Statistica

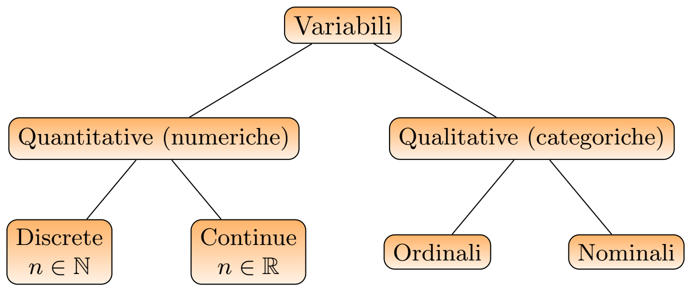
Ede Boanini

13 gennaio 2026

Indice

1 Introduzione

1.1 Classificazione delle Variabili



Differenza tra ordinali e nominali:

- **Ordinali:** categorie che hanno un ordine, puoi solo dire se un valore è minore o maggiore rispetto ad un altro.
  - *Livello di istruzione: elementare < media <* $\cdots$
  - *Grado di soddisfazione: nullo < basso < medio <* $\cdots$
  - *Classifica di una gara: quinto<quarto<* $\cdots$
  - *Matricola: 17345 < 17346 <* $\cdots$
- **Nominali:** categorie che non hanno un ordine.
  - *Colore occhi: blu, verdi, marroni,* $\cdots$
  - *Genere: M, F*
  - *Marche auto: Toyota, Ford,* $\cdots$
  - *Nazionalità: Giapponese, Italiano,* $\cdots$

1.2 Distribuzioni di Frequenza

È una tabella che contiene modalità e frequenze.

Modalità di X (x_i)	Frequenze assolute f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_n	f_n
	N

1.2.1 Tipi di Frequenza

1. Frequenza assoluta: numero di ripetizioni di una certa modalità (es: quanti studenti hanno preso 28 all'esame)

$$freq_{assoluta} = f_i$$

2. Frequenza relativa:

$$freq_{relativa} = \frac{f_i}{N}$$

3. Frequenza percentuale:

$$freq_{\%} = \frac{f_i}{N} \cdot 100$$

oppure

$$freq_{\%} = freq_{relativa} \cdot 100$$

4. Frequenza cumulata: somma progressiva delle frequenze assolute o relative.

$$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$freq_{cumulataRelativa} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} freq_{relativa_i}$$

5. Frequenza cumulata percentuale:

$$freq_{cumulataAssoluta\%} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot 100$$

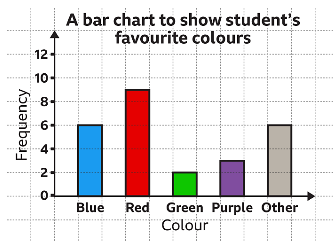
$$freq_{cumulataRelativa\%} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{N} \cdot 100 = \sum_{i=1}^{n} freq_{relativa_i} \cdot 100$$

2 Statistica Descrittiva

2.1 Diagrammi a barre vs Istogrammi

Definizione 2.1 (Diagrammi a barre)**.** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili qualitative (categoriche). Le barre devono avere tutte la stessa base ed essere equi-spaziate (lasciare un pò di spazio tra una barra e l'altra).

- altezza barre: frequenza

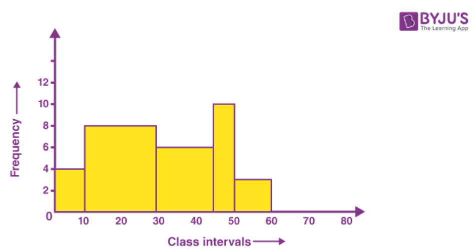


Definizione 2.2 (Istogrammi)**.** Descrivono la distribuzione di frequenza di una o più variabili quantitative. Ogni barra rappresenta una classe e la sua frequenza.

- altezza barre: densità di frequenza

$$densita_{freq} = \frac{\text{Frequenza}}{\text{Ampiezza classe}}$$

- base barre: ampiezza delle classi



Osservazione: Definire k classi di uguale ampiezza

$$\text{Ampiezza classe} = \frac{\max - \min}{k}$$

I dati sulla statura di 48 adulti vanno da un minimo di 160 a 180 cm. Come fare k classi di ugual ampiezza?

1. Scelgo k (es: $k = 5$)
2. Uso formula Ampiezza classe $= \frac{\max - \min}{k}$ (es: Ampiezza classe $= \frac{180-160}{5} = 4$

cm); quindi ogni classe avrà ampiezza 4.

3. Gli estremi inferiore della classe sono (contando ampiezza 4):
   - 160
   - 164
   - 168
   - 172
   - 176

Conclusione: le $k = 5$ classi di ugual ampiezza sono:

$$[160, 164),\ [164, 168),\ [168, 172),\ [172, 176),\ [176, 180]$$

2.2 Media

Qual è il centro dei dati? valore tipico attorno a cui si concentrano i dati.
f_i indica la frequenza assoluta.

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot freq_{relativa_i})$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i \cdot f_i)}{N} = \sum_{i=1}^{n}(m_i \cdot freq_{relativa_i})$$

  dove a, b estremi dell'intervallo e $m_i = \frac{a+b}{2}$ il valore centrale della classe.

2.3 Moda

Qual è il centro dei dati? valore tipico attorno a cui si concentrano i dati.
La Moda è il valore che si ripete più spesso nei dati.

- **Formula della moda per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)

$$Moda = x_i \text{ con maggior frequenza}$$

- **Formula della media per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)

$$Moda = \frac{a+b}{2}$$

Esempio Moda

Per esempio, per l'esame di analisi 2 ci sono stati tanti studenti che hanno preso tra il 20 e il 25 (classe), allora [20-25] è la classe modale. Pertanto, nel nostro esempio $Moda = \frac{20+25}{2} = 22.5$

2.4 Mediana

Qual è il centro dei dati? valore tipico attorno a cui si concentrano i dati.
La Mediana è il valore che è più grande (o uguale) della prima metà dei dati e allo stesso tempo, più piccolo (o uguale) della seconda metà dei dati.
È il valore che sta in mezzo a dati ordinati; quindi per poter stimare la Me è necessario ordinare i dati:

- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)
  1. Ordina i dati
  2. Trova indice i:
     - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}, \quad i_2 = \frac{N}{2} + 1$
     - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
  3. La mediana è il valore associato all'indice trovato ($i = x_i$):
     - Se ho due indici i_1, i_2, allora $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$
     - Se ho un solo indice i, allora $Me = x_i$
- **Formula della mediana per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)
  1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe
  $$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^{n} f_i$$
  2. Trova indice i:
     - se N pari: $i_1 = \frac{N}{2}, \quad i_2 = \frac{N}{2} + 1$
     - se N dispari: $i = \frac{N}{2}$
  3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata), allora $Me = classe$.
     Oppure, se abbiamo due indici i_1, i_2 con valori x_1, x_2, allora $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$

2.5 Quartili

Il $p-$esimo percentile è il valore che ha $\%p$ dei dati sotto/dietro di sè.

