

# Statistica

Ede Boanini

7 gennaio 2026

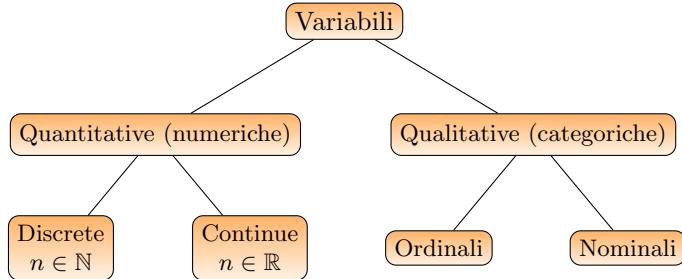
## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Classificazione delle Variabili . . . . .	3
1.2	Distribuzioni di Frequenza . . . . .	3
1.2.1	Tipi di Frequenza . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Statistica Descrittiva</b>	<b>5</b>
2.1	Diagrammi a barre vs Istogrammi . . . . .	5
2.2	Media . . . . .	6
2.3	Moda . . . . .	6
2.4	Mediana . . . . .	6
2.5	Quartili . . . . .	7
2.6	Campo di Variazione / Range . . . . .	8
2.7	Differenza Interquartile . . . . .	8
2.8	Varianza . . . . .	8
2.9	Deviazione standard . . . . .	8
2.10	Coefficiente di variazione . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Calcolo Combinatorio</b>	<b>9</b>
3.1	Permutazioni Semplici . . . . .	9
3.2	Permutazioni con Ripetizione . . . . .	9
3.3	Disposizioni Semplici . . . . .	10
3.4	Disposizioni con Ripetizione . . . . .	11
3.5	Combinazioni . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Probabilità</b>	<b>13</b>
4.1	Operazione insiemi . . . . .	13
4.2	Proprietà operazione tra eventi . . . . .	13
4.3	Tipi di eventi . . . . .	13
4.3.1	Eventi compatibili . . . . .	13
4.3.2	Eventi incompatibili . . . . .	13
4.3.3	Eventi complementari . . . . .	13
4.4	Definizione . . . . .	14

4.5	Assiomi . . . . .	14
4.5.1	Conseguenze degli assiomi . . . . .	14
4.6	Probabilità Totale . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Probabilità Condizionata e Indipendenza</b>	<b>20</b>
5.1	Probabilità Condizionata . . . . .	20
5.2	Probabilità Congiunta / Composta . . . . .	20
5.3	Eventi Indipendente ed Eventi Dipendenti . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Variabili Casuali</b>	<b>23</b>
6.1	Famiglie Parametriche . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Inferenza Statistica</b>	<b>23</b>
7.1	Stima Puntuale . . . . .	23
7.2	Stima Intervallare . . . . .	23
7.3	Verifica delle Ipotesi . . . . .	23

# 1 Introduzione

## 1.1 Classificazione delle Variabili



Differenza tra ordinali e nominali:

- **Ordinali:** categorie che hanno un ordine, puoi solo dire se un valore è minore o maggiore rispetto ad un altro.
  - *Livello di istruzione: elementare < media < ...*
  - *Grado di soddisfazione: nullo < basso < medio < ...*
  - *Classifica di una gara: quinto < quarto < ...*
  - *Matricola: 17345 < 17346 < ...*
- **Nominali:** categorie che non hanno un ordine.
  - *Colore occhi: blu, verdi, marroni, ...*
  - *Genere: M, F*
  - *Marche auto: Toyota, Ford, ...*
  - *Nazionalità: Giapponese, Italiano, ...*

## 1.2 Distribuzioni di Frequenza

È una tabella che contiene modalità e frequenze.

Modalità di X ( $x_i$ )	Frequenze assolute $f_i$
$x_1$	$f_1$
$x_2$	$f_2$
...	...
$x_n$	$f_n$
$N$	

### 1.2.1 Tipi di Frequenza

1. **Frequenza assoluta:** numero di ripetizioni di una certa modalità (es: quanti studenti hanno preso 28 all'esame)

$$freq_{assoluta} = f_i$$

2. **Frequenza relativa:**

$$freq_{relativa} = \frac{f_i}{N}$$

3. **Frequenza percentuale:**

$$freq\% = \frac{f_i}{N} \cdot 100$$

oppure

$$freq\% = freq_{relativa} \cdot 100$$

4. **Frequenza cumulata:** somma progressiva delle frequenze assolute o relative.

