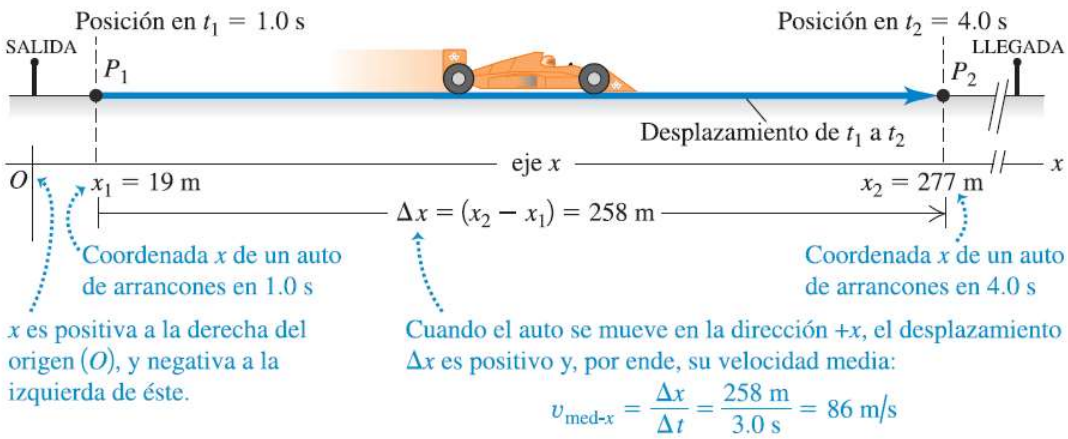
FISICA I **Curso 2021**

<u>Sears Zemansky – CAP 2 (Movimiento rectilíneo) - Cinemática</u>

Suponga que una piloto de autos conduce su vehículo por una pista recta (ver figura). Para estudiar su movimiento, necesitamos un **sistema de coordenadas**. Elegimos que el **eje x** vaya a lo largo de la trayectoria recta del auto, con el **origen O** en la línea de salida. También elegimos un punto en el auto, digamos su extremo delantero, y **representamos todo el vehículo con ese punto** y lo tratamos como una partícula.

2.1 Posiciones de un auto de arrancones en dos instantes durante su recorrido.



<u>Definiciones:</u>

<u>Vector desplazamiento:</u>

El desplazamiento de la partícula es un vector que apunta de P_1 a P_2.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

<u>Velocidad media:</u>

del auto durante este intervalo de tiempo

Es una cantidad vectorial, cuya componente x es el cambio en x dividido entre el intervalo de tiempo: (258 m) / (3.0 s) = 86 m/s.

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(velocidad media, movimiento rectilíneo)}$$

En el ejemplo del auto de arrancones teníamos $x_1 = 19$ m, $x_2 = 277$ m, $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 4.0$ s, así que la ecuación (2.2) da

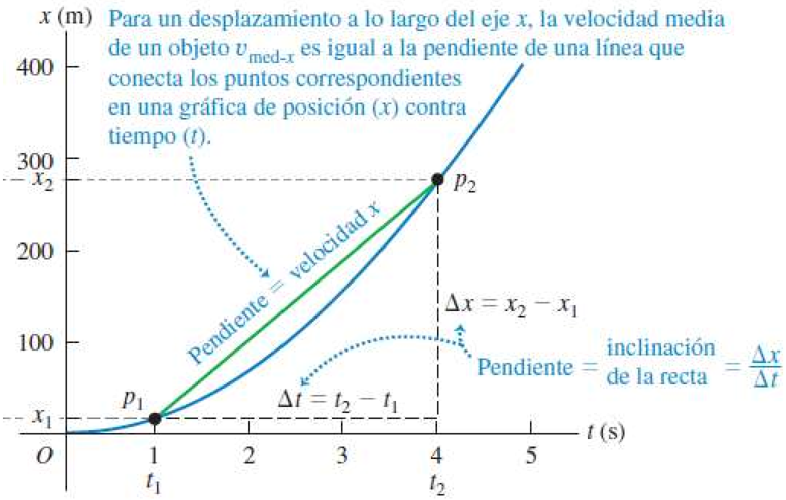
$$v_{\text{med-}x} = \frac{277\text{ m} - 19\text{ m}}{4.0\text{ s} - 1.0\text{ s}} = \frac{258\text{ m}}{3.0\text{ s}} = 86\text{ m/s}$$

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo elegido. Durante un lapso de 3.0 s antes del arranque, la velocidad media fue cero, porque el auto estaba en reposo en la línea de salida y tuvo un desplazamiento cero.

Hay algunas reglas sencillas para la velocidad media. **Siempre que x sea positiva y aumente o sea negativa y se vuelva menos negativa, la partícula se mueve en la dirección $+x$ y $v_{\text{med-}x}$ es positiva** (figura 2.1). **Siempre que x sea positiva y disminuya, o sea negativa y se vuelva más negativa, la partícula se mueve en la dirección $-x$ y $v_{\text{med-}x}$ es negativa**

- Fijamos un sistema de coordenadas para referenciar las posiciones.
- El movimiento rectilíneo será en un eje (eje x)
- Medimos los tiempos
- Cuerpos puntiformes (dimensiones pequeñas respecto de las distancias que se miden)
- Vm puede ser positiva o negativa (según delta x)

Gráfico de la posición en función del tiempo:



Definición:

Vector velocidad instantánea

Es la derivada (límite del cociente Vm para delta tiempo tendiente a cero) de la posición x (t).