- Q_1 =25-esimo percentile
  (25% dei dati sotto questo valore)
- Q_2 =50-esimo percentile= Mediana
  (50% dei dati sotto questo valore)
- Q_1 =75-esimo percentile
  (75% dei dati sotto questo valore)

Divido la distribuzione in 4 parti uguali, per questo si chiamano "quartili".

- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)
  1. Ordina i dati
  2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$
  3. Q_k è il valore associato all'indice:
     - Se $i \in \mathbb{N}$, allora $Q_k = x_i$
     - Se $i \in \mathbb{Q}$, allora $Q_k = \frac{\text{somma dei valori associati}}{2}$

     Esempio: se $i = 6.75$ allora $i_1 = 6, i_2 = 7$, e i valori associati a $i_1 = 20, i_2 = 25$, allora $Q_k = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{20+25}{2} = 22.5$
- **Come trovare il Q_k per distribuzione di frequenze:** (variabili continue)
  1. Calcola frequenza cumulata di ogni classe
  $$freq_{cumulataAssoluta} = \sum_{i=1}^{n} f_i$$
  2. Trova indice: $i = \frac{N+1}{4} \cdot k$

3. Osserva i in che classe cade (vedi frequenza cumulata)
4. Allora avremo:
$$Q_k = L + \frac{i - f_{cumulata}}{f_i} \cdot h$$
dove:
   - L: estremo inferiore della classe attuale (dell'indice)
   - i: indice
   - $f_{cumulata}$: frequenza cumulata classe precedente
   - f_i: frequenza assoluta classe attuale
   - h: ampiezza classe attuale

2.6 Campo di Variazione / Range

Distanza tra min e max.
$$Range = max - min$$

2.7 Differenza Interquartile

Si usano i quartili per capire la variabilità centrale.
$$IQR = Q_3 - Q_1$$

2.8 Varianza

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.
Quanto i dati si allontanano dalla loro media (μ oppure $\overline{x}$).

- **Formula varianza per distribuzione di frequenze:** (variabili discrete)
  - Varianza della popolazione (P):
  $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{N}$$
  - Varianza campionaria ($C \subseteq P$):
  $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{N - 1}$$

2.9 Deviazione standard

Quanto sono variabili i dati? i dati sono vicini o molto sparsi.
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
dove σ^2 è la varianza.

2.10 Coefficiente di variazione

Si calcola quando $\mu, \overline{x}, \sigma$ sono positivi e si esprime in percentuale.
$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{oppure} \quad CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

3 Calcolo Combinatorio

Ordine conta: $abc \neq cba$ vuol dire "2 modi diversi di ordinare gli elementi".
Ordine non conta: $abc = cba$ vuol dire "c'è solo 1 modo per ordinare gli elementi".

Trucco:

- **Permutazioni:** uso tutti gli n oggetti. Ordine conta
- **Disposizioni:** non uso tutti gli n oggetti ma solo r oggetti scelti dall'insieme dove $r < n$. Ordine conta
- **Combinazioni:** si parla di gruppi di k elementi. Ordine non conta

	Ordine conta?	**Oggetti usati**
Permutazioni	✓	Uso **tutti** gli n oggetti
Disposizioni	✓	Uso r **oggetti su** n
Combinazioni	×	Uso **gruppi di** k **oggetti su** n

3.1 Permutazioni Semplici

Una permutazione semplice è un modo di ordinare in successione oggetti distinti (qui non esistono oggetti uguali tra loro, sono tutti distinti).

Teorema

Il **numero di permutazioni** di n oggetti distinti è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P_n = n!$$

Esempio

Se ho 10 libri, allora avrò:

$$P_{10} = 10! = 3628800 \text{ modi diversi di ordinare 10 libri}$$

3.2 Permutazioni con Ripetizione

Una permutazione con ripetizione è un modo di ordinare oggetti tra cui alcuni uguali tra loro.

Teorema

Il **numero di permutazioni** di n oggetti alcuni uguali tra loro è il numero di modi diversi per ordinare tali oggetti.

$$P^{\text{numero di scatole}}_{\text{numero tot di oggetti}} = P^r_n = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

Devo pensarlo così:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte, senza ripetizione (k = conta quante scatole sono)

2. Inserisci ogni oggetto nella corrispettiva scatola
   (r = conta quanti oggetti ha ogni scatola)

Esempio

Se io ho la parola STATISTICA, ho $n = 10$ allora:

1. Dividi gli oggetti distinti come se fossero scatole distinte
   (k = conta quante scatole sono)
   S, T, A, I, C quindi $k = 5$ scatole
2. Inserisci ogni ripetizione nella corrispettiva scatola
   (r = conta quanti oggetti ha ogni scatola)
   - scatola S: la parola ha 2 "S" ripetute, quindi $r_1 = 2$
     STATISTICA
   - scatola T: la parola ha 3 "T" ripetute, quindi $r_2 = 3$
     STATISTICA
   - scatola A: la parola ha 2 "A" ripetute, quindi $r_3 = 2$
     STATISTICA
   - scatola I: la parola ha 2 "I" ripetute, quindi $r_4 = 2$
     STATISTICA
   - scatola C: la parola ha 1 "C" ripetuta, quindi $r_5 = 1$
     STATISTICA

Quindi:

$$P_{10}^{5} = \frac{10!}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!} = \frac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600 \text{ modi diversi di ordinare la parola}$$

3.3 Disposizioni Semplici

Nel caso delle disposizioni, non uso tutti gli n oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto k di n dove $k \leq n$.

Teorema

Il **numero di disposizioni** di oggetti scelti k tra n oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1. Scelgo k oggetti tra n oggetti totali
2. $D_{n,k}$ è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti

Esempio

In quanti modi diversi posso sistemare su una liberia 7 libri scelti da un insieme di 20 libri?

$$D_{20,7} = \frac{20!}{(20-7)!} = 390700800$$

3.4 Disposizioni con Ripetizione

Nel caso delle disposizioni con ripetizione, non uso tutti gli n oggetti (come nelle permutazioni) ma solo un sottoinsieme scelto k di n dove $k \leq n$.

Teorema

Il **numero di disposizioni con ripetizione** di oggetti scelti k tra n oggetti totali distinti è il numero di modi diversi per ordinare k oggetti in cui alcuni possono ripetersi nella stessa sequenza.

$$D^R_{n,k} = n^k$$

Esempio

Quante password di 5 caratteri si possono creare con un alfabeto di 26 lettere?

1. Scelgo $k = 5$ sottoinsieme di $n = 26$
2. Alcune lettere possono ripetersi nella stessa sequenza

$$D^R_{26,5} = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11881376$$

3.5 Combinazioni

Nel caso delle combinazioni, si parla di gruppi il cui numero corrisponde esattamente a quanti oggetti k ho scelto da n. La scelta k corrisponde solo al numero da cui è formato ogni gruppo.

Ovvero, se io scelgo 10 oggetti su 20, allora ogni gruppo dovrà avere esattamente 10 oggetti. L'ordine non conta perchè l'importante è la presenza dell'oggetto all'interno del gruppo, che sia primo o ultimo non cambia niente.

