Statistica

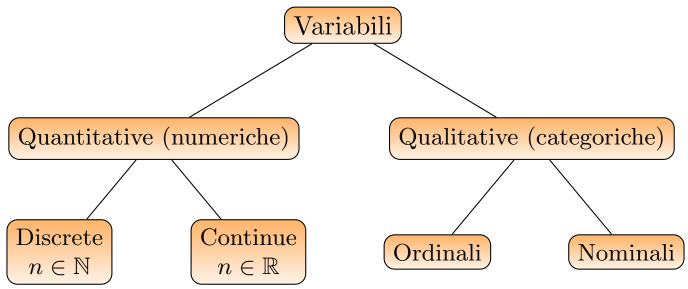
Ede Boanini

14 gennaio 2026

Indice

1 Introduzione

1.1 Classificazione delle Variabili



Differenza tra ordinali e nominali:

- **Ordinali:** categorie che hanno un ordine, puoi solo dire se un valore è minore o maggiore rispetto ad un altro.
  - *Livello di istruzione: elementare* $<$ *media* $< \cdots$
  - *Grado di soddisfazione: nullo* $<$ *basso* $<$ *medio* $< \cdots$
  - *Classifica di una gara: quinto*$<$*quarto*$< \cdots$
  - *Matricola: 17345* $<$ *17346* $< \cdots$
- **Nominali:** categorie che non hanno un ordine.
  - *Colore occhi: blu, verdi, marroni,* $\cdots$
  - *Genere: M, F*
  - *Marche auto: Toyota, Ford,* $\cdots$
  - *Nazionalità: Giapponese, Italiano,* $\cdots$

1.2 Distribuzioni di Frequenza

È una tabella che contiene modalità e frequenze.

Modalità di X (x_i)	Frequenze assolute f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_n	f_n
	N

1.2.1 Tipi di Frequenza

1. Frequenza assoluta: numero di ripetizioni di una certa modalità (es: quanti studenti hanno preso 28 all'esame)

$$freq_{assoluta} = f_i$$

2. Frequenza relativa:

$$freq_{relativa} = \frac{f_i}{N}$$

3. Frequenza percentuale:

$$freq_{\%} = \frac{f_i}{N} \cdot 100$$
oppure
$$freq_{\%} = freq_{relativa} \cdot 100$$

4. Frequenza cumulata: somma progressiva delle frequenze assolute o relative.

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$freq_{cumulataRelativa} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} freq_{relativa_i}$$

5. Frequenza cumulata percentuale:

$$freq_{cumulataAssoluta\%} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot 100$$

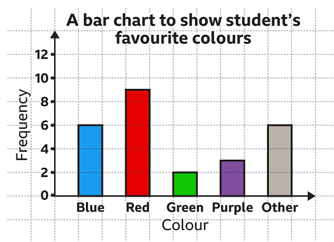
$$freq_{cumulataRelativa\%} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{N} \cdot 100 = \sum_{i=1}^{n} freq_{relativa_i} \cdot 100$$

2 Statistica Descrittiva

2.1 Diagrammi a barre vs Istogrammi

Definizione 2.1 (Diagrammi a barre)**.** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili qualitative (categoriche). Le barre devono avere tutte la stessa base ed essere equi-spaziate (lasciare un pò di spazio tra una barra e l'altra).

- altezza barre: frequenza

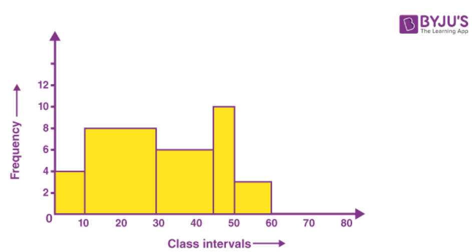


Definizione 2.2 (Istogrammi)**.** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili quantitative. Ogni barra rappresenta una classe e la sua frequenza.

- altezza barre: densità di frequenza

$$densita_{freq} = \frac{\text{Frequenza}}{\text{Ampiezza classe}}$$

- base barre: ampiezza delle classi



Osservazione: Definire k classi di uguale ampiezza

$$\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$$

I dati sulla statura di 48 adulti vanno da un minimo di 160 a 180 cm. Come fare k classi di ugual ampiezza?

1. Scelgo k (es: $k = 5$)
2. Uso formula Ampiezza classe $= \frac{\max - \min}{k}$ (es: Ampiezza classe $= \frac{180-160}{5} = 4$

cm); quindi ogni classe avrà ampiezza 4.

3. Gli estremi inferiore della classe sono (contando ampiezza 4):
   - 160
   - 164
   - 168
   - 172
   - 176

Conclusione: le $k = 5$ classi di ugual ampiezza sono:

$$[160, 164),\ [164, 168),\ [168, 172),\ [172, 176),\ [176, 180]$$

2.2 Media

Qual è il centro dei dati? valore tipico attorno a cui si concentrano i dati.
f_i indica la frequenza assoluta.

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot freq_{relativa_i})$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^{n}(m_i \cdot freq_{relativa_i})$$

dove a, b estremi dell'intervallo e $m_i = \frac{a+b}{2}$ il valore centrale della classe.

2.3 Moda

Qual è il centro dei dati? valore tipico attorno a cui si concentrano i dati.
La Moda è il valore che si ripete più spesso nei dati.

- **Formula della moda per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$Moda = x_i \text{ con maggior frequenza}$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$Moda = \frac{a+b}{2}$$

Esempio Moda

Per esempio, per l'esame di analisi 2 ci sono stati tanti studenti che hanno preso tra il 20 e il 25 (classe), allora [20-25] è la classe modale. Pertanto, nel nostro esempio $Moda = \frac{20+25}{2} = 22.5$

2.4 Mediana

Qual è il centro dei dati? valore tipico attorno a cui si concentrano i dati.
La Mediana è il valore che è più grande (o uguale) della prima metà dei dati e allo stesso tempo, più piccolo (o uguale) della seconda metà dei dati.
È il valore che sta in mezzo a dati ordinati; quindi per poter stimare la Me è necessario ordinare i dati:

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)
  1. Ordina i dati
  2. Trova indice i:
     - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}, \quad i_2 = \frac{N}{2} + 1$
     - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
  3. La mediana è il valore associato all'indice trovato ($i = x_i$):
     - Se ho due indici i_1, i_2, allora $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$
     - Se ho un solo indice i, allora $Me = x_i$
- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)
  1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

  2. Trova indice i:
     - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}, \quad i_2 = \frac{N}{2} + 1$
     - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
  3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata), allora $Me = classe$. Oppure, se abbiamo due indici i_1, i_2 con valori x_1, x_2, allora $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$

2.5 Quartili

Il $p-$esimo percentile è il valore che ha $\%p$ dei dati sotto/dietro di sè.

- Q_1 =25-esimo percentile
  (25% dei dati sotto questo valore)
- Q_2 =50-esimo percentile= Mediana
  (50% dei dati sotto questo valore)
- Q_1 =75-esimo percentile
  (75% dei dati sotto questo valore)

Divido la distribuzione in 4 parti uguali, per questo si chiamano "quartili".

- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)
  1. Ordina i dati
  2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$
  3. Q_k è il valore associato all'indice:
     - Se $i \in \mathbb{N}$, allora $Q_k = x_i$
     - Se $i \in \mathbb{Q}$, allora $Q_k = \frac{\text{somma dei valori associati}}{2}$

     Esempio: se $i = 6.75$ allora $i_1 = 6, i_2 = 7$, e i valori associati a $i_1 = 20, i_2 = 25$, allora $Q_k = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{20+25}{2} = 22.5$
- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)
  1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

  2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$

3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata)
4. Allora avremo:
$$Q_k = L + \frac{i - f_{cumulata}}{f_i} \cdot h$$
dove:
   - L: estremo inferiore della classe attuale (dell'indice)
   - i: indice
   - $f_{cumulata}$: frequenza cumulata classe precedente
   - f_i: frequenza assoluta classe attuale
   - h: ampiezza classe attuale

2.6 Campo di Variazione / Range

Distanza tra min e max.
$$Range = max - min$$

2.7 Differenza Interquartile

Si usano i quartili per capire la variabilità centrale.
$$IQR = Q_3 - Q_1$$

2.8 Varianza

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.
Quanto i dati si allontanano dalla loro media (μ oppure $\overline{x}$).

- **Formula varianza per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)
  - Varianza della popolazione (P):
  $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{N}$$
  - Varianza campionaria ($C \subseteq P$):
  $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{N - 1}$$

2.9 Deviazione standard

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
dove σ^2 è la varianza.

2.10 Coefficiente di variazione

Si calcola quando $\mu, \overline{x}, \sigma$ sono positivi e si esprime in percentuale.
$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{oppure} \quad CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

3 Calcolo Combinatorio

Ordine conta: $abc \neq cba$ vuol dire "2 modi diversi di ordinare gli elementi".
Ordine non conta: $abc = cba$ vuol dire "c'è solo 1 modo per ordinare gli elementi".

Trucco:

- **Permutazioni:** uso tutti gli n oggetti. Ordine conta
- **Disposizioni:** non uso tutti gli n oggetti ma solo r oggetti scelti dall'insieme dove $r < n$. Ordine conta
- **Combinazioni:** si parla di gruppi di k elementi. Ordine non conta

	Ordine conta?	**Oggetti usati**
Permutazioni	✓	Uso **tutti** gli n oggetti
Disposizioni	✓	Uso r **oggetti su** n
Combinazioni	×	Uso **gruppi di** k **oggetti su** n

3.1 Permutazioni Semplici

Una permutazione semplice è un modo di ordinare in successione oggetti distinti (qui non esistono oggetti uguali tra loro, sono tutti distinti).

Teorema

Il **numero di permutazioni** di n oggetti distinti è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_n = n!$$

Esempio

Se ho 10 libri, allora avrò:

$$P_{10} = 10! = 3628800 \text{ modi diversi di ordinare 10 libri}$$

3.2 Permutazioni con Ripetizione

Una permutazione con ripetizione è un modo di ordinare oggetti tra cui alcuni uguali tra loro.

Teorema

Il **numero di permutazioni** di n oggetti alcuni uguali tra loro è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_{\text{numero tot di oggetti}}^{\text{numero di scatole}} = P_n^r = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

Devo pensarlo così:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte, senza ripetizione (k = conta quante scatole sono)

2. Inserisci ogni oggetto nella corrispettiva scatola
(r = conta quanti oggetti ha ogni scatola)

Esempio

Se io ho la parola STATISTICA, ho $n = 10$ allora:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte
(k = conta quante scatole sono)
S, T, A, I, C quindi $k = 5$ scatole
2. Inserisci ogni ripetizione nella corrispettiva scatola
(r = conta quanti oggetti ha ogni scatola)
   - scatola S: la parola ha 2 "S" ripetute, quindi $r_1 = 2$
   STATISTICA
   - scatola T: la parola ha 3 "T" ripetute, quindi $r_2 = 3$
   STATISTICA
   - scatola A: la parola ha 2 "A" ripetute, quindi $r_3 = 2$
   STATISTICA
   - scatola I: la parola ha 2 "I" ripetute, quindi $r_4 = 2$
   STATISTICA
   - scatola C: la parola ha 1 "C" ripetuta, quindi $r_5 = 1$
   STATISTICA

Quindi:

$$P_{10}^{5} = \frac{10!}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!} = \frac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600 \text{ modi diversi di ordinare la parola}$$

3.3 Disposizioni Semplici

Nel caso delle disposizioni, non uso tutti gli n oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto k di n dove $k \leq n$.

Teorema

Il **numero di disposizioni** di oggetti scelti k tra n oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1. Scelgo k oggetti tra n oggetti totali
2. $D_{n,k}$ è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti

Esempio

In quanti modi diversi posso sistemare su una liberia 7 libri scelti da un insieme di 20 libri?

$$D_{20,7} = \frac{20!}{(20-7)!} = 390700800$$

3.4 Disposizioni con Ripetizione

Nel caso delle disposizioni con ripetizione, non uso tutti gli n oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto k di n dove $k \leq n$.

Teorema

Il **numero di disposizioni con ripetizione** di oggetti scelti k tra n oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti in cui alcuni possono ripetersi nella stessa sequenza.

$$D^R_{n,k} = n^k$$

Esempio

Quante password di 5 caratteri si possono creare con un alfabeto di 26 lettere?

1. Scelgo $k = 5$ sottoinsieme di $n = 26$
2. Alcune lettere possono ripetersi nella stessa sequenza

$$D^R_{26,5} = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11881376$$

3.5 Combinazioni

Nel caso delle combinazioni, si parla di gruppi il cui numero corrisponde esattamente a quanti oggetti k ho scelto da n. La scelta k corrisponde solo al numero da cui è formato ogni gruppo.

Ovvero, se io scelgo 10 oggetti su 20, allora ogni gruppo dovrà avere esattamente 10 oggetti. L'ordine non conta perchè l'importante è la presenza dell'oggetto all'interno del gruppo, che sia primo o ultimo non cambia niente.

La domanda è: quanti modi diversi ho di formare questi gruppi?

Teorema

Il **numero di combinazioni** è il numero di modi diversi per formare gruppi di k elementi ($k \leq n$).

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Scelgo un numero k dove $k \leq n$
2. Ogni gruppo dovrà avere esattamente k oggetti
3. Quanti modi diversi ho di formare questi gruppi che contengono esattamente k oggetti?

Esempio

Ho 3 frutti diversi ma la io voglio fare merenda solo con 2. Quante tipe di merende posso creare con 2 frutti?

1. Scelgo $k = 2$ dove $2 < 3$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 2 frutti

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Ho 3 modi diversi di formare gruppi di 2 frutti, quindi ho 3 tipi di merende diverse.

Esempio

Voglio giocare a basket e devo formare 2 gruppi di persone per la partita. So che ogni squadra deve avere esattamente 5 giocatori. Le persone che si son presentate come candidate sono 40. Quanti modi diversi ho per formare una squadra? e per formarne due? sapendo che la persona non puo essere contemporaneamente scelta in entrambe?