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

$$freq_{cumulataRelativa} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i}$$

5. **Frequenza cumulata percentuale:**

$$freq_{cumulataAssoluta\%} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot 100$$

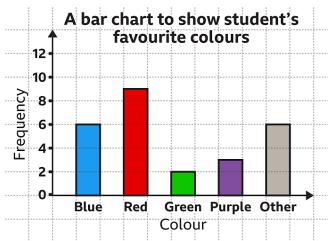
$$freq_{cumulataRelativa\%} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} \cdot 100 = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i} \cdot 100$$

## 2 Statistica Descrittiva

### 2.1 Diagrammi a barre vs Istogrammi

**Definizione 2.1 (Diagrammi a barre).** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili qualitative (categoriche). Le barre devono avere tutte la stessa base ed essere equi-spaziate (lasciare un pò di spazio tra una barra e l'altra).

- altezza barre: frequenza

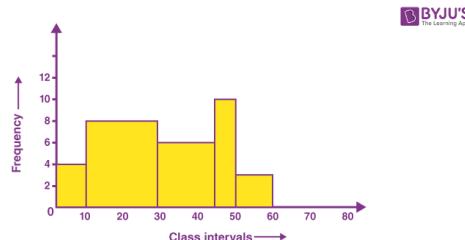


**Definizione 2.2 (Istogrammi).** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili quantitative. Ogni barra rappresenta una classe e la sua frequenza.

- altezza barre: densità di frequenza

$$densità_{freq} = \frac{\text{Frequenza}}{\text{Ampiezza classe}}$$

- base barre: ampiezza delle classi



**Osservazione:** Definire  $k$  classi di uguale ampiezza

$$\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$$

I dati sulla statura di 48 adulti vanno da un minimo di 160 a 180 cm. Come fare  $k$  classi di ugual ampiezza?

1. Scelgo  $k$  (es:  $k = 5$ )
2. Uso formula  $\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$  (es:  $\text{Ampiezza classe} = \frac{180 - 160}{5} = 4$ )

cm); quindi ogni classe avrà ampiezza 4.

3. Gli estremi inferiori delle classi sono (contando ampiezza 4):

- 160
- 164
- 168
- 172
- 176

Conclusione: le  $k = 5$  classi di ugual ampiezza sono:

$$[160, 164), [164, 168), [168, 172), [172, 176), [176, 180]$$

## 2.2 Media

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.  
 $f_i$  indica la frequenza assoluta.

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot freq_{relativa_i})$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot freq_{relativa_i})$$

dove  $a, b$  estremi dell'intervallo e  $m_i = \frac{a+b}{2}$  il valore centrale della classe.

## 2.3 Moda

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.  
La Moda è il valore che si ripete più spesso nei dati.

- **Formula della moda per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$Moda = x_i \text{ con maggior frequenza}$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$Moda = \frac{a + b}{2}$$

### Esempio Moda

Per esempio, per l'esame di analisi 2 ci sono stati tanti studenti che hanno preso tra il 20 e il 25 (classe), allora [20-25] è la classe modale. Pertanto, nel nostro esempio  $Moda = \frac{20+25}{2} = 22.5$

## 2.4 Mediana

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.  
La Mediana è il valore che è più grande (o uguale) della prima metà dei dati e allo stesso tempo, più piccolo (o uguale) della seconda metà dei dati.  
È il **valore che sta in mezzo a dati ordinati**; quindi per poter stimare la  $Me$  è necessario ordinare i dati:

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice  $i$ :
  - se  $N$  pari:  $i_1 = \frac{N}{2}$ ,  $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
  - se  $N$  dispari:  $i = \frac{N}{2}$
3. La mediana è il valore associato all'indice trovato ( $i = x_i$ ):
  - Se ho due indici  $i_1, i_2$ , allora  $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$
  - Se ho un solo indice  $i$ , allora  $Me = x_i$