La domanda è: quanti modi diversi ho di formare questi gruppi?

Teorema

Il **numero di combinazioni** è il numero di modi diversi per formare gruppi di k elementi ($k \leq n$).

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Scelgo un numero k dove $k \leq n$
2. Ogni gruppo dovrà avere esattamente k oggetti
3. Quanti modi diversi ho di formare questi gruppi che contengono esattamente k oggetti?

Esempio

Ho 3 frutti diversi ma la io voglio fare merenda solo con 2. Quante tipe di merende posso creare con 2 frutti?

1. Scelgo $k = 2$ dove $2 < 3$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 2 frutti

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Ho 3 modi diversi di formare gruppi di 2 frutti, quindi ho 3 tipi di merende diverse.

Esempio

Voglio giocare a basket e devo formare 2 gruppi di persone per la partita. So che ogni squadra deve avere esattamente 5 giocatori. Le persone che si son presentate come candidate sono 40. Quanti modi diversi ho per formare una squadra? e per formarne due? sapendo che la persona non puo essere contemporaneamente scelta in entrambe?

1. Scelgo $k = 5$ dove $5 < 40$
2. Ogni gruppo avrà esattamente 5 persone

   $$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708 \text{ modi diversi per formare una sola squadra}$$

   Ho 657708 modi diversi di formare gruppi di 5 persone, quindi posso scegliere 1 tra 657708 da mandare in campo.
3. Se invece voglio formare due squadre (sapendo che la stessa persona non può essere in entrambe) ? quante scelte avrei?

   $$\text{Prima squadra: } C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 657708$$

   Dato che le persone non possono ripetersi, se io ho formato la prima squadra, avrò per la seconda 35-5 persone ancora disponibili (perchè 5 le ho già scelte nella $1^{\underline{a}}$ squadra):

   $$\text{Seconda squadra: } C_{35,5} = \binom{35}{5} = \frac{35!}{5!(35-5)!} = 324632$$

   Quindi i diversi modi per formare le due squadre saranno in totale $657708 \cdot 324632 = 213846580000$

4 Probabilità

4.1 Operazione insiemi

$$A_1 \cup A_2 = \{\omega \mid \omega \in A_1 \lor \omega \in A_2\}$$
$$A_1 \cap A_2 = \{\omega \mid \omega \in A_1 \land \omega \in A_2\}$$
$$A_1 - A_2 = \{\omega \mid \omega \in A_1 \land \omega \notin A_2\}$$
$$\overline{A} = \{\omega \mid \omega \notin A\}$$

4.2 Proprietà operazione tra eventi

Siano A_1, A_2, A_3 tre eventi.

- **Proprietà commutativa**: l'ordine non cambia il risultato
$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$
$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$
- **Proprietà associativa**:
$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$
$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$
- **Proprietà distributiva**:
$$(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$
$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$$
- **Leggi di De Morgan**:
$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$
$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$$

4.3 Tipi di eventi

4.3.1 Eventi compatibili

Due eventi che possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ compatibili} \iff A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

4.3.2 Eventi incompatibili

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente.

$$A_1, A_2 \text{ incompatibili} \iff A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

4.3.3 Eventi complementari

Due eventi che non possono verificarsi congiuntamente e tale che uno dei due si verifica di sicuro.

$$A_1, A_2 \text{ complementari} \iff \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = \Omega \end{cases}$$

4.4 Definizione

Sia A un evento e Ω lo spazio campionario. Definisco $P(A)$ la probabilità che si verifichi A dove $0 \leq P(A) \leq 1$:

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

4.5 Assiomi

1. **Primo assioma:** la probabilità di un evento A è un numero reale non negativo
2. **Secondo assioma:** la probabilità dell'intero spazio campionario è uguale a 1
$$P(\Omega) = 1$$
3. **Terzo assioma:** Se A_1, A_2 sono eventi incompatibili, allora la probabilità dell'unione dei due eventi e la somma delle loro probabilità
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

4.5.1 Conseguenze degli assiomi

1. **Probabilità del complementare di un evento:**
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
oppure:
$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
2. **Probabilità dell'evento impossibile:**
$$P(\emptyset) = 0$$
3. **Proprietà di monoticità:** Se B è un evento incluso in un evento A, allora la probabilità di B è minore o uguale alla probabilità di A
$$B \subseteq A \implies P(B) \leq P(A)$$
4. **Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

4.6 Probabilità Totale

Teorema : Teorema delle probabilità totali a 2 eventi

Siano A_1, A_2 due eventi, la probabilità dell'unione dei due eventi è uguale alla somma delle due probabilità meno la loro intersezione:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi"

- Se i due eventi sono incompatibili $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ allora,
$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \emptyset = P(A_1) + P(A_2)$
(assioma 3)
- Se i due eventi sono compatibili $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ allora,
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
(resta uguale)

Teorema : Teorema delle probabilità totali a k eventi

Siano k eventi, la probabilità dell'unione di k eventi è uguale a:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = & \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + \\ & - \sum_{1 \le i < j \le k}^{k} P(A_i \cap A_j) + \\ & + \sum_{1 \le i < j < r \le k}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \\ & - \sum_{1 \le i < j < r < s \le k}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r \cap A_s) + \\ & \cdots \\ & + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots \cap A_k) = \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = & \text{ somma delle probabilità dei singoli eventi } + \\ & - [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi 2 a 2 }] + \\ & + [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi 3 a 3 }] + \\ & - [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi 4 a 4 }] + \\ & \cdots \\ & + / - [\text{ somma dell'intersezioni degli eventi presi } k \text{ a } k \text{ }] \end{aligned}$$

Vuol dire: "probabilità che si verifichi almeno uno tra i k eventi"

Esercizio

Una segretaria distratta prepara 3 lettere e 3 buste da inviare a 5 persone diverse e mette le lettere nelle buste a caso.
Qual è la probabilità che **almeno una** delle 3 lettere sia inserita nella busta corrispondente?

1. Descrivi a parole quanto richiesto nell'esercizio:
   $E =$almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
2. Suddividi l'evento:
   (a) $E_1 =$la lettera 1 è nella busta 1
   (b) $E_2 =$la lettera 2 è nella busta 2
   (c) $E_3 =$la lettera 3 è nella busta 3
   (d) Quindi, l'evento $E =$almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente diventa:
   $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
   (e) Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$?
   Infatti qui si calcola la probabilità che almeno uno si verifichi.

Dunque applico la formula di probabilità totale per 3 eventi:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = & [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ & - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\ & + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

- $P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_1)$:
  - 123
  - 132
  - $\cancel{213}$
  - $\cancel{231}$
  - $\cancel{312}$
  - $\cancel{321}$

  2 casi favorevoli.
- $P(E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_2)$: uguale a $P(E_1)$
- $P(E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_3)$: uguale a $P(E_1)$
- $P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_1 \cap E_2)$, ovvero che la lettera 1 sia in prima posizione e allo stesso tempo 2 sia alla seconda posizione:
  - 123
  - $\cancel{132}$
  - $\cancel{213}$
  - $\cancel{231}$
  - $\cancel{312}$
  - $\cancel{321}$

  1 caso favorevole.
- $P(E_1 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$
- $P(E_2 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \text{uguale a } P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{1}{6}$
  Casi favorevoli che accada $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, ovvero che allora stesso tempo la lettera 1 sia in prima posizione, la 2 in seconda posizione e la 3 in terza posizione:
  - 123
  - $\cancel{132}$
  - $\cancel{213}$
  - $\cancel{231}$
  - $\cancel{312}$
  - $\cancel{321}$

  1 caso favorevole.

