

Analisi 2

Ede Boanini

20 gennaio 2026

Indice

1 Equazioni differenziali	2
1.1 EDO di I ordine	2
1.2 EDO di II ordine	2
1.2.1 EDO di II ordine omogenee	2
1.2.2 EDO di II ordine non omogenee	2
1.2.3 Metodo di somiglianza: $f(x)$ polinomio	2
1.2.4 Metodo di somiglianza: $f(x)$ esponenziale	5
1.2.5 Metodo di somiglianza: $f(x)$ è sin o cos	7
2 Calcolo infinitesimale per le curve	7
2.1 Calcolo vettoriale	7
2.1.1 Norma di un vettore e proprietà associate	7
2.1.2 Funzione "lunghezza" di un vettore	8
2.2 Spazio metrico	8
3 Calcolo differenziale per funzioni in più variabili	10
3.1 Differenziabilità	10
3.1.1 Derivabilità vs Differenziabilità	10
3.1.2 Massimo e Minimo	11
4 Calcolo integrale per funzioni in più variabili	12

1 Equazioni differenziali

1.1 EDO di I ordine

$$y' = 3e^x$$

1.2 EDO di II ordine

$$2y'' + 5y = e^x$$

1.2.1 EDO di II ordine omogenee

1.2.2 EDO di II ordine non omogenee

1.2.3 Metodo di somiglianza: $f(x)$ polinomio

Utile per trovare la soluzione particolare y_p delle EDO di II ordine non omogenee.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$ è un polinomio di grado n :

Caso 1: $c \neq 0$

$c \neq 0$

$$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 3x + 1$$

Qui $f(x) = x^2 + 3x + 1$ che è un polinomio con

- $a = 1$
- $b = 2$
- $c = -8$

$c \neq 0$ quindi devo cercare polinomio di grado n (che corrisponde al grado del polinomio a destra dell'uguale), quindi $n = 2$:

1. Scrivo polinomio di grado $n = 2$ generico:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Questa sarà la forma della soluzione particolare y_p

2. Devo trovare chi sono α, β, γ , come faccio? Calcolo derivata prima e seconda della soluzione particolare: $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- Calcolo derivata prima:

$$y'_p = 2\alpha x + \beta$$

- Calcolo derivata seconda:

$$y''_p = 2\alpha$$

3. Sostituisco y_p, y'_p, y''_p trovati in $y'' + 2y' - 8y$:

Ho:

$$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 3x + 1$$

Sostituisco $y_p = y, y'_p = y', y''_p = y''$

$$(2\alpha) + 2(2\alpha x + \beta) - 8(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 + 3x + 1$$

Ora sviluppo i calcoli per trovare α, β, γ :

$$(2\alpha) + 2(2\alpha x + \beta) - 8(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 + 3x + 1$$

$$2\alpha + 4\alpha x + 2\beta - 8\alpha x^2 - 8\beta x - 8\gamma = x^2 + 3x + 1$$

$$x^2(-8\alpha) + x(4\alpha - 8\beta) + 2\alpha + 2\beta - 8\gamma = x^2 + 3x + 1$$

Metto a sistema:

$$x^2(-8\alpha) + x(4\alpha - 8\beta) + 2\alpha + 2\beta - 8\gamma = x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{cases} -8\alpha = 1 \\ 4\alpha - 8\beta = 3 \\ 2\alpha + 2\beta - 8\gamma = 1 \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ottengo:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{8} \\ \beta = -\frac{7}{16} \\ \gamma = -\frac{17}{64} \end{cases}$$

4. La soluzione particolare $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ dopo aver trovato α, β, γ sarà:

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ &= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{16}x - \frac{17}{64} \end{aligned}$$

Caso 2: c uguale a zero

$$c = 0, \quad b \neq 0$$

$$y'' + 7y' = x + 3$$

$c = 0$ quindi devo cercare polinomio di grado $n + 1$, poiché il grado di $x + 3$ è 1, allora $n + 1 = 1 + 1 = 2$, quindi $n = 2$:

1. Scrivo polinomio di grado $n = 2$ generico:

$$y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

2. Calcolo derivata prima e seconda

- $y'_p = 2\alpha x + \beta$
- $y''_p = 2\alpha$

3. Sostituisco nella EDO originale e trovo α, β, γ :

Sostituisco y_p, y'_p, y''_p trovati in $y'' + 7y'$:

$$y'' + 7y' = x + 3$$

$$(2\alpha) + 7(2\alpha x + \beta) = x + 3$$

$$2\alpha + 14\alpha x + 7\beta = x + 3$$

$$x(14\alpha) + 2\alpha + 7\beta = x + 3$$

Metto a sistema:

$$\begin{cases} 14\alpha = 1 \\ 2\alpha + 7\beta = 3 \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ottengo:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{14} \\ \beta = \frac{20}{49} \end{cases}$$

4. Ottengo la soluzione particolare:

La soluzione particolare $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ dopo aver trovato α, β, γ sarà:

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ &= \frac{1}{14}x^2 + \frac{20}{49}x - 0 \\ &= \frac{1}{14}x^2 + \frac{20}{49}x \end{aligned}$$

Caso 3

$c, b = 0$

$$y'' = x^2 + 4x - 7$$

$c, b = 0$ quindi devo cercare un polinomio di grado $n + 2$, poiché il grado di $x^2 + 4x - 7$ è 2, allora $n + 2 = 2 + 2 = 4$.

Ho due metodi:

- Integrare due volte, oppure
- Trovare il polinomio generico di grado $n = 4$:

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$$

Primo metodo: Integrare due volte

Qui non trovo la soluzione particolare ma trovo la soluzione generale della EDO:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 7) dx &= \int x^2 dx + \int 4x dx - \int 7 dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + c_1 \end{aligned}$$

Integro di nuovo:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + c_1 \right) dx &= \int \frac{x^3}{3} dx + \int 2x^2 dx - \int 7x dx + \int c_1 dx \\ &= \frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Soluzione generale della EDO:

$$\frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Secondo metodo: metodo di somiglianza

Qui trovo solo la soluzione particolare:

1. Scrivo polinomio di grado $n = 4$ generico:

$$y_p = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$$

2. Calcolo derivata seconda del polinomio generico:

- $y'_p = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$
- $y''_p = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$

3. Sostituisco la derivata seconda trovata nella EDO e trovo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$:

$$y'' = x^2 + 4x - 7$$

diventa:

$$\begin{aligned} (12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma) &= x^2 + 4x - 7 \\ x^2(12\alpha) + x(6\beta) + 2\gamma &= x^2 + 4x - 7 \end{aligned}$$

Metto a sistema:

$$\begin{cases} 12\alpha = 1 \\ 6\beta = 4 \\ 2\gamma = -7 \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ottengo:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{12} \\ \beta = \frac{2}{3} \\ \gamma = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

4. Ottengo la soluzione particolare: La soluzione particolare $y_p = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$ dopo aver trovato $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sarà:

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon \\ &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 0x + 0 \\ &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 \end{aligned}$$

1.2.4 Metodo di somiglianza: $f(x)$ esponenziale

Utile per trovare la soluzione particolare y_p delle EDO di II ordine non omogenee.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$ è un esponenziale

Caso 1: α non è soluzione dell'eq. caratteristica

$f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ e α non è soluzione dell'equazione caratteristica.

$$y'' + 7y' + 12y = 5e^{2x}$$

In questo caso abbiamo che $c = 5$ e $\alpha = 2$.

1. Trovo soluzioni dell'omogenea associata (ponendo $f(x) = 0$):

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

Quindi:

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(12) = 49 - 48 = 1$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm 1}{2} =$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -4$$

2. α fa parte delle soluzioni dell'equazione caratteristica?

