Analisi 2

Ede Boanini

20 gennaio 2026

Indice

1 Equazioni differenziali

1.1 EDO di I ordine

$$y' = 3e^x$$

1.2 EDO di II ordine

$$2y'' + 5y = e^x$$

1.2.1 EDO di II ordine omogenee

1.2.2 EDO di II ordine non omogenee

1.2.3 Metodo di somiglianza: $f(x)$ polinomio

Utile per trovare la soluzione particolare y_p delle EDO di II ordine non omogenee.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$ è un polinomio di grado n:

Caso 1: $c \neq 0$

$c \neq 0$

$$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 3x + 1$$

Qui $f(x) = x^2 + 3x + 1$ che è un polinomio con

- $a = 1$
- $b = 2$
- $c = -8$

$c \neq 0$ quindi devo cercare polinomio di grado n (che corrisponde al grado del polinomio a destra dell'uguale), quindi $n = 2$:

1. Scrivo polinomio di grado $n = 2$ generico:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$$
Questa sarà la forma della soluzione particolare y_p
2. Devo trovare chi sono α, β, γ, come faccio? Calcolo derivata prima e seconda della soluzione particolare: $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
   - Calcolo derivata prima:
   $$y_p' = 2\alpha x + \beta$$
   - Calcolo derivata seconda:
   $$y_p'' = 2\alpha$$
3. Sostituisco y_p, y_p', y_p'' trovati in $y'' + 2y' - 8y$:
Ho:
$$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 3x + 1$$
Sostituisco $y_p = y, y_p' = y', y_p'' = y''$
$$(2\alpha) + 2(2\alpha x + \beta) - 8(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 + 3x + 1$$
Ora sviluppo i calcoli per trovare α, β, γ:
$$(2\alpha) + 2(2\alpha x + \beta) - 8(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 + 3x + 1$$
$$2\alpha + 4\alpha x + 2\beta - 8\alpha x^2 - 8\beta x - 8\gamma = x^2 + 3x + 1$$
$$x^2(-8\alpha) + x(4\alpha - 8\beta) + 2\alpha + 2\beta - 8\gamma = x^2 + 3x + 1$$

Metto a sistema:
$x^2(-8\alpha)+x(4\alpha-8\beta)+2\alpha+2\beta-8\gamma = x^2+3x+1$

$$\begin{cases} -8\alpha = 1 \\ 4\alpha - 8\beta = 3 \\ 2\alpha + 2\beta - 8\gamma = 1 \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ottengo:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{8} \\ \beta = -\frac{7}{16} \\ \gamma = -\frac{17}{64} \end{cases}$$

4. La soluzione particolare $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ dopo aver trovato α, β, γ sarà:

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ &= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{16}x - \frac{17}{64} \end{aligned}$$

Caso 2: c uguale a zero

$c = 0, \quad b \neq 0$

$$y'' + 7y' = x + 3$$

$c = 0$ quindi devo cercare polinomio di grado $n+1$, poichè il grado di $x+3$ è 1, allora $n+1 = 1+1 = 2$, quindi $n = 2$:

1. Scrivo polinomio di grado $n = 2$ generico:

$$y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

2. Calcolo derivata prima e seconda
   - $y_p' = 2\alpha x + \beta$
   - $y_p'' = 2\alpha$
3. Sostituisco nella EDO originale e trovo α, β, γ:
   Sostituisco y_p, y_p', y_p'' trovati in $y'' + 7y'$:

$$y'' + 7y' = x + 3$$

$$(2\alpha) + 7(2\alpha x + \beta) = x + 3$$
$$2\alpha + 14\alpha x + 7\beta = x + 3$$
$$x(14\alpha) + 2\alpha + 7\beta = x + 3$$

Metto a sistema:

$$\begin{cases} 14\alpha = 1 \\ 2\alpha + 7\beta = 3 \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ottengo:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{14} \\ \beta = \frac{20}{49} \end{cases}$$

4. Ottengo la soluzione particolare:
   La soluzione particolare $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ dopo aver trovato α, β, γ sarà:

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ &= \frac{1}{14}x^2 + \frac{20}{49}x - 0 \\ &= \frac{1}{14}x^2 + \frac{20}{49}x \end{aligned}$$

Caso 3

$c, b = 0$

$$y'' = x^2 + 4x - 7$$

$c, b = 0$ quindi devo cercare un polinomio di grado $n + 2$, poichè il grado di $x^2 + 4x - 7$ è 2, allora $n + 2 = 2 + 2 = 4$.