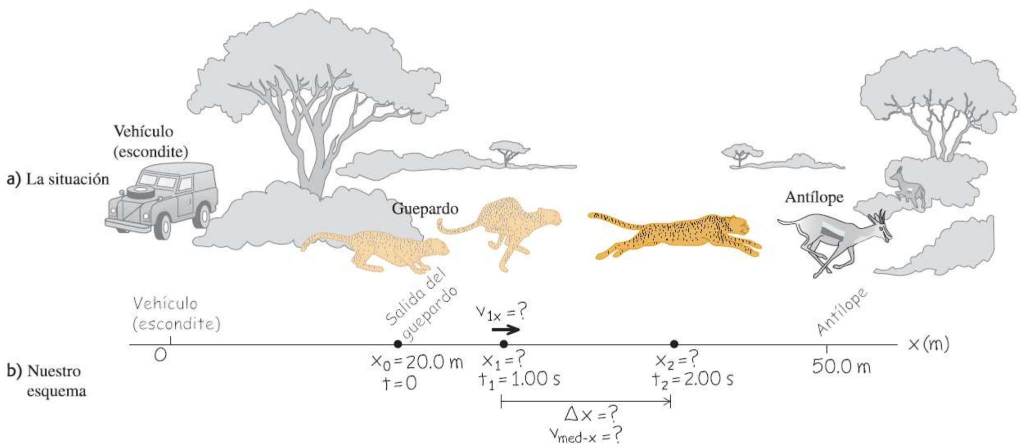
Como delta tiempo es siempre positivo, el signo de Vm o Vx es el signo de delta x (desplazamiento)

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{(velocidad instantánea, movimiento rectilíneo)}$$

Ejemplo 2.1 Velocidades media e instantánea

Un guepardo acecha 20 m al este del escondite de un observador (figura 2.6a). En el tiempo $t = 0$, el guepardo ataca a un antílope y empieza a correr en línea recta. Durante los primeros 2.0 s del ataque, la coordenada x del guepardo varía con el tiempo según la ecuación $x = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)t^2$. *a*) Obtenga el desplazamiento del guepardo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 2.0$ s. *b*) Calcule la velocidad media en dicho intervalo. *c*) Calcule la velocidad instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando $\Delta t = 0.1$ s, luego $\Delta t = 0.01$ s, luego $\Delta t = 0.001$ s. *d*) Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea en función del tiempo, y con ella calcule v_x en $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

2.6 Un guepardo agazapado en un arbusto ataca a un antílope. Los animales no están a la misma escala que el eje.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema requiere usar las definiciones de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea. El uso de las dos primeras implica álgebra; la última requiere cálculo para derivar.

PLANTEAR: La figura 2.6b muestra el movimiento del guepardo. Para analizar este problema, usamos la ecuación (2.1) del desplazamiento, la ecuación (2.2) de la velocidad media y la ecuación (2.3) de la velocidad instantánea.

EJECUTAR: *a*) En $t_1 = 1.0$ s, la posición x_1 del guepardo es

$$x_1 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(1.0\text{ s})^2 = 25\text{ m}$$

En $t_2 = 2.0$ s, su posición x_2 es

$$x_2 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 40\text{ m}$$

El desplazamiento en este intervalo es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40\text{ m} - 25\text{ m} = 15\text{ m}$$

b) La velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40\text{ m} - 25\text{ m}}{2.0\text{ s} - 1.0\text{ s}} = \frac{15\text{ m}}{1.0\text{ s}} = 15\text{ m/s}$$

c) Con $\Delta t = 0.1$ s, el intervalo es de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 1.1$ s. En t_2, la posición es

$$x_2 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(1.1\text{ s})^2 = 26.05\text{ m}$$

La velocidad media durante estos intervalos es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{26.05\text{ m} - 25\text{ m}}{1.1\text{ s} - 1.0\text{ s}} = 10.5\text{ m/s}$$

Siga este método para calcular las velocidades medias de los intervalos de 0.01 s y 0.001 s. Los resultados son 10.05 m/s y 10.005 m/s. Al disminuir Δt, la velocidad media se acerca a 10.0 m/s, por lo que concluimos que la velocidad instantánea en $t = 1.0$ s es de 10.0 m/s.

d) Al calcular la velocidad instantánea en función del tiempo, derive la expresión de x con respecto a t. La derivada de una constante es cero, y para cualquier n la derivada de t^n es nt^{n-1}, así que la derivada de t^2 es $2t$. Por lo tanto,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5.0\text{ m/s}^2)(2t) = (10\text{ m/s}^2)t$$

En $t = 1.0$ s, $v_x = 10$ m/s, como vimos en el inciso *c*). En $t = 2.0$ s, $v_x = 20$ m/s.

EVALUAR: Nuestros resultados muestran que el guepardo aumentó su rapidez de $t = 0$ (cuando estaba en reposo) a $t = 1.0$ s ($v_x = 10$ m/s) a $t = 2.0$ s ($v_x = 20$ m/s), lo cual es razonable: el guepardo recorrió sólo 5 m durante el intervalo $t = 0$ a $t = 1.0$ s; sin embargo, recorrió 15 m en el intervalo $t = 1.0$ s a $t = 2.0$ s.

