性无关。

则 正交化可简单的记为 $A = QR$ ，类似消元 $A = LU$

列组合

正交矩阵

上三角

其中 R为上三角

$$[a\ \ b] = [q_1\ \ q_2]\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}$$

第一列只差单位化的倍数。

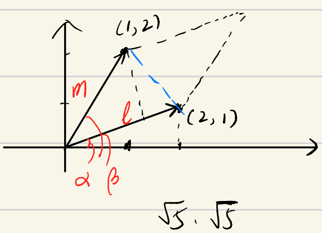
5. Determinants (部分)

每个部分都与一个数字有关系.

克拉默法则:

推导: $Ax=b \xrightarrow{A可逆} x=A^{-1}b$ $\quad x=\frac{A^*b}{|A|}$ $\begin{cases} x_1=\frac{|b_1\ A^*|}{|A|} \\ x_2=\frac{|\ \ b\ \ |}{|A|} \\ \vdots \end{cases}$

行列式与面积、体积 (还可用线性积分证明, 暂时还不出来).



$S_{\square}=l\cdot m\cdot\sin(\beta-\alpha)$

$=l\cdot m\cdot[\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha]$

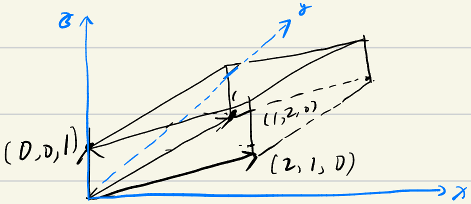
$=l\cdot\cos\alpha\cdot m\sin\beta-l\cdot\sin\alpha\cdot m\cdot\cos\beta$

$=2\cdot2-1\cdot1=3$

$=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=|-3|=3.$

$S_{\triangle}=\frac{1}{2}S_{\square}.$

☆：基于：一个高为"1"的立方体的体积在数值上等于其底面积.



$$S_{\square} = V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |-3| = 3$$

而 $V = (\underset{\text{叉乘}}{v \times u}) \underset{\text{点乘}}{\cdot} w = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} v \\ u \\ w \end{matrix} \end{array}$

单纯叉乘：$v \times u \xrightarrow{\text{是一个向量积}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$

The Cross Product

The *cross product* is an extra (and optional) application, special for three dimensions. Start with vectors $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ and $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Unlike the dot product, which is a number, **the cross product is a vector**—also in three dimensions. It is written $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ and pronounced "$\boldsymbol{u}$ cross $\boldsymbol{v}$." *The components of this cross product are 2 by 2 cofactors.* We will explain the properties that make $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ useful in geometry and physics.

This time we bite the bullet, and write down the formula before the properties.

DEFINITION The ***cross product*** of $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ and $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ is a vector

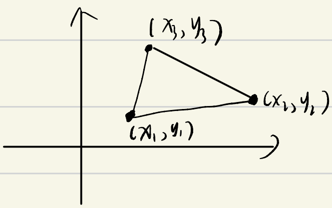
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\boldsymbol{k}. \tag{10}$$

This vector $\mathbf{u} \times \boldsymbol{v}$ is perpendicular to $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{v}$. The cross product $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ is $-(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$.

Comment The 3 by 3 determinant is the easiest way to remember $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. It is not especially legal, because the first row contains vectors $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ and the other rows contain numbers. In the determinant, the vector $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$ multiplies u_2v_3 and $-u_3v_2$. The result is $(u_2v_3 - u_3v_2, 0, 0)$, which displays the first component of the cross product.

Notice the cyclic pattern of the subscripts: 2 and 3 give component 1 of $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, then 3 and 1 give component 2, then 1 and 2 give component 3. This completes the definition of $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Now we list the properties of the cross product:

若一个三角形，三个顶点都不在原点，可通过计算3维下高为1的体积



$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

行列式几何意义与相关性.

2维：向量组不相关 $\Leftrightarrow S_\square \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$

3维：不相关 $\Leftrightarrow V \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Note. 故 $|A|$ 值的意义
- ① 空间几何体的面积/体积.
- ② 向量组的相关性.

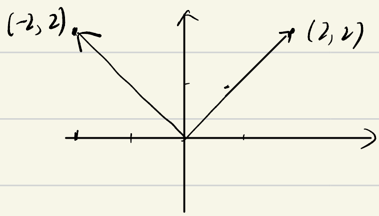
§. 特征值、特征向量

引言

① Pb 矩阵，让 b 变为 A 空间的投影。 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$.

② $Q=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，当 Q 作用在一个向量上，可以让向量旋转 90°

例. $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.



而 $Ax=\lambda x$，表示：矩阵 A 作用在 x 上，得到的是一个平行于 x 的向量。

结果相当于 λ 倍的 x 向量。 $\begin{cases} x\text{：特征向量} \\ \lambda\text{：特征值} \end{cases}$

$|\lambda E-A|$ 用来求出特征值。 $\begin{cases} \text{① } \lambda \text{ 有可能是复根，即 } |\lambda E-A|>0. \\ \text{② } \lambda \text{ 可能有重根。} \end{cases}$

差分方程

特征值解决高次幂的计算.

$A=P\Lambda P^{-1} \to A^n = P\Lambda^n P^{-1} \to \Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^n \end{pmatrix}$

斐波那切: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 - - - - F_{100}.

① $\begin{cases} F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \\ F_k = F_k \end{cases} \xrightarrow{\text{向量化}} u_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$, $U_{k+1} = AU_k$.

其中. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\xrightarrow{\text{检验}} AU_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k + F_{k-1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$

$= U_{k+1}$

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $U_2 = AU_1$. $U_3 = AU_2 = A^2U_1$. $U_{100} = A^{99}U_1$

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. $\xrightarrow{\text{特征值}} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

求特征向量:

观察到: $\begin{pmatrix} \lambda_1-1 & -1 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $\therefore \xi_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\therefore$ $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$,

试算. $U_2 = AU_1 = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

即: $u_2 = 1$, $u_1 = 1$.

$P^{-1} = \frac{P^*}{|A|} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

验算 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2+\lambda_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

由此可计 A^{100}.

Note. 体会思路：
$\begin{cases} ① \text{ 建方程组.} \\ ② \text{ 向量化 } U_{k+1}=AU_k. \end{cases}$