

Statistica

Ede Boanini

16 gennaio 2026

Indice

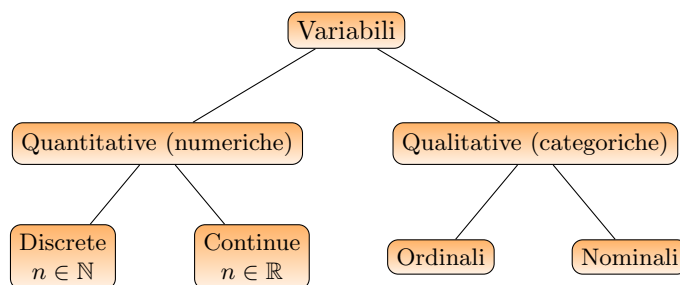
| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduzione | 4 |
| 1.1 | Classificazione delle Variabili | 4 |
| 1.2 | Distribuzioni di Frequenza | 4 |
| 1.2.1 | Tipi di Frequenza | 5 |
| 2 | Statistica Descrittiva | 6 |
| 2.1 | Diagrammi a barre vs Istogrammi | 6 |
| 2.2 | Media | 7 |
| 2.3 | Moda | 7 |
| 2.4 | Mediana | 7 |
| 2.5 | Quartili | 8 |
| 2.6 | Campo di Variazione / Range | 9 |
| 2.7 | Differenza Interquartile | 9 |
| 2.8 | Varianza | 9 |
| 2.9 | Deviazione standard | 9 |
| 2.10 | Coefficiente di variazione | 9 |
| 3 | Calcolo Combinatorio | 10 |
| 3.1 | Permutazioni Semplici | 10 |
| 3.2 | Permutazioni con Ripetizione | 10 |
| 3.3 | Disposizioni Semplici | 11 |
| 3.4 | Disposizioni con Ripetizione | 12 |
| 3.5 | Combinazioni | 12 |
| 4 | Probabilità | 14 |
| 4.1 | Operazione insiemi | 14 |
| 4.2 | Proprietà operazione tra eventi | 14 |
| 4.3 | Tipi di eventi | 14 |
| 4.3.1 | Eventi compatibili | 14 |
| 4.3.2 | Eventi incompatibili | 14 |
| 4.3.3 | Eventi complementari | 14 |
| 4.4 | Definizione | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.5 | Assiomi | 15 |
| 4.5.1 | Conseguenze degli assiomi | 15 |
| 4.6 | Probabilità Totale | 15 |
| 5 | Probabilità Condizionata e Indipendenza | 21 |
| 5.1 | Probabilità Condizionata | 21 |
| 5.2 | Probabilità Congiunta / Composta | 22 |
| 5.3 | Eventi Indipendenti & Eventi Dipendenti | 25 |
| 5.3.1 | Come capire se due eventi sono dipendenti o indipendenti | 26 |
| 5.3.2 | Non confondere eventi indipendenti con eventi incompatibili | 26 |
| 5.4 | Fattorizzazione di un evento | 27 |
| 5.5 | Teorema della Probabilità Assoluta | 29 |
| 5.6 | Formula di Bayes | 31 |
| 6 | Variabili Aleatorie | 36 |
| 6.1 | Funzione di massa | 36 |
| 6.2 | Funzione di densità | 37 |
| 6.3 | Funzione di ripartizione | 38 |
| 6.3.1 | Funzione di ripartizione per variabile aleatoria discreta . . | 38 |
| 6.3.2 | Funzione di ripartizione per variabile aleatoria continua . | 40 |
| 6.4 | Valore atteso | 41 |
| 6.4.1 | Valore atteso di una variabile aleatoria discreta | 41 |
| 6.4.2 | Valore atteso di una variabile aleatoria continua | 44 |
| 6.5 | Varianza di una variabile aleatoria | 44 |
| 6.6 | Deviazione standard di una variabile aleatoria | 46 |
| 6.7 | Distribuzione di probabilità congiunta | 47 |
| 6.7.1 | Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleato- rie discrete | 47 |
| 6.7.2 | Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleato- rie continue | 48 |
| 6.7.3 | Funzione di ripartizione congiunta di variabili aleatorie . . | 49 |
| 6.8 | Funzioni di massa / densità di probabilità condizionate | 49 |
| 6.8.1 | Funzione di massa di probabilità condizionate | 49 |
| 6.8.2 | Funzione di densità di probabilità condizionate | 50 |
| 6.9 | Variabili aleatorie indipendenti | 50 |
| 6.9.1 | Variabili aleatorie discrete indipendenti | 51 |
| 6.9.2 | Variabili aleatorie continue indipendenti | 51 |
| 6.10 | Variabili aleatorie identicamente distribuite (i.d) | 51 |
| 6.11 | Variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite (i.i.d) . | 52 |
| 7 | Famiglie Parametriche | 53 |
| 7.1 | Distribuzioni per variabili discrete | 53 |
| 7.1.1 | Distribuzione di Bernoulli | 53 |
| 7.1.2 | Distribuzione Binomiale | 54 |
| 7.1.3 | Distribuzione di Poisson | 55 |
| 7.2 | Distribuzioni per variabili continue | 55 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 7.2.1 | Distribuzione Uniforme | 55 |
| 7.2.2 | Distribuzione Normale | 55 |
| 7.2.3 | Distribuzione Normale Standard | 55 |
| 8 | Inferenza Statistica | 55 |
| 8.1 | Stima Puntuale | 55 |
| 8.2 | Stima Intervallare | 55 |
| 8.3 | Verifica delle Ipotesi | 55 |

1 Introduzione

1.1 Classificazione delle Variabili



Differenza tra ordinali e nominali:

- **Ordinali:** categorie che hanno un ordine, puoi solo dire se un valore è minore o maggiore rispetto ad un altro.
 - *Livello di istruzione:* $elementare < media < \dots$
 - *Grado di soddisfazione:* $nulla < basso < medio < \dots$
 - *Classifica di una gara:* $quinto < quarto < \dots$
 - *Matricola:* $17345 < 17346 < \dots$
- **Nominali:** categorie che non hanno un ordine.
 - *Colore occhi:* $blu, verdi, marroni, \dots$
 - *Genere:* M, F
 - *Marche auto:* $Toyota, Ford, \dots$
 - *Nazionalità:* $Giapponese, Italiano, \dots$

1.2 Distribuzioni di Frequenza

È una tabella che contiene modalità e frequenze.

| Modalità di X (x_i) | Frequenze assolute f_i |
|-------------------------|--------------------------|
| x_1 | f_1 |
| x_2 | f_2 |
| \dots | \dots |
| x_n | f_n |
| | N |

1.2.1 Tipi di Frequenza

1. **Frequenza assoluta:** numero di ripetizioni di una certa modalità (es: quanti studenti hanno preso 28 all'esame)

$$freq_{assoluta} = f_i$$

2. **Frequenza relativa:**

$$freq_{relativa} = \frac{f_i}{N}$$

3. **Frequenza percentuale:**

$$freq_{\%} = \frac{f_i}{N} \cdot 100$$

oppure

$$freq_{\%} = freq_{relativa} \cdot 100$$

4. **Frequenza cumulata:** somma progressiva delle frequenze assolute o relative.

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$
$$freq_{cumulataRelativa} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i}$$

5. **Frequenza cumulata percentuale:**

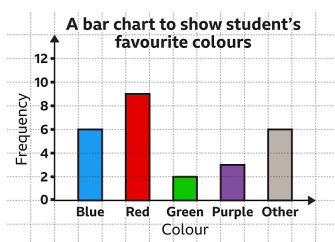
$$freq_{cumulataAssoluta\%} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot 100$$
$$freq_{cumulataRelativa\%} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} \cdot 100 = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i} \cdot 100$$

2 Statistica Descrittiva

2.1 Diagrammi a barre vs Istogrammi

Definizione 2.1 (Diagrammi a barre). Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili qualitative (categoriche). Le barre devono avere tutte la stessa base ed essere equi-spaziate (lasciare un pò di spazio tra una barra e l'altra).

- altezza barre: frequenza

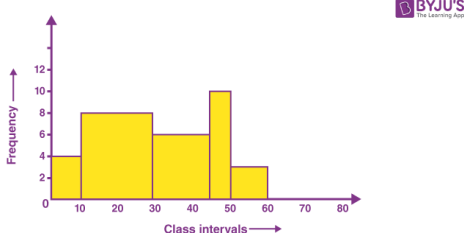


Definizione 2.2 (Istogrammi). Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili quantitative. Ogni barra rappresenta una classe e la sua frequenza.

- altezza barre: densità di frequenza

$$densita_{freq} = \frac{\text{Frequenza}}{\text{Ampiezza classe}}$$

- base barre: ampiezza delle classi



Osservazione: Definire k classi di uguale ampiezza

$$\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$$

I dati sulla statura di 48 adulti vanno da un minimo di 160 a 180 cm. Come fare k classi di uguale ampiezza?

1. Scelgo k (es: $k = 5$)
2. Uso formula $\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$ (es: $\text{Ampiezza classe} = \frac{180-160}{5} = 4$)

cm); quindi ogni classe avrà ampiezza 4.

3. Gli estremi inferiore della classe sono (contando ampiezza 4):

- 160
- 164
- 168
- 172
- 176

Conclusione: le $k = 5$ classi di ugual ampiezza sono:

[160, 164), [164, 168), [168, 172), [172, 176), [176, 180]

2.2 Media

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

f_i indica la frequenza assoluta.