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice  $i$ :
  - se  $N$  pari:  $i_1 = \frac{N}{2}$ ,  $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
  - se  $N$  dispari:  $i = \frac{N}{2}$
3. Osserva  $i$  in che classe cade (vedi frequenza cumulata), allora  $Me = classe$ .  
Oppure, se abbiamo due indici  $i_1, i_2$  con valori  $x_1, x_2$ , allora  $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$

## 2.5 Quartili

Il  $p$ -esimo percentile è il valore che ha  $\%p$  dei dati sotto/dietro di sé.

- $Q_1$  = 25-esimo percentile  
(25% dei dati sotto questo valore)
- $Q_2$  = 50-esimo percentile = Mediana  
(50% dei dati sotto questo valore)
- $Q_3$  = 75-esimo percentile  
(75% dei dati sotto questo valore)

Divido la distribuzione in 4 parti uguali, per questo si chiamano "quartili".

- **Come trovare il  $Q_k$  per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice:  $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$
3.  $Q_k$  è il valore associato all'indice:
  - Se  $i \in \mathbb{N}$ , allora  $Q_k = x_i$
  - Se  $i \in \mathbb{Q}$ , allora  $Q_k = \frac{\text{somma dei valori associati}}{2}$

Esempio: se  $i = 6.75$  allora  $i_1 = 6, i_2 = 7$ , e i valori associati a  $i_1 = 20, i_2 = 25$ , allora  $Q_k = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{20+25}{2} = 22.5$

- **Come trovare il  $Q_k$  per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice:  $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$

3. Osserva  $i$  in che classe cade (vedi frequenza cumulata)

4. Allora avremo:

$$Q_k = L + \frac{i - f_{cumulata}}{f_i} \cdot h$$

dove:

- $L$ : estremo inferiore della classe attuale (dell'indice)
- $i$ : indice
- $f_{cumulata}$ : frequenza cumulata classe precedente
- $f_i$ : frequenza assoluta classe attuale
- $h$ : ampiezza classe attuale

## 2.6 Campo di Variazione / Range

Distanza tra min e max.

$$Range = max - min$$

## 2.7 Differenza Interquartile

Si usano i quartili per capire la variabilità centrale.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

## 2.8 Varianza

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.

Quanto i dati si allontanano dalla loro media ( $\mu$  oppure  $\bar{x}$ ).

- **Formula varianza per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

- Varianza della popolazione ( $P$ ):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{N}$$

- Varianza campionaria ( $C \subseteq P$ ):

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

## 2.9 Deviazione standard

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

dove  $\sigma^2$  è la varianza.

## 2.10 Coefficiente di variazione

Si calcola quando  $\mu, \bar{x}, \sigma$  sono positivi e si esprime in percentuale.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{oppure} \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

### 3 Calcolo Combinatorio

**Ordine conta:**  $abc \neq cba$  vuol dire "2 modi diversi di ordinare gli elementi".

**Ordine non conta:**  $abc = cba$  vuol dire "c'è solo 1 modo per ordinare gli elementi".

Trucco:

- **Permutazioni:** uso tutti gli  $n$  oggetti. Ordine conta
- **Disposizioni:** non uso tutti gli  $n$  oggetti ma solo  $r$  oggetti scelti dall'insieme dove  $r < n$ . Ordine conta
- **Combinazioni:** si parla di gruppi di  $k$  elementi. Ordine non conta

	Ordine conta?	Oggetti usati
Permutazioni	✓	Uso <b>tutti</b> gli $n$ oggetti
Disposizioni	✓	Uso $r$ oggetti su $n$
Combinazioni	✗	Uso <b>gruppi di <math>k</math></b> oggetti su $n$

#### 3.1 Permutazioni Semplici

Una permutazione semplice è un modo di ordinare in successione oggetti distinti (qui non esistono oggetti uguali tra loro, sono tutti distinti).

