

# Statistica

Ede Boanini

12 gennaio 2026

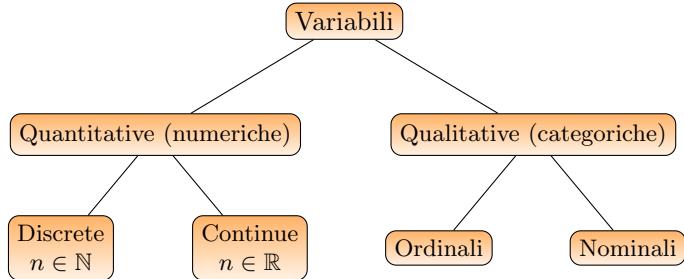
## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Classificazione delle Variabili . . . . .	3
1.2	Distribuzioni di Frequenza . . . . .	3
1.2.1	Tipi di Frequenza . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Statistica Descrittiva</b>	<b>5</b>
2.1	Diagrammi a barre vs Istogrammi . . . . .	5
2.2	Media . . . . .	6
2.3	Moda . . . . .	6
2.4	Mediana . . . . .	6
2.5	Quartili . . . . .	7
2.6	Campo di Variazione / Range . . . . .	8
2.7	Differenza Interquartile . . . . .	8
2.8	Varianza . . . . .	8
2.9	Deviazione standard . . . . .	8
2.10	Coefficiente di variazione . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Calcolo Combinatorio</b>	<b>9</b>
3.1	Permutazioni Semplici . . . . .	9
3.2	Permutazioni con Ripetizione . . . . .	9
3.3	Disposizioni Semplici . . . . .	10
3.4	Disposizioni con Ripetizione . . . . .	11
3.5	Combinazioni . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Probabilità</b>	<b>13</b>
4.1	Operazione insiemi . . . . .	13
4.2	Proprietà operazione tra eventi . . . . .	13
4.3	Tipi di eventi . . . . .	13
4.3.1	Eventi compatibili . . . . .	13
4.3.2	Eventi incompatibili . . . . .	13
4.3.3	Eventi complementari . . . . .	13
4.4	Definizione . . . . .	14

4.5	Assiomi . . . . .	14
4.5.1	Conseguenze degli assiomi . . . . .	14
4.6	Probabilità Totale . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Probabilità Condizionata e Indipendenza</b>	<b>20</b>
5.1	Probabilità Condizionata . . . . .	20
5.2	Probabilità Congiunta / Composta . . . . .	21
5.3	Eventi Indipendenti & Eventi Dipendenti . . . . .	24
5.3.1	Come capire se due eventi sono dipendenti o indipendenti	25
5.3.2	Non confondere eventi indipendenti con eventi incompatibili	25
5.4	Fattorizzazione di un evento . . . . .	26
5.5	Teorema della Probabilità Assoluta . . . . .	28
5.6	Formula di Bayes . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Variabili Casuali</b>	<b>35</b>
6.1	Famiglie Parametriche . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Inferenza Statistica</b>	<b>35</b>
7.1	Stima Puntuale . . . . .	35
7.2	Stima Intervallare . . . . .	35
7.3	Verifica delle Ipotesi . . . . .	35

# 1 Introduzione

## 1.1 Classificazione delle Variabili



Differenza tra ordinali e nominali:

- **Ordinali:** categorie che hanno un ordine, puoi solo dire se un valore è minore o maggiore rispetto ad un altro.
  - *Livello di istruzione: elementare < media < ...*
  - *Grado di soddisfazione: nullo < basso < medio < ...*
  - *Classifica di una gara: quinto < quarto < ...*
  - *Matricola: 17345 < 17346 < ...*
- **Nominali:** categorie che non hanno un ordine.
  - *Colore occhi: blu, verdi, marroni, ...*
  - *Genere: M, F*
  - *Marche auto: Toyota, Ford, ...*
  - *Nazionalità: Giapponese, Italiano, ...*

## 1.2 Distribuzioni di Frequenza

È una tabella che contiene modalità e frequenze.

Modalità di X ( $x_i$ )	Frequenze assolute $f_i$
$x_1$	$f_1$
$x_2$	$f_2$
...	...
$x_n$	$f_n$
$N$	

### 1.2.1 Tipi di Frequenza

1. **Frequenza assoluta:** numero di ripetizioni di una certa modalità (es: quanti studenti hanno preso 28 all'esame)

$$freq_{assoluta} = f_i$$

2. **Frequenza relativa:**

$$freq_{relativa} = \frac{f_i}{N}$$

3. **Frequenza percentuale:**

$$freq\% = \frac{f_i}{N} \cdot 100$$

oppure

$$freq\% = freq_{relativa} \cdot 100$$

4. **Frequenza cumulata:** somma progressiva delle frequenze assolute o relative.

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

$$freq_{cumulataRelativa} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i}$$

5. **Frequenza cumulata percentuale:**

$$freq_{cumulataAssoluta\%} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot 100$$

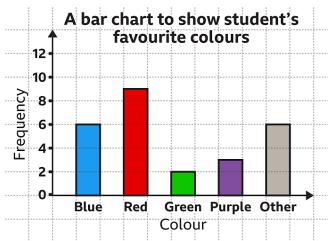
$$freq_{cumulataRelativa\%} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{N} \cdot 100 = \sum_{i=1}^n freq_{relativa_i} \cdot 100$$

## 2 Statistica Descrittiva

### 2.1 Diagrammi a barre vs Istogrammi

**Definizione 2.1 (Diagrammi a barre).** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili qualitative (categoriche). Le barre devono avere tutte la stessa base ed essere equi-spaziate (lasciare un pò di spazio tra una barra e l'altra).

- altezza barre: frequenza

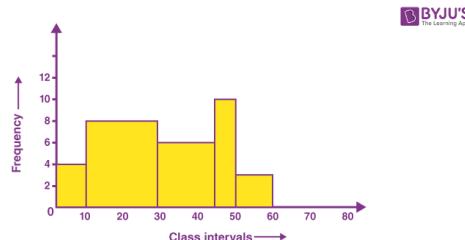


**Definizione 2.2 (Istogrammi).** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili quantitative. Ogni barra rappresenta una classe e la sua frequenza.