Pertanto la formula:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = {} & [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + \\ & - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] \\ & + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

Sostituendo con i valori trovati, diventa:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = &\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] + \\ &- \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right] \\ &+ \left[\frac{1}{6}\right] = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

Oppure posso utilizzare la negazione $P(E) = 1 - P(\overline{E})$:

- E =almeno una delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente
- $\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

Usando la negazione: $\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$ =la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$ =la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$ =la lettera 3 non è nella busta 3

e quindi se voglio che accadano tutti gli eventi insieme allora sarebbe intersezione e non unione (probabilità congiunta):
$\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente $\implies \overline{E} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$
quindi uso la formula della probabilità congiunta per 3 eventi:

$$\begin{aligned} P(\overline{E}) &= P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = \\ &= P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $P(\overline{E_1}) = \frac{\text{numero casi favoreli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
  Uso tutti gli elementi, ordine conta, ripetizioni no $\implies$ permutazioni semplici $n!$
  Quindi, casi possibili $3! = 6$, ovvero 6 possibili modi di ordinare gli elementi:
  - 123
  - 132
  - 213
  - 231
  - 312
  - 321

  1. casi favorevoli che accada $P(\overline{E})$, ovvero tutte le combinazioni in cui 1 non è nella prima posizione:
     - ~~123~~
     - ~~132~~
     - 213
     - 231
     - 312
     - 321

     Ci sono 4 combinazioni favorevoli

- $P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1}) = \frac{\overline{E_2} \cap \overline{E_1}}{P(\overline{E_1})} = \frac{?}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$
  tutte e due le buste non vanno nelle buste corrispondenti:
  $P(\overline{E_2} \cap \overline{E_1}) = \frac{\text{numero casi favoreli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{3}{3!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

  casi favorevoli che accada $P(\overline{E})$, ovvero tutte le combinazioni in cui $1, 2$ non sono nella corrispettiva posizione:

- $\cancel{123}$
- $\cancel{132}$
- 213
- 231
- 312
- $\cancel{321}$

Ci sono 3 combinazioni favorevoli

- $P(\overline{E_3} \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})} = \frac{?}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$
tutte e tre le buste non vanno nelle buste corrispondenti:
$P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{\text{numero casi favoreli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{?}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
casi favorevoli che accada $P(\overline{E_3} \cap \overline{E_1} \cap \overline{E_2})$, ovvero tutte le combinazioni in cui $1, 2, 3$ non sono nella corrispettiva posizione:
  - $\cancel{123}$
  - $\cancel{132}$
  - $\cancel{213}$
  - 231
  - 312
  - $\cancel{321}$

  Ci sono 2 combinazioni favorevoli

Pertanto:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

Oppure un modo più veloce sempre con la negazione $P(E) = 1 - P(\overline{E})$:
$\overline{E}$ =nessuna delle tre lettere è inserita nella busta corrispondente

- $\overline{E_1}$ =la lettera 1 non è nella busta 1
- $\overline{E_2}$ =la lettera 2 non è nella busta 2
- $\overline{E_3}$ =la lettera 3 non è nella busta 3

Voglio calcolare $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})$ e poi fare $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, quindi:

1. Elenco tutti i possibili modi di ordinare le buste:
   - 123
   - 132
   - 213
   - 231
   - 312
   - 321
2. Tengo fissato un ordine (lettera 1 - busta 1 - prima posizione; lettera 2 - busta 2 - seconda posizione; lettera 3 - busta 3 - terza posizione)
3. Elimino i casi in cui 1 è nella prima posizione $\wedge$ 2 è nella seconda posizione $\wedge$ 3 è nella terza posizione:
   - $\cancel{123}$ - elimino perchè 1 è nella prima posizione, 2 nella seconda, 3 nella terza
   - $\cancel{132}$ - elimino perchè 1 è nella prima posizione
   - $\cancel{213}$ - elimino perchè 3 è nella terza posizione

- 231
- 312
- $\cancel{321}$ - elimino perchè 2 è nella seconda posizione

Mi rimangono 2 casi favorevoli.

4. Pertanto, $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
5. Alla fine:
$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{Risposta corretta}$$

5 Probabilità Condizionata e Indipendenza

5.1 Probabilità Condizionata

Teorema

Si definisce probabilità condizionata la **probabilità che si verifichi un evento** E **sapendo che si è già verificato l'evento** B: "probabilità di E dato B."

$$P(E \mid B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

Inoltre, si ricavano le seguenti formule:

$$P(E \cap B) = P(E \mid B) \cdot P(B)$$

e:

$$P(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E \mid B)}$$

Prima osservazione:

$$\begin{aligned} P(E \cup A \mid B) &= \frac{P((E \cup A) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((E \cap B) \cup (A \cap B))}{P(B)} \\ &= \text{per teorema delle probabilità totali}^1 \\ \\ &= \frac{P(E \cap B) + P(A \cap B) - P(E \cap B \cap A)}{P(B)} \end{aligned}$$

Seconda osservazione:

$$P(E \cap A \mid B) = \frac{P(E \cap A \cap B)}{P(B)}$$

Terza osservazione:

$$P(\overline{E} \mid B) = 1 - P(E \mid B)$$
$$P(E \mid B) = 1 - P(\overline{E} \mid B)$$

[1] $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Osservazione:

$$
\begin{aligned}
P(E \mid \overline{B}) = \frac{P(E \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} &= \\
&\text{per l'assioma 3} \\
&= \frac{P(E \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \\
&\text{sapendo che } P(E \cap \overline{B}) = P(E \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B}) \text{ e che,} \\
&\text{le due probabilità sono non nulle } P(E), P(\overline{B}) \neq 0, \\
&\text{allora posso usare } P(E \cap \overline{B}) = P(\overline{B} \mid E) \cdot P(E) \\
&\text{poichè il risultato di } P(E \cap \overline{B}) \text{ rimane invariato. Quindi:} \\
&= \frac{P(\overline{B} \mid E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} = \\
&= \frac{P(\overline{B} \mid E) \cdot P(E)}{1 - P(B)} = \\
&\text{per l'assioma 3} \\
&= \frac{(1 - P(B \mid E)) \cdot P(E)}{1 - P(B)} =
\end{aligned}
$$

5.2 Probabilità Congiunta / Composta

La probabilità congiunta è la probabilità che due o più eventi si verifichino insieme (accadano entrambi), ossia che si verifichi l'intersezione degli eventi.