##### Teorema

Il **numero di permutazioni** di  $n$  oggetti distinti è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_n = n!$$

##### Esempio

Se ho 10 libri, allora avrò:

$$P_{10} = 10! = 3628800 \text{ modi diversi di ordinare 10 libri}$$

#### 3.2 Permutazioni con Ripetizione

Una permutazione con ripetizione è un modo di ordinare oggetti tra cui alcuni uguali tra loro.

##### Teorema

Il **numero di permutazioni** di  $n$  oggetti alcuni uguali tra loro è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_{\substack{\text{numero di scatole} \\ \text{numero tot di oggetti}}} = P_n^r = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

Devo pensarla così:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte, senza ripetizione ( $k$  = conta quante scatole sono)

- Inserisci ogni oggetto nella corrispettiva scatola  
( $r$  = conta quanti oggetti ha ogni scatola)

### Esempio

Se io ho la parola STATISTICA, ho  $n = 10$  allora:

- Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte  
( $k$  = conta quante scatole sono)  
S, T, A, I, C quindi  $k = 5$  scatole
- Inserisci ogni ripetizione nella corrispettiva scatola  
( $r$  = conta quanti oggetti ha ogni scatola)
  - scatola S: la parola ha 2 "S" ripetute, quindi  $r_1 = 2$   
**STATISTICA**
  - scatola T: la parola ha 3 "T" ripetute, quindi  $r_2 = 3$   
**STATISTICA**
  - scatola A: la parola ha 2 "A" ripetute, quindi  $r_3 = 2$   
**STATISTICA**
  - scatola I: la parola ha 2 "I" ripetute, quindi  $r_4 = 2$   
**STATISTICA**
  - scatola C: la parola ha 1 "C" ripetuta, quindi  $r_5 = 1$   
**STATISTICA**

Quindi:

$$P_{10}^5 = \frac{10!}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!} = \frac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600 \text{ modi diversi di ordinare la parola}$$

### 3.3 Disposizioni Semplici

Nel caso delle disposizioni, non uso tutti gli  $n$  oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto  $k$  di  $n$  dove  $k \leq n$ .

#### Teorema

Il **numero di disposizioni** di oggetti scelti  $k$  tra  $n$  oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare  $k$  oggetti.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Scelgo  $k$  oggetti tra  $n$  oggetti totali
- $D_{n,k}$  è il numero di modi diversi per ordinare  $k$  oggetti

### Esempio

In quanti modi diversi posso sistemare su una libreria 7 libri scelti da un insieme di 20 libri?

$$D_{20,7} = \frac{20!}{(20-7)!} = 390700800$$

### 3.4 Disposizioni con Ripetizione

Nel caso delle disposizioni con ripetizione, non uso tutti gli  $n$  oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto  $k$  di  $n$  dove  $k \leq n$ .

#### Teorema

Il **numero di disposizioni con ripetizione** di oggetti scelti  $k$  tra  $n$  oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare  $k$  oggetti in cui alcuni possono ripetersi nella stessa sequenza.

$$D_{n,k}^R = n^k$$

#### Esempio

Quante password di 5 caratteri si possono creare con un alfabeto di 26 lettere?

1. Scelgo  $k = 5$  sottoinsieme di  $n = 26$
2. Alcune lettere possono ripetersi nella stessa sequenza

$$D_{26,5}^R = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11881376$$

### 3.5 Combinazioni

Nel caso delle combinazioni, si parla di gruppi il cui numero corrisponde esattamente a quanti oggetti  $k$  ho scelto da  $n$ . La scelta  $k$  corrisponde solo al numero da cui è formato ogni gruppo.

Ovvero, se io scelgo 10 oggetti su 20, allora ogni gruppo dovrà avere esattamente 10 oggetti. L'ordine non conta perché l'importante è la presenza dell'oggetto all'interno del gruppo, che sia primo o ultimo non cambia niente.

La domanda è: quanti modi diversi ho di formare questi gruppi?

#### Teorema

Il **numero di combinazioni** è il numero di modi diversi per formare gruppi di  $k$  elementi ( $k \leq n$ ).

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Scelgo un numero  $k$  dove  $k \leq n$
2. Ogni gruppo dovrà avere esattamente  $k$  oggetti
3. Quanti modi diversi ho di formare questi gruppi che contengono esattamente  $k$  oggetti?