- altezza barre: densità di frequenza

$$densità_{freq} = \frac{\text{Frequenza}}{\text{Ampiezza classe}}$$

- base barre: ampiezza delle classi



**Osservazione:** Definire  $k$  classi di uguale ampiezza

$$\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$$

I dati sulla statura di 48 adulti vanno da un minimo di 160 a 180 cm. Come fare  $k$  classi di ugual ampiezza?

1. Scelgo  $k$  (es:  $k = 5$ )
2. Uso formula  $\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$  (es:  $\text{Ampiezza classe} = \frac{180 - 160}{5} = 4$ )

cm); quindi ogni classe avrà ampiezza 4.

3. Gli estremi inferiori delle classi sono (contando ampiezza 4):

- 160
- 164
- 168
- 172
- 176

Conclusione: le  $k = 5$  classi di ugual ampiezza sono:

$$[160, 164), [164, 168), [168, 172), [172, 176), [176, 180]$$

## 2.2 Media

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

$f_i$  indica la frequenza assoluta.

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot freq_{relativa_i})$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot freq_{relativa_i})$$

dove  $a, b$  estremi dell'intervallo e  $m_i = \frac{a+b}{2}$  il valore centrale della classe.

## 2.3 Moda

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

La Moda è il valore che si ripete più spesso nei dati.

- **Formula della moda per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$Moda = x_i \text{ con maggior frequenza}$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$Moda = \frac{a + b}{2}$$

### Esempio Moda

Per esempio, per l'esame di analisi 2 ci sono stati tanti studenti che hanno preso tra il 20 e il 25 (classe), allora [20-25] è la classe modale. Pertanto, nel nostro esempio  $Moda = \frac{20+25}{2} = 22.5$

## 2.4 Mediana

Qual è il centro dei dati? **valore tipico** attorno a cui si concentrano i dati.

La Mediana è il valore che è più grande (o uguale) della prima metà dei dati e allo stesso tempo, più piccolo (o uguale) della seconda metà dei dati.

**È il valore che sta in mezzo a dati ordinati;** quindi per poter stimare la  $Me$  è necessario ordinare i dati:

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice  $i$ :
  - se  $N$  pari:  $i_1 = \frac{N}{2}$ ,  $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
  - se  $N$  dispari:  $i = \frac{N}{2}$
3. La mediana è il valore associato all'indice trovato ( $i = x_i$ ):
  - Se ho due indici  $i_1, i_2$ , allora  $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$
  - Se ho un solo indice  $i$ , allora  $Me = x_i$

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice  $i$ :
  - se  $N$  pari:  $i_1 = \frac{N}{2}$ ,  $i_2 = \frac{N}{2} + 1$
  - se  $N$  dispari:  $i = \frac{N}{2}$
3. Osserva  $i$  in che classe cade (vedi frequenza cumulata), allora  $Me = classe$ .  
Oppure, se abbiamo due indici  $i_1, i_2$  con valori  $x_1, x_2$ , allora  $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$

## 2.5 Quartili

Il  $p$ -esimo percentile è il valore che ha  $\%p$  dei dati sotto/dietro di sé.

- $Q_1$  = 25-esimo percentile  
(25% dei dati sotto questo valore)
- $Q_2$  = 50-esimo percentile = Mediana  
(50% dei dati sotto questo valore)
- $Q_3$  = 75-esimo percentile  
(75% dei dati sotto questo valore)

Divido la distribuzione in 4 parti uguali, per questo si chiamano "quartili".

- **Come trovare il  $Q_k$  per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

1. Ordina i dati
2. Trova indice:  $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$
3.  $Q_k$  è il valore associato all'indice:
  - Se  $i \in \mathbb{N}$ , allora  $Q_k = x_i$
  - Se  $i \in \mathbb{Q}$ , allora  $Q_k = \frac{\text{somma dei valori associati}}{2}$

Esempio: se  $i = 6.75$  allora  $i_1 = 6, i_2 = 7$ , e i valori associati a  $i_1 = 20, i_2 = 25$ , allora  $Q_k = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{20+25}{2} = 22.5$

- **Come trovare il  $Q_k$  per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^n f_i$$

2. Trova indice:  $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$

3. Osserva  $i$  in che classe cade (vedi frequenza cumulata)

4. Allora avremo:

$$Q_k = L + \frac{i - f_{cumulata}}{f_i} \cdot h$$

dove:

- $L$ : estremo inferiore della classe attuale (dell'indice)
- $i$ : indice
- $f_{cumulata}$ : frequenza cumulata classe precedente
- $f_i$ : frequenza assoluta classe attuale
- $h$ : ampiezza classe attuale

## 2.6 Campo di Variazione / Range

Distanza tra min e max.

$$Range = max - min$$

## 2.7 Differenza Interquartile

Si usano i quartili per capire la variabilità centrale.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

## 2.8 Varianza

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.

Quanto i dati si allontanano dalla loro media ( $\mu$  oppure  $\bar{x}$ ).

- **Formula varianza per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

- Varianza della popolazione ( $P$ ):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{N}$$

- Varianza campionaria ( $C \subseteq P$ ):

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

## 2.9 Deviazione standard

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

dove  $\sigma^2$  è la varianza.

## 2.10 Coefficiente di variazione

Si calcola quando  $\mu, \bar{x}, \sigma$  sono positivi e si esprime in percentuale.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{oppure} \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

### 3 Calcolo Combinatorio

**Ordine conta:**  $abc \neq cba$  vuol dire "2 modi diversi di ordinare gli elementi".

**Ordine non conta:**  $abc = cba$  vuol dire "c'è solo 1 modo per ordinare gli elementi".

Trucco:

- **Permutazioni:** uso tutti gli  $n$  oggetti. Ordine conta
- **Disposizioni:** non uso tutti gli  $n$  oggetti ma solo  $r$  oggetti scelti dall'insieme dove  $r < n$ . Ordine conta
- **Combinazioni:** si parla di gruppi di  $k$  elementi. Ordine non conta

	Ordine conta?	Oggetti usati
Permutazioni	✓	Uso <b>tutti</b> gli $n$ oggetti
Disposizioni	✓	Uso $r$ oggetti su $n$
Combinazioni	✗	Uso <b>gruppi di <math>k</math></b> oggetti su $n$

#### 3.1 Permutazioni Semplici

Una permutazione semplice è un modo di ordinare in successione oggetti distinti (qui non esistono oggetti uguali tra loro, sono tutti distinti).

