Analisi 2

Ede Boanini

19 gennaio 2026

Indice

1 Equazioni differenziali

1.1 EDO di I ordine

$$y' = 3e^x$$

1.2 EDO di II ordine

$$2y'' + 5y = e^x$$

1.2.1 EDO di II ordine omogenee

1.2.2 EDO di II ordine non omogenee

1.2.3 Metodo di somiglianza per EDO II ordine non omogenee

Utile per trovare la soluzione particolare y_p delle EDO di II ordine non omogenee.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$ è un polinomio di grado n:

Esercizio

$$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 3x + 1$$

Qui $f(x) = x^2 + 3x + 1$ che è un polinomio con

- $a = 1$
- $b = 2$
- $c = -8$

$c \neq 0$ quindi devo cercare polinomio di grado n (che corrisponde al grado del polinomio a destra dell'uguale), quindi $n = 2$:

1. Scrivo polinomio di grado $n = 2$ generico:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

   Questa sarà la forma della soluzione particolare y_p

2. Devo trovare chi sono α, β, γ, come faccio? Calcolo derivata prima e seconda della soluzione particolare: $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

   - Calcolo derivata prima:
   $$2\alpha x + \beta$$
   - Calcolo derivata seconda:
   $$2\alpha$$

$f(x)$ è un esponenziale

$f(x)$ è $\sin(x)$ o $\cos(x)$

2 Calcolo infintesimale per le curve

2.1 Calcolo vettoriale

Definizione : Vettore

l vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ è una n-upla:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

2.1.1 Norma di un vettore e proprietà associate

Definizione : Norma di un vettore

Sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Indico la norma/lunghezza di un vettore come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore $\vec{x}$ per se stesso o equivalentemente, la radice quadrata della somma dei suoi componenti al quadrato, il numero reale non negativo:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

Teorema : Formula di Carnot

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La norma al quadrato della somma dei due vettori equivale alle loro norme al quadrato più due volte il loro prodotto scalare [a]:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Dimostrazione. Sapendo che $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$, allora:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \left(\sqrt{\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle}\right)^2 \\
&= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \\
&\text{per bilinearità del prodotto scalare,} \\
&\text{come se facessi } (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\
&= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle
\end{aligned}$$

□

[a] Un pò come $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Teorema : Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz p.56

Sia

2.1.2 Funzione "lunghezza" di un vettore

Teorema : Disuguaglianza triangolare p.58

Questo teorema usa chauchy Schwartz e formula di carnot per la dimostrazione

2.2 Spazio metrico

Definizione : Distanza euclidea

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La distanza euclidea tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$ è il numero reale non negativo definito dalla norma della loro differenza:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Definizione : Palla aperta

- Sia $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ fissato
- Sia il raggio $r > 0$ dove $r \in \mathbb{R}$

Si definisce palla aperta o intorno sferico di centro $\vec{x_0}$ e raggio r, come l'insieme:

$$B(\vec{x_0}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x}, \vec{x_0}) < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definizione : Insieme limitato p.64

Sia

Definizione : Punto interno p.64

Sia

Definizione : Punto esterno p.64

Sia

Definizione : Punti di frontiera p.64

Sia

Definizione : Punto di accumulazione p.65

Sia

Definizione : Insieme aperto p.65

Sia

Definizione : Insieme chiuso p.65

Sia

Teorema : Continuità p.74

Sia

Teorema : Criterio del confronto p.77

Sia

3 Calcolo differenziale per funzioni in più variabili

Teorema : Curva regolare p.103

Sia

Teorema : Definizione di Derivabilità con il vettore gradiente p.111

Sia

Teorema : Derivata Direzionale p.112

Sia

3.1 Differenziabilità

3.1.1 Derivabilità vs Differenziabilità

Teorema : Definizione Differenziabilità p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziale p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziabilità e Continuità p.121

Sia

Teorema : Teorema del differenziale totale p.122

Sia

Teorema : Regola della catena p.124

Sia

Teorema : Proprietà del differenziale p.125

Sia

Teorema : Derivazione della funzione composta p.128

Sia

Teorema : Teorema di Schwartz p.132

Sia

Teorema : Formula di Taylor con resto di Lagrange p.140

Sia

3.1.2 Massimo e Minimo

Teorema : Massimo e minimo locale p.143

Sia

Teorema : Massimo e minimo globale p.143

Sia

Teorema : Teorema di Fermat per funzioni in più variabili p.144

Sia

Teorema : Punti critici p.145

Sia

Teorema : Punti di sella p.145

Sia

Teorema : Test dell'Hessiana p.148

Sia

Teorema : Weierstrass p.151

Sia

Teorema : Moltiplicatori di Lagrange p.158

Sia

4 Calcolo integrale per funzioni in più variabili

Teorema : Funzione integrabile secondo Riemann p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Regione y-semplice p.172

Sia

Teorema : Regione x-semplice p.172

Sia

Teorema : Formula di Riduzione p.173

Sia

Teorema : Proprietà additività domini di integrazione p.173

Sia