#### Esempio

Ho 3 frutti diversi ma la io voglio fare merenda solo con 2. Quante tipe di merende posso creare con 2 frutti?

1. Scelgo  $k = 2$  dove  $2 < 3$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 2 frutti

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Ho 3 modi diversi di formare gruppi di 2 frutti, quindi ho 3 tipi di merende diverse.

### Esempio

Voglio giocare a basket e devo formare 2 gruppi di persone per la partita. So che ogni squadra deve avere esattamente 5 giocatori. Le persone che si son presentate come candidate sono 40. Quanti modi diversi ho per formare una squadra? e per formarne due? sapendo che la persona non puo essere contemporaneamente scelta in entrambe?

1. Scelgo  $k = 5$  dove  $5 < 40$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 5 persone

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708 \text{ modi diversi per formare una sola squadra}$$

Ho 657708 modi diversi di formare gruppi di 5 persone, quindi posso scegliere 1 tra 657708 da mandare in campo.

3. Se invece voglio formare due squadre (sapendo che la stessa persona non può essere in entrambe) ? quante scelte avrei?

$$\text{Prima squadra: } C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708$$

Dato che le persone non possono ripetersi, se io ho formato la prima squadra, avrò per la seconda 35-5 persone ancora disponibili (perchè 5 le ho già scelte nella 1<sup>a</sup> squadra):

$$\text{Seconda squadra: } C_{35,5} = \binom{35}{5} = \frac{35!}{5!(35-5)!} = 324632$$

Quindi i diversi modi per formare le due squadre saranno in totale  $657708 \cdot 324632 = 213846580000$

## 4 Probabilità

### 4.1 Operazione insiemi

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2\} \\ A_1 \cap A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2\} \\ A_1 - A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \notin A_2\} \\ \bar{A} &= \{\omega \mid \omega \notin A\} \end{aligned}$$

### 4.2 Proprietà operazione tra eventi

Siano  $A_1, A_2, A_3$  tre eventi.

- **Proprietà commutativa:** l'ordine non cambia il risultato

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

- **Proprietà associativa:**

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

- **Proprietà distributiva:**

$$(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$$

- **Leggi di De Morgan:**

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

### 4.3 Tipi di eventi

#### 4.3.1 Eventi compatibili

Due eventi che possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ compatibili} \iff A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

#### 4.3.2 Eventi incompatibili

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ incompatibili} \iff A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

#### 4.3.3 Eventi complementari

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente e tale che uno dei due si verifica di sicuro.

$$A_1, A_2 \text{ complementari} \iff \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = \Omega \end{cases}$$

## 4.4 Definizione

Sia  $A$  un evento e  $\Omega$  lo spazio campionario. Definisco  $P(A)$  la probabilità che si verifichi  $A$  dove  $0 \leq P(A) \leq 1$ :

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

## 4.5 Assiomi

1. **Primo assioma:** la probabilità di un evento  $A$  è un numero reale non negativo

2. **Secondo assioma:** la probabilità dell'intero spazio campionario è uguale a 1

$$P(\Omega) = 1$$

3. **Terzo assioma:** Se  $A_1, A_2$  sono eventi **incompatibili**, allora la probabilità dell'unione dei due eventi è la somma delle loro probabilità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

### 4.5.1 Conseguenze degli assiomi

1. **Probabilità del complementare di un evento:**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. **Probabilità dell'evento impossibile:**

$$P(\emptyset) = 0$$

3. **Proprietà di monoticità:** Se  $B$  è un evento incluso in un evento  $A$ , allora la probabilità di  $B$  è minore o uguale alla probabilità di  $A$

$$B \subseteq A \implies P(B) \leq P(A)$$

4. **Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

## 4.6 Probabilità Totale

### Teorema : Teorema delle probabilità totali a 2 eventi

Siano  $A_1, A_2$  due eventi, la probabilità dell'unione dei due eventi è uguale alla somma delle due probabilità meno la loro intersezione:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi"