1. Scelgo $k = 5$ dove $5 < 40$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 5 persone

   $$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708 \text{ modi diversi per formare una sola squadra}$$

   Ho 657708 modi diversi di formare gruppi di 5 persone, quindi posso scegliere 1 tra 657708 da mandare in campo.
3. Se invece voglio formare due squadre (sapendo che la stessa persona non può essere in entrambe) ? quante scelte avrei?

   $$\text{Prima squadra: } C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708$$

   Dato che le persone non possono ripetersi, se io ho formato la prima squadra, avrò per la seconda 35-5 persone ancora disponibili (perchè 5 le ho già scelte nella 1ª squadra):

   $$\text{Seconda squadra: } C_{35,5} = \binom{35}{5} = \frac{35!}{5!(35-5)!} = 324632$$

   Quindi i diversi modi per formare le due squadre saranno in totale $657708 \cdot 324632 = 213846580000$

4 Probabilità

4.1 Operazione insiemi

$$
\begin{aligned}
A_1 \cup A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2\} \\
A_1 \cap A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2\} \\
A_1 - A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \notin A_2\} \\
\overline{A} &= \{\omega \mid \omega \notin A\}
\end{aligned}
$$

4.2 Proprietà operazione tra eventi

Siano A_1, A_2, A_3 tre eventi.

- **Proprietà commutativa**: l'ordine non cambia il risultato

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

- **Proprietà associativa**:

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

- **Proprietà distributiva**:

$$(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$$

- **Leggi di De Morgan**:

$$
\begin{aligned}
\overline{E_1 \cap E_2} &= \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \\
\overline{E_1 \cup E_2} &= \overline{E_1} \cap \overline{E_2}
\end{aligned}
$$

4.3 Tipi di eventi

4.3.1 Eventi compatibili

Due eventi che possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ compatibili} \iff A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

4.3.2 Eventi incompatibili

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ incompatibili} \iff A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

4.3.3 Eventi complementari

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente e tale che uno dei due si verifica di sicuro.

$$A_1, A_2 \text{ complementari} \iff \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = \Omega \end{cases}$$

4.4 Definizione

Sia A un evento e Ω lo spazio campionario. Definisco $P(A)$ la probabilità che si verifichi A dove $0 \leq P(A) \leq 1$:

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

4.5 Assiomi

1. **Primo assioma:** la probabilità di un evento A è un numero reale non negativo
2. **Secondo assioma:** la probabilità dell'intero spazio campionario è uguale a 1
$$P(\Omega) = 1$$
3. **Terzo assioma:** Se A_1, A_2 sono eventi incompatibili, allora la probabilità dell'unione dei due eventi e la somma delle loro probabilità
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

4.5.1 Conseguenze degli assiomi

1. **Probabilità del complementare di un evento:**
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
oppure:
$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
2. **Probabilità dell'evento impossibile:**
$$P(\emptyset) = 0$$
3. **Proprietà di monoticità:** Se B è un evento incluso in un evento A, allora la probabilità di B è minore o uguale alla probabilità di A
$$B \subseteq A \implies P(B) \leq P(A)$$
4. **Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

4.6 Probabilità Totale

Teorema : Teorema delle probabilità totali a 2 eventi

Siano A_1, A_2 due eventi, la probabilità dell'unione dei due eventi è uguale alla somma delle due probabilità meno la loro intersezione:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi"

- Se i due eventi sono incompatibili $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ allora,
$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \emptyset = P(A_1) + P(A_2)$
(assioma 3)
- Se i due eventi sono compatibili $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ allora,
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
(resta uguale)

Teorema : Teorema delle probabilità totali a k eventi

Siano k eventi, la probabilità dell'unione di k eventi è uguale a:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = & \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + \\ & - \sum_{1 \le i < j \le k}^{k} P(A_i \cap A_j) + \\ & + \sum_{1 \le i < j < r \le k}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \\ & - \sum_{1 \le i < j < r < s \le k}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r \cap A_s) + \\ & \cdots \\ & + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots \cap A_k) = \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = & \text{ somma delle probabilità dei singoli eventi } + \\ & - [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi 2 a 2 }] + \\ & + [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi 3 a 3 }] + \\ & - [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi 4 a 4 }] + \\ & \cdots \\ & + / - [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi } k \text{ a } k \text{ }] \end{aligned}$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno tra i k eventi"

Esercizio

Una segretaria distratta prepara 3 lettere e 3 buste da inviare a 5 persone diverse e mette le lettere nelle buste a caso.
Qual è la probabilità che **almeno una** delle 3 lettere sia inserita nella busta corrispondente?

1. Descrivi a parole quanto richiesto nell'esercizio:
   $E =$almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
2. Suddividi l'evento:
   (a) $E_1 =$la lettera 1 è nella busta 1
   (b) $E_2 =$la lettera 2 è nella busta 2
   (c) $E_3 =$la lettera 3 è nella busta 3
   (d) Quindi, l'evento $E =$almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente diventa:
   $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
   (e) Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$?
   Infatti qui si calcola la probabilità che almeno uno si verifichi.

Dunque applico la formula di probabilità totale per 3 eventi:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = & [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ & - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\ & + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

- $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_1)$:
  - 123
  - 132
  - ~~213~~
  - ~~231~~
  - ~~312~~
  - ~~321~~

  2 casi favorevoli.
- $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_2)$: uguale a $P(E_1)$
- $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_3)$: uguale a $P(E_1)$
- $P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_1 \cap E_2)$, ovvero che la lettera 1 sia in prima posizione e allo stesso tempo 2 sia alla seconda posizione:
  - 123
  - ~~132~~
  - ~~213~~
  - ~~231~~
  - ~~312~~
  - ~~321~~

  1 caso favorevole.
- $P(E_1 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$
- $P(E_2 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, ovvero che allora stesso tempo la lettera 1 sia in prima posizione, la 2 in seconda posizione e la 3 in terza posizione:
  - 123
  - ~~132~~
  - ~~213~~
  - ~~231~~
  - ~~312~~
  - ~~321~~

  1 caso favorevole.

Pertanto la formula:

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = {} & [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\
& - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\
& + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] =
\end{aligned}$$

Sostituendo con i valori trovati, diventa:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = & \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] + \\ & - \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right] \\ & + \left[\frac{1}{6}\right] = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

Oppure posso utilizzare la negazione $P(E) = 1 - P(\overline{E})$:

- E =almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
- $\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

Usando la negazione: $\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$ =la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$ =la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$ =la lettera 3 non è nella busta 3

e quindi se voglio che accadano tutti gli eventi insieme allora sarebbe intersezione e non unione (probabilità congiunta):
$\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente $\implies$ $\overline{E} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$
quindi uso la formula della probabilità congiunta per 3 eventi:

$$\begin{aligned} P(\overline{E}) = & P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = \\ & = P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) \\ & = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $P(\overline{E_1}) = \frac{\text{numero casi favoreli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
  Uso tutti gli elementi, ordine conta, ripetizioni no $\implies$ permutazioni semplici $n!$
  Quindi, casi possibili $3! = 6$, ovvero 6 possibili modi di ordinare gli elementi:
  - 123
  - 132
  - 213
  - 231
  - 312
  - 321