No, perchè ho ottenuto $x_1 = -3, x_2 = -4$. Quindi adesso cerco soluzione particolare nella forma:

$$y_p = k \cdot e^{\alpha x}$$

- (a) Calcolo derivata prima e seconda di $y_p = k \cdot e^{2x}$:

- $y'_p = 2ke^{2x}$
- $y''_p = 4ke^{2x}$

- (b) Sostituisco le derivate nella EDO:

$$y'' + 7y' + 12y = 5e^{2x}$$

diventa:

$$\begin{aligned} (4ke^{2x}) + 7(2ke^{2x}) + 12(k \cdot e^{2x}) &= 5e^{2x} \\ 4ke^{2x}(4 + (7 \cdot 2) + 12) &= 5e^{2x} \\ 30ke^{2x} &= 5e^{2x} \end{aligned}$$

Ricavo k :

$$k = \frac{5e^{2x}}{30e^{2x}} = \frac{5}{30} \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{1}{6} \cdot (e^{2x-2x}) = \frac{1}{6} \cdot e^0 = \frac{1}{6}$$

(c) La soluzione particolare $y_p = k \cdot e^{\alpha x}$ diventa:

$$y_p = \frac{1}{6} e^{2x}$$

Quindi la soluzione della EDO sarà $y = y_O + y_p$, ovvero:

$$y = (c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}) + \frac{1}{6} e^{2x}$$

Caso 2: α è soluzione dell'eq. caratteristica

$f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ e α è soluzione dell'equazione caratteristica.

$$3y'' - 20y' - 7y = 4e^{7x}$$

In questo caso abbiamo che $c = 4$ e $\alpha = 7$.

1. Trovo soluzioni dell'omogenea associata (ponendo $f(x) = 0$):

$$3y'' - 20y' - 7y = 0$$

Quindi:

$$3\lambda^2 - 20\lambda - 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 4(3)(-7) = 400 + 84 = 484$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-20 \pm 22}{6} =$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3} \\ x_2 &= 7 \end{aligned}$$

2. α fa parte delle soluzioni dell'equazione caratteristica?

Sì, perchè ho ottenuto $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 7$. Quindi adesso cerco soluzione particolare nella forma:

$$y_p = kx \cdot e^{\alpha x}$$

- (a) Calcolo derivata prima e seconda di $y_p = kx \cdot e^{7x}$:

•

$$\begin{aligned} y'_p &= (f' \cdot g + f \cdot g') \\ &= ((kx)' \cdot e^{7x} + kx \cdot (e^{7x})') \\ &= ke^{7x} + 7kxe^{7x} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} y''_p &= (\textcolor{red}{ke}^{7x})' + (7kxe^{7x})' \\ &= \textcolor{red}{7ke}^{7x} + ((7kx)' \cdot e^{7x} + 7kx \cdot (e^{7x})') \\ &= 7ke^{7x} + (7ke^{7x} + 49kxe^{7x}) \\ &= 14ke^{7x} + 49kxe^{7x} \end{aligned}$$

- (b) Sostituisco le derivate nella EDO e trovo k :

$$3y'' - 20y' - 7y = 4e^{7x}$$

diventa:

$$\begin{aligned} 3(14ke^{7x} + 49kxe^{7x}) - 20(ke^{7x} + 7kxe^{7x}) - 7(kx \cdot e^{7x}) &= 4e^{7x} \\ 42ke^{7x} + 147kxe^{7x} - 20ke^{7x} - 140kxe^{7x} - 7kxe^{7x} &= 4e^{7x} \\ ke^{7x}(42 + 147x - 20 - 140x - 7x) &= 4e^{7x} \\ ke^{7x}(22) &= 4e^{7x} \end{aligned}$$

Ricavo k :

$$\begin{aligned} 22ke^{7x} &= 4e^{7x} \\ k &= \frac{4e^{7x}}{22e^{7x}} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11} \end{aligned}$$

(c) La soluzione particolare $y_p = kx \cdot e^{\alpha x}$ diventa:

$$y_p = \frac{2}{11}xe^{7x}$$

Quindi la soluzione della EDO sarà $y = y_O + y_p$, ovvero:

$$y = \left(c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{7x}\right) + \frac{2}{11}xe^{7x}$$