##### Teorema

Il **numero di permutazioni** di  $n$  oggetti distinti è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_n = n!$$

##### Esempio

Se ho 10 libri, allora avrò:

$$P_{10} = 10! = 3628800 \text{ modi diversi di ordinare 10 libri}$$

#### 3.2 Permutazioni con Ripetizione

Una permutazione con ripetizione è un modo di ordinare oggetti tra cui alcuni uguali tra loro.

##### Teorema

Il **numero di permutazioni** di  $n$  oggetti alcuni uguali tra loro è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_{\substack{\text{numero di scatole} \\ \text{numero tot di oggetti}}} = P_n^r = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

Devo pensarla così:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte, senza ripetizione ( $k$  = conta quante scatole sono)

- Inserisci ogni oggetto nella corrispettiva scatola  
( $r$  = conta quanti oggetti ha ogni scatola)

### Esempio

Se io ho la parola STATISTICA, ho  $n = 10$  allora:

- Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte  
( $k$  = conta quante scatole sono)  
S, T, A, I, C quindi  $k = 5$  scatole
- Inserisci ogni ripetizione nella corrispettiva scatola  
( $r$  = conta quanti oggetti ha ogni scatola)
  - scatola S: la parola ha 2 "S" ripetute, quindi  $r_1 = 2$   
**STATISTICA**
  - scatola T: la parola ha 3 "T" ripetute, quindi  $r_2 = 3$   
**STATISTICA**
  - scatola A: la parola ha 2 "A" ripetute, quindi  $r_3 = 2$   
**STATISTICA**
  - scatola I: la parola ha 2 "I" ripetute, quindi  $r_4 = 2$   
**STATISTICA**
  - scatola C: la parola ha 1 "C" ripetuta, quindi  $r_5 = 1$   
**STATISTICA**

Quindi:

$$P_{10}^5 = \frac{10!}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!} = \frac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600 \text{ modi diversi di ordinare la parola}$$

### 3.3 Disposizioni Semplici

Nel caso delle disposizioni, non uso tutti gli  $n$  oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto  $k$  di  $n$  dove  $k \leq n$ .

#### Teorema

Il **numero di disposizioni** di oggetti scelti  $k$  tra  $n$  oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare  $k$  oggetti.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Scelgo  $k$  oggetti tra  $n$  oggetti totali
- $D_{n,k}$  è il numero di modi diversi per ordinare  $k$  oggetti

### Esempio

In quanti modi diversi posso sistemare su una libreria 7 libri scelti da un insieme di 20 libri?

$$D_{20,7} = \frac{20!}{(20-7)!} = 390700800$$

### 3.4 Disposizioni con Ripetizione

Nel caso delle disposizioni con ripetizione, non uso tutti gli  $n$  oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto  $k$  di  $n$  dove  $k \leq n$ .

#### Teorema

Il **numero di disposizioni con ripetizione** di oggetti scelti  $k$  tra  $n$  oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare  $k$  oggetti in cui alcuni possono ripetersi nella stessa sequenza.

$$D_{n,k}^R = n^k$$

#### Esempio

Quante password di 5 caratteri si possono creare con un alfabeto di 26 lettere?

1. Scelgo  $k = 5$  sottoinsieme di  $n = 26$
2. Alcune lettere possono ripetersi nella stessa sequenza

$$D_{26,5}^R = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11881376$$

### 3.5 Combinazioni

Nel caso delle combinazioni, si parla di gruppi il cui numero corrisponde esattamente a quanti oggetti  $k$  ho scelto da  $n$ . La scelta  $k$  corrisponde solo al numero da cui è formato ogni gruppo.

Ovvero, se io scelgo 10 oggetti su 20, allora ogni gruppo dovrà avere esattamente 10 oggetti. L'ordine non conta perché l'importante è la presenza dell'oggetto all'interno del gruppo, che sia primo o ultimo non cambia niente.

La domanda è: quanti modi diversi ho di formare questi gruppi?

#### Teorema

Il **numero di combinazioni** è il numero di modi diversi per formare gruppi di  $k$  elementi ( $k \leq n$ ).

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Scelgo un numero  $k$  dove  $k \leq n$
2. Ogni gruppo dovrà avere esattamente  $k$  oggetti
3. Quanti modi diversi ho di formare questi gruppi che contengono esattamente  $k$  oggetti?

#### Esempio

Ho 3 frutti diversi ma la io voglio fare merenda solo con 2. Quante tipe di merende posso creare con 2 frutti?

1. Scelgo  $k = 2$  dove  $2 < 3$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 2 frutti

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Ho 3 modi diversi di formare gruppi di 2 frutti, quindi ho 3 tipi di merende diverse.

### Esempio

Voglio giocare a basket e devo formare 2 gruppi di persone per la partita. So che ogni squadra deve avere esattamente 5 giocatori. Le persone che si son presentate come candidate sono 40. Quanti modi diversi ho per formare una squadra? e per formarne due? sapendo che la persona non puo essere contemporaneamente scelta in entrambe?

1. Scelgo  $k = 5$  dove  $5 < 40$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 5 persone

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708 \text{ modi diversi per formare una sola squadra}$$

Ho 657708 modi diversi di formare gruppi di 5 persone, quindi posso scegliere 1 tra 657708 da mandare in campo.