- Se i due eventi sono incompatibili  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  allora,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \emptyset = P(A_1) + P(A_2)$$

(assioma 3)

- Se i due eventi sono compatibili  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  allora,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

(resta uguale)

### Teorema : Teorema delle probabilità totali a $k$ eventi

Siano  $k$  eventi, la probabilità dell'unione di  $k$  eventi è uguale a:

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) + \\
 &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j) + \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \\
 &\quad - \sum_{1 \leq i < j < r < s \leq k} P(A_i \cap A_j \cap A_r \cap A_s) + \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_k) =
 \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= \text{somma delle probabilità dei singoli eventi} + \\
 &\quad - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 2 a 2}] + \\
 &\quad + [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 3 a 3}] + \\
 &\quad - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 4 a 4}] + \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + / - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi } k \text{ a } k]
 \end{aligned}$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno tra i  $k$  eventi"

### Esercizio

Una segretaria distratta prepara 3 lettere e 3 buste da inviare a 5 persone diverse e mette le lettere nelle buste a caso.

Qual è la probabilità che almeno una delle 3 lettere sia inserita nella busta corrispondente?

1. Descrivi a parole quanto richiesto nell'esercizio:  
 $E$  = almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
2. Suddividi l'evento:
  - (a)  $E_1$  = la lettera 1 è nella busta 1
  - (b)  $E_2$  = la lettera 2 è nella busta 2
  - (c)  $E_3$  = la lettera 3 è nella busta 3
  - (d) Quindi, l'evento  $E$  = almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente diventa:  
 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
  - (e) Qual è la probabilità che si verifichi  $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ?  
Infatti qui si calcola la probabilità che almeno uno si verifichi.

Dunque applico la formula di probabilità totale per 3 eventi:

$$\begin{aligned}
 P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\
 &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\
 &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] =
 \end{aligned}$$

- $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_1)$ :

– 123  
– 132  
– ~~213~~  
– ~~231~~  
– ~~312~~  
– ~~321~~

2 casi favorevoli.

- $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_2)$ : uguale a  $P(E_1)$

- $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_3)$ : uguale a  $P(E_1)$

- $P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_1 \cap E_2)$ , ovvero che la lettera 1 sia in prima posizione e allo stesso tempo 2 sia alla seconda posizione:

– 123  
– ~~132~~  
– ~~213~~  
– ~~231~~  
– ~~312~~  
– ~~321~~

1 caso favorevole.

- $P(E_1 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

- $P(E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ , ovvero che allora stesso tempo la lettera 1 sia in prima posizione, la 2 in seconda posizione e la 3 in terza posizione:

– 123  
– ~~132~~  
– ~~213~~  
– ~~231~~  
– ~~312~~  
– ~~321~~

1 caso favorevole.

Pertanto la formula:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

Sostituendo con i valori trovati, diventa:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] + \\ &- \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right] \\ &+ \left[ \frac{1}{6} \right] = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

Oppure posso utilizzare la negazione  $P(E) = 1 - P(\bar{E})$ :

- $E$  = almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
- $\bar{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

Usando la negazione:  $\bar{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\bar{E}_1$  = la lettera 1 non è nella busta 1
- $\bar{E}_2$  = la lettera 2 non è nella busta 2
- $\bar{E}_3$  = la lettera 3 non è nella busta 3

e quindi se voglio che accadano tutti gli eventi insieme allora sarebbe intersezione e non unione (probabilità congiunta):

$\bar{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente  $\implies \bar{E} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3$   
quindi uso la formula della probabilità congiunta per 3 eventi:

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = \\ &= P(\bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_3 \mid \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $P(\bar{E}_1) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Uso tutti gli elementi, ordine conta, ripetizioni no  $\implies$  permutazioni semplici  $n!$   
Quindi, casi possibili  $3! = 6$ , ovvero 6 possibili modi di ordinare gli elementi:

- 123
- 132
- 213
- 231
- 312
- 321

1. casi favorevoli che accada  $P(\bar{E})$ , ovvero tutte le combinazioni in cui 1 non è nella prima posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- 213
- 231
- 312
- 321