Teorema : Legge delle probabilità composte per 2 eventi

Si definisce probabilità congiunta la **probabilità che si verifichino entrambi gli eventi**:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) \text{ con } P(A_1) \neq 0$$

Oppure:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2) \text{ con } P(A_2) \neq 0$$

Se entrambe sono non nulle, $P(A_1) \wedge P(A_2) \neq 0$, allora posso usare una delle due formule, il risultato rimane invariato:
Posso usare questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

Oppure questa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2)$$

Prima osservazione: $P(A_1) \neq 0$

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) \\
&= \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot P(A_1) \\
&= P(A_2 \cap A_1) \text{ giusto, intersezione è simmetrica, } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)
\end{aligned}
$$

Seconda osservazione: $P(A_2) \neq 0$

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1 \mid A_2) \cdot P(A_2)$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \cdot P(A_2)$$

$$= P(A_1 \cap A_2) \text{ giusto, intersezione è simmetrica, } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1)$$

Teorema : Legge delle probabilità composte per k eventi

Generalizzato a k eventi, questa formula vale solo se gli eventi su cui condizioniamo [a] sono maggiori di zero $P(X) > 0$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \prod_{i=1}^{k} P\Big(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\Big)$$

Ovvero:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \\ \cdot P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot \cdots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

[a] eventi su cui condizioniamo sono quelli in rosso, dopo la sbarra: $P(A_1 \mid X)$

Esercizio

Un cliente di un'azienda acquista 3 pc da un lotto di 50 pc di cui 4 sono difettosi. Qual è la probabilità che tutti i 3 pc acquistati siano difettosi?
Ricordo che: intersezione$= \cap = \wedge = AND$

1. Descrivi a parole quanto richiesto in un evento:
   E=tutti i pc acquistati sono difettosi
2. Suddividi l'evento:
   (a) E_1= primo pc difettoso
   (b) E_2= secondo pc difettoso
   (c) E_3= terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento E=tutti i pc acquistati sono difettosi diventa:
   $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Infatti qui si calcola la probabilità che si verifichino tutti gli eventi insieme

Dunque applico formula della probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot (E_3 \mid E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{50}$$

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{49}$$

$$P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{4}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{2}{48} = 0.0002 = 0.02\%$$

Esercizio

Se invece fosse stato: Qual è la probabilità che **almeno uno dei pc fosse difettoso?**
Non avrei utilizzato probabilità congiunta ma teorema delle probabilità totali (unione).
Ricordo che: l'unione $= \cup = \vee = OR$

1. Descrivo a parole quanto richiesto in un evento:
   $E =$almeno un pc acquistato è difettoso
2. Suddividi l'evento:
   (a) $E_1 =$ primo pc difettoso
   (b) $E_2 =$ secondo pc difettoso
   (c) $E_3 =$ terzo pc difettoso
3. Quindi, l'evento $E =$almeno un pc acquistato è difettoso, diventa:
   $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$?

Dunque, ho due approcci:

- **Uso formula delle probabilità totali a $k = 3$ eventi:**

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = {} & [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)]+ \\ & - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)]+ \\ & + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

  quindi:

  - $P(E_1) =?$
  - $P(E_2) =?$
  - $P(E_3) =?$
  - $P(E_1 \cap E_2) =?$
  - $P(E_1 \cap E_3) =?$
  - $P(E_2 \cap E_3) =?$
  - $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) =?$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = {} & [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)]+ \\ & - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)]+ \\ & + [P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)] = \end{aligned}$$

  Se avessi tutti i dati, sarebbe facile, ma dato che non li ho è meglio il secondo approccio.

- **Uso negazione dell'evento:**
  La negazione di "almeno uno dei pc è difettoso" è "nessuno dei pc è difettoso". Quindi posso usare la sequente formula:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E})$$

  1. Descrivi a parole l'evento contrario:
     $\overline{E}$ =nessuno dei pc è difettoso
  2. Suddividi l'evento:
     (a) E_1 = primo pc funzionante
     (b) E_2 = secondo pc funzionante
     (c) E_3 = terzo pc funzionante

3. Quindi, l'evento $\overline{E}$ =nessuno dei pc è difettoso diventa:
   $\overline{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
4. Qual è la probabilità che si verifichi $\overline{E} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Applico probabilità congiunta/composta:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot (E_3 \mid E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{46}{50}$$

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{45}{49}$$

$$P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{44}{48}$$

Dunque:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0.774$$

Quindi:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0.774 = 0.226 = 22.6\%$$

Pertanto, la probabilità che almeno uno dei pc sia difettoso è $P(E) = 0.226$

5.3 Eventi Indipendenti & Eventi Dipendenti

Teorema : Probabilità dell'intersezione di 2 eventi indipendenti

Siano E_1, E_2 due eventi indipendenti.
La probabilità della loro intersezione è uguale al prodotto delle singole probabilità:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

La probabilità che si verifichi uno non modifica la probabilità dell'altro.

Teorema : Indipendenza debole di k eventi

Siano k eventi. $E_1, E_2, ..., E_k$ sono indipendenti due a due se, presa l'intersezione di tutti gli eventi due a due, sono tutti indipendenti:

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j) \qquad \forall i < j$$

Ovvero:
Considero E_1, E_2, E_3. Essi sono indipendenti due a due se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$

Teorema : Indipendenza forte di k eventi

Siano k eventi. $E_1, E_2, ..., E_k$ sono reciprocamente indipendenti se, presa l'intersezione di tutti gli eventi due a k, sono tutti indipendenti:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_i)$$

Ovvero:
Considero E_1, E_2, E_3. Essi sono reciprocamente indipendenti se valgono tutte le uguaglianze:

- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
- $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$
- $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$
- $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$

5.3.1 Come capire se due eventi sono dipendenti o indipendenti

Basta verificare questa uguaglianza:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

1. Calcolo la probabilità a sinistra dell'uguale: $\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{questa}} = P(E_1) \cdot P(E_2)$

   Secondo la formula classica:

   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = x$$

2. Calcolo la probabilità a destra dell'uguale: $P(A \cap B) = \underbrace{P(E_1) \cdot P(E_2)}_{\text{questa}}$

   $$P(E_1) \cdot P(E_2) = y$$

3. Se:
   - $x = y \implies$ gli eventi E_1, E_2 sono indipendenti
   - $x \neq y \implies$ gli eventi E_1, E_2 sono dipendenti

5.3.2 Non confondere eventi indipendenti con eventi incompatibili

Ricorda che:

- **Eventi incompatibili:** eventi che non possono verificarsi contemporaneamente $E \cap F = \emptyset$[a] e ciò vuol dire che $P(E \cap F) = 0$.

  Lancio un dado, qual è probabilità che esca 1 e 6 allo stesso tempo?
  - E =esce 1
  - F =esce 6

  È facile capire che è impossibile che il dado mostri due facce allo stesso tempo, quindi $E \cap F = \emptyset$.
  Inoltre, $P(E \cap F) = 0$ perchè $E \cap F = \emptyset$ e quindi $P(E \cap F) = P(\emptyset) = 0$

- **Eventi indipendenti:** eventi che possono verificarsi insieme ma la probabilità di uno non cambia la probabilità dell'altro.