3. Se invece voglio formare due squadre (sapendo che la stessa persona non può essere in entrambe) ? quante scelte avrei?

$$\text{Prima squadra: } C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708$$

Dato che le persone non possono ripetersi, se io ho formato la prima squadra, avrò per la seconda 35-5 persone ancora disponibili (perchè 5 le ho già scelte nella 1<sup>a</sup> squadra):

$$\text{Seconda squadra: } C_{35,5} = \binom{35}{5} = \frac{35!}{5!(35-5)!} = 324632$$

Quindi i diversi modi per formare le due squadre saranno in totale  $657708 \cdot 324632 = 213846580000$

## 4 Probabilità

### 4.1 Operazione insiemi

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2\} \\ A_1 \cap A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2\} \\ A_1 - A_2 &= \{\omega \mid \omega \in A_1 \wedge \omega \notin A_2\} \\ \bar{A} &= \{\omega \mid \omega \notin A\} \end{aligned}$$

### 4.2 Proprietà operazione tra eventi

Siano  $A_1, A_2, A_3$  tre eventi.

- **Proprietà commutativa:** l'ordine non cambia il risultato

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

- **Proprietà associativa:**

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

- **Proprietà distributiva:**

$$(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$

$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$$

- **Leggi di De Morgan:**

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

### 4.3 Tipi di eventi

#### 4.3.1 Eventi compatibili

Due eventi che possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ compatibili} \iff A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

#### 4.3.2 Eventi incompatibili

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ incompatibili} \iff A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

#### 4.3.3 Eventi complementari

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente e tale che uno dei due si verifica di sicuro.

$$A_1, A_2 \text{ complementari} \iff \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = \Omega \end{cases}$$

## 4.4 Definizione

Sia  $A$  un evento e  $\Omega$  lo spazio campionario. Definisco  $P(A)$  la probabilità che si verifichi  $A$  dove  $0 \leq P(A) \leq 1$ :

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

## 4.5 Assiomi

1. **Primo assioma:** la probabilità di un evento  $A$  è un numero reale non negativo
2. **Secondo assioma:** la probabilità dell'intero spazio campionario è uguale a 1
$$P(\Omega) = 1$$
3. **Terzo assioma:** Se  $A_1, A_2$  sono eventi **incompatibili**, allora la probabilità dell'unione dei due eventi è la somma delle loro probabilità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

### 4.5.1 Conseguenze degli assiomi

1. **Probabilità del complementare di un evento:**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

oppure:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

2. **Probabilità dell'evento impossibile:**

$$P(\emptyset) = 0$$

3. **Proprietà di monoticità:** Se  $B$  è un evento incluso in un evento  $A$ , allora la probabilità di  $B$  è minore o uguale alla probabilità di  $A$

$$B \subseteq A \implies P(B) \leq P(A)$$

4. **Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

## 4.6 Probabilità Totale

### Teorema : Teorema delle probabilità totali a 2 eventi

Siano  $A_1, A_2$  due eventi, la probabilità dell'unione dei due eventi è uguale alla somma delle due probabilità meno la loro intersezione:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi"

- Se i due eventi sono incompatibili  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  allora,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \emptyset = P(A_1) + P(A_2)$$

(assioma 3)

- Se i due eventi sono compatibili  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  allora,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

(resta uguale)

### Teorema : Teorema delle probabilità totali a $k$ eventi

Siano  $k$  eventi, la probabilità dell'unione di  $k$  eventi è uguale a:

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) + \\
 &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j) + \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \\
 &\quad - \sum_{1 \leq i < j < r < s \leq k} P(A_i \cap A_j \cap A_r \cap A_s) + \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_k) =
 \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= \text{somma delle probabilità dei singoli eventi} + \\
 &\quad - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 2 a 2}] + \\
 &\quad + [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 3 a 3}] + \\
 &\quad - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi 4 a 4}] + \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + / - [\text{somma dell'intersezioni degli eventi presi } k \text{ a } k]
 \end{aligned}$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno tra i  $k$  eventi"

### Esercizio

Una segretaria distratta prepara 3 lettere e 3 buste da inviare a 5 persone diverse e mette le lettere nelle buste a caso.

Qual è la probabilità che almeno una delle 3 lettere sia inserita nella busta corrispondente?

1. Descrivi a parole quanto richiesto nell'esercizio:  
 $E$  = almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
2. Suddividi l'evento:
  - (a)  $E_1$  = la lettera 1 è nella busta 1
  - (b)  $E_2$  = la lettera 2 è nella busta 2
  - (c)  $E_3$  = la lettera 3 è nella busta 3
  - (d) Quindi, l'evento  $E$  = almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente diventa:  
 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
  - (e) Qual è la probabilità che si verifichi  $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ?  
Infatti qui si calcola la probabilità che almeno uno si verifichi.

Dunque applico la formula di probabilità totale per 3 eventi:

$$\begin{aligned}
 P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\
 &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\
 &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] =
 \end{aligned}$$

- $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_1)$ :

– 123  
– 132  
– ~~213~~  
– ~~231~~  
– ~~312~~  
– ~~321~~

2 casi favorevoli.

- $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_2)$ : uguale a  $P(E_1)$

- $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_3)$ : uguale a  $P(E_1)$

- $P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_1 \cap E_2)$ , ovvero che la lettera 1 sia in prima posizione e allo stesso tempo 2 sia alla seconda posizione:

– 123  
– ~~132~~  
– ~~213~~  
– ~~231~~  
– ~~312~~  
– ~~321~~

1 caso favorevole.

- $P(E_1 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

- $P(E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$   
Casi favorevoli che accada  $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ , ovvero che allora stesso tempo la lettera 1 sia in prima posizione, la 2 in seconda posizione e la 3 in terza posizione:

– 123  
– ~~132~~  
– ~~213~~  
– ~~231~~  
– ~~312~~  
– ~~321~~

1 caso favorevole.