Interpretación gráfica (VER Fig 2.7, pag 42)

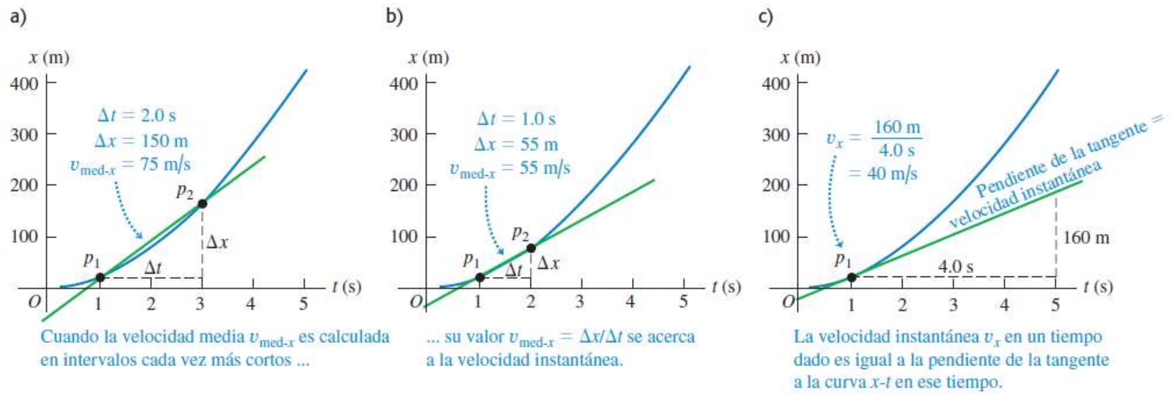
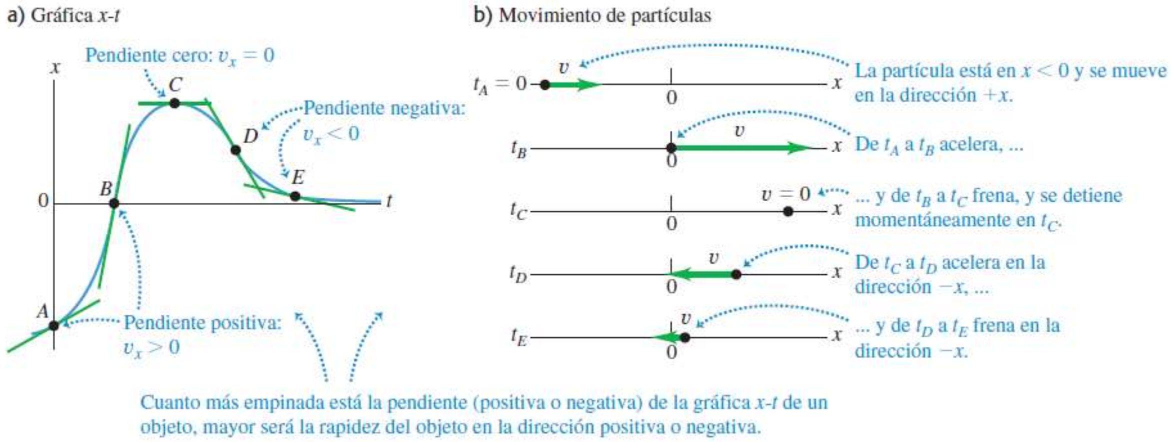


Diagrama de movimiento (VER Fig 2.8, pag 42)



Definiciones:

Vector aceleración media

Es el vector delta velocidad dividido por el intervalo de tiempo considerado.

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad \text{(aceleración media, movimiento rectilíneo)}$$

Vector aceleración instantánea

Es la derivada (límite del cociente Am para delta tiempo tendiente a cero) de la posición v (t).

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{(aceleración instantánea, movimiento rectilíneo)}$$

Unidades:

	x:	metros
	V:	m / seg
	a:	m / seg 2

Interpretación gráfica: (VER Fig 2.12, pag 46)