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot freq_{relativa_i})$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot freq_{relativa_i})$$

dove a, b estremi dell'intervallo e $m_i = \frac{a+b}{2}$ il valore centrale della classe.

2.3 Moda

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

La Moda è il valore che si ripete più spesso nei dati.

- **Formula della moda per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$Moda = x_i \text{ con maggior frequenza}$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$Moda = \frac{a+b}{2}$$

Esempio Moda

Per esempio, per l'esame di analisi 2 ci sono stati tanti studenti che hanno preso tra il 20 e il 25 (classe), allora [20-25] è la classe modale. Pertanto, nel nostro esempio $Moda = \frac{20+25}{2} = 22.5$

2.4 Mediana

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

La Mediana è il valore che è più grande (o uguale) della prima metà dei dati e allo stesso tempo, più piccolo (o uguale) della seconda metà dei dati.

È il valore che sta in mezzo a dati ordinati; quindi per poter stimare la Me è necessario ordinare i dati:

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice i :
 - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}$, $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
 - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
3. La mediana è il valore associato all'indice trovato ($i = x_i$):
 - Se ho due indici i_1, i_2 , allora $Me = \frac{x_1 + x_2}{2}$
 - Se ho un solo indice i , allora $Me = x_i$

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice i :
 - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}$, $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
 - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata), allora $Me = classe$.
Oppure, se abbiamo due indici i_1, i_2 con valori x_1, x_2 , allora $Me = \frac{x_1 + x_2}{2}$

2.5 Quartili

Il p -esimo percentile è il valore che ha $\%p$ dei dati sotto/dietro di sé.

- Q_1 = 25-esimo percentile
(25% dei dati sotto questo valore)
- Q_2 = 50-esimo percentile = Mediana
(50% dei dati sotto questo valore)
- Q_3 = 75-esimo percentile
(75% dei dati sotto questo valore)

Divido la distribuzione in 4 parti uguali, per questo si chiamano "quartili".

- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$
3. Q_k è il valore associato all'indice:
 - Se $i \in \mathbb{N}$, allora $Q_k = x_i$
 - Se $i \in \mathbb{Q}$, allora $Q_k = \frac{\text{somma dei valori associati}}{2}$

Esempio: se $i = 6.75$ allora $i_1 = 6, i_2 = 7$, e i valori associati a $i_1 = 20, i_2 = 25$, allora $Q_k = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{20 + 25}{2} = 22.5$

- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$

3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata)

4. Allora avremo:

$$Q_k = L + \frac{i - f_{cumulata}}{f_i} \cdot h$$

dove:

- L : estremo inferiore della classe attuale (dell'indice)
- i : indice
- $f_{cumulata}$: frequenza cumulata classe precedente
- f_i : frequenza assoluta classe attuale
- h : ampiezza classe attuale

2.6 Campo di Variazione / Range

Distanza tra min e max.

$$Range = max - min$$

2.7 Differenza Interquartile

Si usano i quartili per capire la variabilità centrale.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

2.8 Varianza

Quanto sono variabili i dati? i dati sono **vicini o molto sparsi**.

Quanto i dati si allontanano dalla loro media (μ oppure \bar{x}).

- **Formula varianza per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

- Varianza della popolazione (P):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{N}$$

- Varianza campionaria ($C \subseteq P$):

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

2.9 Deviazione standard

Quanto sono variabili i dati? i dati sono **vicini o molto sparsi**.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

dove σ^2 è la varianza.

2.10 Coefficiente di variazione

Si calcola quando μ, \bar{x}, σ sono positivi e si esprime in percentuale.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{oppure} \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

3 Calcolo Combinatorio

Ordine conta: $abc \neq cba$ vuol dire "2 modi diversi di ordinare gli elementi".

Ordine non conta: $abc = cba$ vuol dire "c'è solo 1 modo per ordinare gli elementi".

Trucco:

- **Permutazioni:** uso tutti gli n oggetti. Ordine conta
- **Disposizioni:** non uso tutti gli n oggetti ma solo r oggetti scelti dall'insieme dove $r < n$. Ordine conta
- **Combinazioni:** si parla di gruppi di k elementi. Ordine non conta

| | Ordine conta? | Oggetti usati |
|--------------|---------------|--|
| Permutazioni | ✓ | Uso tutti gli n oggetti |
| Disposizioni | ✓ | Uso r oggetti su n |
| Combinazioni | ✗ | Uso gruppi di k oggetti su n |

3.1 Permutazioni Semplici

Una permutazione semplice è un modo di ordinare in successione oggetti distinti (qui non esistono oggetti uguali tra loro, sono tutti distinti).

Teorema

Il **numero di permutazioni** di n oggetti distinti è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_n = n!$$

Esempio

Se ho 10 libri, allora avrò:

$$P_{10} = 10! = 3628800 \text{ modi diversi di ordinare 10 libri}$$

3.2 Permutazioni con Ripetizione

Una permutazione con ripetizione è un modo di ordinare oggetti tra cui alcuni uguali tra loro.

Teorema

Il **numero di permutazioni** di n oggetti alcuni uguali tra loro è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_{\text{numero di scatole}}^{\text{numero tot di oggetti}} = P_n^r = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

Devo pensarlo così:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte, senza ripetizione (k = conta quante scatole sono)

2. Inserisci ogni oggetto nella corrispettiva scatola
(r = conta quanti oggetti ha ogni scatola)

Esempio

Se io ho la parola STATISTICA, ho $n = 10$ allora:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte
(k = conta quante scatole sono)
S, T, A, I, C quindi $k = 5$ scatole
2. Inserisci ogni ripetizione nella corrispettiva scatola
(r = conta quanti oggetti ha ogni scatola)
 - scatola S: la parola ha 2 "S" ripetute, quindi $r_1 = 2$
STATISTICA
 - scatola T: la parola ha 3 "T" ripetute, quindi $r_2 = 3$
STATISTICA
 - scatola A: la parola ha 2 "A" ripetute, quindi $r_3 = 2$
STATISTICA
 - scatola I: la parola ha 2 "I" ripetute, quindi $r_4 = 2$
STATISTICA
 - scatola C: la parola ha 1 "C" ripetuta, quindi $r_5 = 1$
STATISTICA

Quindi:

$$P_{10}^5 = \frac{10!}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!} = \frac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600 \text{ modi diversi di ordinare la parola}$$

3.3 Disposizioni Semplici

Nel caso delle disposizioni, non uso tutti gli n oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto k di n dove $k \leq n$.

Teorema

Il **numero di disposizioni** di oggetti scelti k tra n oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1. Scelgo k oggetti tra n oggetti totali
2. $D_{n,k}$ è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti

Esempio

In quanti modi diversi posso sistemare su una libreria 7 libri scelti da un insieme di 20 libri?

$$D_{20,7} = \frac{20!}{(20-7)!} = 390700800$$

3.4 Disposizioni con Ripetizione

Nel caso delle disposizioni con ripetizione, non uso tutti gli n oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto k di n dove $k \leq n$.

Teorema

Il **numero di disposizioni con ripetizione** di oggetti scelti k tra n oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti in cui alcuni possono ripetersi nella stessa sequenza.

$$D_{n,k}^R = n^k$$

Esempio

Quante password di 5 caratteri si possono creare con un alfabeto di 26 lettere?

1. Scelgo $k = 5$ sottoinsieme di $n = 26$
2. Alcune lettere possono ripetersi nella stessa sequenza

$$D_{26,5}^R = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11881376$$

3.5 Combinazioni

Nel caso delle combinazioni, si parla di gruppi il cui numero corrisponde esattamente a quanti oggetti k ho scelto da n . La scelta k corrisponde solo al numero da cui è formato ogni gruppo.

Ovvero, se io scelgo 10 oggetti su 20, allora ogni gruppo dovrà avere esattamente 10 oggetti. L'ordine non conta perchè l'importante è la presenza dell'oggetto all'interno del gruppo, che sia primo o ultimo non cambia niente.

La domanda è: quanti modi diversi ho di formare questi gruppi?

Teorema

Il **numero di combinazioni** è il numero di modi diversi per formare gruppi di k elementi ($k \leq n$).

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Scelgo un numero k dove $k \leq n$
2. Ogni gruppo dovrà avere esattamente k oggetti
3. Quanti modi diversi ho di formare questi gruppi che contengono esattamente k oggetti?

Esempio

Ho 3 frutti diversi ma la io voglio fare merenda solo con 2. Quante tipe di merende posso creare con 2 frutti?

1. Scelgo $k = 2$ dove $2 < 3$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 2 frutti

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Ho 3 modi diversi di formare gruppi di 2 frutti, quindi ho 3 tipi di merende diverse.

Esempio

Voglio giocare a basket e devo formare 2 gruppi di persone per la partita. So che ogni squadra deve avere esattamente 5 giocatori. Le persone che si son presentate come candidate sono 40. Quanti modi diversi ho per formare una squadra? e per formarne due? sapendo che la persona non può essere contemporaneamente scelta in entrambe?

1. Scelgo $k = 5$ dove $5 < 40$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 5 persone

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708 \text{ modi diversi per formare una sola squadra}$$

Ho 657708 modi diversi di formare gruppi di 5 persone, quindi posso scegliere 1 tra 657708 da mandare in campo.