Ci sono 4 combinazioni favorevoli

- $P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1) = \frac{\bar{E}_2 \cap \bar{E}_1}{P(\bar{E}_1)} = \frac{?}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

tutte e due le buste non vanno nelle buste corrispondenti:  
 $P(\bar{E}_2 \cap \bar{E}_1) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{3}{3!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

casi favorevoli che accada  $P(\bar{E})$ , ovvero tutte le combinazioni in cui 1, 2 non sono nella corrispettiva posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- 213
- 231
- 312
- ~~321~~

Ci sono 3 combinazioni favorevoli

- $P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})} = \frac{?}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$   
tutte e tre le buste non vanno nelle buste corrispondenti:  
 $P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$   
casi favorevoli che accade  $P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})$ , ovvero tutte le combinazioni in cui 1, 2, 3 non sono nella corrispettiva posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- ~~213~~
- 231
- 312
- ~~321~~

Ci sono 2 combinazioni favorevoli

Pertanto:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

Oppure un modo più veloce sempre con la negazione  $P(E) = 1 - P(\overline{E})$ :  
 $\overline{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$  = la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$  = la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$  = la lettera 3 non è nella busta 3

Voglio calcolare  $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})$  e poi fare  $P(E) = 1 - P(\overline{E})$ , quindi:

1. Elenco tutti i possibili modi di ordinare le buste:

- 123
- 132
- 213
- 231
- 312
- 321

2. Tengo fissato un ordine (lettera 1 - busta 1 - prima posizione; lettera 2 - busta 2 - seconda posizione; lettera 3 - busta 3 - terza posizione)
3. Elimino i casi in cui 1 è nella prima posizione  $\wedge$  2 è nella seconda posizione  $\wedge$  3 è nella terza posizione:

- ~~123~~ - elimino perché 1 è nella prima posizione, 2 nella seconda, 3 nella terza
- ~~132~~ - elimino perché 1 è nella prima posizione
- ~~213~~ - elimino perché 3 è nella terza posizione

- 231
- 312
- ~~321~~ - elimino perché 2 è nella seconda posizione

Mi rimangono 2 casi favorevoli.

4. Pertanto,  $P(\bar{E}) = P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5. Alla fine:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

## 5 Probabilità Condizionata e Indipendenza

### 5.1 Probabilità Condizionata

#### Teorema

Si definisce probabilità condizionata la **probabilità che si verifichi un evento  $E$  sapendo che si è già verificato l'evento  $B$** : "probabilità di  $E$  dato  $B$ ."

$$P(E | B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

Inoltre, si ricavano le seguenti formule:

$$P(E \cap B) = P(E | B) \cdot P(B)$$

e:

$$P(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E | B)}$$

Prima osservazione:

$$\begin{aligned} P(E \cup A | B) &= \frac{P((E \cup A) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((E \cap B) \cup (A \cap B))}{P(B)} \\ &= \text{per teorema delle probabilità totali}^1 \\ &= \frac{P(E \cap B) + P(A \cap B) - P(E \cap B \cap A)}{P(B)} \end{aligned}$$

Seconda osservazione:

$$P(E \cap A | B) = \frac{P(E \cap A \cap B)}{P(B)}$$

Terza osservazione:

$$P(\bar{E} | B) = 1 - P(E | B)$$

### 5.2 Probabilità Congiunta / Composta

La probabilità congiunta è la probabilità che due o più eventi si verifichino insieme (accadano entrambi), ossia che si verifichi l'intersezione degli eventi.

#### Teorema : Legge delle probabilità composte per 2 eventi

Si definisce probabilità congiunta la **probabilità che si verifichino entrambi gli eventi**:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) \text{ con } P(A_1) \neq 0$$

Oppure:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2) \text{ con } P(A_2) \neq 0$$

Se entrambe sono non nulle,  $P(A_1) \wedge P(A_2) \neq 0$ , allora posso usare una delle due formule, il risultato rimane invariato:

<sup>1</sup> $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Posso usare questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

Oppure questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2)$$

Prima osservazione:  $P(A_1) \neq 0$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

$$= \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot P(A_1)$$

$= P(A_2 \cap A_1)$  giusto, intersezione è simmetrica,  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$