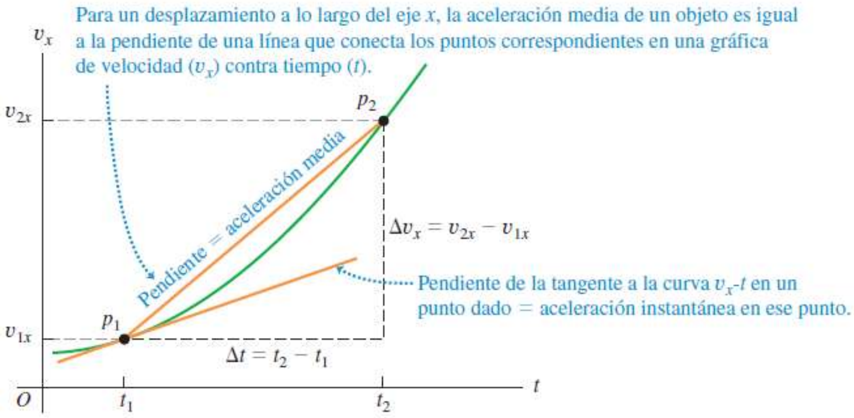
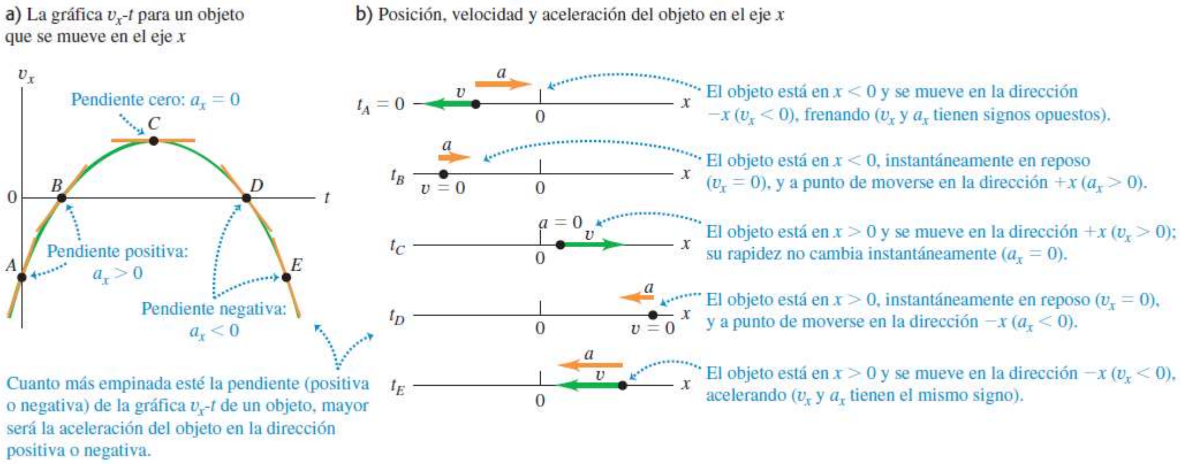
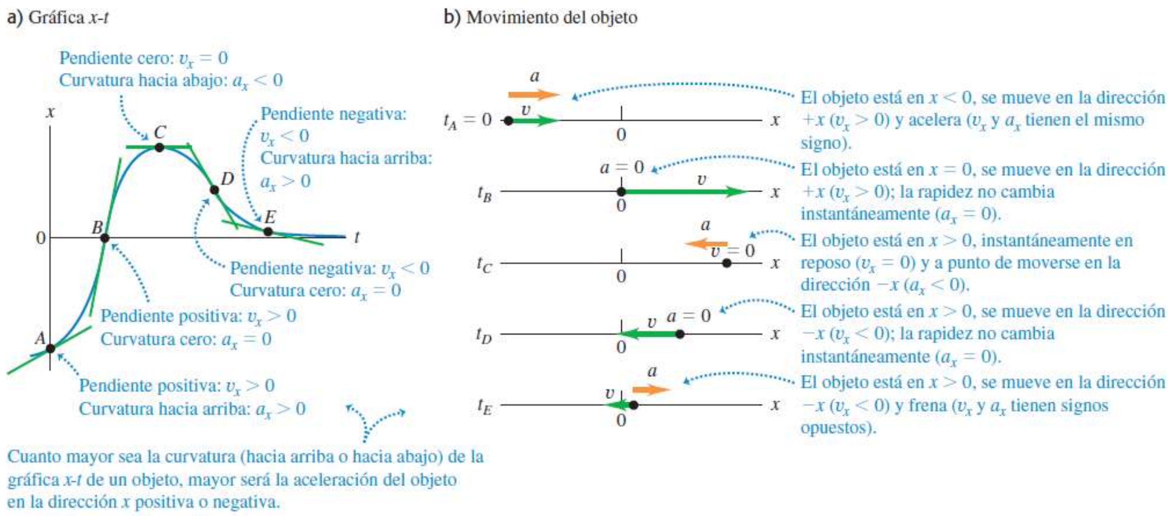


Diagrama de movimiento (VER Fig 2.13, pag 46)



En x(t) la velocidad es igual a la pendiente de la gráfica, y la aceleración está dada por su concavidad o curvatura.

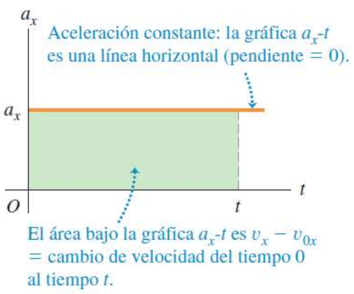


Caso particular:

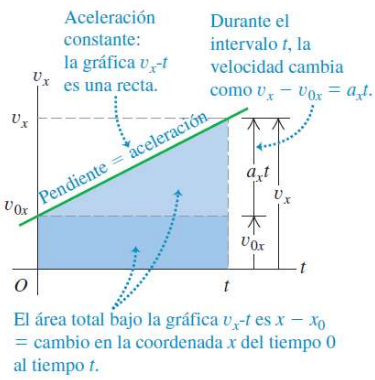
Aceleración constante

Si la aceleración es nula, será MRU (vector velocidad constante)

2.16 Gráfica aceleración-tiempo (a_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x.



2.17 Gráfica velocidad-tiempo (v_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x. La velocidad inicial v_{0x} también es positiva en este caso.



$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \qquad a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \qquad \text{o}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)}$$

A partir de la definición de velocidad media resulta:

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x - x_0}{t} \qquad v_{\text{med-}x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2}$$

$$v_{\text{med-}x} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t) = v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t \qquad v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(sólo con aceleración constante)}$$

Otra expresión:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \tfrac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

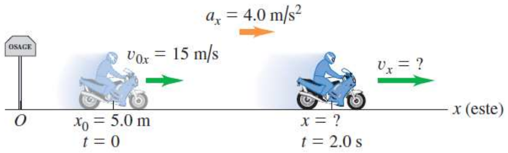
$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad \text{(sólo con aceleración constante)}$$

Ejemplo 2.4 Cálculos de aceleración constante

Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad (figura 2.20). Su aceleración constante es de 4.0 m/s^2. En $t = 0$, está a 5.0 m al este del letrero, moviéndose al este a 15 m/s. *a*) Calcule su posición y velocidad en $t = 2.0$ s. *b*) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?