3. Se invece voglio formare due squadre (sapendo che la stessa persona non può essere in entrambe) ? quante scelte avrei?

$$\text{Prima squadra: } C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708$$

Dato che le persone non possono ripetersi, se io ho formato la prima squadra, avrò per la seconda 35-5 persone ancora disponibili (perchè 5 le ho già scelte nella 1ª squadra):

$$\text{Seconda squadra: } C_{35,5} = \binom{35}{5} = \frac{35!}{5!(35-5)!} = 324632$$

Quindi i diversi modi per formare le due squadre saranno in totale $657708 \cdot 324632 = 213846580000$

4 Probabilità

4.1 Operazione insiemi

$$\begin{aligned}A_1 \cup A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2\} \\A_1 \cap A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2\} \\A_1 - A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \notin A_2\} \\\overline{A} &= \{\omega \mid \omega \notin A\}\end{aligned}$$

4.2 Proprietà operazione tra eventi

Siano A_1, A_2, A_3 tre eventi.

- **Proprietà commutativa:** l'ordine non cambia il risultato

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

- **Proprietà associativa:**

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

- **Proprietà distributiva:**

$$(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$$

- **Leggi di De Morgan:**

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

4.3 Tipi di eventi

4.3.1 Eventi compatibili

Due eventi che possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ compatibili} \iff A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

4.3.2 Eventi incompatibili

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ incompatibili} \iff A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

4.3.3 Eventi complementari

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente e tale che uno dei due si verifica di sicuro.

$$A_1, A_2 \text{ complementari} \iff \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = \Omega \end{cases}$$

4.4 Definizione

Sia A un evento e Ω lo spazio campionario. Definisco $P(A)$ la probabilità che si verifichi A dove $0 \leq P(A) \leq 1$:

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

4.5 Assiomi

1. **Primo assioma:** la probabilità di un evento A è un numero reale non negativo
2. **Secondo assioma:** la probabilità dell'intero spazio campionario è uguale a 1
$$P(\Omega) = 1$$
3. **Terzo assioma:** Se A_1, A_2 sono eventi **incompatibili**, allora la probabilità dell'unione dei due eventi è la somma delle loro probabilità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

4.5.1 Conseguenze degli assiomi

1. **Probabilità del complementare di un evento:**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

oppure:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

2. **Probabilità dell'evento impossibile:**

$$P(\emptyset) = 0$$

3. **Proprietà di monoticità:** Se B è un evento incluso in un evento A , allora la probabilità di B è minore o uguale alla probabilità di A

$$B \subseteq A \implies P(B) \leq P(A)$$

4. **Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

4.6 Probabilità Totale

Teorema : Teorema delle probabilità totali a 2 eventi

Siano A_1, A_2 due eventi, la probabilità dell'unione dei due eventi è uguale alla somma delle due probabilità meno la loro intersezione:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi"

- Se i due eventi sono incompatibili $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ allora,
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \emptyset = P(A_1) + P(A_2)$$

(assioma 3)
- Se i due eventi sono compatibili $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ allora,
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

(resta uguale)

Teorema : Teorema delle probabilità totali a k eventi

Siano k eventi, la probabilità dell'unione di k eventi è uguale a:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) + \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < r < s \leq k} P(A_i \cap A_j \cap A_r \cap A_s) + \\ &\quad \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_k) = \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= \text{somma delle probabilità dei singoli eventi} + \\ &\quad - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 2 a 2}] + \\ &\quad + [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 3 a 3}] + \\ &\quad - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 4 a 4}] + \\ &\quad \dots \\ &\quad + / - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi } k \text{ a } k] \end{aligned}$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno tra i k eventi"

Esercizio

Una segretaria distratta prepara 3 lettere e 3 buste da inviare a 5 persone diverse e mette le lettere nelle buste a caso.

Qual è la probabilità che almeno una delle 3 lettere sia inserita nella busta corrispondente?

1. Descrivi a parole quanto richiesto nell'esercizio:
 E =almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
2. Suddividi l'evento:
 - (a) E_1 =la lettera 1 è nella busta 1
 - (b) E_2 =la lettera 2 è nella busta 2
 - (c) E_3 =la lettera 3 è nella busta 3
 - (d) Quindi, l'evento E =almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente diventa:
 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
 - (e) Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$?
Infatti qui si calcola la probabilità che almeno uno si verifichi.

Dunque applico la formula di probabilità totale per 3 eventi:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

- $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Casi favorevoli che accada $P(E_1)$:

- 123
- 132
- ~~213~~
- ~~231~~
- ~~312~~
- ~~321~~

2 casi favorevoli.

- $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$

Casi favorevoli che accada $P(E_2)$: uguale a $P(E_1)$

- $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$

Casi favorevoli che accada $P(E_3)$: uguale a $P(E_1)$

- $P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

Casi favorevoli che accada $P(E_1 \cap E_2)$, ovvero che la lettera 1 sia in prima posizione e allo stesso tempo 2 sia alla seconda posizione:

- 123
- ~~132~~
- ~~213~~
- ~~231~~
- ~~312~~
- ~~321~~

1 caso favorevole.

- $P(E_1 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

- $P(E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

Casi favorevoli che accada $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, ovvero che allora stesso tempo la lettera 1 sia in prima posizione, la 2 in seconda posizione e la 3 in terza posizione:

- 123
- ~~132~~
- ~~213~~
- ~~231~~
- ~~312~~
- ~~321~~

1 caso favorevole.

Pertanto la formula:

$$\begin{aligned}
 P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\
 &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\
 &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] =
 \end{aligned}$$

Sostituendo con i valori trovati, diventa:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] + \\ - \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right] + \left[\frac{1}{6} \right] = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

Oppure posso utilizzare la negazione $P(E) = 1 - P(\overline{E})$:

- E =almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
- \overline{E} =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

Usando la negazione: \overline{E} =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$ =la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$ =la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$ =la lettera 3 non è nella busta 3

e quindi se voglio che accadano tutti gli eventi insieme allora sarebbe intersezione e non unione (probabilità congiunta):

\overline{E} =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente $\implies \overline{E} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$
quindi uso la formula della probabilità congiunta per 3 eventi:

$$P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = \\ = P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) \\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet P(\overline{E_1}) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Uso tutti gli elementi, ordine conta, ripetizioni no \implies permutazioni semplici $n!$

Quindi, casi possibili $3! = 6$, ovvero 6 possibili modi di ordinare gli elementi:

- 123
- 132
- 213
- 231
- 312
- 321

1. casi favorevoli che accada $P(\overline{E})$, ovvero tutte le combinazioni in cui 1 non è nella prima posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- 213
- 231
- 312
- 321

Ci sono 4 combinazioni favorevoli

$$\bullet P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1}) = \frac{\overline{E_2} \cap \overline{E_1}}{P(\overline{E_1})} = \frac{?}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

tutte e due le buste non vanno nelle buste corrispondenti:

$$P(\overline{E_2} \cap \overline{E_1}) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{3}{3!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

casi favorevoli che accada $P(\overline{E})$, ovvero tutte le combinazioni in cui 1,2 non sono nella corrispettiva posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- 213
- 231
- 312
- ~~321~~

Ci sono 3 combinazioni favorevoli

$$\bullet P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})} = \frac{?}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

tutte e tre le buste non vanno nelle buste corrispondenti:

$$P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

casi favorevoli che accada $P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})$, ovvero tutte le combinazioni in cui 1, 2, 3 non sono nella corrispettiva posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- ~~213~~
- 231
- 312
- ~~321~~

Ci sono 2 combinazioni favorevoli

Pertanto:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

Oppure un modo più veloce sempre con la negazione $P(E) = 1 - P(\overline{E})$:

\overline{E} = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$ = la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$ = la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$ = la lettera 3 non è nella busta 3

Voglio calcolare $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})$ e poi fare $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, quindi:

1. Elenco tutti i possibili modi di ordinare le buste:

- 123
- 132
- 213
- 231
- 312
- 321

2. Tengo fissato un ordine (lettera 1 - busta 1 - prima posizione; lettera 2 - busta 2 - seconda posizione; lettera 3 - busta 3 - terza posizione)

3. Elimino i casi in cui 1 è nella prima posizione \wedge 2 è nella seconda posizione \wedge 3 è nella terza posizione:

- ~~123~~ - elimino perchè 1 è nella prima posizione, 2 nella seconda, 3 nella terza
- ~~132~~ - elimino perchè 1 è nella prima posizione
- ~~213~~ - elimino perchè 3 è nella terza posizione

- 231
- 312
- ~~321~~ - elimino perchè 2 è nella seconda posizione

Mi rimangono 2 casi favorevoli.

4. Pertanto, $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5. Alla fine:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

5 Probabilità Condizionata e Indipendenza

5.1 Probabilità Condizionata

Teorema

Si definisce probabilità condizionata la **probabilità che si verifichi un evento E sapendo che si è già verificato l'evento B** : "probabilità di E dato B ."

$$P(E | B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

Inoltre, si ricavano le seguenti formule:

$$P(E \cap B) = P(E | B) \cdot P(B)$$

e:

$$P(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E | B)}$$

Prima osservazione:

$$\begin{aligned} P(E \cup A | B) &= \frac{P((E \cup A) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((E \cap B) \cup (A \cap B))}{P(B)} \\ &= \text{per teorema delle probabilità totali}^1 \\ &= \frac{P(E \cap B) + P(A \cap B) - P(E \cap B \cap A)}{P(B)} \end{aligned}$$

Seconda osservazione:

$$P(E \cap A | B) = \frac{P(E \cap A \cap B)}{P(B)}$$

Terza osservazione:

$$\begin{aligned} P(\overline{E} | B) &= 1 - P(E | B) \\ P(E | B) &= 1 - P(\overline{E} | B) \end{aligned}$$

¹ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Osservazione:

$$P(E | \bar{B}) = \frac{P(E \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} =$$

per l'assioma 3

$$= \frac{P(E \cap \bar{B})}{1 - P(B)} =$$

sapendo che $P(E \cap \bar{B}) = P(E | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$ e che,

le due probabilità sono non nulle $P(E), P(\bar{B}) \neq 0$,

allora posso usare $P(E \cap \bar{B}) = P(\bar{B} | E) \cdot P(E)$

poichè il risultato di $P(E \cap \bar{B})$ rimane invariato. Quindi:

$$= \frac{P(\bar{B} | E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

$$= \frac{P(\bar{B} | E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

per l'assioma 3

$$= \frac{(1 - P(B | E)) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

5.2 Probabilità Congiunta / Composta

La probabilità congiunta è la probabilità che due o più eventi si verifichino insieme (accadano entrambi), ossia che si verifichi l'intersezione degli eventi.

