

Statistica

Ede Boanini

30 dicembre 2025

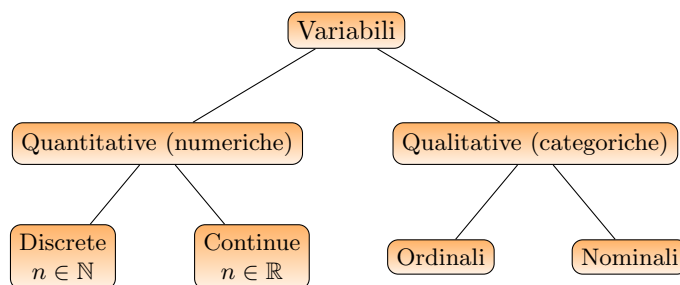
Indice

1	Introduzione	3
1.1	Classificazione delle Variabili	3
1.2	Distribuzioni di Frequenza	3
1.2.1	Tipi di Frequenza	4
2	Statistica Descrittiva	5
2.1	Diagrammi a barre vs Istogrammi	5
2.2	Media	6
2.3	Moda	6
2.4	Mediana	6
2.5	Quartili	7
2.6	Campo di Variazione / Range	8
2.7	Differenza Interquartile	8
2.8	Varianza	8
2.9	Deviazione standard	8
2.10	Coefficiente di variazione	8
3	Probabilità	9
3.1	Operazione insiemi	9
3.2	Proprietà operazione tra eventi	9
3.3	Tipi di eventi	9
3.3.1	Eventi compatibili	9
3.3.2	Eventi incompatibili	9
3.3.3	Eventi complementari	9
3.4	Definizione	10
3.5	Assiomi	10
3.5.1	Conseguenze degli assiomi	10
3.5.2	Probabilità Totale	10

4	Probabilità Condizionata e Indipendenza	11
4.1	Probabilità Condizionata	11
4.2	Probabilità Composta	11
4.3	Eventi Indipendente ed Eventi Dipendenti	11
5	Variabili Casuali	11
5.1	Famiglie Parametriche	11
6	Inferenza Statistica	11
6.1	Stima Puntuale	11
6.2	Stima Intervallare	11
6.3	Verifica delle Ipotesi	11

1 Introduzione

1.1 Classificazione delle Variabili



Differenza tra ordinali e nominali:

- **Ordinali:** categorie che hanno un ordine, puoi solo dire se un valore è minore o maggiore rispetto ad un altro.
 - *Livello di istruzione:* $\text{elementare} < \text{media} < \dots$
 - *Grado di soddisfazione:* $\text{nullo} < \text{basso} < \text{medio} < \dots$
 - *Classifica di una gara:* $\text{quinto} < \text{quarto} < \dots$
 - *Matricola:* $17345 < 17346 < \dots$
- **Nominali:** categorie che non hanno un ordine.
 - *Colore occhi:* $\text{blu}, \text{verdi}, \text{marroni}, \dots$
 - *Genere:* M, F
 - *Marche auto:* $\text{Toyota}, \text{Ford}, \dots$
 - *Nazionalità:* $\text{Giapponese}, \text{Italiano}, \dots$

1.2 Distribuzioni di Frequenza

È una tabella che contiene modalità e frequenze.

Modalità di X (x_i)	Frequenze assolute f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
\dots	\dots
x_n	f_n
	N

1.2.1 Tipi di Frequenza

1. **Frequenza assoluta:** numero di ripetizioni di una certa modalità (es: quanti studenti hanno preso 28 all'esame)

$$freq_{assoluta} = f_i$$

2. **Frequenza relativa:**

$$freq_{relativa} = \frac{f_i}{N}$$

3. **Frequenza percentuale:**

$$freq_{\%} = \frac{f_i}{N} \cdot 100$$

oppure

$$freq_{\%} = freq_{relativa} \cdot 100$$

4. **Frequenza cumulata:** somma progressiva delle frequenze assolute o relative.