2.20 Un motociclista que viaja con aceleración constante.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El enunciado del problema nos dice que la aceleración es constante, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante.

PLANTEAR: Tomamos el letrero como origen de coordenadas ($x = 0$) y decidimos que el eje $+x$ apunta al este (figura 2.20, que también es un diagrama de movimiento). En $t = 0$, la posición inicial es $x_0 = 5.0$ m y la velocidad inicial es $v_{0x} = 15$ m/s. La aceleración constante es $a_x = 4.0$ m/s^2. Las variables desconocidas en el inciso *a*) son los valores de la posición x y la velocidad v_x en el instante posterior $t = 2.0$ s; la incógnita en el inciso *b*) es el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s.

EJECUTAR: *a*) Podemos hallar la posición x en $t = 2.0$ s usando la ecuación (2.12) que da la posición x en función del tiempo t:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2 \\ &= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 \\ &= 43\text{ m} \end{aligned}$$

Podemos hallar la velocidad v_x en ese instante con la ecuación (2.8), que da la velocidad v_x en función del tiempo t:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_xt \\ &= 15\text{ m/s} + (4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = 23\text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Queremos encontrar el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s, pero no sabemos el momento en que el motociclista lleva tal velocidad. Por lo tanto, utilizamos la ecuación (2.13), que incluye x, v_x y a_x pero no incluye t:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejando x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \\ &= 5.0\text{ m} + \frac{(25\text{ m/s})^2 - (15\text{ m/s})^2}{2(4.0\text{ m/s}^2)} \\ &= 55\text{ m} \end{aligned}$$

Un método alterno aunque más largo para la mima respuesta sería usar la ecuación (2.8) para averiguar primero en qué instante $v_x = 25$ m/s:

$$v_x = v_{0x} + a_xt \qquad \text{así que}$$

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25\text{ m/s} - 15\text{ m/s}}{4.0\text{ m/s}^2} = 2.5\text{ s}$$

Dado el tiempo t, podemos calcular x usando la ecuación (2.12):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2 \\ &= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.5\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.5\text{ s})^2 \\ &= 55\text{ m} \end{aligned}$$

EVALUAR: ¿Son lógicos los resultados? Según lo que calculamos en el inciso *a*), el motociclista acelera de 15 m/s (unas 34 mi/h o 54 km/h) a 23 m/s (unas 51 mi/h o 83 km/h) en 2.0 s, mientras recorre una distancia de 38 m (unos 125 ft). Ésta es una aceleración considerable, pero una motocicleta de alto rendimiento bien puede alcanzarla.

Al comparar nuestros resultados del inciso *b*) con los del inciso *a*), notamos que el motociclista alcanza una velocidad $v_x = 25$ m/s en un instante posterior y después de recorrer una distancia mayor, que cuando el motociclista tenía $v_x = 23$ m/s. Esto suena lógico porque el motociclista tiene una aceleración positiva y, por ende, se incrementa su velocidad.

Ejemplo 2.5 Dos cuerpos con diferente aceleración

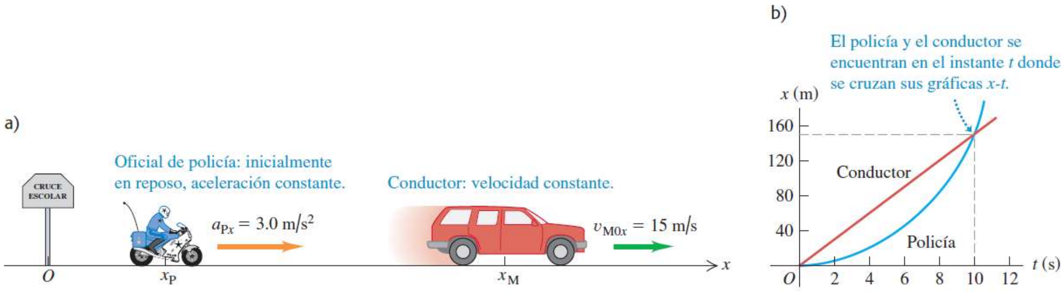
Un conductor que viaja a rapidez constante de 15 m/s (unas 34 mi/h) pasa por un cruce escolar, cuyo límite de velocidad es de 10 m/s (unas 22 mi/h). En ese preciso momento, un oficial de policía en su motocicleta, que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3.0 m/s^2 (figura 2.21a). *a*) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el oficial de policía alcance al infractor? *b*) ¿A qué rapidez va el policía en ese instante? *c*) ¿Qué distancia total habrá recorrido cada vehículo hasta ahí?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El oficial de policía y el conductor se mueven con aceleración constante (cero en el caso del conductor), así que podemos usar las fórmulas que ya dedujimos.