Lancio un dado e una moneta, qual è probabilità che esca 1 e testa allo stesso tempo?

– E =esce 1

– F =esce testa

È facile capire che il verificarsi di E non influenza il verificarsi di F, quindi $E \cap F \neq \emptyset$.

[a] $\emptyset$: evento impossibile

5.4 Fattorizzazione di un evento

Formula probabilità condizionata:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

posso modificarla algebricamente e ottenere:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Osservazione:

Siano A, B due eventi, vale sempre:

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) \implies A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

B e $\overline{B}$ sono incompatibili, non possono capitare insieme:

- B = ho passato Statistica
- $\overline{B}$ = non ho passato Statistica

è ovvio che non possono accadere insieme, l'hai passata oppure no.
Quindi, B e $\overline{B}$ sono incompatibili:

$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$

Pertanto, se B e $\overline{B}$ sono incompatibili anche gli eventi $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ lo sono.

Teorema : Fattorizzazione di un evento

La fattorizzazione di un evento si scrive come:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Quindi:

$$P(A) = \text{per l'osservazione fatta} = P\left((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) =$$

$$(P(A \cap B)) \cup (P(A \cap \overline{B})) = \text{formula fattorizzazione evento} = (P(A \mid B) \cdot P(B)) \cup (P(A \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B})) =$$

$$= {}^{2}\text{per il 4º assioma} = (P(A \mid B) \cdot P(B)) + (P(A \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B}))$$

[2] dato che gli eventi $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ sono incompatibili ricordando il 4º assioma: **Probabilità dell'unione di eventi incompatibili:** la probabilità dell'unione di eventi incompatibili è la somma delle loro probabilità

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Esercizio

Siano due eventi:

- M =avere una certa malattia
- T =il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$
  Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T \mid M) = 0.9$
  Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 0.98$
  Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo? $P(T) =?$
Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$$

Dato che $M, \overline{M}$ sono incompatibili, anche $T \cap M$ e $T \cap \overline{M}$ lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned}
P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})) \\
&= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \overline{M})) \\
&= \text{per l'assioma 4} \\
&= P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\
&= \text{per la formula di fattorizzazione} \\
&= P(T \mid M) \cdot P(M) + P(T \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) \\
&= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\
&= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta}
\end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T \mid \overline{M}) =?$
  Ricordo che $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, di conseguenza:
  $$P(T \mid \overline{M}) = 1 - P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$
- $P(\overline{M}) =?$
  Ricordo che $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$, di conseguenza:
  $$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

5.5 Teorema della Probabilità Assoluta

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\ i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di Ω

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

  Nell'esempio di un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

  - E_1 =esce 1
  - E_2 =esce 2
  - E_3 =esce 3
  - E_4 =esce 4
  - E_5 =esce 5
  - E_6 =esce 6

$$\bigcup_i E_i = \Omega \implies E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6 = \Omega \implies 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 = \Omega$$

Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per 2 eventi

Questa è valida solo quando ho 2 eventi nello spazio campionario.
Siano E_1, E_2 due eventi:

- con probabilità non nulle $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di Ω

La formula della probabilità assoluta se voglio calcolare $P(E_1)$:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(E_1 \mid E_2) \cdot P(E_2) + P(E_1 \mid \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \\ &\quad \text{ma } E_1, E_2 \text{ incompatibili, quindi } P(E_1 \mid E_2) = 0 \\ &= P(E_1 \mid \overline{E_2}) \cdot P(\overline{E_2}) = \end{aligned}$$

oppure se voglio calcolare $P(E_2)$:

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \\ &\quad \text{ma } E_2, E_1 \text{ incompatibili, quindi } P(E_2 \mid E_1) = 0 \\ &= P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \end{aligned}$$

Teorema : Teorema della Probabilità Assoluta per k eventi

Siano $E_1, \cdots, E_k$ eventi:

- con probabilità non nulle
- incompatibili
- partizioni di Ω

Sia E un qualsiasi tra gli k eventi, allora la sua probabilità è uguale a:

$$P(E) = \sum_{i}^{k} P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$$

Ovvero:

$$P(E) = P(E \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E \mid E_2) \cdot P(E_2) + \cdots + P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)$$

Esercizio

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso? $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:
   Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?
   $E =$il microchip è difettoso
2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:
   - $E_1 =$il microchip proviene dal fornitore 1
   - $E_2 =$il microchip proviene dal fornitore 2
   - $E_3 =$il microchip proviene dal fornitore 3

Ripondo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No
  Perchè:
  - $P(E_1) = 0.20$
  - $P(E_2) = 0.35$
  - $P(E_3) = 0.45$
- Gli eventi sono incompatibili? Si
  Perchè è impossibile che il microchip pescato provenda da due fornitori diversi
- L'unione degli eventi E_1, E_2, E_3 è uguale a Ω? Sì

Quindi uso la formula della probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) = {} & P(E \mid E_1) \cdot P(E_1) + \\ & + P(E \mid E_2) \cdot P(E_2) \\ & + P(E \mid E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E \mid E_1) = 0.10$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1

- $P(E \mid E_2) = 0.05$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E \mid E_3) = 0.02$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

5.6 Formula di Bayes

Questo teorema vale se e solo se:

- Nessuno degli eventi è l'evento impossibile

$$E_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

- Tutti gli eventi sono due a due incompatibili

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\, i \neq j$$

- L'unione degli eventi corrisponde allo spazio campionario ("l'unione contiene tutti gli esiti possibili"), ovvero gli eventi formano una partizione di Ω

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

Teorema : Teorema di Bayes a 2 eventi

Siano E_1, E_2 due eventi:

- con probabilità non nulle $P(E_1), P(E_2) \neq 0$
- incompatibili
- partizioni di Ω

La probabilità condizionata di E_1 rispetto a E_2 è uguale a:

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della probabilità

assoluta $P(E_2) = P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1})$ avrò che:

$$= \frac{P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1})} =$$

Dove:

- $P(E_1)$ è la probabilità a priori dell'evento E_1 (dato che ho già)
- $P(E_1 \mid E_2)$ è la probabilità a posteriori dell'evento E_1 (che calcolo con Bayes)

Quello che fa la formula di Bayes è:
aggiornare la probabilità dell'evento E_1 (probabilità a priori) con informazioni contenute nell'evento E_2 (ottenendo così una probabilità a posteriori).

Teorema : Teorema di Bayes a k eventi

Siano $E_1, \cdots, E_k$ eventi:

- con probabilità non nulle

- incompatibili
- partizioni di Ω

Dato un qualsiasi evento E tra i k eventi, allora la probabilità condizionata di E_k dato E

$$P(E_k \mid E) = \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$

al denominatore sostituisco, per il teorema della probabilità assoluta $P(E) = \sum_{i}^{k} P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$ avrò che:

$$= \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)} =$$

Osservazione su formula di Bayes:

Prima di calcolare correttamente la formula di Bayes, è necessario aver già calcolato la probabilità assoluta (che nella formula di Bayes è al denominatore).