Ho due metodi:

- Integrare due volte, oppure
- Trovare il polinomio generico di grado $n = 4$:

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$$

Primo metodo: Integrare due volte

Qui non trovo la soluzione particolare ma trovo la soluzione generale della EDO:

$$\int (x^2 + 4x - 7)dx = \int x^2 dx + \int 4x dx - \int 7dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + c_1$$

Integro di nuovo:

$$\int \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + c_1\right) dx = \int \frac{x^3}{3} dx + \int 2x^2 dx - \int 7x dx + \int c_1 dx$$
$$= \frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Soluzione generale della EDO:

$$\frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Secondo metodo: metodo di somiglianza

Qui trovo solo la soluzione particolare:

1. Scrivo polinomio di grado $n = 4$ generico:

$$y_p = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$$

2. Calcolo derivata seconda del polinomio generico:
   - $y'_p = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$
   - $y''_p = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$

3. Sostituisco la derivata seconda trovata nella EDO e trovo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$:

$$y'' = x^2 + 4x - 7$$

diventa:

$$(12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma) = x^2 + 4x - 7$$
$$x^2(12\alpha) + x(6\beta) + 2\gamma = x^2 + 4x - 7$$

Metto a sistema:

$$\begin{cases} 12\alpha = 1 \\ 6\beta = 4 \\ 2\gamma = -7 \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ottengo:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{12} \\ \beta = \frac{2}{3} \\ \gamma = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

4. Ottengo la soluzione particolare: La soluzione particolare $y_p = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$ dopo aver trovato $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sarà:

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon \\ &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 0x + 0 \\ &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 \end{aligned}$$

1.2.4 Metodo di somiglianza: $f(x)$ esponenziale

Utile per trovare la soluzione particolare y_p delle EDO di II ordine non omogenee.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$ è un esponenziale

Caso 1: α non è soluzione dell'eq. caratteristica

$f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ e α non è soluzione dell'equazione caratteristica.

$$y'' + 7y' + 12y = 5e^{2x}$$

In questo caso abbiamo che $c = 5$ e $\alpha = 2$.

1. Trovo soluzioni dell'omogenea associata (ponendo $f(x) = 0$):

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

Quindi:

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(12) = 49 - 48 = 1$$
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm 1}{2} =$$

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -4$$

2. α fa parte delle soluzioni dell'equazione caratteristica?
No, perchè ho ottenuto $x_1 = -3, x_2 = -4$. Quindi adesso cerco soluzione particolare nella forma:

$$y_p = k \cdot e^{\alpha x}$$

   (a) Calcolo derivata prima e seconda di $y_p = k \cdot e^{2x}$:
   - $y_p' = 2ke^{2x}$
   - $y_p'' = 4ke^{2x}$

   (b) Sostituisco le derivate nella EDO:

$$y'' + 7y' + 12y = 5e^{2x}$$

   diventa:

$$(4ke^{2x}) + 7(2ke^{2x}) + 12(k \cdot e^{2x}) = 5e^{2x}$$
$$ke^{2x}\,(4 + (7 \cdot 2) + 12) = 5e^{2x}$$
$$30ke^{2x} = 5e^{2x}$$

   Ricavo k:

$$k = \frac{5e^{2x}}{30e^{2x}} = \frac{5}{30} \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{1}{6} \cdot (e^{2x-2x}) = \frac{1}{6} \cdot e^0 = \frac{1}{6}$$

(c) La soluzione particolare $y_p = k \cdot e^{\alpha x}$ diventa:

$$y_p = \frac{1}{6}e^{2x}$$

Quindi la soluzione della EDO sarà $y = y_O + y_p$, ovvero:

$$y = \left(c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}\right) + \frac{1}{6}e^{2x}$$

Caso 2: α è soluzione dell'eq. caratteristica

$f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ e α è soluzione dell'equazione caratteristica.

$$3y'' - 20y' - 7y = 4e^{7x}$$

In questo caso abbiamo che $c = 4$ e $\alpha = 7$.

1. Trovo soluzioni dell'omogenea associata (ponendo $f(x) = 0$):

$$3y'' - 20y' - 7y = 0$$

Quindi:

$$3\lambda^2 - 20\lambda - 7 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 4(3)(-7) = 400 + 84 = 484$$
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-20 \pm 22}{6} =$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}$$
$$x_2 = 7$$

2. α fa parte delle soluzioni dell'equazione caratteristica?
Sì, perchè ho ottenuto $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 7$. Quindi adesso cerco soluzione particolare nella forma:

$$y_p = kx \cdot e^{\alpha x}$$

(a) Calcolo derivata prima e seconda di $y_p = kx \cdot e^{7x}$:

- $$\begin{aligned} y_p' &= \left(f' \cdot g + f \cdot g'\right) \\ &= \left((kx)' \cdot e^{7x} + kx \cdot (e^{7x})'\right) \\ &= ke^{7x} + 7kxe^{7x} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} y_p'' &= (ke^{7x})' + (7kxe^{7x})' \\ &= 7ke^{7x} + \left((7kx)' \cdot e^{7x} + 7kx \cdot (e^{7x})'\right) \\ &= 7ke^{7x} + \left(7ke^{7x} + 49kxe^{7x}\right) \\ &= 14ke^{7x} + 49kxe^{7x} \end{aligned}$$