PLANTEAR: Tomamos como origen el cruce, así que $x_0 = 0$ para ambos, y tomamos como dirección positiva a la derecha. Sea x_P la posición del policía y x_M la del conductor en cualquier instante. Las velocidades iniciales son $v_{P0x} = 0$ para el policía y $v_{M0x} = 15$ m/s para el conductor; las respectivas aceleraciones constantes son $a_{Px} = 3.0$ m/s^2 y $a_{Mx} = 0$. Nuestra incógnita en el inciso *a*) es el tiempo tras el cual el policía alcanza al conductor, es decir, cuando los dos vehículos están en la misma posición. En el inciso *b*) nos interesa la rapidez v del policía (la magnitud de su velocidad) en el tiempo obtenido en el inciso *a*). En el inciso *c*) nos interesa la posición de cualesquiera de los vehículos en ese tiempo. Por lo tanto, usaremos la ecuación (2.12) (que relaciona posición y tiempo) en los incisos *a*) y *c*), y la ecuación (2.8) (que relaciona velocidad y tiempo) en el inciso *b*).

2.21 a) Movimiento con aceleración constante que alcanza a movimiento con velocidad constante. b) Gráfica de x contra t para cada vehículo.



EJECUTAR: *a*) Buscamos el valor del tiempo t cuando el conductor y el policía están en la misma posición. Aplicando la ecuación (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, a cada vehículo, tenemos:

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$

$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Puesto que $x_M = x_P$ en el tiempo t, igualamos las dos expresiones y despejamos t:

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15\ \text{m/s})}{3.0\ \text{m/s}^2} = 10\ \text{s}$$

Hay *dos* instantes en que los vehículos tienen la misma coordenada x. El primero, $t = 0$, es cuando el conductor pasa por el cruce donde está estacionada la motocicleta. El segundo, $t = 10$ s, es cuando el policía alcanza al conductor.

b) Queremos la magnitud de la velocidad del policía v_{Px} en el instante t obtenido en *a*). Su velocidad en cualquier momento está dada por la ecuación (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3.0\ \text{m/s}^2)t$$

Usando $t = 10$ s, hallamos $v_{Px} = 30$ m/s. Cuando el policía alcanza al conductor, va al doble de su rapidez.

c) En 10 s, la distancia recorrida por el conductor es

$$x_M = v_{M0x}t = (15\ \text{m/s})(10\ \text{s}) = 150\ \text{m}$$

y la distancia que el policía recorre es

$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3.0\ \text{m/s}^2)(10\ \text{s})^2 = 150\ \text{m}$$

Esto comprueba que cuando el policía alcanza al conductor, ambos han recorrido la misma distancia.

EVALUAR: La figura 2.21b muestra las gráficas de x contra t para ambos vehículos. Aquí vemos también que hay dos instantes en que la posición es la misma (donde se cruzan las gráficas). En ninguno de ellos los dos vehículos tienen la misma velocidad (es decir, las gráficas se cruzan con distinta pendiente). En $t = 0$, el policía está en reposo; en $t = 10$ s, la rapidez del policía es del doble que la del conductor.

Caída libre y tiro vertical

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra g. Por lo regular, usaremos el valor aproximado de g cerca de la superficie terrestre:

$$g = 9.8\ \text{m/s}^2 = 980\ \text{cm/s}^2$$

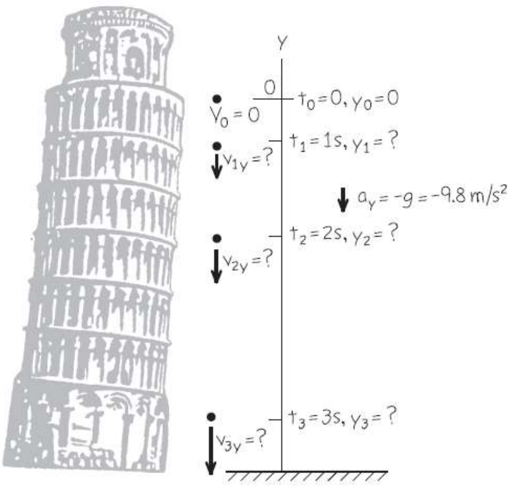
Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y su velocidad después de 1.0, 2.0 y 3.0 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: "Cae libremente" significa "tiene una aceleración constante debida a la gravedad", así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante en la determinación de nuestras incógnitas.

2.23 Una moneda en caída libre desde reposo.



PLANTEAR: El lado derecho de la figura 2.23 muestra nuestro diagrama de movimiento para la moneda. El movimiento es vertical, de manera que usamos un eje de coordenadas vertical y llamaremos a la coordenada y en vez de x. Sustituiremos todas las x de las ecuaciones para aceleración constante por y. Tomaremos el origen O como el punto de partida y la dirección hacia arriba como positiva. La coordenada inicial y_0 y la velocidad inicial v_{0y} son ambas cero. La aceleración es hacia abajo, en la dirección y negativa, así que $a_y = -g = -9.8\ m/s^2$. (Recuerde que por definición g *siempre* es positiva.) Por lo tanto, nuestras incógnitas son los valores de y y v_y en los tres instantes especificados. Para obtenerlos usamos las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo x por y.

EJECUTAR: En un instante t después de que se suelta la moneda, su posición y su velocidad son

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9\ m/s^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9.8\ m/s^2)t$$

Cuando $t = 1.0$ s, $y = (-4.9\ m/s^2)(1.0\ s)^2 = -4.9$ m y $v_y = (-9.8\ m/s^2)(1.0\ s) = -9.8$ m/s; después de 1 s, la moneda está 4.9 m debajo del origen (y es negativa) y tiene una velocidad hacia abajo (v_y es negativa) con magnitud de 9.8 m/s.