1. Scrivi formula di Bayes:
$$P(E_k \mid E) = \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$
2. Calcola separatamente il denominatore della formula nello step 1, $P(E)$, con la formula della probabilità assoluta:
$$P(E) = \sum_{i}^{k} P(E \mid E_i) \cdot P(E_i) = valore$$
3. Inserisci il valore ottenuto dallo step 2 nel denominatore della formula di Bayes nello step 1:
$$P(E_k \mid E) = \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{P(E)} =$$
$$= \frac{P(E \mid E_k) \cdot P(E_k)}{valore} =$$

Esercizio 1

Siano due eventi:

- M =avere una certa malattia
- T =il risultato del test è positivo

Siano i seguenti dati

- $P(M) = 0.01$
  Probabilità di avere una certa malattia
- $P(T \mid M) = 0.9$
  Probabilità che il test sia positivo quando ho già una certa malattia
- $P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 0.98$
  Probabilità che il test sia negativo quando so di non avere una certa malattia

Qual è la probabilità che il test sia positivo? $P(T) =?$
Ricordo dall'osservazione che:

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$$

Dato che $M, \overline{M}$ sono incompatibili, anche $T \cap M$ e $T \cap \overline{M}$ lo sono. Quindi:

$$\begin{aligned}
P(T) &= P((T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})) \\
&= (P(T \cap M) \cup P(T \cap \overline{M})) \\
&= \text{per l'assioma 4} \\
&= P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\
&= \text{per la formula di fattorizzazione} \\
&= P(T \mid M) \cdot P(M) + P(T \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) \\
&= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 \\
&= 0.009 + 0.0198 = 0.0288 \quad \text{Risposta corretta}
\end{aligned}$$

Mi manca trovare:

- $P(T \mid \overline{M}) = ?$
  Ricordo che $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, di conseguenza:
  $$P(T \mid \overline{M}) = 1 - P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 1 - 0.98 = 0.02$$
- $P(\overline{M}) = ?$
  Ricordo che $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$, di conseguenza:
  $$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

Adesso mi chiedo:
Qual è la probabilità che un individuo sia affetto dalla malattia sapendo che il test diagnostico ha dato esito positivo? $P(M \mid T) = ?$
Uso Bayes perchè conosco i valori di $P(T \mid M), P(M)$ e posso calcolare $P(T)$ con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.

1. Scrivo la formula di Bayes:
   $$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M) \cdot P(M)}{P(T)}$$
2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 2 eventi (M,T):
   $$\begin{aligned}
   P(T) &= P(T \mid M) \cdot P(M) + P(T \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M}) = \\
   &T, M \text{ non sono incompatibili, quindi} P(T \mid M) \neq 0 \\
   &= 0.9 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 = 0.0288
   \end{aligned}$$
3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:
   $$\begin{aligned}
   P(M \mid T) &= \frac{P(T \mid M) \cdot P(M)}{P(T)} = \\
   &= \frac{P(T \mid M) \cdot P(M)}{0.0288} = \\
   &= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.0288} = 0.3125 \quad \text{Risposta corretta}
   \end{aligned}$$

Esercizio 2

In data 29/10/2025 un'azienda acquista microchip da 3 fornitori.

- I microchip del fornitore 1 hanno il 10% di probabilità di essere difettosi

- I microchip del fornitore 2 hanno il 5% di probabilità di essere difettosi
- I microchip del fornitore 3 hanno il 2% di probabilità di essere difettosi

Supponendo che

- il 20% della fornitura proviene dal fornitore 1
- il 35% della fornitura proviene dal fornitore 2
- il 45% della fornitura proviene dal fornitore 3

Se un microchip viene selezionato a caso tra quelli acquistati in tale data qual è la probabilità che sia difettoso? $P(E) = ?$

1. Definisco cosa mi sta chiedendo:
   Qual è la probabilità che un microchip pescato a caso tra quelli acquistati sia difettoso?
   $E =$il microchip è difettoso
2. Dato che i microchip provengono da fornitori diversi, suddivido gli eventi:
   - $E_1 =$il microchip proviene dal fornitore 1
   - $E_2 =$il microchip proviene dal fornitore 2
   - $E_3 =$il microchip proviene dal fornitore 3

Ripondo alle seguenti domande:

- Gli eventi sono eventi impossibili? No
  Perchè:
  - $P(E_1) = 0.20$
  - $P(E_2) = 0.35$
  - $P(E_3) = 0.45$
- Gli eventi sono incompatibili? Si
  Perchè è impossibile che il microchip pescato provenda da due fornitori diversi
- L'unione degli eventi E_1, E_2, E_3 è uguale a Ω? Sì

Quindi uso la formula della probabilità assoluta $P(E) = \sum_i^k P(E \mid E_i) \cdot P(E_i)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \mid E_1) \cdot P(E_1) + \\ &+ P(E \mid E_2) \cdot P(E_2) \\ &+ P(E \mid E_3) \cdot P(E_3) = \end{aligned}$$

Dove:

- $P(E \mid E_1) = 0.10$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 1
- $P(E \mid E_2) = 0.05$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 2
- $P(E \mid E_3) = 0.02$
  Probabilità che il microchip sia difettoso dato che proviene dal fornitore 3

Quindi:

$$P(E) = (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \quad \text{Risposta corretta}$$

Adesso mi chiedo:
Qual è la probabilità che un microchip scelto a caso sia stato fornito dal produttore 2 sapendo che esso è difettoso? $P(E_2 \mid E) = ?$ **Uso Bayes perchè conosco i valori di $P(E \mid E_2), P(E_2)$ e posso calcolare $P(E)$ con la probabilità assoluta; se non avessi queste condizioni, non potrei utilizzare la formula di Bayes.**

1. Scrivo la formula di Bayes:

$$P(E_2 \mid E) = \frac{P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)}$$

2. Calcolo separatamente il denominatore con la formula della probabilità assoluta per 3 eventi (E_1, E_2, E_3):

$$\begin{aligned} P(E) = \sum_{i=1}^{3} P(E \mid E_i) \cdot P(E_i) = \\ &= (P(E \mid E_1) \cdot P(E_1)) + (P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)) + (P(E \mid E_3) \cdot P(E_3)) = \\ &= (0.10 \cdot 0.20) + (0.05 \cdot 0.35) + (0.02 \cdot 0.45) = 0.0465 \end{aligned}$$

3. Inserisco il valore trovato nello step 2 al denominatore nella formula di Bayes nello step 1:

$$\begin{aligned} P(E_2 \mid E) &= \frac{P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)} = \\ &= \frac{P(E \mid E_2) \cdot P(E_2)}{0.0465} = \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.35}{0.0465} = 0.3763 \quad \text{Risposta corretta} \end{aligned}$$

6 Variabili Aleatorie

6.1 Funzione di massa

La funzione di massa indica la probabilità che ha ogni variabile aleatoria discreta che fa parte del supporto $\mathscr{X}$ studiato.