(b) Sostituisco le derivate nella EDO e trovo k:

$$3y'' - 20y' - 7y = 4e^{7x}$$

diventa:

$$3(14ke^{7x} + 49kxe^{7x}) - 20(ke^{7x} + 7kxe^{7x}) - 7(kx \cdot e^{7x}) = 4e^{7x}$$
$$42ke^{7x} + 147kxe^{7x} - 20ke^{7x} - 140kxe^{7x} - 7kxe^{7x} = 4e^{7x}$$
$$ke^{7x}(42 + 147x - 20 - 140x - 7x) = 4e^{7x}$$
$$ke^{7x}(22) = 4e^{7x}$$

Ricavo k:

$$22ke^{7x} = 4e^{7x}$$
$$k = \frac{4e^{7x}}{22e^{7x}} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$$

(c) La soluzione particolare $y_p = kx \cdot e^{\alpha x}$ diventa:

$$y_p = \frac{2}{11}xe^{7x}$$

Quindi la soluzione della EDO sarà $y = y_O + y_p$, ovvero:

$$y = \left(c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{7x}\right) + \frac{2}{11}xe^{7x}$$

Caso 3

$f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ e
$\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$ è uguale ad entrambe le soluzioni dell'equazione caratteristica.

$$y'' - 12y' + 36y = 3e^{6x}$$

In questo caso abbiamo che $c = 3$ e $\alpha = 6$.

1. Trovo soluzioni dell'omogenea associata (ponendo $f(x) = 0$):

$$y'' - 12y' + 36y = 0$$

Quindi:

$$\lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0$$
$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{12}{2} = 6$$

Quindi ho due soluzioni coincidenti.

2. Quando le soluzioni dell'equazione caratteristica coincidono e sono uguali ad α, allora cerco soluzione particolare nella forma:

$$y_p = kx^2 \cdot e^{\alpha x}$$

(a) Calcolo derivata prima e seconda di $y_p = kx^2 \cdot e^{6x}$:

- $$\begin{aligned} y_p' &= \left(f' \cdot g + f \cdot g'\right) \\ &= \left((kx^2)' \cdot e^{6x} + kx^2 \cdot (e^{6x})'\right) \\ &= 2kxe^{6x} + 6kx^2e^{6x} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} y_p'' &= \left(f' \cdot g + f \cdot g'\right) \\ &= \left((2kx)' \cdot e^{6x} + 2kx \cdot (e^{6x})'\right) + \left((6kx^2)' \cdot e^{6x} + 6kx^2 \cdot (e^{6x})'\right) \\ &= \left(2ke^{6x} + 12kxe^{6x}\right) + \left(12kxe^{6x} + 36kx^2e^{6x}\right) \\ &= 36kx^2e^{6x} + 24kxe^{6x} + 2ke^{6x} \end{aligned}$$

(b) Sostiuisco le derivate nella EDO iniziale e ricavo k:

$$y'' - 12y' + 36y = 3e^{6x}$$

diventa:

$$(36kx^2e^{6x} + 24kxe^{6x} + 2ke^{6x}) - 12(2kxe^{6x} + 6kx^2e^{6x}) + 36(kx^2e^{6x}) = 3e^{6x}$$
$$36kx^2e^{6x} + 24kxe^{6x} + 2ke^{6x} - 24kxe^{6x} - 72kx^2e^{6x} + 36kx^2e^{6x} = 3e^{6x}$$
$$2ke^{6x} = 3e^{6x}$$
$$k = \frac{3e^{6x}}{2e^{6x}} = \frac{3}{2}$$

(c) La soluzione particolare $y_p = kx^2e^{\alpha x}$ diventa:

$$y_p = \frac{3}{2}x^2e^{6x}$$

La soluzione della EDO $y = y_O + y_p$ è:

$$y = \left(c_1e^{6x} + c_2xe^{6x}\right) + \frac{3}{2}x^2e^{6x}$$

1.2.5 Metodo di somiglianza: $f(x)$ è sin o cos

Utile per trovare la soluzione particolare y_p delle EDO di II ordine non omogenee.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$ è $\sin(x)$ o $\cos(x)$

2 Calcolo infintesimale per le curve

2.1 Calcolo vettoriale

Definizione : Vettore

l vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ è una n-upla:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

2.1.1 Norma di un vettore e proprietà associate

Definizione : Norma di un vettore

Sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Indico la norma/lunghezza di un vettore come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore $\vec{x}$ per se stesso o equivalentemente, la radice quadrata della somma dei suoi componenti al quadrato, il numero reale non negativo:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$$