Pertanto la formula:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

Sostituendo con i valori trovati, diventa:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] + \\ &- \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right] \\ &+ \left[ \frac{1}{6} \right] = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

Oppure posso utilizzare la negazione  $P(E) = 1 - P(\bar{E})$ :

- $E$  = almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
- $\bar{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

Usando la negazione:  $\bar{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\bar{E}_1$  = la lettera 1 non è nella busta 1
- $\bar{E}_2$  = la lettera 2 non è nella busta 2
- $\bar{E}_3$  = la lettera 3 non è nella busta 3

e quindi se voglio che accadano tutti gli eventi insieme allora sarebbe intersezione e non unione (probabilità congiunta):

$\bar{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente  $\implies \bar{E} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3$   
quindi uso la formula della probabilità congiunta per 3 eventi:

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = \\ &= P(\bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_3 \mid \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $P(\bar{E}_1) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Uso tutti gli elementi, ordine conta, ripetizioni no  $\implies$  permutazioni semplici  $n!$   
Quindi, casi possibili  $3! = 6$ , ovvero 6 possibili modi di ordinare gli elementi:

- 123
- 132
- 213
- 231
- 312
- 321

1. casi favorevoli che accada  $P(\bar{E})$ , ovvero tutte le combinazioni in cui 1 non è nella prima posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- 213
- 231
- 312
- 321

Ci sono 4 combinazioni favorevoli

- $P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1) = \frac{\bar{E}_2 \cap \bar{E}_1}{P(\bar{E}_1)} = \frac{?}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

tutte e due le buste non vanno nelle buste corrispondenti:  
 $P(\bar{E}_2 \cap \bar{E}_1) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{3}{3!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

casi favorevoli che accada  $P(\bar{E})$ , ovvero tutte le combinazioni in cui 1, 2 non sono nella corrispettiva posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- 213
- 231
- 312
- ~~321~~

Ci sono 3 combinazioni favorevoli

- $P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})} = \frac{?}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$   
tutte e tre le buste non vanno nelle buste corrispondenti:  
 $P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$   
casi favorevoli che accade  $P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})$ , ovvero tutte le combinazioni in cui 1, 2, 3 non sono nella corrispettiva posizione:

- ~~123~~
- ~~132~~
- ~~213~~
- 231
- 312
- ~~321~~

Ci sono 2 combinazioni favorevoli

Pertanto:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

Oppure un modo più veloce sempre con la negazione  $P(E) = 1 - P(\overline{E})$ :  
 $\overline{E}$  = nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$  = la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$  = la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$  = la lettera 3 non è nella busta 3

Voglio calcolare  $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})$  e poi fare  $P(E) = 1 - P(\overline{E})$ , quindi:

1. Elenco tutti i possibili modi di ordinare le buste:

- 123
- 132
- 213
- 231
- 312
- 321

2. Tengo fissato un ordine (lettera 1 - busta 1 - prima posizione; lettera 2 - busta 2 - seconda posizione; lettera 3 - busta 3 - terza posizione)
3. Elimino i casi in cui 1 è nella prima posizione  $\wedge$  2 è nella seconda posizione  $\wedge$  3 è nella terza posizione:

- ~~123~~ - elimino perché 1 è nella prima posizione, 2 nella seconda, 3 nella terza
- ~~132~~ - elimino perché 1 è nella prima posizione
- ~~213~~ - elimino perché 3 è nella terza posizione

- 231
- 312
- ~~321~~ - elimino perché 2 è nella seconda posizione

Mi rimangono 2 casi favorevoli.

4. Pertanto,  $P(\bar{E}) = P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5. Alla fine:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

## 5 Probabilità Condizionata e Indipendenza

### 5.1 Probabilità Condizionata

#### Teorema

Si definisce probabilità condizionata la **probabilità che si verifichi un evento  $E$  sapendo che si è già verificato l'evento  $B$ :** "probabilità di  $E$  dato  $B$ ."

$$P(E | B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

Inoltre, si ricavano le seguenti formule:

$$P(E \cap B) = P(E | B) \cdot P(B)$$

e:

$$P(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E | B)}$$

Prima osservazione:

$$\begin{aligned} P(E \cup A | B) &= \frac{P((E \cup A) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((E \cap B) \cup (A \cap B))}{P(B)} \\ &= \text{per teorema delle probabilità totali}^1 \\ &= \frac{P(E \cap B) + P(A \cap B) - P(E \cap B \cap A)}{P(B)} \end{aligned}$$

Seconda osservazione:

$$P(E \cap A | B) = \frac{P(E \cap A \cap B)}{P(B)}$$

Terza osservazione:

$$\begin{aligned} P(\bar{E} | B) &= 1 - P(E | B) \\ P(E | B) &= 1 - P(\bar{E} | B) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Osservazione:

$$P(E \mid \bar{B}) = \frac{P(E \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} =$$

per l'assioma 3

$$= \frac{P(E \cap \bar{B})}{1 - P(B)} =$$

sapendo che  $P(E \cap \bar{B}) = P(E \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$  e che,  
le due probabilità sono non nulle  $P(E), P(\bar{B}) \neq 0$ ,  
allora posso usare  $P(E \cap \bar{B}) = P(\bar{B} \mid E) \cdot P(E)$   
poichè il risultato di  $P(E \cap \bar{B})$  rimane invariato. Quindi:

$$= \frac{P(\bar{B} \mid E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

$$= \frac{P(\bar{B} \mid E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

per l'assioma 3

$$= \frac{(1 - P(B \mid E)) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =$$

## 5.2 Probabilità Congiunta / Composta

La probabilità congiunta è la probabilità che due o più eventi si verifichino insieme (accadano entrambi), ossia che si verifichi l'intersezione degli eventi.