La posición y la velocidad a los 2.0 s y 3.0 s se obtienen de la misma forma. ¿Puede usted demostrar que $y = -19.6$ m y $v_y = -19.6$ m/s en $t = 2.0$ s, y que $y = -44.1$ m y $v_y = -29.4$ m/s en $t = 3.0$ s?

EVALUAR: Todos los valores que obtuvimos para v_y son negativos porque decidimos que el eje $+y$ apuntaría hacia arriba; pero bien podríamos haber decidido que apuntara hacia abajo. En tal caso, la aceleración habría sido $a_y = +g$ y habríamos obtenido valores positivos para v_y. No importa qué eje elija; sólo asegúrese de decirlo claramente en su solución y confirme que la aceleración tenga el signo correcto.

Ejemplo 2.7 Movimiento ascendente y descendente en caída libre

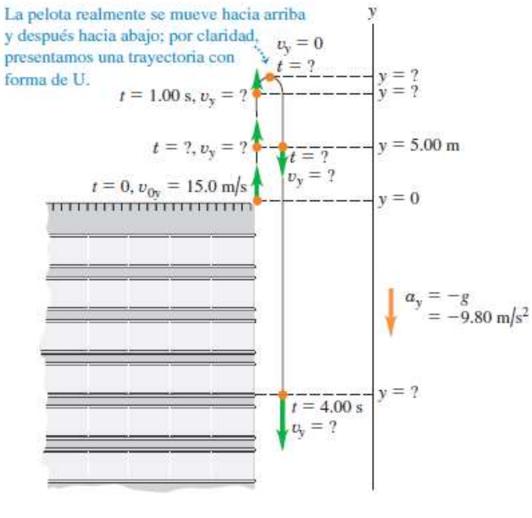
Imagine que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota sale de la mano, en un punto a la altura del barandal de la azotea, con rapidez ascendente de 15.0 m/s, quedando luego en caída libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. En este lugar, $g = 9.8\ m/s^2$. Obtenga *a*) la posición y velocidad de la pelota 1.00 s y 4.00 s después de soltarla; *b*) la velocidad cuando la pelota está 5.00 m sobre el barandal; *c*) la altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza; y *d*) la aceleración de la pelota en su altura máxima.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las palabras "caída libre" en el enunciado del problema implican que la aceleración es constante y debida a la gravedad. Las incógnitas son la posición [en los incisos *a*) y *c*)], la velocidad [en los incisos *a*) y *b*)] y la aceleración [en el inciso *d*)].

PLANTEAR: En la figura 2.24 (que también es un diagrama de movimiento para la pelota), la trayectoria descendente se muestra desplazada un poco a la derecha de su posición real por claridad. Sea el origen el barandal, donde la pelota sale de la mano, y sea la dirección positiva hacia arriba. La posición inicial y_0 es cero, la velocidad inicial v_{0y} es $+15.0$ m/s y la aceleración es $a_Y = -g = -9.80\ m/s^2$. Usaremos otra vez las ecuaciones (2.12) y (2.8) para calcular la posición y la velocidad, respectivamente, en función del tiempo. En el inciso *b*), nos piden hallar la velocidad en cierta *posición*, no en cierto *tiempo*, así que nos convendrá usar la ecuación (2.13) en esa parte.

2.24 Posición y velocidad de una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba.



EJECUTAR: *a*) La posición y y la velocidad v_y, en cualquier instante t una vez que se suelta la pelota están dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.8), cambiando las x por y:

$$y = y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$
$$= (0) + (15.0\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_yt = v_{0y} + (-g)t$$
$$= 15.0\ \text{m/s} + (-9.80\ \text{m/s}^2)t$$

Cuando $t = 1.00$ s, estas ecuaciones dan

$$y = +10.1\ \text{m} \qquad v_y = +5.2\ \text{m/s}$$

La pelota está 10.1 m sobre el origen (y es positiva) y se mueve hacia arriba (v_y es positiva) con rapidez de 5.2 m/s, menor que la rapidez inicial porque la pelota frena mientras asciende.

Cuando $t = 4.00$ s, las ecuaciones para y y v_y en función del tiempo t dan

$$y = -18.4\ \text{m} \qquad v_y = -24.2\ \text{m/s}$$

La pelota pasó su punto más alto y está 18.4 m *debajo* del origen (y es negativa); tiene velocidad *hacia abajo* (v_y es negativa) de magnitud 24.2 m/s. Conforme sube, la pelota pierde rapidez, luego la gana al descender; se mueve a la rapidez inicial de 15.0 m/s cuando pasa hacia abajo por su punto de lanzamiento (el origen) y continúa ganando rapidez conforme desciende por debajo de este punto.

b) La velocidad v_y en cualquier posición y está dada por la ecuación (2.13) cambiando las x por y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$
$$= (15.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)y$$

Con la pelota a 5.00 m sobre el origen, $y = +5.00$ m, así que

$$v_y^2 = (15.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)(5.00\ \text{m}) = 127\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_y = \pm 11.3\ \text{m/s}$$

Obtenemos *dos* valores de v_y, pues la pelota pasa dos veces por el punto $y = +5.00$ m (véase la figura 2.24), una subiendo con v_y positiva y otra bajando con v_y negativa.

c) En el instante en que la pelota llega al punto más alto, está momentáneamente en reposo y $v_y = 0$. La altura máxima y_1 puede obtenerse de dos formas. La primera es usar la ecuación (2.13) y sustituir $v_y = 0$, $y_0 = 0$ y $a_y = -g$:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$
$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = +11.5\ \text{m}$$