Teorema : Formula di Carnot

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La norma al quadrato della somma dei due vettori equivale alle loro norme al quadrato più due volte il loro prodotto scalare [a]:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

Dimostrazione. Sapendo che $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle}$, allora:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \left(\sqrt{\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle}\right)^2 \\
&= \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle \\
&\text{per bilinearità del prodotto scalare,} \\
&\text{come se facessi } (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 \\
&= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2 \\
&= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle
\end{aligned}$$

□

[a] Un pò come $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Teorema : Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz p.56

Sia

2.1.2 Funzione "lunghezza" di un vettore

Teorema : Disuguaglianza triangolare p.58

Questo teorema usa chauchy Schwartz e formula di carnot per la dimostrazione

2.2 Spazio metrico

Definizione : Distanza euclidea

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori. La distanza euclidea tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$ è il numero reale non negativo definito dalla norma della loro differenza:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Definizione : Palla aperta

- Sia $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ fissato
- Sia il raggio $r > 0$ dove $r \in \mathbb{R}$

Si definisce palla aperta o intorno sferico di centro $\vec{x_0}$ e raggio r, come l'insieme:

$$B(\vec{x_0}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x}, \vec{x_0}) < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definizione : Insieme limitato p.64

Definisco l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato se $\exists$ una palla aperta di centro $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ in cui A ne risulta interamente contenuto:

$$A \subset B(\vec{x_0}, r)$$

Definizione : Punto interno

Un punto interno di un insieme è un punto per il quale esiste almeno un intorno interamente contenuto nell'insieme.
Sia $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ (punto appartenente all'insieme A), si dice che x_0 è un punto interno ad A se esiste un intorno di centro x_0 e raggio r completamente contenuto in A:

$$\exists r > 0 \mid B(x_0, r) \subset A$$

Definizione : Punto esterno

Un punto esterno ad un insieme è un punto per il quale esiste almeno un intorno interamente contenuto nel complementare dell'insieme.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un punto esterno ad $A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste un intorno di centro x_0 e raggio r completamente contenuto nel complementare di A:

$$\exists r > 0 \mid B(x_0, r) \subset \overline{A}$$

Definizione : Punti di frontiera

Un punto di frontiera (bordo) di un insieme è un punto il cui ogni intorno contiene almeno un punto dell'insieme e del suo complementare.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un punto di frontiera di $A \subseteq \mathbb{R}$ se ogni intorno di centro x_0 e raggio r contiene almeno un punto di A e allo stesso tempo, almeno un punto di $\overline{A}$:

$$\forall r > 0, \quad \exists y_1 \in A, \quad \exists y_2 \in \overline{A} \quad \text{t.c.} \quad y_1, y_2 \in B(x_0, r)$$

Definizione : Punto di accumulazione p.65

Sia

Definizione : Insieme aperto p.65

Sia

Definizione : Insieme chiuso p.65

Sia

Teorema : Continuità p.74

Sia

Teorema : Criterio del confronto p.77

Sia

3 Calcolo differenziale per funzioni in più variabili

Teorema : Curva regolare p.103

Sia

Teorema : Definizione di Derivabilità con il vettore gradiente p.111

Sia

Teorema : Derivata Direzionale p.112

Sia

3.1 Differenziabilità

3.1.1 Derivabilità vs Differenziabilità

Teorema : Definizione Differenziabilità p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziale p.115

Sia

Teorema : Definizione Differenziabilità e Continuità p.121

Sia

Teorema : Teorema del differenziale totale p.122

Sia

Teorema : Regola della catena p.124

Sia

Teorema : Proprietà del differenziale p.125

Sia

Teorema : Derivazione della funzione composta p.128

Sia

Teorema : Teorema di Schwartz p.132

Sia

Teorema : Formula di Taylor con resto di Lagrange p.140

Sia

3.1.2 Massimo e Minimo

Teorema : Massimo e minimo locale p.143

Sia

Teorema : Massimo e minimo globale p.143

Sia

Teorema : Teorema di Fermat per funzioni in più variabili p.144

Sia

Teorema : Punti critici p.145

Sia

Teorema : Punti di sella p.145

Sia

Teorema : Test dell'Hessiana p.148

Sia

Teorema : Weierstrass p.151

Sia

Teorema : Moltiplicatori di Lagrange p.158

Sia

4 Calcolo integrale per funzioni in più variabili

Teorema : Funzione integrabile secondo Riemann p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Funzioni continue p.165

Sia

Teorema : Regione y-semplice p.172

Sia

Teorema : Regione x-semplice p.172

Sia

Teorema : Formula di Riduzione p.173

Sia

Teorema : Proprietà additività domini di integrazione p.173

Sia