1.2.5 Metodo di somiglianza: $f(x)$ è sin o cos

Utile per trovare la soluzione particolare y_p delle EDO di II ordine non omogenee.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$ è $\sin(x)$ o $\cos(x)$

2 Calcolo infinitesimale per le curve

2.1 Calcolo vettoriale

Definizione : Vettore

1 vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ è una n-upla:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2.1.1 Norma di un vettore e proprietà associate

Definizione : Norma di un vettore

Sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Indico la **norma/lunghezza** di un vettore come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore \vec{x} per se stesso o equivalentemente, la radice quadrata della somma dei suoi componenti al quadrato, il numero reale non negativo:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

Teorema : Formula di Carnot

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La norma al quadrato della somma dei due vettori equivale alle loro norme al quadrato più due volte il loro prodotto scalare ^a:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Dimostrazione. Sapendo che $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$, allora:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \left(\sqrt{\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle} \right)^2 \\ &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \\ &\text{per bilinearità del prodotto scalare,} \\ &\text{come se facessi } (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

□

^aUn pò come $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Teorema : Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz p.56

Sia

2.1.2 Funzione "lunghezza" di un vettore

Teorema : Disuguaglianza triangolare p.58

Questo teorema usa Cauchy Schwartz e formula di Carnot per la dimostrazione

2.2 Spazio metrico

Definizione : Distanza euclidea

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La **distanza euclidea** tra \vec{x} e \vec{y} è il numero reale non negativo definito dalla norma della loro differenza:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Definizione : Palla aperta

- Sia $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato
- Sia il raggio $r > 0$ dove $r \in \mathbb{R}$

Si definisce **palla aperta** o intorno sferico di centro \vec{x}_0 e raggio r , come l'insieme:

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definizione : Insieme limitato p.64

Sia

Definizione : Punto interno p.64

Sia

Definizione : Punto esterno p.64

Sia

Definizione : Punti di frontiera p.64

Sia

Definizione : Punto di accumulazione p.65

Sia

Definizione : Insieme aperto p.65

Sia

Definizione : Insieme chiuso p.65

Sia

Teorema : Continuità p.74

Sia

Teorema : Criterio del confronto p.77

Sia

3 Calcolo differenziale per funzioni in più variabili

Teorema : Curva regolare p.103

Sia

Teorema : Definizione di Derivabilità con il vettore gradiente p.111

Sia

Teorema : Derivata Direzionale p.112

Sia

3.1 Differenziabilità

3.1.1 Derivabilità vs Differenziabilità

Teorema : Definizione Differenziabilità p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziale p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziabilità e Continuità p.121

Sia

Teorema : Teorema del differenziale totale p.122

Sia

Teorema : Regola della catena p.124

Sia

Teorema : Proprietà del differenziale p.125

Sia

Teorema : Derivazione della funzione composta p.128

Sia

Teorema : Teorema di Schwartz p.132

Sia

Teorema : Formula di Taylor con resto di Lagrange p.140

Sia

3.1.2 Massimo e Minimo

Teorema : Massimo e minimo locale p.143

Sia

Teorema : Massimo e minimo globale p.143

Sia

Teorema : Teorema di Fermat per funzioni in più variabili p.144

Sia

Teorema : Punti critici p.145

Sia

Teorema : Punti di sella p.145

Sia

Teorema : Test dell'Hessiana p.148

Sia

Teorema : Weierstrass p.151

Sia

Teorema : Moltiplicatori di Lagrange p.158

Sia

4 Calcolo integrale per funzioni in più variabili

Teorema : Funzione integrabile secondo Riemann p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Regione y-semplice p.172

Sia

Teorema : Regione x-semplice p.172

Sia

Teorema : Formula di Riduzione p.173

Sia

Teorema : Proprietà additività domini di integrazione p.173

Sia