  1. casi favorevoli che accada $P(\overline{E})$, ovvero tutte le combinazioni in cui 1 non è nella prima posizione:
     - ~~123~~
     - ~~132~~
     - 213
     - 231
     - 312
     - 321

     Ci sono 4 combinazioni favorevoli

- $P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1}) = \frac{\overline{E_2} \cap \overline{E_1}}{P(\overline{E_1})} = \frac{?}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$
  tutte e due le buste non vanno nelle buste corrispondenti:
  $P(\overline{E_2} \cap \overline{E_1}) = \frac{\text{numero casi favoreli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{3}{3!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

  casi favorevoli che accada $P(\overline{E})$, ovvero tutte le combinazioni in cui $1, 2$ non sono nella corrispettiva posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- 213
- 231
- 312
- ~~321~~

Ci sono 3 combinazioni favorevoli

- $P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})} = \frac{?}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$
tutte e tre le buste non vanno nelle buste corrispondenti:
$P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{\text{numero casi favoreli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
casi favorevoli che accada $P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})$, ovvero tutte le combinazioni in cui $1, 2, 3$ non sono nella corrispettiva posizione:
  - ~~123~~
  - ~~132~~
  - ~~213~~
  - 231
  - 312
  - ~~321~~

  Ci sono 2 combinazioni favorevoli

Pertanto:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

Oppure un modo più veloce sempre con la negazione $P(E) = 1 - P(\overline{E})$:
$\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$ =la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$ =la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$ =la lettera 3 non è nella busta 3

Voglio calcolare $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})$ e poi fare $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, quindi:

1. Elenco tutti i possibili modi di ordinare le buste:
   - 123
   - 132
   - 213
   - 231
   - 312
   - 321
2. Tengo fissato un ordine (lettera 1 - busta 1 - prima posizione; lettera 2 - busta 2 - seconda posizione; lettera 3 - busta 3 - terza posizione)
3. Elimino i casi in cui 1 è nella prima posizione $\wedge$ 2 è nella seconda posizione $\wedge$ 3 è nella terza posizione:
   - ~~123~~ - elimino perchè 1 è nella prima posizione, 2 nella seconda, 3 nella terza
   - ~~132~~ - elimino perchè 1 è nella prima posizione
   - ~~213~~ - elimino perchè 3 è nella terza posizione

- 231
- 312
- $\cancel{321}$ - elimino perchè 2 è nella seconda posizione

Mi rimangono 2 casi favorevoli.

4. Pertanto, $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
5. Alla fine:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

5 Probabilità Condizionata e Indipendenza

5.1 Probabilità Condizionata

Teorema

Si definisce probabilità condizionata la **probabilità che si verifichi un evento** E **sapendo che si è già verificato l'evento** B: "probabilità di E dato B."

$$P(E \mid B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

Inoltre, si ricavano le seguenti formule:

$$P(E \cap B) = P(E \mid B) \cdot P(B)$$

e:

$$P(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E \mid B)}$$

Prima osservazione:

$$\begin{aligned} P(E \cup A \mid B) &= \frac{P((E \cup A) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((E \cap B) \cup (A \cap B))}{P(B)} \\ &= \text{per teorema delle probabilità totali}^{1} \\ \\ &= \frac{P(E \cap B) + P(A \cap B) - P(E \cap B \cap A)}{P(B)} \end{aligned}$$

Seconda osservazione:

$$P(E \cap A \mid B) = \frac{P(E \cap A \cap B)}{P(B)}$$

Terza osservazione:

$$P(\overline{E} \mid B) = 1 - P(E \mid B)$$
$$P(E \mid B) = 1 - P(\overline{E} \mid B)$$

[1] $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Osservazione:

$$P(E \mid \overline{B}) = \frac{P(E \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} =$$

per l'assioma 3

$$= \frac{P(E \cap \overline{B})}{1 - P(B)} =$$

sapendo che $P(E \cap \overline{B}) = P(E \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B})$ e che,

le due probabilità sono non nulle $P(E), P(\overline{B}) \neq 0$,

allora posso usare $P(E \cap \overline{B}) = P(\overline{B} \mid E) \cdot P(E)$

poichè il risultato di $P(E \cap \overline{B})$ rimane invariato. Quindi:

$$= \frac{P(\overline{B} \mid E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

$$= \frac{P(\overline{B} \mid E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

per l'assioma 3

$$= \frac{(1 - P(B \mid E)) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

5.2 Probabilità Congiunta / Composta

La probabilità congiunta è la probabilità che due o più eventi si verifichino insieme (accadano entrambi), ossia che si verifichi l'intersezione degli eventi.

Teorema : Legge delle probabilità composte per 2 eventi

Si definisce probabilità congiunta la **probabilità che si verifichino entrambi gli eventi**:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) \text{ con } P(A_1) \neq 0$$

Oppure:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2) \text{ con } P(A_2) \neq 0$$

Se entrambe sono non nulle, $P(A_1) \wedge P(A_2) \neq 0$, allora posso usare una delle due formule, il risultato rimane invariato:
Posso usare questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

Oppure questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2)$$

Prima osservazione: $P(A_1) \neq 0$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

$$= \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot P(A_1)$$

$= P(A_2 \cap A_1)$ giusto, intersezione è simmetrica, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$

Seconda osservazione: $P(A_2) \neq 0$

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2)$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \cdot P(A_2)$$

$$= P(A_1 \cap A_2) \text{ giusto, intersezione è simmetrica, } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$$

Teorema : Legge delle probabilità composte per k eventi

Generalizzato a k eventi, questa formula vale solo se gli eventi su cui condizioniamo [a] sono maggiori di zero $P(X) > 0$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \prod_{i=1}^{k} P\Big(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\Big)$$

Ovvero:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \\ \cdot P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot \cdots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

[a] eventi su cui condizioniamo sono quelli in rosso, dopo la sbarra: $P(A_1 \mid X)$

Esercizio

Un cliente di un'azienda acquista 3 pc da un lotto di 50 pc di cui 4 sono difettosi. Qual è la probabilità che tutti i 3 pc acquistati siano difettosi?
Ricordo che: intersezione= $\cap = \wedge = AND$

1. Descrivi a parole quanto richiesto in un evento:
   E=tutti i pc acquistati sono difettosi
2. Suddividi l'evento:
   (a) E_1= primo pc difettoso
   (b) E_2= secondo pc difettoso
   (c) E_3= terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento E=tutti i pc acquistati sono difettosi diventa:
   $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Infatti qui si calcola la probabilità che si verifichino tutti gli eventi insieme

Dunque applico formula della probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot (E_3 \mid E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{50}$$

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{49}$$

$$P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{2}{48} = 0.0002 = 0.02\%$$

Esercizio

Se invece fosse stato: Qual è la probabilità che **almeno uno dei pc fosse difettoso?**
Non avrei utilizzato probabilità congiunta ma teorema delle probabilità totali (unione).
Ricordo che: l'unione $= \cup = \vee = OR$

1. Descrivo a parole quanto richiesto in un evento:
   $E =$almeno un pc acquistato è difettoso
2. Suddividi l'evento:
   (a) $E_1 =$ primo pc difettoso
   (b) $E_2 =$ secondo pc difettoso
   (c) $E_3 =$ terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento $E =$almeno un pc acquistato è difettoso, diventa:
   $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$?