**Teorema : Legge delle probabilità composte per 2 eventi**

Si definisce probabilità congiunta la **probabilità che si verifichino entrambi gli eventi**:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) \text{ con } P(A_1) \neq 0$$

Oppure:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2) \text{ con } P(A_2) \neq 0$$

Se entrambe sono non nulle,  $P(A_1) \wedge P(A_2) \neq 0$ , allora posso usare una delle due formule, il risultato rimane invariato:

Posso usare questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

Oppure questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2)$$

Prima osservazione:  $P(A_1) \neq 0$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

$$= \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot P(A_1)$$

$$= P(A_2 \cap A_1) \text{ giusto, intersezione è simmetrica, } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$$

Seconda osservazione:  $P(A_2) \neq 0$

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2)$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \cdot P(A_2)$$

$= P(A_1 \cap A_2)$  giusto, intersezione è simmetrica,  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$

### Teorema : Legge delle probabilità composte per $k$ eventi

Generalizzato a  $k$  eventi, questa formula vale solo se gli eventi su cui condizioniamo <sup>a</sup> sono maggiori di zero  $P(X) > 0$ :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \prod_{i=1}^k P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \\ &\quad \cdot P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \dots P(A_k | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \end{aligned}$$

<sup>a</sup>eventi su cui condizioniamo sono quelli in rosso, dopo la sbarra:  $P(A_1 | \textcolor{red}{X})$

### Esercizio

Un cliente di un'azienda acquista 3 pc da un lotto di 50 pc di cui 4 sono difettosi. Qual è la probabilità che tutti i 3 pc acquistati siano difettosi?

Ricordo che: intersezione= $\cap = \wedge = AND$

1. Descrivi a parole quanto richiesto in un evento:

$E =$ tutti i pc acquistati sono difettosi

2. Suddividi l'evento:

- (a)  $E_1 =$  primo pc difettoso
- (b)  $E_2 =$  secondo pc difettoso
- (c)  $E_3 =$  terzo pc difettoso

3. Quindi, l'evento  $E =$ tutti i pc acquistati sono difettosi diventa:

$$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$$

4. Qual è la probabilità che si verifichi  $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ ? Infatti qui si calcola la probabilità che si verifichino tutti gli eventi insieme

Dunque applico formula della probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot (E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{50}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{49}$$

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{2}{48} = 0.0002 = 0.02\%$$

### Esercizio

Se invece fosse stato: Qual è la probabilità che **almeno uno dei pc fosse difettoso**? Non avrei utilizzato probabilità congiunta ma teorema delle probabilità totali (unione). Ricordo che: l'unione =  $\cup = \vee = OR$

1. Descrivo a parole quanto richiesto in un evento:  
 $E =$  almeno un pc acquistato è difettoso
2. Suddividi l'evento:
  - (a)  $E_1 =$  primo pc difettoso
  - (b)  $E_2 =$  secondo pc difettoso
  - (c)  $E_3 =$  terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento  $E =$  almeno un pc acquistato è difettoso, diventa:  
 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi  $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ?

Dunque, ho due approcci:

- **Uso formula delle probabilità totali a  $k = 3$  eventi:**

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

quindi:

- $P(E_1) = ?$
- $P(E_2) = ?$
- $P(E_3) = ?$
- $P(E_1 \cap E_2) = ?$
- $P(E_1 \cap E_3) = ?$
- $P(E_2 \cap E_3) = ?$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = ?$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ &\quad - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + \\ &\quad + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

Se avessi tutti i dati, sarebbe facile, ma dato che non li ho è meglio il secondo approccio.

- **Uso negazione dell'evento:**

La negazione di "almeno uno dei pc è difettoso" è "nessuno dei pc è difettoso". Quindi posso usare la seguente formula:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

1. Descrivi a parole l'evento contrario:  
 $\bar{E} =$  nessuno dei pc è difettoso
2. Suddividi l'evento:
  - (a)  $E_1 =$  primo pc funzionante
  - (b)  $E_2 =$  secondo pc funzionante
  - (c)  $E_3 =$  terzo pc funzionante

3. Quindi, l'evento  $\bar{E}$  = nessuno dei pc è difettoso diventa:  
 $\bar{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi  $\bar{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ ? Applico probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot (E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{46}{50}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{45}{49}$$

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{44}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0.774$$

Quindi:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 0.774 = 0.226 = 22.6\%$$

Pertanto, la probabilità che almeno uno dei pc sia difettoso è  $P(E) = 0.226$

### 5.3 Eventi Indipendenti & Eventi Dipendenti

#### Teorema : Probabilità dell'intersezione di 2 eventi indipendenti

Siano  $E_1, E_2$  due eventi **indipendenti**.

La probabilità della loro intersezione è uguale al prodotto delle singole probabilità:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

La probabilità che si verifichi uno non modifica la probabilità dell'altro.

#### Teorema : Indipendenza debole di $k$ eventi

Siano  $k$  eventi.  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sono **indipendenti due a due** se, presa l'intersezione di tutti gli eventi due a due, sono tutti indipendenti:

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j) \quad \forall i < j$$

Ovvero:

Considero  $E_1, E_2, E_3$ . Essi sono indipendenti due a due se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$

#### Teorema : Indipendenza forte di $k$ eventi

Siano  $k$  eventi.  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sono **reciprocamente indipendenti** se, presa

l'intersezione di tutti gli eventi due a  $k$ , sono tutti indipendenti:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) = \prod_{j=1}^k P(E_i)$$

Ovvero:

Considero  $E_1, E_2, E_3$ . Essi sono reciprocamente indipendenti se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$

### 5.3.1 Come capire se due eventi sono dipendenti o indipendenti

Basta verificare questa uguaglianza:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

1. Calcolo la probabilità a sinistra dell'uguale:  $\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{questa}} = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Secondo la formula classica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = x$$

2. Calcolo la probabilità a destra dell'uguale:  $P(A \cap B) = \underbrace{P(E_1) \cdot P(E_2)}_{\text{questa}}$

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = y$$

3. Se:

- $x = y \implies$  gli eventi  $E_1, E_2$  sono indipendenti
- $x \neq y \implies$  gli eventi  $E_1, E_2$  sono dipendenti

### 5.3.2 Non confondere eventi indipendenti con eventi incompatibili

**Ricorda che:**

- **Eventi incompatibili:** eventi che non possono verificarsi contemporaneamente  $E \cap F = \emptyset$  e ciò vuol dire che  $P(E \cap F) = 0$ .

Lancio un dado, qual è probabilità che esca 1 e 6 allo stesso tempo?

- $E =$ esce 1
- $F =$ esce 6

È facile capire che è impossibile che il dado mostri due facce allo stesso tempo, quindi  $E \cap F = \emptyset$ .