La segunda consiste en calcular el instante en que $v_y = 0$ usando la ecuación (2.8), $v_y = v_{0y} + a_yt$, y sustituir este valor de t en la ecuación (2.12), para obtener la posición en ese instante. Por la ecuación (2.8), el instante t_1 en que la pelota llega al punto más alto es

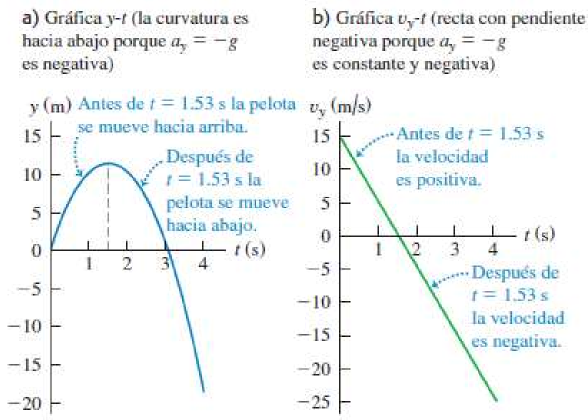
$$v_y = 0 = v_{0y} + (-g)t_1$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15.0\ \text{m/s}}{9.80\ \text{m/s}^2} = 1.53\ \text{s}$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación (2.12) obtenemos

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = (0) + (15\ \text{m/s})(1.53\ \text{s})$$
$$+ \frac{1}{2}(-9.8\ \text{m/s}^2)(1.53\ \text{s})^2 = +11.5\ \text{m}$$

Observe que la primera forma de hallar la altura máxima es más sencilla, ya que no es necesario calcular primero el tiempo.

2.25 a) Posición y b) velocidad en función del tiempo para una pelota lanzada hacia arriba con una rapidez inicial de 15 m/s.



Ejemplo 2.8 ¿Dos soluciones o una?

Determine el instante en que la pelota del ejemplo 2.7 está 5.00 m por debajo del barandal.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de nuevo de un problema de aceleración constante. La incógnita es el tiempo en que la pelota está en cierta posición.

PLANTEAR: Otra vez elegimos el eje y como en la figura 2.24, así que y_0, v_{0y} y $a_y = -g$ tienen los mismos valores que en el ejemplo 2.7. De nuevo, la posición y en función del tiempo t está dada por la ecuación (2.12):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Queremos despejar t con $y = -5.00$ m. Puesto que la ecuación incluye t^2, es una ecuación *cuadrática* en t.

EJECUTAR: Primero replanteamos la ecuación en la forma cuadrática estándar para una x desconocida, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

entonces, $A = g/2$, $B = -v_{0y}$ y $C = y - y_0$. Usando la fórmula cuadrática (véase el Apéndice B), vemos que esta ecuación tiene *dos* soluciones:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)} \\ &= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15.0$ m/s, $g = 9.80$ m/s^2 y $y = -5.00$ m, obtenemos

$$t = \frac{(15.0\text{ m/s}) \pm \sqrt{(15.0\text{ m/s})^2 - 2(9.80\text{ m/s}^2)(-5.00\text{ m} - 0)}}{9.80\text{ m/s}^2}$$

$t = +3.36$ s o $t = -0.30$ s

Para decidir cuál de éstas es la respuesta correcta, la pregunta clave es: "¿son lógicas estas respuestas?" La segunda, $t = -0.30$ s, simplemente es absurda; ¡se refiere a un instante 0.30 s *antes* de soltar la pelota! Lo correcto es $t = +3.36$ s. La pelota está 5.00 m debajo del barandal 3.36 s *después* de que sale de la mano.

EVALUAR: ¿De dónde salió la "solución" errónea $t = -0.30$ s? Recuerde que la ecuación $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$ se basa en el supuesto de que la aceleración es constante para *todos* los valores de t, positivos, negativos o cero. Tal cual, esta ecuación nos diría que la pelota se ha estado moviendo hacia arriba en caída libre desde los albores del tiempo, y pasó por la mano en $y = 0$ en el instante especial que decidimos llamar $t = 0$, y después continuó su caída libre. Sin embargo, todo lo que esta ecuación describa como sucedido antes de $t = 0$ es ficción pura, ya que la pelota entró en caída libre sólo después de salir de la mano en $t = 0$; la "solución" $t = -0.30$ s es parte de tal ficción.

Repita estos cálculos para determinar cuándo la pelota está 5.00 m *sobre* el origen ($y = +5.00$ m). Las dos respuestas son $t = +0.38$ s y $t = +2.68$ s; ambos son valores positivos de t y se refieren al movimiento real de la pelota una vez soltada. El primer instante es cuando la pelota pasa por $y = +5.00$ m de subida, y el segundo, cuando pasa por ahí de bajada. (Compare esto con el inciso *b*) del ejemplo 2.7.)

Determine también los instantes en que $y = +15.0$ m. En este caso, ambas soluciones requieren obtener la raíz cuadrada de un número negativo, así que *no hay* soluciones reales. Esto es lógico; en el inciso *c*) del ejemplo 2.7 vimos que la altura máxima de la pelota es $y = +11.5$ m, así que *nunca* llega a $y = +15.0$ m. Aunque una ecuación cuadrática como la (2.12) siempre tiene dos soluciones, a veces una o ambas soluciones no tienen sentido físico.