Dunque, ho due approcci:

- **Uso formula delle probabilità totali a $k = 3$ eventi:**

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = &[P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)]+ \\ &- [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)]+ \\ &+ [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

  quindi:
  - $P(E_1) =?$
  - $P(E_2) =?$
  - $P(E_3) =?$
  - $P(E_1 \cap E_2) =?$
  - $P(E_1 \cap E_3) =?$
  - $P(E_2 \cap E_3) =?$
  - $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) =?$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = &[P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)]+ \\ &- [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)]+ \\ &+ [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

  Se avessi tutti i dati, sarebbe facile, ma dato che non li ho è meglio il secondo approccio.

- **Uso negazione dell'evento:**
  La negazione di "almeno uno dei pc è difettoso" è "nessuno dei pc è difettoso". Quindi posso usare la sequente formula:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E})$$

  1. Descrivi a parole l'evento contrario:
     $\overline{E}$ =nessuno dei pc è difettoso
  2. Suddividi l'evento:
     (a) E_1 = primo pc funzionante
     (b) E_2 = secondo pc funzionante
     (c) E_3 = terzo pc funzionante

3. Quindi, l'evento $\overline{E}$ =nessuno dei pc è difettoso diventa:
   $\overline{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $\overline{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Applico probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot (E_3 \mid E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{46}{50}$$

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{45}{49}$$

$$P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{44}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0.774$$

Quindi:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0.774 = 0.226 = 22.6\%$$

Pertanto, la probabilità che almeno uno dei pc sia difettoso è $P(E) = 0.226$

5.3 Eventi Indipendenti & Eventi Dipendenti

Teorema : Probabilità dell'intersezione di 2 eventi indipendenti

Siano E_1, E_2 due eventi indipendenti.
La probabilità della loro intersezione è uguale al prodotto delle singole probabilità:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

La probabilità che si verifichi uno non modifica la probabilità dell'altro.

Teorema : Indipendenza debole di k eventi

Siano k eventi. $E_1, E_2, ..., E_k$ sono indipendenti due a due se, presa l'intersezione di tutti gli eventi due a due, sono tutti indipendenti:

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j) \qquad \forall i < j$$

Ovvero:
Considero E_1, E_2, E_3. Essi sono indipendenti due a due se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$

Teorema : Indipendenza forte di k eventi

Siano k eventi. $E_1, E_2, ..., E_k$ sono reciprocamente indipendenti se, presa l'intersezione di tutti gli eventi due a k, sono tutti indipendenti:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_i)$$

Ovvero:
Considero E_1, E_2, E_3. Essi sono reciprocamente indipendenti se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$

5.3.1 Come capire se due eventi sono dipendenti o indipendenti

Basta verificare questa uguaglianza:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

1. Calcolo la probabilità a sinistra dell'uguale: $\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{questa}} = P(E_1) \cdot P(E_2)$

   Secondo la formula classica:

   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = x$$

2. Calcolo la probabilità a destra dell'uguale: $P(A \cap B) = \underbrace{P(E_1) \cdot P(E_2)}_{\text{questa}}$

   $$P(E_1) \cdot P(E_2) = y$$

3. Se:
   - $x = y \implies$ gli eventi E_1, E_2 sono indipendenti
   - $x \neq y \implies$ gli eventi E_1, E_2 sono dipendenti

5.3.2 Non confondere eventi indipendenti con eventi incompatibili

Ricorda che:

- **Eventi incompatibili:** eventi che non possono verificarsi contemporaneamente $E \cap F = \emptyset^a$ e ciò vuol dire che $P(E \cap F) = 0$.

  Lancio un dado, qual è probabilità che esca 1 e 6 allo stesso tempo?
  - E =esce 1
  - F =esce 6

  È facile capire che è impossibile che il dado mostri due facce allo stesso tempo, quindi $E \cap F = \emptyset$.
  Inoltre, $P(E \cap F) = 0$ perchè $E \cap F = \emptyset$ e quindi $P(E \cap F) = P(\emptyset) = 0$

- **Eventi indipendenti:** eventi che possono verificarsi insieme ma la probabilità di uno non cambia la probabilità dell'altro.

Lancio un dado e una moneta, qual è probabilità che esca 1 e testa allo stesso tempo?

- E =esce 1
- F =esce testa

È facile capire che il verificarsi di E non influenza il verificarsi di F, quindi $E \cap F \neq \emptyset$.

[a] $\emptyset$: evento impossibile

5.4 Fattorizzazione di un evento

Formula probabilità condizionata:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

posso modificarla algebricamente e ottenere:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Osservazione:

Siano A, B due eventi, vale sempre:

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) \implies A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

B e $\overline{B}$ sono incompatibili, non possono capitare insieme:

- B = ho passato Statistica
- $\overline{B}$ = non ho passato Statistica

è ovvio che non possono accadere insieme, l'hai passata oppure no.
Quindi, B e $\overline{B}$ sono incompatibili:

$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$

Pertanto, se B e $\overline{B}$ sono incompatibili anche gli eventi $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ lo sono.

Teorema : Fattorizzazione di un evento

La fattorizzazione di un evento si scrive come:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Quindi:

$$P(A) = \text{per l'osservazione fatta} = P\left((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) =$$

$$(P(A \cap B)) \cup (P(A \cap \overline{B})) = \text{formula fattorizzazione evento} = (P(A \mid B) \cdot P(B)) \cup (P(A \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B})) =$$

$$= {}^{2}\text{per il } 4^{\text{o}} \text{ assioma} = (P(A \mid B) \cdot P(B)) + (P(A \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B}))$$

[2] dato che gli eventi $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ sono incompatibili ricordando il 4º assioma:
Probabilità dell'unione di eventi incompatibili: la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Esercizio

Siano due eventi:

- M =avere una certa malattia
- T =il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$
  Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T \mid M) = 0.9$
  Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 0.98$
  Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo? $P(T) =?$
Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$$

Dato che $M, \overline{M}$ sono incompatibili, anche $T \cap M$ e $T \cap \overline{M}$ lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned}
P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})) \\
&= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \overline{M})) \\
&= \text{per l'assioma 4} \\
&= P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\
&= \text{per la formula di fattorizzazione} \\
&= P(T \mid M) \cdot P(M) + P(T \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) \\
&= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\
&= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta}
\end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T \mid \overline{M}) =?$
  Ricordo che $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, di conseguenza:
  $$P(T \mid \overline{M}) = 1 - P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$
- $P(\overline{M}) =?$
  Ricordo che $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$, di conseguenza:
  $$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

5.5 Teorema della Probabilità Assoluta

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\, i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di Ω

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

  Nell'esempio di un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

  - $E_1 =$esce 1
  - $E_2 =$esce 2
  - $E_3 =$esce 3
  - $E_4 =$esce 4
  - $E_5 =$esce 5
  - $E_6 =$esce 6

$$\bigcup_i E_i = \Omega \implies E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6 = \Omega \implies 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 = \Omega$$

Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per 2 eventi

Questa è valida solo quando ho 2 eventi nello spazio campionario.
Siano E_1, E_2 due eventi:

- con probabilità non nulle $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di Ω

La formula della probabilità assoluta se voglio calcolare $P(E_1)$:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(E_1 \mid E_2) \cdot P(E_2) + P(E_1 \mid \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \\ &\quad \text{ma } E_1, E_2 \text{ incompatibili, quindi } P(E_1 \mid E_2) = 0 \\ &= P(E_1 \mid \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \end{aligned}$$

oppure se voglio calcolare $P(E_2)$:

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \\ &\quad \text{ma } E_2, E_1 \text{ incompatibili, quindi } P(E_2 \mid E_1) = 0 \\ &= P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \end{aligned}$$

Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per k eventi

Siano $E_1, \cdots, E_k$ eventi:

- con probabilità non nulle
- incompatibili
- partizioni di Ω

Sia E un qualsiasi tra gli k eventi, allora la sua probabilità è uguale a:

$$P(E) = \sum_{i}^{k} P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$$

Ovvero:

$$P(E) = P(E \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E \mid E_2) \cdot P(E_2) + \cdots + P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)$$

Esercizio

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso? $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:
   Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?
   $E =$il microchip è difettoso
2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:
   - $E_1 =$il microchip proviene dal fornitore 1
   - $E_2 =$il microchip proviene dal fornitore 2
   - $E_3 =$il microchip proviene dal fornitore 3

Ripondo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No
  Perchè:
  - $P(E_1) = 0.20$
  - $P(E_2) = 0.35$
  - $P(E_3) = 0.45$
- Gli eventi sono incompatibili? Si
  Perchè è impossibile che il microchip pescato provenda da due fornitori diversi
- L'unione degli eventi E_1, E_2, E_3 è uguale a Ω? Sì

Quindi uso la formula della probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) = {} & P(E \mid E_1) \cdot P(E_1) + \\ & + P(E \mid E_2) \cdot P(E_2) \\ & + P(E \mid E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E \mid E_1) = 0.10$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1

- $P(E \mid E_2) = 0.05$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E \mid E_3) = 0.02$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

5.6 Formula di Bayes

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\ i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di Ω

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

Teorema : Teorema di Bayes a 2 eventi

Siano E_1, E_2 due eventi:

- con probabilità non nulle $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di Ω

La probabilità condizionata di E_1 rispetto a E_2 è uguale a:

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della probabilità assoluta $P(E_2) = P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1})$ avrò che:

$$= \frac{P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1})} =$$

Dove:

- $P(E_1)$ è la probabilità a priori dell'evento E_1 (dato che ho già)
- $P(E_1 \mid E_2)$ è la probabilità a posteriori dell'evento E_1 (che calcolo con Bayes)

Quello che fa la formula di Bayes è:
aggiornare la probabilità dell'evento E_1 (probabilità a priori) con informazioni contenute nell'evento E_2 (ottenendo così una probabilità a posteriori).

Teorema : Teorema di Bayes a k eventi

Siano $E_1, \cdots, E_k$ eventi:

- con probabilità non nulle

- incompatibili
- partizioni di Ω

Dato un qualsiasi evento E tra i k eventi, allora la probabilità condizionata di E_k dato E

$$P(E_k \mid E) = \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$ avrò che:

$$= \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)} =$$

Osservazione su formula di Bayes:

Prima di calcolare correttamente la formula di Bayes, è necessario aver già calcolato la probabilità assoluta (che nella formula di Bayes è al denominatore).

1. Scrivi formula di Bayes:
$$P(E_k \mid E) = \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$
2. Calcola separatamente il denominatore della formula nello step 1, $P(E)$, con la formula della probabilità assoluta:
$$P(E) = \sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i) = valore$$
3. Inserisci il valore ottenuto dallo step 2 nel denominatore della formula di Bayes nello step 1:
$$P(E_k \mid E) = \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$
$$= \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{valore} =$$

Esercizio 1

Siano due eventi:

- M =avere una certa malattia
- T =il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$
  Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T \mid M) = 0.9$
  Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 0.98$
  Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo? $P(T) =?$

Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$$

Dato che $M, \overline{M}$ sono incompatibili, anche $T \cap M$ e $T \cap \overline{M}$ lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned}
P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})) \\
&= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \overline{M})) \\
&= \text{per l'assioma 4} \\
&= P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\
&= \text{per la formula di fattorizzazione} \\
&= P(T \mid M) \cdot P(M) + P(T \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) \\
&= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\
&= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta}
\end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T \mid \overline{M}) = ?$
  Ricordo che $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, di conseguenza:
  $$P(T \mid \overline{M}) = 1 - P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$
- $P(\overline{M}) = ?$
  Ricordo che $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$, di conseguenza:
  $$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

Adesso mi chiedo:
Qual è la probabilità che un individuo sia affetto dalla malattia sapendo che il test diagnostico ha dato esito positivo? $P(M \mid T) = ?$
Uso Bayes perchè conosco i valori di $P(T \mid M), P(M)$ e posso calcolare $P(T)$ con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.

1. Scrivo la formula di Bayes:
   $$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M) \cdot P(M)}{P(T)}$$
2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 2 eventi (M,T):
   $$\begin{aligned}
   P(T) &= P(T \mid M) \cdot P(M) + P(T \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) = \\
   & T, M \text{ non sono incompatibili, quindi} P(T \mid M) \neq 0 \\
   &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 = 0.0288
   \end{aligned}$$
3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:
   $$\begin{aligned}
   P(M \mid T) &= \frac{P(T \mid M) \cdot P(M)}{P(T)} = \\
   &= \frac{P(T \mid M) \cdot P(M)}{0.0288} = \\
   &= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.0288} = 0.3125 \quad \text{Risposta corretta}
   \end{aligned}$$

Esercizio 2

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi

- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso? $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:
   Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?
   $E =$il microchip è difettoso
2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:
   - $E_1 =$il microchip proviene dal fornitore 1
   - $E_2 =$il microchip proviene dal fornitore 2
   - $E_3 =$il microchip proviene dal fornitore 3

Ripondo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No
  Perchè:
  - $P(E_1) = 0.20$
  - $P(E_2) = 0.35$
  - $P(E_3) = 0.45$
- Gli eventi sono incompatibili? Si
  Perchè è impossibile che il microchip pescato provenda da due fornitori diversi
- L'unione degli eventi E_1, E_2, E_3 è uguale a Ω? Sì

Quindi uso la formula della probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) = P(E \mid E_1) \cdot P(E_1) + \\ + P(E \mid E_2) \cdot P(E_2) \\ + P(E \mid E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E \mid E_1) = 0.10$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1
- $P(E \mid E_2) = 0.05$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E \mid E_3) = 0.02$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

Adesso mi chiedo:
Qual è la probabilità che un microchip scelto a caso sia stato fornito dal produttore 2 sapendo che esso è difettoso? $P(E_2 \mid E) = ?$ **Uso Bayes perchè conosco i valori di $P(E \mid E_2), P(E_2)$ e posso calcolare $P(E)$ con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.**

1. Scrivo la formula di Bayes:

$$P(E_2 \mid E) = \frac{P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)}$$

2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 3 eventi (E_1, E_2, E_3):

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{i=1}^{3} P(E \mid E_i) \cdot P(E_i) = \\ &= (P(E \mid E_1) \cdot P(E_1)) + (P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)) + (P(E \mid E_3) \cdot P(E_3)) = \\ &= (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \end{aligned}$$

3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned} P(E_2 \mid E) &= \frac{P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)} = \\ &= \frac{P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)}{0.0465} = \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.35}{0.0465} = 0.3763 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

6 Variabili Aleatorie

6.1 Funzione di massa

La funzione di massa indica la probabilità che ha ogni variabile aleatoria discreta che fa parte del supporto $\mathscr{X}$ studiato.