Teorema : Funzione di massa per var discrete

La funzione di massa di probabilità di una variabile aleatoria discreta X è definita come:

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \forall x \in \mathscr{X}$$

Osservazione:

La funzione assegna una probabilità a ogni variabile aleatoria discreta di $\mathscr{X}$ t.c. la loro somma è uguale a uno:

$$\sum_{x \in X} P(X = x) = 1$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**
   Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 2 possibili esiti ad ogni lancio.
   $$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$
2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**
   Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.
   $$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT,\ CTC,\ TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC,\ TCT,\ CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$
3. **Supporto della variabile aleatoria:**
   Il supporto di X sarà:
   $$\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$
4. **Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:**
   - $P(X = 0) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$
     $$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$
   - $P(X = 1) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$
     $$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$

- $P(X=2)=?$
Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa? $\omega = TTC, TCT, CTT$
$$P(X=2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$
- $P(X=3)=?$
Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$
$$P(X=2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$

5. **Controllo se ho correttamente calcolato le funzioni di massa:** per vedere se è corretto, la loro somma deve essere uguale a 1.
$$\sum_{x \in X} P(X=x) = 1$$
$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 1$$
$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8} = 1$$
$$1 \stackrel{\checkmark}{=} 1$$

6.2 Funzione di densità

La funzione di densità indica la probabilità che ha una variabile aleatoria continua di appartenere ad un certo intervallo (supporto $\mathscr{X}$).

Teorema : Funzione di densità per var continue

La funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X è definita come:
$$f_X(x) = P(X \in [x_1, x_2]) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$
La probabilità dell'appartenenza della variabile aleatoria in un certo intervallo si calcola con l'integrale definito.

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathscr{X} = (0,2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Scelgo ora un sottointervallo di $(0,2)$ e ne calcolo la funzione di densità:

$$
\begin{aligned}
P(0.25 \leq X \leq 0.75) &= \int_{0.25}^{0.75} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{0.25}^{0.75} \frac{1}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x\Big|_{0.25}^{0.75} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 0.75\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0.25\right) \\
&= 0.25 \\
&\text{la probabilità che la var } X \text{ ha di appartenere a } [0.25, 0.75] \\
&\text{è uguale a } 0.25
\end{aligned}
$$

Se io invece calcolo la funzione di densità nell'intervallo $(0, 2)$:

$$
\begin{aligned}
P(0 < X < 2) &= \int_{0}^{2} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) \\
&= 1 \\
&\text{corretto poichè è una proprietà della funzione di densità}
\end{aligned}
$$

6.3 Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione indica la probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale ad un certo valore x.

6.3.1 Funzione di ripartizione per variabile aleatoria discreta

Teorema : Funzione di ripartizione per var discrete

La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria discreta X è definita come:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1, u_i \leq x}^{x} P(X = u_i)$$

La probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale a x è uguale alla somma cumulative delle funzioni di massa di probabilità fino a x.

$$P(X \leq x) = P(X = u_1) + P(X = u_2) + \cdots + P(X = u_x)$$

Esercizio

Lancio tre volte una moneta con due facce: Croce (C) e Testa (T).

1. **Definisco spazio campionario:**
   Ovvero tutti i possibili esiti, che sono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ quindi 2 possibili esiti ad ogni lancio.
   $$\Omega = \{CCC, CTC, CTT, CCT, TTT, TTC, TCT, TCC\}$$
2. **Definisco la variabile aleatoria discreta:**
   Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste.
   $$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = CCC \\ 1 & \text{se } \omega = CCT,\ CTC,\ TCC \\ 2 & \text{se } \omega = TTC,\ TCT,\ CTT \\ 3 & \text{se } \omega = TTT \end{cases}$$
3. **Supporto della variabile aleatoria:**
   Il supporto di X sarà:
   $$\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$$
4. **Calcolo la funzione di massa per ogni variabile aleatoria del supporto:**
   - $P(X = 0) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Croce? $\omega = CCC$
     $$P(X = 0) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$
   - $P(X = 1) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una sola volta testa? $\omega = CCT, CTC, TCC$
     $$P(X = 1) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$
   - $P(X = 2) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca due volte testa? $\omega = TTC, TCT, CTT$
     $$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{8}$$
   - $P(X = 3) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca tre volte di seguito Testa? $\omega = TTT$
     $$P(X = 2) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{8}$$
5. **Calcolo la funzione di ripartizione per ogni valore x del supporto:**
   - $P(X \leq 0) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che non escano affatto Teste?
     $$P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$
   - $P(X \leq 1) =?$
     Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca una testa oppure zero teste?
     $$P(X \leq 1) = [P(X = 0) + P(X = 1)] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

- $P(X \leq 2) =?$
  Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca nessuna, una o due volte testa?

$$P(X \leq 2) = [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

- $P(X \leq 3) =?$
  Lanciano tre volte una moneta, qual è la probabilità che esca nessuna, una, due o tre volte di seguito Testa?

$$P(X \leq 3) = [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \frac{8}{8} = 1$$

Quindi:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

6.3.2 Funzione di ripartizione per variabile aleatoria continua

Teorema : Funzione di ripartizione per var continue

La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua X è definita come:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

La probabilità che la variabile aleatoria X sia minore e/o uguale a x è uguale all'integrale definito da - inf a x.

Esercizio

Sia X variabile aleatoria con supporto $\mathscr{X} = (0, 2)$ (intervallo) con funzione di densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolo la funzione di ripartizione per x:

1. $P(X \leq x) =?$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_{0}^{x} f_X(u)du \\ &= \int_{0}^{x} \frac{1}{2}du \\ &= \frac{1}{2}u\Big|_{0}^{x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

2. Adesso che ho $P(X \leq x) = \frac{x}{2}$ posso calcolarlo per qualsiasi valore di x che sta nell'intervallo (0,2):

- $P(X \leq 0.2) =?$
$$P(X \leq 0.2) = \frac{x}{2} = \frac{0.2}{2}$$
- $P(X \leq 0.5) =?$
$$P(X \leq 0.5) = \frac{x}{2} = \frac{0.5}{2}$$
- $P(X \leq 1) =?$
$$P(X \leq 1) = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$
- $P(X \leq 1.5) =?$
$$P(X \leq 1.5) = \frac{x}{2} = \frac{1.5}{2}$$
- $P(X \leq 2) =?$
$$P(X \leq 2) = \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Osservazione:

6.4 Valore atteso

6.4.1 Valore atteso di una variabile aleatoria discreta

6.4.2 Valore atteso di una variabile aleatoria continua

6.5 Varianza di una variabile aleatoria

6.6 Deviazione standard di una variabile aleatoria

6.7 Distribuzione di probabilità congiunta

6.7.1 Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleatorie discrete

6.7.2 Distribuzione di probabilità congiunta di variabili aleatorie continue

6.8 Funzioni di massa / densità di probabilità condizionate

6.8.1 Funzioni di massa di probabilità condizionate

6.8.2 Funzioni di densità di probabilità condizionate

6.9 Variabili aleatorie indipendenti

6.10 Variabili aleatorie identicamente distribuite & i.i.d

6.11 Famiglie Parametriche

7 Inferenza Statistica

7.1 Stima Puntuale

7.2 Stima Intervallare

7.3 Verifica delle Ipotesi