

Analisi 2

Ede Boanini

19 gennaio 2026

Indice

1	Equazioni differenziali	2
2	Calcolo infinitesimale per le curve	2
2.1	Calcolo vettoriale	2
2.1.1	Norma di un vettore e proprietà associate	2
2.1.2	Funzione "lunghezza" di un vettore	3
2.2	Spazio metrico	3
3	Calcolo differenziale per funzioni in più variabili	5
3.1	Differenziabilità	5
3.1.1	Derivabilità vs Differenziabilità	5
3.1.2	Massimo e Minimo	6
4	Calcolo integrale per funzioni in più variabili	7

1 Equazioni differenziali

2 Calcolo infinitesimale per le curve

2.1 Calcolo vettoriale

Definizione : Vettore

l vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ è una n-upla:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2.1.1 Norma di un vettore e proprietà associate

Definizione : Norma di un vettore

Sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Indico la **norma/lunghezza** di un vettore come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore \vec{x} per se stesso o equivalentemente, la radice quadrata della somma dei suoi componenti al quadrato, il numero reale non negativo:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

Teorema : Formula di Carnot

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La norma al quadrato della somma dei due vettori equivale alle loro norme al quadrato più due volte il loro prodotto scalare ^a:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Dimostrazione. Sapendo che $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$, allora:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \left(\sqrt{\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle} \right)^2 \\ &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \\ &\text{per bilinearità del prodotto scalare,} \\ &\text{come se facessi } (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

□

^aUn pò come $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Teorema : Diseguaglianza di Cauchy-Schwartz p.56

Sia

2.1.2 Funzione "lunghezza" di un vettore

Teorema : Disuguaglianza triangolare p.58

Questo teorema usa Cauchy-Schwarz e formula di Carnot per la dimostrazione

2.2 Spazio metrico

Definizione : Distanza euclidea

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La **distanza euclidea** tra \vec{x} e \vec{y} è il numero reale non negativo definito dalla norma della loro differenza:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Definizione : Palla aperta

- Sia $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato
- Sia il raggio $r > 0$ dove $r \in \mathbb{R}$

Si definisce **palla aperta** o intorno sferico di centro \vec{x}_0 e raggio r , come l'insieme:

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definizione : Insieme limitato p.64

Sia

Definizione : Punto interno p.64

Sia

Definizione : Punto esterno p.64

Sia

Definizione : Punti di frontiera p.64

Sia

Definizione : Punto di accumulazione p.65

Sia

Definizione : Insieme aperto p.65

Sia

Definizione : Insieme chiuso p.65

Sia

Teorema : Continuità p.74

Sia

Teorema : Criterio del confronto p.77

Sia

3 Calcolo differenziale per funzioni in più variabili

Teorema : Curva regolare p.103

Sia

Teorema : Definizione di Derivabilità con il vettore gradiente p.111

Sia

Teorema : Derivata Direzionale p.112

Sia

3.1 Differenziabilità

3.1.1 Derivabilità vs Differenziabilità

Teorema : Definizione Differenziabilità p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziale p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziabilità e Continuità p.121

Sia

Teorema : Teorema del differenziale totale p.122

Sia

Teorema : Regola della catena p.124

Sia

Teorema : Proprietà del differenziale p.125

Sia

Teorema : Derivazione della funzione composta p.128

Sia

Teorema : Teorema di Schwartz p.132

Sia

Teorema : Formula di Taylor con resto di Lagrange p.140

Sia

3.1.2 Massimo e Minimo

Teorema : Massimo e minimo locale p.143

Sia

Teorema : Massimo e minimo globale p.143

Sia

Teorema : Teorema di Fermat per funzioni in più variabili p.144

Sia

Teorema : Punti critici p.145

Sia

Teorema : Punti di sella p.145

Sia

Teorema : Test dell'Hessiana p.148

Sia

Teorema : Weierstrass p.151

Sia

Teorema : Moltiplicatori di Lagrange p.158

Sia

4 Calcolo integrale per funzioni in più variabili

Teorema : Funzione integrabile secondo Riemann p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Regione y-simplice p.172

Sia

Teorema : Regione x-simplice p.172

Sia

Teorema : Formula di Riduzione p.173

Sia

Teorema : Proprietà additività domini di integrazione p.173

Sia