Teorema : Funzione di massa per var discrete

La funzione di massa di probabilità di una variabile aleatoria discreta X è definita come:

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \forall x \in \mathscr{X}$$

Osservazione:

La funzione assegna una probabilità a ogni variabile aleatoria discreta di $\mathscr{X}$ t.c. la loro somma è uguale a uno:

$$\sum_{x \in X} P(X = x) = 1$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**
   Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 2 possibili esiti ad ogni lancio.
   $$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$
2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**
   Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.
   $$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT,\ CTC,\ TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC,\ TCT,\ CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$
3. **Supporto della variabile aleatoria:**
   Il supporto di X sarà:
   $$\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$
4. **Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:**
   - $P(X = 0) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$
     $$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$
   - $P(X = 1) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$
     $$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X=2)=?$
  Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa? $\omega = TTC, TCT, CTT$

$$P(X=2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X=3)=?$
  Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$

$$P(X=2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

5. **Controllo se ho correttamente calcolato le funzioni di massa:** per vedere se è corretto, la loro somma deve essere uguale a 1.

$$\sum_{x \in X} P(X=x) = 1$$

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$1 \stackrel{\checkmark}{=} 1$$

6.2 Funzione di densità

La funzione di densità indica la probabilità che ha una variabile aleatoria continua di appartenere ad un certo intervallo (supporto $\mathscr{X}$).

Teorema : Funzione di densità per var continue

La funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X è definita come:

$$f_X(x) = P(X \in [x_1, x_2]) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

La probabilità dell'appartenenza della variabile aleatoria in un certo intervallo si calcola con l'integrale definito.

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathscr{X} = (0,2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Scelgo ora un sottointervallo di $(0,2)$ e ne calcolo la funzione di densità:

$$\begin{aligned}
P(0.25 \le X \le 0.75) &= \int_{0.25}^{0.75} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{0.25}^{0.75} \frac{1}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x\Big|_{0.25}^{0.75} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 0.75\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0.25\right) \\
&= 0.25 \\
&\text{la probabilità che la var } X \text{ ha di appartenere a } [0.25, 0.75] \\
&\text{è uguale a } 0.25
\end{aligned}$$

Se io invece calcolo la funzione di densità nell'intervallo $(0, 2)$:

$$\begin{aligned}
P(0 < X < 2) &= \int_{0}^{2} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) \\
&= 1 \\
&\text{corretto poichè è una proprietà della funzione di densità}
\end{aligned}$$

6.3 Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione indica la probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale ad un certo valore x.

Osservazione:

Sia $F_X(x) = P(X \le x)$ la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria. Vale sempre che:

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$$

6.3.1 Funzione di ripartizione per variabile aleatoria discreta

Teorema : Funzione di ripartizione per var discrete

La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria discreta X è definita come:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{i=1, u_i \le x}^{x} P(X = u_i)$$

La probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale a x è uguale alla somma cumulative delle funzioni di massa di probabilità fino a x.

$$P(X \leq x) = P(X = u_1) + P(X = u_2) + \cdots + P(X = u_x)$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**
   Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 2 possibili esiti ad ogni lancio.
   $$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$
2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**
   Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.
   $$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT,\ CTC,\ TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC,\ TCT,\ CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$
3. **Supporto della variabile aleatoria:**
   Il supporto di X sarà:
   $$\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$
4. **Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:**
   - $P(X = 0) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$
     $$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$
   - $P(X = 1) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$
     $$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$
   - $P(X = 2) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa? $\omega = TTC, TCT, CTT$
     $$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$
   - $P(X = 3) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$
     $$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$
5. **Calcolo la funzione di ripartizione per ogni valore x del supporto:**
   - $P(X \leq 0) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che non escano affatto Teste?
     $$P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

- $P(X \leq 1) =?$
  Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una testa oppure zero teste?

$$P(X \leq 1) = [P(X=0) + P(X=1)] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

- $P(X \leq 2) =?$
  Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca nessuna, una o due volte testa?

$$P(X \leq 2) = [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

- $P(X \leq 3) =?$
  Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca nessuna, una, due o tre volte di seguito Testa?

$$P(X \leq 3) = [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] = \frac{8}{8} = 1$$

Quindi:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

6.3.2 Funzione di ripartizione per variabile aleatoria continua

Teorema : Funzione di ripartizione per var continue

La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua X è definita come:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

La probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale a x è uguale all'integrale definito da - inf a x.

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathscr{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolo la funzione di ripartizione per x:

1. $P(X \leq x) = ?$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_0^x f_X(u)du \\ &= \int_0^x \frac{1}{2}du \\ &= \frac{1}{2}u\Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

2. Adesso che ho $P(X \leq x) = \frac{x}{2}$ posso calcolarlo per qualsiasi valore di x che sta nell'intervallo (0,2):
   - $P(X \leq 0.2) = ?$
   $$P(X \leq 0.2) = \frac{x}{2} = \frac{0.2}{2}$$
   - $P(X \leq 0.5) = ?$
   $$P(X \leq 0.5) = \frac{x}{2} = \frac{0.5}{2}$$
   - $P(X \leq 1) = ?$
   $$P(X \leq 1) = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$
   - $P(X \leq 1.5) = ?$
   $$P(X \leq 1.5) = \frac{x}{2} = \frac{1.5}{2}$$
   - $P(X \leq 2) = ?$
   $$P(X \leq 2) = \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

6.4 Valore atteso

Il valore atteso di una variabile aleatoria è la media pesata delle variabili aleatorie.

6.4.1 Valore atteso di una variabile aleatoria discreta

Teorema : Valore atteso di var discreta

l valore atteso di una variabile aleatoria discreta X con funzione di massa di probabilità $p_X(x)$ è definito come:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathscr{X}} (x \cdot p_X(x)) = \sum_{x \in \mathscr{X}} (x \cdot P(X = x))$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**
   Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 2 possibili esiti ad ogni lancio.
   $$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$
2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT,\ CTC,\ TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC,\ TCT,\ CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$

3. **Supporto della variabile aleatoria:**
Il supporto di X sarà:
$$\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$

4. **Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:**
   - $P(X = 0) =?$
   Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$
   $$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$
   - $P(X = 1) =?$
   Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$
   $$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$
   - $P(X = 2) =?$
   Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa? $\omega = TTC, TCT, CTT$
   $$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$
   - $P(X = 3) =?$
   Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$
   $$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

5. **Calcolo il valore atteso:**
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathscr{X}} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Esercizio

Lancio due dadi a sei facce:

- Se la somma degli esiti è 2 o 3, perdo 10 euro
- Se la somma degli esiti è 4,5 o 6, perdo 4 euro
- Se la somma degli esiti è 7, 8 o 9 vinco 4 euro
- Se la somma degli esiti è 10, 11 o 12 vinco 10 euro

1. **Definisco le variabili aleatorie discrete che rappresentano ogni vincita:**
   - $P(X = -10)$
   - $P(X = -4)$

- $P(X = 4)$
- $P(X = 10)$

2. **Calcolo la funzione di massa:**
   - $P(X = -10)$

$$P(X = -10) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Spiegazione[a]

   - $P(X = -4)$

$$P(X = -4) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{13}$$

Spiegazione[b]

   - $P(X = 4)$

$$P(X = 4) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Spiegazione[c]

   - $P(X = 10)$

$$P(X = 10) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Spiegazione[d]

   - **Calcolo il valore atteso di** X

$$\mathbb{E}[X] = (-10 \cdot \frac{1}{12}) + (-4 \cdot \frac{1}{3}) + (4 \cdot \frac{5}{12}) + (10 \cdot \frac{1}{6}) = 1.17$$

Vuol dire: "In media, per partita, il guadagno medio è di 1.17 euro".

---

[a] **Probabilità che la somma degli esiti sia 2 o 3:**

- E_1 =somma degli esiti è 2
- E_2 =somma degli esiti è 3

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2) =?$
Ricordo la formula: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$, quindi:

(a) $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{36}$

(b) $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{36}$

(c) $P(E_1 \cap E_2) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)

Pertanto: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} - 0 = \frac{3}{36}$

[b] **Probabilità che la somma degli esiti sia 4, 5 o 6:**

- E_1 =somma degli esiti è 4
- E_2 =somma degli esiti è 5
- E_3 =somma degli esiti è 6

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) =?$
Ricordo la formula:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)]$$

(a) $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{36}$

(b) $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{36}$

(c) $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{5}{36}$

(d) $P(E_1 \cap E_2) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili

(e) $P(E_1 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili

(f) $P(E_2 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili

(g) $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2, E_3 sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)

Pertanto: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left[\frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36}\right] - [0 + 0 + 0] + 0 = \frac{12}{36}$

[c] **Probabilità che la somma degli esiti sia 7, 8 o 9:**

- E_1 =somma degli esiti è 7
- E_2 =somma degli esiti è 8
- E_3 =somma degli esiti è 9

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) =?$
Ricordo la formula:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)]$$

(a) $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6}{36}$
(b) $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{5}{36}$
(c) $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{36}$
(d) $P(E_1 \cap E_2) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili
(e) $P(E_1 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili
(f) $P(E_2 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili
(g) $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2, E_3 sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)

Pertanto: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left[\frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36}\right] - [0 + 0 + 0] + 0 = \frac{15}{36}$

^{d}**Probabilità che la somma degli esiti sia 10, 11 o 12:**

- E_1 =somma degli esiti è 10
- E_2 =somma degli esiti è 11
- E_3 =somma degli esiti è 12

Quindi mi chiedo: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) =?$
Ricordo la formula:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)]$$

(a) $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{36}$
(b) $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{36}$
(c) $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{36}$
(d) $P(E_1 \cap E_2) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili
(e) $P(E_1 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili
(f) $P(E_2 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2 sono due eventi incompatibili
(g) $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0$ perchè E_1, E_2, E_3 sono due eventi incompatibili (non possono accadere insieme)

Pertanto: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left[\frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}\right] - [0 + 0 + 0] + 0 = \frac{6}{36}$

6.4.2 Valore atteso di una variabile aleatoria continua

Teorema : Valore atteso di var continua

l valore atteso di una variabile aleatoria continua X con funzione di densità di probabilità $f_X(x)$ è definito come:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathscr{X}} x \cdot f_X(x)dx$$

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathscr{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolo il valore atteso:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathscr{X}} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x)dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^x\right) = 1$$

6.5 Varianza di una variabile aleatoria

La varianza indica quanto i dati si discostano alla media / valore atteso:

- Se i valori sono vicini alla media (valore atteso), allora il valore della varianza è piccolo

- Se i valori sono distanti alla media (valore atteso), allora il valore della varianza è grande

Teorema : Formula varianza per var discrete

La varianza è definita come:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Dove:

- $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in \mathscr{X}} (x^2 \cdot p_X(x)) = \sum_{x \in \mathscr{X}} (x^2 \cdot P(X = x))$
- $(\mathbb{E}[X])^2$ =calcolo valore atteso e lo elevo al quadrato

Esercizio

Riprendo l'esperimento casuale del lancio di 3 monete e osservare la probabilità del numero di teste già svolto sopra:

- $P(X = 0) = \frac{1}{8}$
- $P(X = 1) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}$$

Calcola la varianza della variabile aleatoria X:

1. **Calcola $\mathbb{E}[X^2]$:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{x \in \mathscr{X}} (x^2 \cdot P(X = x)) \\ &= (0^2 \cdot \frac{1}{8}) + (1^2 \cdot \frac{3}{8}) + (2^2 \cdot \frac{3}{8}) + (3^2 \cdot \frac{1}{8}) = 3\end{aligned}$$

2. **Calcola $(\mathbb{E}[X])^2$:**

$$(\mathbb{E}[X])^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Pertanto:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 3 - \frac{9}{4} = 0.75 \quad \text{Risposta corretta}$$

Teorema : Formula varianza per var continue

La varianza è definita come:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Dove:

- $\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathscr{X}} (x^2 \cdot f_X(x)) dx$
- $(\mathbb{E}[X])^2$ =calcolo valore atteso e lo elevo al quadrato

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathscr{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathscr{X}} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x)dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) = 1$$

Calcola la varianza:

1. **Calcola $\mathbb{E}[X^2]$:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^2 (x^2 \cdot f_X(x))dx \\ &= \int_0^2 (x^2 \cdot \frac{1}{2})dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2)dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. **Calcola $(\mathbb{E}[X])^2$:**

$$(\mathbb{E}[X])^2 = (1)^2 = 1$$

Pertanto:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{Risposta corretta}$$

6.6 Deviazione standard di una variabile aleatoria

La deviazione standard è la radice quadrata della varianza.

Teorema : Formula deviazione standard

Sia $\mathbb{V}[X]$ la varianzia di una variabile aleatoria. La deviazione standard è definita come:

$$DS[X] = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Esercizio 1

Riprendendo l'esercizio sopra della variabile discreta X:

$$DS[X] = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = \sqrt{0.75}$$

Esercizio 2

Riprendendo l'esercizio sopra della variabile continua X:

$$DS[X] = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

6.7 Distribuzione di probabilità congiunta

6.7.1 Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleatorie discrete

6.7.2 Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleatorie continue

6.8 Funzioni di massa / densità di probabilità condizionate

6.8.1 Funzioni di massa di probabilità condizionate

6.8.2 Funzioni di densità di probabilità condizionate

6.9 Variabili aleatorie indipendenti

6.10 Variabili aleatorie identicamente distribuite & i.i.d

6.11 Famiglie Parametriche

7 Inferenza Statistica

7.1 Stima Puntuale

7.2 Stima Intervallare

7.3 Verifica delle Ipotesi