Inoltre,  $P(E \cap F) = 0$  perché  $E \cap F = \emptyset$  e quindi  $P(E \cap F) = P(\emptyset) = 0$

- **Eventi indipendenti:** eventi che possono verificarsi insieme ma la probabilità di uno non cambia la probabilità dell'altro.

Lancio un dado e una moneta, qual è probabilità che esca 1 e testa allo stesso tempo?

- $E =$ esce 1
- $F =$ esce testa

È facile capire che il verificarsi di  $E$  non influenza il verificarsi di  $F$ , quindi  $E \cap F \neq \emptyset$ .

${}^a\emptyset$ : evento impossibile

## 5.4 Fattorizzazione di un evento

Formula probabilità condizionata:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

posso modificarla algebricamente e ottenere:

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

### Osservazione:

Siano  $A, B$  due eventi, vale sempre:

$$A = A \cap (B \cup \bar{B}) \implies A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$B$  e  $\bar{B}$  sono incompatibili, non possono capitare insieme:

- $B =$  ho passato Statistica
- $\bar{B} =$  non ho passato Statistica

è ovvio che non possono accadere insieme, l'hai passata oppure no.  
Quindi,  $B$  e  $\bar{B}$  sono incompatibili:

$$B \cap \bar{B} = \emptyset$$

Pertanto, se  $B$  e  $\bar{B}$  sono incompatibili anche gli eventi  $(A \cap B)$  e  $(A \cap \bar{B})$  lo sono.

### Teorema : Fattorizzazione di un evento

La fattorizzazione di un evento si scrive come:

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} P(A) &= \text{per l'osservazione fatta} = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = \\ &= (P(A \cap B) \cup P(A \cap \bar{B})) = \text{formula fattorizzazione evento} = (P(A | B) \cdot P(B)) \cup (P(A | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})) = \\ &= {}^2 \text{per il 4º assioma} = (P(A | B) \cdot P(B)) + (P(A | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>dato che gli eventi  $(A \cap B)$  e  $(A \cap \bar{B})$  sono incompatibili ricordando il 4º assioma:  
**Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

### Esercizio

Siano due eventi:

- $M$  = avere una certa malattia
- $T$  = il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$   
Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T | M) = 0.9$   
Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(\bar{T} | \bar{M}) = 0.98$   
Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo?  $P(T) = ?$

Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})$$

Dato che  $M, \bar{M}$  sono incompatibili, anche  $T \cap M$  e  $T \cap \bar{M}$  lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned} P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})) \\ &= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \bar{M})) \\ &= \text{per l'assioma 4} \\ &= P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) \\ &= \text{per la formula di fattorizzazione} \\ &= P(T | M) \cdot P(M) + P(T | \bar{M}) \cdot P(\bar{M}) \\ &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\ &= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T | \bar{M}) = ?$

Ricordo che  $P(E) = 1 - P(\bar{E})$ , di conseguenza:

$$P(T | \bar{M}) = 1 - P(\bar{T} | \bar{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$

- $P(\bar{M}) = ?$

Ricordo che  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ , di conseguenza:

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

## 5.5 Teorema della Probabilità Assoluta

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di  $\Omega$

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

Nell'esempio di un dado,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :

- $E_1$  =esce 1
- $E_2$  =esce 2
- $E_3$  =esce 3
- $E_4$  =esce 4
- $E_5$  =esce 5
- $E_6$  =esce 6

$$\bigcup_i E_i = \Omega \implies E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6 = \Omega \implies 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 = \Omega$$

### Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per 2 eventi

Questa è valida solo quando ho 2 eventi nello spazio campionario.

Siano  $E_1, E_2$  due eventi:

- con probabilità non nulle  $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di  $\Omega$

La formula della probabilità assoluta se voglio calcolare  $P(E_1)$ :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2) + P(E_1 | \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \\ &\text{ma } E_1, E_2 \text{ incompatibili, quindi } P(E_1 | E_2) = 0 \\ &= P(E_1 | \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \end{aligned}$$

oppure se voglio calcolare  $P(E_2)$ :

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 | \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \\ &\text{ma } E_2, E_1 \text{ incompatibili, quindi } P(E_2 | E_1) = 0 \\ &= P(E_2 | \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \end{aligned}$$

### Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per $k$ eventi

Siano  $E_1, \dots, E_k$  eventi:

- con probabilità non nulle
- incompatibili
- partizioni di  $\Omega$

Sia  $E$  un qualsiasi tra gli  $k$  eventi, allora la sua probabilità è uguale a:

$$P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)$$

Ovvvero:

$$P(E) = P(E | E_1) \cdot P(E_1) + P(E | E_2) \cdot P(E_2) + \cdots + P(E | E_k) \cdot P(E_k)$$

### Esercizio

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso?  $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:

Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?

$E =$  il microchip è difettoso

2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:

- $E_1 =$  il microchip proviene dal fornitore 1
- $E_2 =$  il microchip proviene dal fornitore 2
- $E_3 =$  il microchip proviene dal fornitore 3

Ripondo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No

Perchè:

- $P(E_1) = 0.20$
- $P(E_2) = 0.35$
- $P(E_3) = 0.45$

- Gli eventi sono incompatibili? Si

Perchè è impossibile che il microchip pescato provenga da due fornitori diversi

- L'unione degli eventi  $E_1, E_2, E_3$  è uguale a  $\Omega$ ? Sì

Quindi uso la formula della probabilità assoluta  $P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E | E_1) \cdot P(E_1) + \\ &\quad + P(E | E_2) \cdot P(E_2) \\ &\quad + P(E | E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E | E_1) = 0.10$

Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1

- $P(E | E_2) = 0.05$   
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E | E_3) = 0.02$   
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

## 5.6 Formula di Bayes

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di  $\Omega$

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

Siano  $E_1, E_2$  due eventi:

- con probabilità non nulle  $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di  $\Omega$

La probabilità condizionata di  $E_1$  rispetto a  $E_2$  è uguale a:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della probabilità

assoluta  $P(E_2) = P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 | E_1^c) \cdot P(E_1^c)$  avrà che:

$$= \frac{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 | E_1^c) \cdot P(E_1^c)} =$$

Dove:

- $P(E_1)$  è la probabilità a priori dell'evento  $E_1$  (dato che ho già)
- $P(E_1 | E_2)$  è la probabilità a posteriori dell'evento  $E_1$  (che calcolo con Bayes)

Quello che fa la formula di Bayes è:

aggiornare la probabilità dell'evento  $E_1$  (probabilità a priori) con informazioni contenute nell'evento  $E_2$  (ottenendo così una probabilità a posteriori).