Teorema : Legge delle probabilità composte per 2 eventi

Si definisce probabilità congiunta la **probabilità che si verifichino entrambi gli eventi**:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) \text{ con } P(A_1) \neq 0$$

Oppure:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2) \text{ con } P(A_2) \neq 0$$

Se entrambe sono non nulle, $P(A_1) \wedge P(A_2) \neq 0$, allora posso usare una delle due formule, il risultato rimane invariato:

Posso usare questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

Oppure questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2)$$

Prima osservazione: $P(A_1) \neq 0$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

$$= \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot P(A_1)$$

$$= P(A_2 \cap A_1) \text{ giusto, intersezione è simmetrica, } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$$

Seconda osservazione: $P(A_2) \neq 0$

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2)$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \cdot P(A_2)$$

$$= P(A_1 \cap A_2) \text{ giusto, intersezione è simmetrica, } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$$

Teorema : Legge delle probabilità composte per k eventi

Generalizzato a k eventi, questa formula vale solo se gli eventi su cui condizioniamo^a sono maggiori di zero $P(X) > 0$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \prod_{i=1}^k P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

Ovvero:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \\ \cdot P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot \dots \cdot P(A_k | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

^aeventi su cui condizioniamo sono quelli in rosso, dopo la sbarra: $P(A_1 | \textcolor{red}{X})$

Esercizio

Un cliente di un'azienda acquista 3 pc da un lotto di 50 pc di cui 4 sono difettosi. Qual è la probabilità che tutti i 3 pc acquistati siano difettosi?

Ricordo che: intersezione = $\cap = \wedge = AND$

1. Descrivi a parole quanto richiesto in un evento:
 E = tutti i pc acquistati sono difettosi
2. Suddividi l'evento:
 - (a) E_1 = primo pc difettoso
 - (b) E_2 = secondo pc difettoso
 - (c) E_3 = terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento E = tutti i pc acquistati sono difettosi diventa:
 $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Infatti qui si calcola la probabilità che si verifichino tutti gli eventi insieme

Dunque applico formula della probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot (E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{50}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{49}$$

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{2}{48} = 0.0002 = 0.02\%$$

Esercizio

Se invece fosse stato: Qual è la probabilità che **almeno uno dei pc fosse difettoso**?
Non avrei utilizzato probabilità congiunta ma teorema delle probabilità totali (unione).
Ricordo che: l'unione $= \cup = \vee = OR$

1. Descrivo a parole quanto richiesto in un evento:
 E = almeno un pc acquistato è difettoso
2. Suddividi l'evento:
 - (a) E_1 = primo pc difettoso
 - (b) E_2 = secondo pc difettoso
 - (c) E_3 = terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento E = almeno un pc acquistato è difettoso, diventa:
 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$?

Dunque, ho due approcci:

- **Uso formula delle probabilità totali a $k = 3$ eventi:**

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

quindi:

- $P(E_1) = ?$
- $P(E_2) = ?$
- $P(E_3) = ?$
- $P(E_1 \cap E_2) = ?$
- $P(E_1 \cap E_3) = ?$
- $P(E_2 \cap E_3) = ?$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = ?$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

Se avessi tutti i dati, sarebbe facile, ma dato che non li ho è meglio il secondo approccio.

- **Uso negazione dell'evento:**

La negazione di "almeno uno dei pc è difettoso" è "nessuno dei pc è difettoso".
Quindi posso usare la seguente formula:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E})$$

1. Descrivi a parole l'evento contrario:
 \overline{E} = nessuno dei pc è difettoso
2. Suddividi l'evento:
 - (a) E_1 = primo pc funzionante
 - (b) E_2 = secondo pc funzionante
 - (c) E_3 = terzo pc funzionante

3. Quindi, l'evento \overline{E} =nessuno dei pc è difettoso diventa:
 $\overline{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $\overline{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Applico probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot (E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{46}{50}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{45}{49}$$

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{44}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0.774$$

Quindi:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0.774 = 0.226 = 22.6\%$$

Pertanto, la probabilità che almeno uno dei pc sia difettoso è $P(E) = 0.226$

5.3 Eventi Indipendenti & Eventi Dipendenti

Teorema : Probabilità dell'intersezione di 2 eventi indipendenti

Siano E_1, E_2 due eventi **indipendenti**.

La probabilità della loro intersezione è uguale al prodotto delle singole probabilità:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

La probabilità che si verifichi uno non modifica la probabilità dell'altro.

Teorema : Indipendenza debole di k eventi

Siano k eventi. E_1, E_2, \dots, E_k sono **indipendenti due a due** se, presa l'intersezione di tutti gli eventi due a due, sono tutti indipendenti:

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j) \quad \forall i < j$$

Ovvero:

Considero E_1, E_2, E_3 . Essi sono indipendenti due a due se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$

Teorema : Indipendenza forte di k eventi

Siano k eventi. E_1, E_2, \dots, E_k sono **reciprocamente indipendenti** se, presa

l'intersezione di tutti gli eventi due a due, sono tutti indipendenti:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) = \prod_{j=1}^k P(E_j)$$

Ovvero:

Considero E_1, E_2, E_3 . Essi sono reciprocamente indipendenti se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$

5.3.1 Come capire se due eventi sono dipendenti o indipendenti

Basta verificare questa uguaglianza:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

1. Calcolo la probabilità a sinistra dell'uguale: $\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{questa}} = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Secondo la formula classica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = x$$

2. Calcolo la probabilità a destra dell'uguale: $P(A \cap B) = \underbrace{P(E_1) \cdot P(E_2)}_{\text{questa}}$

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = y$$

3. Se:

- $x = y \implies$ gli eventi E_1, E_2 sono indipendenti
- $x \neq y \implies$ gli eventi E_1, E_2 sono dipendenti

5.3.2 Non confondere eventi indipendenti con eventi incompatibili

Ricorda che:

- **Eventi incompatibili:** eventi che non possono verificarsi contemporaneamente $E \cap F = \emptyset$ e ciò vuol dire che $P(E \cap F) = 0$.

Lancio un dado, qual è probabilità che esca 1 e 6 allo stesso tempo?

- E = esce 1
- F = esce 6

È facile capire che è impossibile che il dado mostri due facce allo stesso tempo, quindi $E \cap F = \emptyset$.

Inoltre, $P(E \cap F) = 0$ perchè $E \cap F = \emptyset$ e quindi $P(E \cap F) = P(\emptyset) = 0$

- **Eventi indipendenti:** eventi che possono verificarsi insieme ma la probabilità di uno non cambia la probabilità dell'altro.

Lancio un dado e una moneta, qual è probabilità che esca 1 e testa allo stesso tempo?

- E = esce 1
- F = esce testa

È facile capire che il verificarsi di E non influenza il verificarsi di F , quindi $E \cap F \neq \emptyset$.

^a \emptyset : evento impossibile

5.4 Fattorizzazione di un evento

Formula probabilità condizionata:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

posso modificarla algebricamente e ottenere:

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

Osservazione:

Siano A, B due eventi, vale sempre:

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) \implies A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

B e \overline{B} sono incompatibili, non possono capitare insieme:

- B = ho passato Statistica
- \overline{B} = non ho passato Statistica

è ovvio che non possono accadere insieme, l'hai passata oppure no.

Quindi, B e \overline{B} sono incompatibili:

$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$

Pertanto, se B e \overline{B} sono incompatibili anche gli eventi $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ lo sono.

Teorema : Fattorizzazione di un evento

La fattorizzazione di un evento si scrive come:

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} P(A) &= \text{per l'osservazione fatta} = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = \\ &= (P(A \cap B) \cup P(A \cap \overline{B})) = \text{formula fattorizzazione evento} = (P(A | B) \cdot P(B)) \cup (P(A | \overline{B}) \cdot P(\overline{B})) = \\ &= {}^2 \text{per il 4}^{\text{o}} \text{ assioma} = (P(A | B) \cdot P(B)) + (P(A | \overline{B}) \cdot P(\overline{B})) \end{aligned}$$

²dato che gli eventi $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ sono incompatibili ricordando il 4^o assioma:

Probabilità dell'unione di eventi incompatibili: la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Esercizio

Siano due eventi:

- M = avere una certa malattia
- T = il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$
Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T | M) = 0.9$
Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(\bar{T} | \bar{M}) = 0.98$
Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo? $P(T) = ?$

Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})$$

Dato che M, \bar{M} sono incompatibili, anche $T \cap M$ e $T \cap \bar{M}$ lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned} P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})) \\ &= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \bar{M})) \\ &= \text{per l'assioma 4} \\ &= P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) \\ &= \text{per la formula di fattorizzazione} \\ &= P(T | M) \cdot P(M) + P(T | \bar{M}) \cdot P(\bar{M}) \\ &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\ &= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T | \bar{M}) = ?$

Ricordo che $P(E) = 1 - P(\bar{E})$, di conseguenza:

$$P(T | \bar{M}) = 1 - P(\bar{T} | \bar{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$

- $P(\bar{M}) = ?$

Ricordo che $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$, di conseguenza:

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

5.5 Teorema della Probabilità Assoluta

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di Ω

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

Nell'esempio di un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

- E_1 = esce 1
- E_2 = esce 2
- E_3 = esce 3
- E_4 = esce 4
- E_5 = esce 5
- E_6 = esce 6

$$\bigcup_i E_i = \Omega \implies E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6 = \Omega \implies 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 = \Omega$$

Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per 2 eventi

Questa è valida solo quando ho 2 eventi nello spazio campionario.