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$
$$freq_{cumulataRelativa} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i}$$

5. **Frequenza cumulata percentuale:**

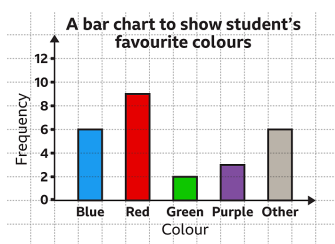
$$freq_{cumulataAssoluta\%} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot 100$$
$$freq_{cumulataRelativa\%} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} \cdot 100 = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i} \cdot 100$$

2 Statistica Descrittiva

2.1 Diagrammi a barre vs Istogrammi

Definizione 2.1 (Diagrammi a barre). Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili qualitative (categoriche). Le barre devono avere tutte la stessa base ed essere equi-spaziate (lasciare un pò di spazio tra una barra e l'altra).

- altezza barre: frequenza

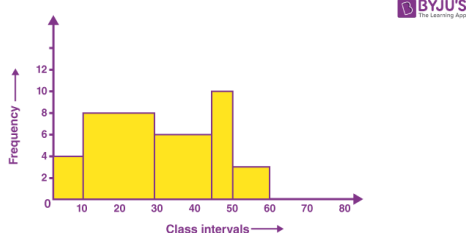


Definizione 2.2 (Istogrammi). Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili quantitative. Ogni barra rappresenta una classe e la sua frequenza.

- altezza barre: densità di frequenza

$$densita_{freq} = \frac{\text{Frequenza}}{\text{Ampiezza classe}}$$

- base barre: ampiezza delle classi



Osservazione: Definire k classi di uguale ampiezza

$$\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$$

I dati sulla statura di 48 adulti vanno da un minimo di 160 a 180 cm. Come fare k classi di uguale ampiezza?

1. Scelgo k (es: $k = 5$)
2. Uso formula $\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$ (es: $\text{Ampiezza classe} = \frac{180-160}{5} = 4$)

cm); quindi ogni classe avrà ampiezza 4.

3. Gli estremi inferiore della classe sono (contando ampiezza 4):

- 160
- 164
- 168
- 172
- 176

Conclusione: le $k = 5$ classi di ugual ampiezza sono:

[160, 164), [164, 168), [168, 172), [172, 176), [176, 180]

2.2 Media

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

f_i indica la frequenza assoluta.

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot freq_{relativa_i})$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot freq_{relativa_i})$$

dove a, b estremi dell'intervallo e $m_i = \frac{a+b}{2}$ il valore centrale della classe.

2.3 Moda

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

La Moda è il valore che si ripete più spesso nei dati.

- **Formula della moda per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$Moda = x_i \text{ con maggior frequenza}$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$Moda = \frac{a+b}{2}$$

Esempio Moda

Per esempio, per l'esame di analisi 2 ci sono stati tanti studenti che hanno preso tra il 20 e il 25 (classe), allora [20-25] è la classe modale. Pertanto, nel nostro esempio $Moda = \frac{20+25}{2} = 22.5$

2.4 Mediana

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

La Mediana è il valore che è più grande (o uguale) della prima metà dei dati e allo stesso tempo, più piccolo (o uguale) della seconda metà dei dati.

È il valore che sta in mezzo a dati ordinati; quindi per poter stimare la Me è necessario ordinare i dati:

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice i :
 - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}$, $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
 - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
3. La mediana è il valore associato all'indice trovato ($i = x_i$):
 - Se ho due indici i_1, i_2 , allora $Me = \frac{x_1 + x_2}{2}$
 - Se ho un solo indice i , allora $Me = x_i$

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice i :
 - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}$, $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
 - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata), allora $Me = classe$.
Oppure, se abbiamo due indici i_1, i_2 con valori x_1, x_2 , allora $Me = \frac{x_1 + x_2}{2}$

2.5 Quartili

Il p -esimo percentile è il valore che ha $\%p$ dei dati sotto/dietro di sé.

- Q_1 = 25-esimo percentile
(25% dei dati sotto questo valore)
- Q_2 = 50-esimo percentile = Mediana
(50% dei dati sotto questo valore)
- Q_3 = 75-esimo percentile
(75% dei dati sotto questo valore)

Divido la distribuzione in 4 parti uguali, per questo si chiamano "quartili".

- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$
3. Q_k è il valore associato all'indice:
 - Se $i \in \mathbb{N}$, allora $Q_k = x_i$
 - Se $i \in \mathbb{Q}$, allora $Q_k = \frac{\text{somma dei valori associati}}{2}$

Esempio: se $i = 6.75$ allora $i_1 = 6, i_2 = 7$, e i valori associati a $i_1 = 20, i_2 = 25$, allora $Q_k = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{20 + 25}{2} = 22.5$

- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$

3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata)

4. Allora avremo:

$$Q_k = L + \frac{i - f_{cumulata}}{f_i} \cdot h$$

dove:

- L : estremo inferiore della classe attuale (dell'indice)
- i : indice
- $f_{cumulata}$: frequenza cumulata classe precedente
- f_i : frequenza assoluta classe attuale
- h : ampiezza classe attuale

2.6 Campo di Variazione / Range

Distanza tra min e max.

$$Range = max - min$$

2.7 Differenza Interquartile

Si usano i quartili per capire la variabilità centrale.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

2.8 Varianza

Quanto sono variabili i dati? i dati sono **vicini o molto sparsi**.

Quanto i dati si allontanano dalla loro media (μ oppure \bar{x}).

- **Formula varianza per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

- Varianza della popolazione (P):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{N}$$

- Varianza campionaria ($C \subseteq P$):

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

2.9 Deviazione standard

Quanto sono variabili i dati? i dati sono **vicini o molto sparsi**.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

dove σ^2 è la varianza.

2.10 Coefficiente di variazione

Si calcola quando μ, \bar{x}, σ sono positivi e si esprime in percentuale.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{oppure} \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

3 Probabilità

3.1 Operazione insiemi

$$\begin{aligned}A_1 \cup A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2\} \\A_1 \cap A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2\} \\A_1 - A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \notin A_2\} \\\overline{A} &= \{\omega \mid \omega \notin A\}\end{aligned}$$

3.2 Proprietà operazione tra eventi

Siano A_1, A_2, A_3 tre eventi.

- **Proprietà commutativa:** l'ordine non cambia il risultato

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

- **Proprietà associativa:**

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

- **Proprietà distributiva:**

$$(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$$

- **Leggi di De Morgan:**

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

3.3 Tipi di eventi

3.3.1 Eventi compatibili

Due eventi che possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ compatibili} \iff A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

3.3.2 Eventi incompatibili

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ incompatibili} \iff A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

3.3.3 Eventi complementari

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente e tale che uno dei due si verifica di sicuro.

$$A_1, A_2 \text{ complementari} \iff \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = \Omega \end{cases}$$

3.4 Definizione

Sia A un evento e Ω lo spazio campionario. Definisco $P(A)$ la probabilità che si verifichi A dove $0 \leq P(A) \leq 1$:

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

3.5 Assiomi

1. **Primo assioma:** la probabilità di un evento A è un numero reale non negativo
2. **Secondo assioma:** la probabilità dell'intero spazio campionario è uguale a 1

$$P(\Omega) = 1$$

3. **Terzo assioma:** Se A_1, A_2 sono eventi **incompatibili**, allora la probabilità dell'unione dei due eventi è la somma delle loro probabilità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

3.5.1 Conseguenze degli assiomi

1. **Probabilità del complementare di un evento:**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. **Probabilità dell'evento impossibile:**

$$P(\emptyset) = 0$$

3. **Proprietà di monoticità:** Se B è un evento incluso in un evento A , allora la probabilità di B è minore o uguale alla probabilità di A

$$B \subseteq A \implies P(B) \leq P(A)$$

4. **Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

3.5.2 Probabilità Totale

Teorema

Siano A_1, A_2 due eventi, la probabilità dell'unione dei due eventi è uguale alla somma delle due probabilità meno la loro intersezione:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

- Se i due eventi sono incompatibili $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ allora,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \emptyset = P(A_1) + P(A_2)$$

(assioma 3)

- Se i due eventi sono compatibili $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ allora,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

(resta uguale)

4 Probabilità Condizionata e Indipendenza

4.1 Probabilità Condizionata

Teorema

Si definisce probabilità condizionata la probabilità che si verifichi un evento E sapendo che si è già verificato l'evento B :

$$P(E \mid B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

4.2 Probabilità Composta

4.3 Eventi Indipendente ed Eventi Dipendenti

5 Variabili Casuali

5.1 Famiglie Parametriche

6 Inferenza Statistica

6.1 Stima Puntuale

6.2 Stima Intervallare

6.3 Verifica delle Ipotesi