**Teorema : Teorema di Bayes a  $k$  eventi**

Siano  $E_1, \dots, E_k$  eventi:

- con probabilità non nulle

- incompatibili
- partizioni di  $\Omega$

Dato un qualsiasi evento  $E$  tra i  $k$  eventi, allora la probabilità condizionata di  $E_k$  dato  $E$

$$P(E_k | E) = \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della

$$\begin{aligned} \text{probabilità assoluta } P(E) &= \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i) \text{ avrà che:} \\ &= \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)} = \end{aligned}$$

Prima di calcolare correttamente la formula di Bayes, è necessario aver già calcolato la probabilità assoluta (che nella formula di Bayes è al denominatore).

1. Scrivi formula di Bayes:

$$P(E_k | E) = \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$

2. Calcola separatamente il denominatore della formula nello step 1,  $P(E)$ , con la formula della probabilità assoluta:

$$P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i) = \text{valore}$$

3. Inserisci il valore ottenuto dallo step 2 nel denominatore della formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned} P(E_k | E) &= \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} = \\ &= \frac{P(E | E_k) \cdot P(E_k)}{\text{valore}} = \end{aligned}$$

### Esercizio 1

Siano due eventi:

- $M$  = avere una certa malattia
- $T$  = il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$   
Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T | M) = 0.9$   
Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(T | \bar{M}) = 0.98$   
Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo?  $P(T) = ?$

Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})$$

Dato che  $M, \bar{M}$  sono incompatibili, anche  $T \cap M$  e  $T \cap \bar{M}$  lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})) \\
 &= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \bar{M})) \\
 &= \text{per l'assioma 4} \\
 &= P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) \\
 &= \text{per la formula di fattorizzazione} \\
 &= P(T | M) \cdot P(M) + P(T | \bar{M}) \cdot P(\bar{M}) \\
 &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\
 &= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta}
 \end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T | \bar{M}) = ?$

Ricordo che  $P(E) = 1 - P(\bar{E})$ , di conseguenza:

$$P(T | \bar{M}) = 1 - P(\bar{T} | \bar{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$

- $P(\bar{M}) = ?$

Ricordo che  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ , di conseguenza:

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

Adesso mi chiedo:

**Qual è la probabilità che un individuo sia affetto dalla malattia sapendo che il test diagnostico ha dato esito positivo?  $P(M | T) = ?$**

**Uso Bayes perché conosco i valori di  $P(T | M)$ ,  $P(M)$  e posso calcolare  $P(T)$  con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.**

1. Scrivo la formula di Bayes:

$$P(M | T) = \frac{P(T | M) \cdot P(M)}{P(T)}$$

2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 2 eventi (M,T):

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(T | M) \cdot P(M) + P(T | \bar{M}) \cdot P(\bar{M}) = \\
 &T, M \text{ non sono incompatibili, quindi } P(T | M) \neq 0 \\
 &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 = 0.0288
 \end{aligned}$$

3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned}
 P(M | T) &= \frac{P(T | M) \cdot P(M)}{P(T)} = \\
 &= \frac{P(T | M) \cdot P(M)}{0.0288} = \\
 &= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.0288} = 0.3125 \quad \text{Risposta corretta}
 \end{aligned}$$

## Esercizio 2

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi

- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso?  $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:

Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?

$E =$  il microchip è difettoso

2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:

- $E_1 =$  il microchip proviene dal fornitore 1
- $E_2 =$  il microchip proviene dal fornitore 2
- $E_3 =$  il microchip proviene dal fornitore 3

Ripongo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No  
Perchè:
  - $P(E_1) = 0.20$
  - $P(E_2) = 0.35$
  - $P(E_3) = 0.45$
- Gli eventi sono incompatibili? Si  
Perchè è impossibile che il microchip pescato provenga da due fornitori diversi
- L'unione degli eventi  $E_1, E_2, E_3$  è uguale a  $\Omega$ ? Si

Quindi uso la formula della probabilità assoluta  $P(E) = \sum_i^k P(E | E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E | E_1) \cdot P(E_1) + \\ &\quad + P(E | E_2) \cdot P(E_2) \\ &\quad + P(E | E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E | E_1) = 0.10$   
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1
- $P(E | E_2) = 0.05$   
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E | E_3) = 0.02$   
Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

Adesso mi chiedo:

Qual è la probabilità che un microchip scelto a caso sia stato fornito dal produttore 2 sapendo che esso è difettoso?  $P(E_2 | E) = ?$  Uso Bayes perchè conosco i valori di  $P(E | E_2), P(E_2)$  e posso calcolare  $P(E)$  con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.

1. Scrivo la formula di Bayes:

$$P(E_2 | E) = \frac{P(E | E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)}$$

2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 3 eventi  $(E_1, E_2, E_3)$ :

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{i=1}^3 P(E | E_i) \cdot P(E_i) = \\ &= (P(E | E_1) \cdot P(E_1)) + (P(E | E_2) \cdot P(E_2)) + (P(E | E_3) \cdot P(E_3)) = \\ &= (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \end{aligned}$$

3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned} P(E_2 | E) &= \frac{P(E | E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)} = \\ &= \frac{P(E | E_2) \cdot P(E_2)}{0.0465} = \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.35}{0.0465} = 0.3763 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

## **6 Variabili Casuali**

### **6.1 Famiglie Parametriche**

## **7 Inferenza Statistica**

### **7.1 Stima Puntuale**

### **7.2 Stima Intervallare**

### **7.3 Verifica delle Ipotesi**