Siano E_1, E_2 due eventi:

- con probabilità non nulle $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di Ω

La formula della probabilità assoluta se voglio calcolare $P(E_1)$:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2) + P(E_1 | \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \\ &\text{ma } E_1, E_2 \text{ incompatibili, quindi } P(E_1 | E_2) = 0 \\ &= P(E_1 | \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \end{aligned}$$

oppure se voglio calcolare $P(E_2)$:

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 | \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \\ &\text{ma } E_2, E_1 \text{ incompatibili, quindi } P(E_2 | E_1) = 0 \\ &= P(E_2 | \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \end{aligned}$$

Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per k eventi

Siano E_1, \dots, E_k eventi:

- con probabilità non nulle
- incompatibili
- partizioni di Ω

Sia E un qualsiasi tra gli k eventi, allora la sua probabilità è uguale a:

$$P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)$$

Ovvero:

$$P(E) = P(E | E_1) \cdot P(E_1) + P(E | E_2) \cdot P(E_2) + \dots + P(E | E_k) \cdot P(E_k)$$

Esercizio

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso? $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:

Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?

E = il microchip è difettoso

2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:

- E_1 = il microchip proviene dal fornitore 1
- E_2 = il microchip proviene dal fornitore 2
- E_3 = il microchip proviene dal fornitore 3

Ripondo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No
Perchè:
 - $P(E_1) = 0.20$
 - $P(E_2) = 0.35$
 - $P(E_3) = 0.45$
- Gli eventi sono incompatibili? Sì
Perchè è impossibile che il microchip pescato provenga da due fornitori diversi
- L'unione degli eventi E_1, E_2, E_3 è uguale a Ω ? Sì

Quindi uso la formula della probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E | E_1) \cdot P(E_1) + \\ &\quad + P(E | E_2) \cdot P(E_2) \\ &\quad + P(E | E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E | E_1) = 0.10$
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1

- $P(E | E_2) = 0.05$
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E | E_3) = 0.02$
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

5.6 Formula di Bayes

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di Ω

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

Teorema : Teorema di Bayes a 2 eventi

Siano E_1, E_2 due eventi:

- con probabilità non nulle $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di Ω

La probabilità condizionata di E_1 rispetto a E_2 è uguale a:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della probabilità

assoluta $P(E_2) = P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 | \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1})$ avrò che:

$$= \frac{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 | \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1})} =$$

Dove:

- $P(E_1)$ è la probabilità a priori dell'evento E_1 (dato che ho già)
- $P(E_1 | E_2)$ è la probabilità a posteriori dell'evento E_1 (che calcolo con Bayes)

Quello che fa la formula di Bayes è:

aggiornare la probabilità dell'evento E_1 (probabilità a priori) con informazioni contenute nell'evento E_2 (ottenendo così una probabilità a posteriori).

Teorema : Teorema di Bayes a k eventi

Siano E_1, \dots, E_k eventi:

- con probabilità non nulle

- incompatibili
- partizioni di Ω

Dato un qualsiasi evento E tra i k eventi, allora la probabilità condizionata di E_k dato E

$$P(E_k | E) = \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della

probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)$ avrò che:

$$= \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)} =$$

Osservazione su formula di Bayes:

Prima di calcolare correttamente la formula di Bayes, è necessario aver già calcolato la probabilità assoluta (che nella formula di Bayes è al denominatore).

1. Scrivi formula di Bayes:

$$P(E_k | E) = \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$

2. Calcola separatamente il denominatore della formula nello step 1, $P(E)$, con la formula della probabilità assoluta:

$$P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i) = \text{valore}$$

3. Inserisci il valore ottenuto dallo step 2 nel denominatore della formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned} P(E_k | E) &= \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} = \\ &= \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{\text{valore}} = \end{aligned}$$

Esercizio 1

Siano due eventi:

- M = avere una certa malattia
- T = il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$
Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T | M) = 0.9$
Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(\bar{T} | \bar{M}) = 0.98$
Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo? $P(T) = ?$

Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})$$

Dato che M, \overline{M} sono incompatibili, anche $T \cap M$ e $T \cap \overline{M}$ lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})) \\
 &= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \overline{M})) \\
 &= \text{per l'assioma 4} \\
 &= P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\
 &= \text{per la formula di fattorizzazione} \\
 &= P(T | M) \cdot P(M) + P(T | \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) \\
 &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\
 &= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta}
 \end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T | \overline{M}) = ?$

Ricordo che $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, di conseguenza:

$$P(T | \overline{M}) = 1 - P(\overline{T} | \overline{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$

- $P(\overline{M}) = ?$

Ricordo che $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$, di conseguenza:

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

Adesso mi chiedo:

Qual è la probabilità che un individuo sia affetto dalla malattia sapendo che il test diagnostico ha dato esito positivo? $P(M | T) = ?$

Uso Bayes perchè conosco i valori di $P(T | M)$, $P(M)$ e posso calcolare $P(T)$ con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.

1. Scrivo la formula di Bayes:

$$P(M | T) = \frac{P(T | M) \cdot P(M)}{P(T)}$$

2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 2 eventi (M,T):

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(T | M) \cdot P(M) + P(T | \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) = \\
 &T, M \text{ non sono incompatibili, quindi } P(T | M) \neq 0 \\
 &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 = 0.0288
 \end{aligned}$$

3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned}
 P(M | T) &= \frac{P(T | M) \cdot P(M)}{P(T)} = \\
 &= \frac{P(T | M) \cdot P(M)}{0.0288} = \\
 &= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.0288} = 0.3125 \quad \text{Risposta corretta}
 \end{aligned}$$

Esercizio 2

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi

- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso? $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:
Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?
 E = il microchip è difettoso
2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:
 - E_1 = il microchip proviene dal fornitore 1
 - E_2 = il microchip proviene dal fornitore 2
 - E_3 = il microchip proviene dal fornitore 3

Ripondo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No
Perchè:
 - $P(E_1) = 0.20$
 - $P(E_2) = 0.35$
 - $P(E_3) = 0.45$
- Gli eventi sono incompatibili? Sì
Perchè è impossibile che il microchip pescato provenga da due fornitori diversi
- L'unione degli eventi E_1, E_2, E_3 è uguale a Ω ? Sì

Quindi uso la formula della probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E | E_1) \cdot P(E_1) + \\ &\quad + P(E | E_2) \cdot P(E_2) \\ &\quad + P(E | E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E | E_1) = 0.10$
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1
- $P(E | E_2) = 0.05$
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E | E_3) = 0.02$
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

Adesso mi chiedo:

Qual è la probabilità che un microchip scelto a caso sia stato fornito dal produttore 2 sapendo che esso è difettoso? $P(E_2 | E) = ?$ Uso Bayes perchè conosco i valori di $P(E | E_2), P(E_2)$ e posso calcolare $P(E)$ con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.

1. Scrivo la formula di Bayes:

$$P(E_2 | E) = \frac{P(E | E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)}$$

2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 3 eventi (E_1, E_2, E_3):

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{i=1}^3 P(E | E_i) \cdot P(E_i) = \\ &= (P(E | E_1) \cdot P(E_1)) + (P(E | E_2) \cdot P(E_2)) + (P(E | E_3) \cdot P(E_3)) = \\ &= (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \end{aligned}$$

3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned} P(E_2 | E) &= \frac{P(E | E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)} = \\ &= \frac{P(E | E_2) \cdot P(E_2)}{0.0465} = \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.35}{0.0465} = 0.3763 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

6 Variabili Aleatorie

6.1 Funzione di massa

La funzione di massa indica la probabilità che ha ogni variabile aleatoria discreta che fa parte del supporto \mathcal{X} studiato.

Teorema : Funzione di massa per var discrete

La **funzione di massa di probabilità** di una variabile aleatoria discreta X è definita come:

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Osservazione:

La funzione assegna una probabilità a ogni variabile aleatoria discreta di \mathcal{X} t.c. la loro somma è uguale a uno:

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x) = 1$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**

Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 2 possibili esiti ad ogni lancio.

$$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$

2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT, CTC, TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC, TCT, CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$

3. **Supporto della variabile aleatoria:**

Il supporto di X sarà:

$$\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$

4. **Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:**

- $P(X = 0) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$

$$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

- $P(X = 1) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$

$$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X = 2) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa?
 $\omega = TTC, TCT, CTT$

$$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X = 3) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$

$$P(X = 3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

5. **Controllo se ho correttamente calcolato le funzioni di massa:** per vedere se è corretto, la loro somma deve essere uguale a 1.

$$\sum_{x \in X} P(X = x) = 1$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1$$

6.2 Funzione di densità

La funzione di densità indica la probabilità che ha una variabile aleatoria continua di appartenere ad un certo intervallo (supporto \mathcal{X}).

