Ряд Лапласа можно продолжать до тех пор, пока какой-нибудь из инвариантов h^n не обратится тождественно в нуль. Замечательным свойством этого ряда является то, что если при каком-нибудь n оказывается $h^n = 0$, то для исходного уравнения может быть построена *формула общего решения* с двумя произвольными функциями, содержащая квадратуры. Если же ряд Лапласа «обрывается» с двух концов, то можно построить формулу общего решения исходного уравнения, не содержащую квадратур. Эти красивые аналитические факты здесь не доказываются, поскольку в дальнейшем они использоваться не будут. С ними можно познакомиться, например, по указанному в списке литературы к этой главе классическому трактату Дарбу.

Для дальнейшего важен случай, когда инварианты h^n находятся в постоянном отношении.

Л е м м а. *Если уравнение (h, k) таково, что отношения*

$$k/h = p, \qquad (\partial_x \partial_y \ln h)/h = q \tag{3.6}$$

постоянны, то все инварианты ряда Лапласа этого уравнения находятся в постоянном отношении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях ряда Лапласа ра- венства (3.6) переписываются в виде

$$h^{-1} = ph^0, \qquad \partial_x \partial_y \ln h^0 = qh^0.$$

Из формулы (3.5) при $n = 0$ следует постоянство отношения $h^1/h^0 = 2 - p - q$. На основании этого постоянство отношения h^n/h^0 устанавливается с помощью формулы (3.5) индукцией но n.■

В случае постоянных $, q$ для отыскания отношения h^n/h^0 при любом n надо рассмотреть формулу (3.5) как уравнение в конечных разностях

$$h^{n+1} - 2h^n + h^{n-1} = -qh^0$$

с начальными условиями $h^{-1} = ph^0, h^0 = h^0$. Решение этой задачи (очевидно, единственное) есть

$$h^n/h^0 = 1 + (1-p)n - \frac{1}{2}qn(n+1). \tag{3.7}$$

4. Определяющие уравнения. Если искать допускаемый уравнением (1.2) оператор вида $\alpha\partial_x + \beta^\partial_y + \gamma^\partial_z$ с координатами $\alpha, \beta, \gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, то окажется, что частью системы определяющих уравнений будут уравнения вида 7 (14.6), т. е. в данном случае уравне- ния $\partial_x \alpha = \partial_y \beta = 0,\ \partial_y^2 \gamma = 0$. Из этого факта и результатов 7.14 следует, что для уравнения (1.2) его основная алгебра Ли есть $LE = L^r \bigoplus L^\infty$, где L^r образована операторами вида

$$\zeta \cdot \partial = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y + \sigma(x,y)\partial_z \tag{4.1}$$

Очевидно, что преобразования растяжения с оператором $z\partial_z$ допускаются любым уравнением (1.2), т. е. входят в ядро основных групп класса уравнений (1.2). Поэтому оператор $z\partial_z$, можно включить в L^∞ и считать, что функция σ в операторе (4.1) определена с точностью до постоянного слагаемого.

Определяющие уравнения выводятся, следуя алгоритму 5.8. Применение дважды продолженного оператора (4.1)

$$\underset{2}{\zeta} \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \tau_1 \partial_{z_1} + \tau_2 \partial_{z_2} + \tau_{11} \partial_{z_{11}} + \tau_{12} \partial_{z_{12}} + \tau_{22} \partial_{z_{22}};$$

$$\tau_1 = \sigma_x z + (\sigma - \xi_x) z_1 - \eta_x z_2, \qquad \tau_2 = \sigma_y z - \xi_y z_1 + (\sigma - \eta_y) z_2;$$

$$\tau_{11} = \sigma_{xx} z + (2\sigma_x - \xi_{xx}) z_1 - \eta_{xx} z_2 + (\sigma - 2\xi_x) z_{11} - 2\eta_x z_{12},$$

$$\tau_{12} = \sigma_{xy} z + (\sigma_x - \xi_{xy}) z_1 + (\sigma_x - \eta_{xy}) z_2 - \xi_y z_{11} +$$
$$+ (\sigma - \xi_x - \eta_y) z_{12} - \eta_x z_{22},$$

$$\tau_{22} = \sigma_{yy} z - \xi_{yy} z_1 + (2\sigma_y - \eta_{yy}) z_2 - 2\xi_y z_{12} + (\sigma - 2\eta_y) z_{22},$$

к уравнению (1.2) дает условие инвариантности

$$\sigma_{xy} z + (\sigma_y - \xi_{xy}) z_1 + (\sigma_x - \eta_{xy}) z_2 - \xi_y z_{11} -$$
$$-(\sigma - \xi_x - \eta_y)(A z_1 + B z_2 + C z) - \eta_x z_{22} + A(\sigma_x z + (\sigma - \xi_x) z_1 - \eta_x z_2) +$$
$$+ B(\sigma_y z - \xi_y z_1 + (\sigma - \eta_y) z_2) + C\sigma z + (\xi \partial_x A + \eta \partial_y A) z_1 +$$
$$+ (\xi \partial_x B + \eta \partial_y B) z_2 + (\xi \partial_x C + \eta \partial_y C) z = 0,$$

где $\sigma_x = \partial_x \sigma$, $\sigma_{xy} = \partial_x \partial_y \sigma$ и т. д.

Расщепление относительно «свободных» параметров $z, z_1, z_2, z_{11}, z_{22}$ приводит к определяющим уравнениям, которые после небольшой обработки и использования инвариантов Лапласа (2.2) равносильны следующим:

$$\xi_y = 0, \qquad \eta_x = 0;$$

$$\partial_x(\sigma + B\xi + A\eta) = (h - k)\eta, \quad \partial_y(\sigma + B\xi + A\eta) = (h - k)\xi; \tag{4.2}$$

$$\partial_x(k\xi) + \partial_y(k\eta) = 0, \quad \partial_x(k\xi) + \partial_y(k\eta) = 0. \tag{4.3}$$

Первые два уравнения (4.2) показывают, что ξ зависит только от x, а η — только от y. Следующие два уравнения (4.2) служат для определения функции σ после того, как найдены ξ и η; условие совместности этих урпнпоиий следует из (4.3). При этом функция σ определена уравнениями (4.2) однозначно с точностью до постоянного слагаемого, что соответствует предположению об опера- торах (4.1) допускаемой уравнением (1.2) алгебры Ли L^r. Таким образом, ответственными за общее решение определяющих уравнений и за результаты групповой классификации являются уравнения (4.3). На самом деле, используя леммы 9.2, легко проверить,