Seconda osservazione:  $P(A_2) \neq 0$

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2)$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \cdot P(A_2)$$

$= P(A_1 \cap A_2)$  giusto, intersezione è simmetrica,  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$

### Teorema : Legge delle probabilità composte per $k$ eventi

Generalizzato a  $k$  eventi, questa formula vale solo se gli eventi su cui condizioniamo <sup>a</sup> sono maggiori di zero  $P(X) > 0$ :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \prod_{i=1}^k P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \\ &\quad \cdot P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \dots P(A_k | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \end{aligned}$$

<sup>a</sup>eventi su cui condizioniamo sono quelli in rosso, dopo la sbarra:  $P(A_1 | X)$

### Esercizio

Un cliente di un'azienda acquista 3 pc da un lotto di 50 pc di cui 4 sono difettosi. Qual è la probabilità che tutti i 3 pc acquistati siano difettosi?

Ricordo che: intersezione=  $\cap = \wedge = AND$

1. Descrivi a parole quanto richiesto in un evento:  
 $E =$ tutti i pc acquistati sono difettosi
2. Suddividi l'evento:
  - (a)  $E_1 =$  primo pc difettoso
  - (b)  $E_2 =$  secondo pc difettoso
  - (c)  $E_3 =$  terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento  $E =$ tutti i pc acquistati sono difettosi diventa:  
 $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

4. Qual è la probabilità che si verifichi  $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ ? Infatti qui si calcola la probabilità che si verifichino tutti gli eventi insieme

Dunque applico formula della probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{50}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{49}$$

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{2}{48} = 0.0002 = 0.02\%$$

### Esercizio

Se invece fosse stato: Qual è la probabilità che **almeno uno dei pc** fosse difettoso?  
Non avrei utilizzato probabilità congiunta ma l'unione.

Ricordo che: l'unione =  $\cup = \vee = OR$

1. Descrivo a parole quanto richiesto in un evento:  
 $E =$  almeno un pc acquistato è difettoso
2. Suddividi l'evento:
  - (a)  $E_1 =$  primo pc difettoso oppure no
  - (b)  $E_2 =$  secondo pc difettoso oppure no
  - (c)  $E_3 =$  terzo pc difettoso oppure no
3. Quindi, l'evento  $E =$  almeno un pc acquistato è difettoso, diventa:  
 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi  $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ?

Dunque, ho due approcci:

- Uso formula delle probabilità totali a  $k = 3$  eventi:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

quindi:

- $P(E_1) = ?$
- $P(E_2) = ?$
- $P(E_3) = ?$
- $P(E_1 \cap E_2) = ?$
- $P(E_1 \cap E_3) = ?$
- $P(E_2 \cap E_3) = ?$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = ?$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

Se avessi tutti i dati, sarebbe facile, ma dato che non li ho è meglio il secondo approccio.

- **Uso negazione dell'evento:**

La negazione di "almeno uno dei pc è difettoso" è "nessuno dei pc è difettoso". Quindi posso usare la seguente formula:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

1. Descrivi a parole l'evento contrario:  
 $\bar{E}$  = nessuno dei pc è difettoso
2. Suddividi l'evento:
  - (a)  $E_1$  = primo pc funzionante
  - (b)  $E_2$  = secondo pc funzionante
  - (c)  $E_3$  = terzo pc funzionante
3. Quindi, l'evento  $\bar{E}$  = nessuno dei pc è difettoso diventa:  
 $\bar{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi  $\bar{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ ? Applico probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{46}{50}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{45}{49}$$

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{44}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0.774$$

Quindi:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 0.774 = 0.226 = 22.6\%$$

Pertanto, la probabilità che almeno uno dei pc sia difettoso è  $P(E) = 0.226$

### 5.3 Eventi Indipendente ed Eventi Dipendenti

## 6 Variabili Casuali

### 6.1 Famiglie Parametriche

## 7 Inferenza Statistica

### 7.1 Stima Puntuale

### 7.2 Stima Intervallare

### 7.3 Verifica delle Ipotesi