Teorema : Funzione di densità per var continue

La **funzione di densità di probabilità** di una variabile aleatoria continua X è definita come:

$$f_X(x) = P(X \in [x_1, x_2]) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

La probabilità dell'appartenenza della variabile aleatoria in un certo intervallo si calcola con l'integrale definito.

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathcal{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Scelgo ora un sottointervallo di $(0, 2)$ e ne calcolo la funzione di densità:

$$\begin{aligned}
P(0.25 \leq X \leq 0.75) &= \int_{0.25}^{0.75} f_X(x) dx \\
&= \int_{0.25}^{0.75} \frac{1}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} x \Big|_{0.25}^{0.75} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot 0.75 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0.25 \right) \\
&= 0.25
\end{aligned}$$

la probabilità che la var X ha di appartenere a $[0.25, 0.75]$ è uguale a 0.25

Se io invece calcolo la funzione di densità nell'intervallo $(0, 2)$:

$$\begin{aligned}
P(0 < X < 2) &= \int_0^2 f_X(x) dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} x \Big|_0^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

corretto poichè è una proprietà della funzione di densità

6.3 Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione indica la probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale ad un certo valore x .

Osservazione:

Sia $F_X(x) = P(X \leq x)$ la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria. Vale sempre che:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$$

6.3.1 Funzione di ripartizione per variabile aleatoria discreta

Teorema : Funzione di ripartizione per var discrete

La **funzione di ripartizione** di una variabile aleatoria discreta X è definita come:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1, u_i \leq x}^x P(X = u_i)$$

La probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale a x è uguale alla somma cumulative delle funzioni di massa di probabilità fino a x .

$$P(X \leq x) = P(X = u_1) + P(X = u_2) + \cdots + P(X = u_x)$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**

Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 2 possibili esiti ad ogni lancio.

$$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$

2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT, CTC, TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC, TCT, CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$

3. **Supporto della variabile aleatoria:**

Il supporto di X sarà:

$$\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$

4. **Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:**

- $P(X = 0) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$

$$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

- $P(X = 1) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$

$$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X = 2) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa? $\omega = TTC, TCT, CTT$

$$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X = 3) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$

$$P(X = 3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

5. **Calcolo la funzione di ripartizione per ogni valore x del supporto:**

- $P(X \leq 0) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che non escano affatto Teste?

$$P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

- $P(X \leq 1) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una testa oppure zero teste?

$$P(X \leq 1) = [P(X = 0) + P(X = 1)] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

- $P(X \leq 2) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca nessuna, una o due volte testa?

$$P(X \leq 2) = [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

- $P(X \leq 3) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca nessuna, una, due o tre volte di seguito Testa?

$$P(X \leq 3) = [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \frac{8}{8} = 1$$

Quindi:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

6.3.2 Funzione di ripartizione per variabile aleatoria continua

Teorema : Funzione di ripartizione per var continue

La **funzione di ripartizione** di una variabile aleatoria continua X è definita come:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

La probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale a x è uguale all'integrale definito da $-\infty$ a x .

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathcal{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolo la funzione di ripartizione per x :

1. $P(X \leq x) = ?$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_0^x f_X(u) du \\ &= \int_0^x \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} u \Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

2. Adesso che ho $P(X \leq x) = \frac{x}{2}$ posso calcolarlo per qualsiasi valore di x che sta nell'intervallo $(0,2)$:

• $P(X \leq 0.2) = ?$

$$P(X \leq 0.2) = \frac{x}{2} = \frac{0.2}{2}$$

• $P(X \leq 0.5) = ?$

$$P(X \leq 0.5) = \frac{x}{2} = \frac{0.5}{2}$$

• $P(X \leq 1) = ?$

$$P(X \leq 1) = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

• $P(X \leq 1.5) = ?$

$$P(X \leq 1.5) = \frac{x}{2} = \frac{1.5}{2}$$

• $P(X \leq 2) = ?$

$$P(X \leq 2) = \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

6.4 Valore atteso

Il valore atteso di una variabile aleatoria è la media pesata delle variabili aleatorie.

6.4.1 Valore atteso di una variabile aleatoria discreta

Teorema : Valore atteso di var discreta

Il valore atteso di una variabile aleatoria discreta X con funzione di massa di probabilità $p_X(x)$ è definito come:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x \cdot p_X(x)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x \cdot P(X = x))$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**

Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 8 possibili esiti ad ogni lancio.

$$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$

2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT, CTC, TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC, TCT, CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$

3. Supporto della variabile aleatoria:

Il supporto di X sarà:

$$\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$

4. Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:

- $P(X = 0) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$

$$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

- $P(X = 1) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$

$$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X = 2) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa? $\omega = TTC, TCT, CTT$

$$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X = 3) = ?$

Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$

$$P(X = 3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

5. Calcolo il valore atteso:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Esercizio

Lancio due dadi a sei facce:

- Se la somma degli esiti è 2 o 3, perdo 10 euro
- Se la somma degli esiti è 4, 5 o 6, perdo 4 euro
- Se la somma degli esiti è 7, 8 o 9 vinco 4 euro
- Se la somma degli esiti è 10, 11 o 12 vinco 10 euro

1. Definisco le variabili aleatorie discrete che rappresentano ogni vincita:

- $P(X = -10)$
- $P(X = -4)$

- $P(X = 4)$
- $P(X = 10)$

2. Calcolo la funzione di massa:

- $P(X = -10)$

$$P(X = -10) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Spiegazione^a

- $P(X = -4)$

$$P(X = -4) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Spiegazione^b

- $P(X = 4)$

$$P(X = 4) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Spiegazione^c

- $P(X = 10)$

$$P(X = 10) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Spiegazione^d

- Calcolo il valore atteso di X

$$\mathbb{E}[X] = (-10 \cdot \frac{1}{12}) + (-4 \cdot \frac{1}{3}) + (4 \cdot \frac{5}{12}) + (10 \cdot \frac{1}{6}) = 1.17$$

Vuol dire: "In media, per partita, il guadagno medio è di 1.17 euro".

^aProbabilità che la somma degli esiti sia 2 o 3:

- E_1 = somma degli esiti è 2
- E_2 = somma degli esiti è 3

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2) = ?$

Ricordo la formula: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$, quindi:

$$(a) P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{36}$$

$$(b) P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{36}$$

$$(c) P(E_1 \cap E_2) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)}$$

$$\text{Pertanto: } P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} - 0 = \frac{3}{36}$$

^bProbabilità che la somma degli esiti sia 4, 5 o 6:

- E_1 = somma degli esiti è 4
- E_2 = somma degli esiti è 5
- E_3 = somma degli esiti è 6

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = ?$

Ricordo la formula:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)]$$

$$(a) P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{36}$$

$$(b) P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{36}$$

$$(c) P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{5}{36}$$

$$(d) P(E_1 \cap E_2) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(e) P(E_1 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_3 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(f) P(E_2 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_2, E_3 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(g) P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2, E_3 \text{ sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)}$$

$$\text{Pertanto: } P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left[\frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} \right] - [0 + 0 + 0] + 0 = \frac{12}{36}$$

^cProbabilità che la somma degli esiti sia 7, 8 o 9:

- E_1 = somma degli esiti è 7
- E_2 = somma degli esiti è 8
- E_3 = somma degli esiti è 9

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = ?$

Ricordo la formula:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)]$$

$$(a) \quad P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6}{36}$$

$$(b) \quad P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{5}{36}$$

$$(c) \quad P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{36}$$

$$(d) \quad P(E_1 \cap E_2) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(e) \quad P(E_1 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(f) \quad P(E_2 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(g) \quad P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2, E_3 \text{ sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)}$$

$$\text{Pertanto: } P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left[\frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} \right] - [0 + 0 + 0] + 0 = \frac{15}{36}$$

d. Probabilità che la somma degli esiti sia 10, 11 o 12:

– E_1 = somma degli esiti è 10

– E_2 = somma degli esiti è 11

– E_3 = somma degli esiti è 12

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = ?$

Ricordo la formula:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)]$$

$$(a) \quad P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{36}$$

$$(b) \quad P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{36}$$

$$(c) \quad P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{36}$$

$$(d) \quad P(E_1 \cap E_2) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(e) \quad P(E_1 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(f) \quad P(E_2 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2 \text{ sono due eventi incompatibili}$$

$$(g) \quad P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \text{ perchè } E_1, E_2, E_3 \text{ sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)}$$

$$\text{Pertanto: } P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left[\frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \right] - [0 + 0 + 0] + 0 = \frac{6}{36}$$

6.4.2 Valore atteso di una variabile aleatoria continua

Teorema : Valore atteso di var continua

Il valore atteso di una variabile aleatoria continua X con funzione di densità di probabilità $f_X(x)$ è definito come:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{X}} x \cdot f_X(x) dx$$

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathcal{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolo il valore atteso:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{X}} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) = 1$$

6.5 Varianza di una variabile aleatoria

La varianza indica quanto i dati si discostano alla media / valore atteso:

- Se i valori sono vicini alla media (valore atteso), allora il valore della varianza è piccolo

- Se i valori sono distanti alla media (valore atteso), allora il valore della varianza è grande

Teorema : Formula varianza per var discrete

La varianza è definita come:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Dove:

- $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x^2 \cdot p_X(x)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x^2 \cdot P(X = x))$
- $(\mathbb{E}[X])^2$ = calcolo valore atteso e lo elevo al quadrato

Esercizio

Riprendo l'esperimento casuale del lancio di 3 monete e osservare la probabilità del numero di teste già svolto sopra:

- $P(X = 0) = \frac{1}{8}$
- $P(X = 1) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}$$

Calcola la varianza della variabile aleatoria X :

1. Calcola $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{x \in \mathcal{X}} (x^2 \cdot P(X = x)) \\ &= (0^2 \cdot \frac{1}{8}) + (1^2 \cdot \frac{3}{8}) + (2^2 \cdot \frac{3}{8}) + (3^2 \cdot \frac{1}{8}) = 3 \end{aligned}$$

2. Calcola $(\mathbb{E}[X])^2$:

$$(\mathbb{E}[X])^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Pertanto:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 3 - \frac{9}{4} = 0.75 \quad \text{Risposta corretta}$$

Teorema : Formula varianza per var continue

La varianza è definita come:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Dove:

- $\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathcal{X}} (x^2 \cdot f_X(x)) dx$
- $(\mathbb{E}[X])^2$ = calcolo valore atteso e lo elevo al quadrato

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathcal{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{X}} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) = 1$$

Calcola la varianza:

1. Calcola $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^2 (x^2 \cdot f_X(x)) dx \\ &= \int_0^2 (x^2 \cdot \frac{1}{2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. Calcola $(\mathbb{E}[X])^2$:

$$(\mathbb{E}[X])^2 = (1)^2 = 1$$

Pertanto:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{Risposta corretta}$$

6.6 Deviazione standard di una variabile aleatoria

La deviazione standard è la radice quadrata della varianza.

Teorema : Formula deviazione standard

Sia $\mathbb{V}[X]$ la varianza di una variabile aleatoria. La deviazione standard è definita come:

$$DS[X] = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Esercizio 1

Riprendendo l'esercizio sopra della variabile discreta X :

$$DS[X] = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = \sqrt{0.75}$$

Esercizio 2

Riprendendo l'esercizio sopra della variabile continua X :

$$DS[X] = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

6.7 Distribuzione di probabilità congiunta

Normalmente indichiamo la probabilità congiunta di due eventi così:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$$

Adesso voglio studiare la probabilità congiunta di due variabili aleatorie, ovvero la probabilità che accadano insieme.

6.7.1 Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleatorie discrete

Teorema : Funzione di massa di probabilità congiunta di var discrete

Siano X, Y due variabili aleatorie discrete con supporto \mathcal{X}, \mathcal{Y} rispettivamente. La **funzione di massa di probabilità congiunta di X e Y** è definita come:

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$

Esercizio

Esperimento: Selezionare un passeggero in modo casuale.

Quesito: Qual è la probabilità che il passeggero non fosse un membro dell'equipaggio e sia sopravvissuto?

Per rispondere a tale quesito abbiamo bisogno della distribuzione di probabilità congiunta di due variabili aleatorie.

| Classe del passeggero | Sopravvissuti | Morti | Totale |
|-----------------------|---------------|-------|--------|
| Prima classe | 203 | 122 | 325 |
| Seconda classe | 118 | 167 | 285 |
| Terza classe | 178 | 528 | 706 |
| Equipaggio | 212 | 673 | 885 |
| Totale | 711 | 1490 | 2201 |

1. Definisco le variabili aleatorie:

- La variabile aleatoria X con supporto $\mathcal{X} = \{0, 1\}$

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se il passeggero è sopravvissuto} \\ 1 & \text{se il passeggero è morto} \end{cases}$$

- La variabile aleatoria Y con supporto $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3, 4\}$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{il passeggero era in prima classe} \\ 2 & \text{il passeggero era in seconda classe} \\ 3 & \text{il passeggero era in terza classe} \\ 4 & \text{il passeggero era in un membro dell'equipaggio} \end{cases}$$

2. Definisco il quesito: "Qual è la probabilità che il passeggero non fosse un membro dell'equipaggio e sia sopravvissuto?"

Si traduce in $P(X = 0, Y \in \{1, 2, 3\}) = ?$

3. Soluzione dell'esercizio:

(a) Calcolo delle funzioni di massa di probabilità per ogni supporto:

| $Y = y$ | $X = 0$ | $X = 1$ | $Y = y$ | $X = 0$ | $X = 1$ |
|---------|----------|----------|---------|---------|---------|
| 1 | 203/2201 | 122/2201 | 1 | 0.0922 | 0.0554 |
| 2 | 118/2201 | 167/2201 | 2 | 0.0536 | 0.0759 |
| 3 | 178/2201 | 528/2201 | 3 | 0.0809 | 0.2399 |
| 4 | 212/2201 | 673/2201 | 4 | 0.0963 | 0.3058 |

(b) Calcolo la funzione di massa di probabilità congiunta:

$$\begin{aligned}P(X = 0, Y \in \{1, 2, 3\}) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) \\&\quad + P(X = 0, Y = 3) \\&= 0.0922 + 0.0536 + 0.0809 = 0.2267\end{aligned}$$

6.7.2 Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleatorie continue

Teorema : Funzione di densità di probabilità congiunta di var continue

Siano X, Y due variabili aleatorie continue con supporto \mathcal{X}, \mathcal{Y} rispettivamente. La **funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y** è definita come:

$$f_{X,Y}(x, y) = P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy$$

Esercizio

Un processo produttivo di una certa industria chimica produce due principali tipi di impurità:

- impurità di tipo I
- impurità di tipo II

Quesito: Sia la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y con supporto $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in [0, 1]$ definita come:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Qual è la probabilità che un prodotto abbia impurità di tipo I compresa tra 0 e 0.5 e impurità di tipo II compresa tra 0.4 e 0.7?

1. **Definisco le variabili aleatorie:**
2. **Definisco il quesito:** Qual è la probabilità che un prodotto abbia impurità di tipo I compresa tra 0 e 0.5 e impurità di tipo II compresa tra 0.4 e 0.7?
Si traduce in $P(0 \leq X \leq 0.5, 0.4 \leq Y \leq 0.7) = ?$
3. **Soluzione dell'esercizio:**

$$\begin{aligned}P(0 \leq X \leq 0.5, 0.4 \leq Y \leq 0.7) &= \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy \\&= \int_{0.4}^{0.7} \left(\int_0^{0.5} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy \\&= \int_{0.4}^{0.7} \left(\int_0^{0.5} 2(1-x) dx \right) dy \\&= \int_{0.4}^{0.7} \left(2x - x^2 \Big|_0^{0.5} \right) dy \\&= \int_{0.4}^{0.7} (0.75) dy \\&= 0.75y \Big|_{0.4}^{0.7} = 0.225\end{aligned}$$

6.7.3 Funzione di ripartizione congiunta di variabili aleatorie

6.8 Funzioni di massa / densità di probabilità condizionate

Ricordo che per due eventi, la probabilità condizionata è definita come:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

6.8.1 Funzione di massa di probabilità condizionate

Teorema : probabilità condizionata per var discrete

Siano X, Y due variabili aleatorie discrete con funzione di massa di probabilità congiunta $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$, definisco la **funzione di massa di probabilità condizionata** come il rapporto tra la funzione di massa di prob. congiunta di X e Y e la funzione di massa di prob. marginale di Y :

$$p_{X|Y}(x | y) = P(X = x | Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Quindi per calcolare la funzione di massa di probabilità condizionata:

$$p_{X|Y}(x | y) = P(X = x | Y = y)$$

serve prima sapere:

- funzione di massa di probabilità congiunta delle due variabili

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

- funzione di massa di probabilità marginale di Y , ovvero

$$p_Y(y) = P(Y = y)$$

Esercizio

Ritornando all'esercizio del Titanic, Qual è la probabilità che un passeggero sia sopravvissuto dato che viaggiava in prima classe? $P(X = 0 | Y = 1) = ?$

$$P(X = 0 | Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)}$$

1. Calcolo la probabilità congiunta:

| $Y = y$ | $X = 0$ | $X = 1$ | $Y = y$ | $X = 0$ | $X = 1$ |
|---------|----------|----------|---------|---------|---------|
| 1 | 203/2201 | 122/2201 | 1 | 0.0922 | 0.0554 |
| 2 | 118/2201 | 167/2201 | 2 | 0.0536 | 0.0759 |
| 3 | 178/2201 | 528/2201 | 3 | 0.0809 | 0.2399 |
| 4 | 212/2201 | 673/2201 | 4 | 0.0963 | 0.3058 |

$$P(X = 0, Y = 1) = 0.0922$$

2. Calcolo la probabilità marginale:

| $Y = y$ | $X = 0$ | $X = 1$ | $Y = y$ | $X = 0$ | $X = 1$ |
|---------|----------|----------|---------|---------|---------|
| 1 | 203/2201 | 122/2201 | 1 | 0.0922 | 0.0554 |
| 2 | 118/2201 | 167/2201 | 2 | 0.0536 | 0.0759 |
| 3 | 178/2201 | 528/2201 | 3 | 0.0809 | 0.2399 |
| 4 | 212/2201 | 673/2201 | 4 | 0.0963 | 0.3058 |

$$P(Y = 1) = 0.0922 + 0.0554 = 0.1476$$

Pertanto:

$$P(X = 0 | Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0.0922}{0.1476} = 0.6247 \quad \text{Risposta corretta}$$

6.8.2 Funzione di densità di probabilità condizionate

Teorema : probabilità condizionata per var continue

Siano X, Y due variabili aleatorie continue con funzione di densità di probabilità congiunta $f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$, definisco la **funzione di densità di probabilità condizionata** come il rapporto tra la funzione di densità di prob. congiunta di X e Y e la funzione di densità di prob. marginale di Y :

$$f_{X|Y}(x|y) = P(x_1 \leq X \leq x_2 | y_1 \leq Y \leq y_2) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Quindi per calcolare la funzione di densità di probabilità condizionata:

$$f_{X|Y}(x|y) = P(x_1 \leq X \leq x_2 | y_1 \leq Y \leq y_2)$$

serve prima sapere:

- funzione di densità di probabilità congiunta delle due variabili

$$f_{X,Y}(x,y) = P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy$$

- funzione di densità di probabilità marginale di Y , ovvero

$$f_Y(y) = P(y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} (f_{X,Y}(x,y)) dx$$

Esercizio

Sia X, Y due variabili aleatorie continue con probabilità congiunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{se } 0 < x < y < +\infty \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcola la densità condizionata:

1. Calcolo la probabilità congiunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}$$

2. Calcolo la probabilità marginale:

$$f_Y(y) = P(y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} (f_{X,Y}(x,y)) dx = \int_0^y (e^{-y}) dx = ye^{-y} \quad \text{con } y > 0$$

Pertanto:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y} \quad \text{con } 0 < x < y \quad \text{Risposta corretta}$$

6.9 Variabili aleatorie indipendenti

Ricordo che E_1, E_2 sono due eventi indipendenti se vale:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

La probabilità che si verifichi uno non modifica la probabilità dell'altro.

6.9.1 Variabili aleatorie discrete indipendenti

Teorema : var discrete indipendenti

Siano X, Y due variabili aleatorie discrete con funzione di massa di probabilità congiunta $p_{X,Y}(x, y)$ e funzioni di massa di prob. marginali $p_X(x), p_Y(y)$. Si dice che X, Y sono indipendenti se la funzione di massa di prob. congiunta è uguale al prodotto delle funzioni di massa di prob. marginali:

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

scrivendolo esteso:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

6.9.2 Variabili aleatorie continue indipendenti

Teorema : var continue indipendenti

Siano X, Y due variabili aleatorie continue con funzione di densità di probabilità congiunta $f_{X,Y}(x, y)$ e funzioni di densità di prob. marginali $f_X(x), f_Y(y)$. Si dice che X, Y sono indipendenti se la funzione di densità di prob. congiunta è uguale al prodotto delle funzioni di densità di prob. marginali:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

scrivendolo esteso:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy = \left(\int_{y_1}^{y_2} (f_{X,Y}(x, y)) dy \right) \cdot \left(\int_{x_1}^{x_2} (f_{X,Y}(x, y)) dx \right)$$

Poichè:

- $f_{X,Y}(x, y) = P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy$
- $f_X(x) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{y_1}^{y_2} (f_{X,Y}(x, y)) dy$
- $f_Y(y) = P(y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} (f_{X,Y}(x, y)) dx$

6.10 Variabili aleatorie identicamente distribuite (i.d)

Le variabili aleatorie si dicono **identicamente distribuite** se hanno **tutte** lo stesso valore di probabilità. Ovvero, per ogni valore possibile $X \in \mathcal{X}$, il valore di probabilità è il medesimo.

Esempio

Lancio più volte lo stesso dado. Sia X_i la variabile aleatoria che rappresenta il risultato dell' i -esimo lancio, con supporto

$$\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Per ogni i vale:

$$P(X_i = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

Poiché tutte le variabili aleatorie X_i hanno la stessa distribuzione di probabilità (Bernoulli, Binomiale, Normale, \dots), esse sono identicamente distribuite.

6.11 Variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite (i.i.d)

Due variabili aleatorie si dicono **indipendenti e identicamente distribuite** se:

- sono tutte indipendenti tra loro (la probabilità congiunta è uguale al prodotto delle prob. marginali)
- hanno tutte lo stesso valore di probabilità (le funzioni di massa di prob. hanno la stessa probabilità, le funzioni di massa di prob. congiunta hanno la stessa probabilità, ...)

Esempio

Lancio di due monete. Siano X, Y variabili aleatorie discrete che rappresentano l'esito dei due lanci:

- X assume valore 1 se l'esito del primo lancio è testa, zero altrimenti.
- Y assume valore 1 se l'esito del primo lancio è testa, zero altrimenti.

- Funzione di massa di probabilità congiunta, $p_{X,Y}(\cdot, \cdot)$:

| | $Y = 0$ | $Y = 1$ |
|---------|---------|---------|
| $X = 0$ | 1/4 | 1/4 |
| $X = 1$ | 1/4 | 1/4 |

- Funzioni di massa di probabilità marginali

$$p_X(0) = 1/2 \quad p_X(1) = 1/2 \quad \text{e} \quad p_Y(0) = 1/2 \quad p_Y(1) = 1/2$$

- X e Y sono i.i.d:

$$p(0) \equiv p_X(0) = p_Y(0) = 1/2 \quad p(1) \equiv p_X(1) = p_Y(1) = 1/2$$

e

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(0,0) &= p(0) \cdot p(0) = 1/4 & p_{X,Y}(0,1) &= p(0) \cdot p(1) = 1/4 \\ p_{X,Y}(1,0) &= p(1) \cdot p(0) = 1/4 & p_{X,Y}(1,1) &= p(1) \cdot p(1) = 1/4 \end{aligned}$$

7 Famiglie Parametriche

Sia θ indicata come la **probabilità di successo**.

7.1 Distribuzioni per variabili discrete

7.1.1 Distribuzione di Bernoulli

Si usa quando gli esiti dell'esperimento possono essere solo due:

- 1 - Successo
- 0 - Insuccesso

su una singola prova / esperimento.

Teorema : $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$

Sia X la variabile aleatoria che può assumere solo due valori:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se l'esito è un successo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e sia $\theta \in [0, 1]$ la probabilità di successo dell'esperimento. Essendo i due esiti complementari, posso scriverli come:

$$P(X = 1) = \theta \quad P(X = 0) = 1 - \theta$$

Formula generale:

$$p_X(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

che è un modo compatto di scrivere le due sopra. Difatti:

- Successo:

$$p_X(x; \theta) = p_X(1; \theta) = \theta^1 (1 - \theta)^{1-1} = \theta^1 (1 - \theta)^{0} = \theta$$

- Insuccesso:

$$p_X(x; \theta) = p_X(0; \theta) = \theta^0 (1 - \theta)^{1-0} = \theta^0 (1 - \theta)^1 = 1 - \theta$$

Teorema : Media e Varianza di $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$

$$\mathbb{E}_\theta[X] = \theta$$

e

$$\mathbb{V}_\theta[X] = \theta \cdot (1 - \theta)$$

Esempio

Lancio una moneta.

X è l'esito del lancio, e possono essere solo due: T oppure C (o si verifica testa oppure si verifica croce), ecco perchè uso la Distribuzione Bernoulliana.

Scommetto che esca Testa (quindi scelgo come successo "Testa"):

- Se esce Testa, sarà un Successo e quindi assocerò a X il valore di 1:

$$X = 1$$

- Se esce Croce, sarà un Insuccesso e quindi assocerò a X il valore di 0:

$$X = 0$$

Qual è la probabilità che esca Testa? $P(X = 1) = ?$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Quindi la probabilità di successo è uguale $\theta = \frac{1}{2}$. In questo esperimento, si ha una variabile Bernoulliana X di parametro $\theta = \frac{1}{2}$:

$$X \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$$

7.1.2 Distribuzione Binomiale

Si usa quando interessa la prob. di successi ottenuti e devo ripetere lo stesso esperimento bernoulliano n volte ognuno con probabilità di successo pari a θ . Ogni prova ha probabilità pari a θ ed è indipendente alle altre ("mi dimentico i valori di probabilità ottenuti nelle prove precedenti").

Teorema : $X \sim \text{Binomiale}(n; \theta)$

Sia X il numero di successi di n prove bernoulliane effettuate e sia θ la probabilità di successo di ogni prova.

Qual è la probabilità di ottenere k successi in n prove effettuate? $P(X = k)$?

$$\binom{n}{k} \cdot \theta^k \cdot (1 - \theta)^{n-k}$$

Osservazione

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Teorema : Media e Varianza di $X \sim \text{Binomiale}(n; \theta)$

$$\mathbb{E}_\theta[X] = n \cdot \theta$$

e

$$\mathbb{V}_\theta[X] = n \cdot \theta \cdot (1 - \theta)$$

Esercizio

La probabilità di fare canestro in un singolo tiro è del 60%, Qual è la probabilità di fare esattamente 7 canestri in 10 lanci effettuati? $X \sim \text{Binomiale}(10; 0.6)$

$$\begin{aligned} P(X = 7) &= \binom{n}{k} \cdot \theta^k \cdot (1 - \theta)^{n-k} \\ &= \binom{10}{7} \cdot \theta^7 \cdot (1 - \theta)^{10-7} \\ &= \frac{10!}{7!(10-7)!} \cdot \theta^7 \cdot (1 - \theta)^3 \\ &= 120 \cdot \theta^7 \cdot (1 - \theta)^3 \\ &\text{probabilità di fare canestro in un singolo tiro è del 60\%} \\ &= 120 \cdot (0.6)^7 \cdot (1 - 0.6)^3 = 0.215 \end{aligned}$$

Quindi la probabilità di fare esattamente 7 canestri su 10 lanci quando $\theta = 0.6$ è del 21.5%

7.1.3 Distribuzione di Poisson

7.2 Distribuzioni per variabili continue

7.2.1 Distribuzione Uniforme

7.2.2 Distribuzione Normale

7.2.3 Distribuzione Normale Standard

8 Inferenza Statistica

8.1 Stima Puntuale

8.2 Stima Intervallare

8.3 Verifica delle Ipotesi