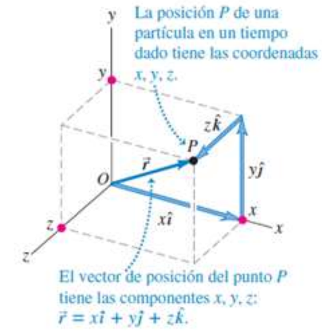
<u>Sears Zemansky – CAP 3 (Movimiento en 2 y 3 dimensiones) pag 71</u>

Generalización del CAP 2:

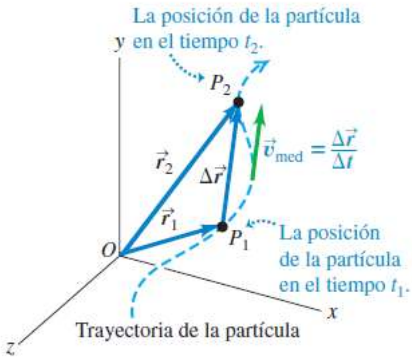
- Vector desplazamiento: 3 componentes
- Vector velocidad instantánea: derivo cada componente del desplazamiento
- Vector aceleración instantánea: derivo cada componente de la velocidad

- Vel media: desplazamiento dividido intervalo de tiempo
- Acel media: velocidad dividido intervalo de tiempo

3.1 El vector de posición $\vec{r}$ del origen al punto P tiene componentes x, y y z. La trayectoria que la partícula sigue en el espacio es en general una curva (figura 3.2).



3.2 La velocidad media $\vec{v}_{med}$ entre los puntos P_1 y P_2 tiene la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$.



$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad \text{(vector de posición)}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(vector de velocidad instantánea)}$$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(vector de velocidad media)}$$

El módulo del vector velocidad instantánea es la magnitud de la velocidad

En cualquier punto de la trayectoria la velocidad instantánea es paralela a la trayectoria.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \text{(componentes de la velocidad instantánea)}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Ejemplo 3.1 Cálculo de velocidad media e instantánea

Se está usando un vehículo robot para explorar la superficie de Marte. El módulo de descenso es el origen de coordenadas; en tanto que la superficie marciana circundante está en el plano *xy*. El vehículo, que representamos como un punto, tiene coordenadas *x* y *y* que varían con el tiempo:

$$x = 2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)t^2$$
$$y = (1.0\text{ m/s})t + (0.025\text{ m/s}^3)t^3$$

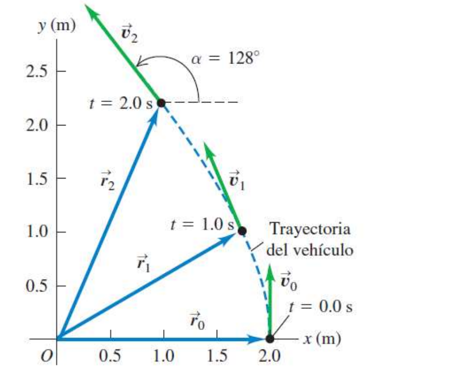
a) Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia con respecto al módulo en $t = 2.0$ s. *b*) Obtenga los vectores de desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s. *c*) Deduzca una expresión general para el vector de velocidad instantánea del vehículo. Exprese la velocidad instantánea en $t = 2.0$ s en forma de componentes y además en términos de magnitud y dirección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica movimiento en una trayectoria bidimensional (es decir, en un plano). Por lo tanto, deberemos usar las expresiones para los *vectores* de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea que obtuvimos en esta sección. (En las expresiones más sencillas de las secciones 2.1 y 2.2 no intervienen vectores, y sólo son válidas para movimiento rectilíneo.)

PLANTEAR: La trayectoria del vehículo se muestra en la figura 3.5. Usaremos la ecuación (3.1) para la posición $\vec{r}$, la expresión $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para el desplazamiento, la ecuación (3.2) para la velocidad media y las ecuaciones (3.5) y (3.6) para la velocidad instantánea y su dirección. Las incógnitas se indican en el enunciado del problema.

3.5 En $t = 0$ el vehículo tiene vector de posición $\vec{r}_0$ y velocidad instantánea $\vec{v}_0$. Asimismo, $\vec{r}_1$ y $\vec{v}_1$, son los vectores en $t = 1.0$ s; $\vec{r}_2$ y $\vec{v}_2$ son los vectores en $t = 2.0$ s.



continúa

EJECUTAR: *a*) En el instante $t = 2.0$ s las coordenadas del vehículo son

$$x = 2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 1.0\text{ m}$$
$$y = (1.0\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + (0.025\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^3 = 2.2\text{ m}$$

La distancia del vehículo al origen en este instante es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.0\text{ m})^2 + (2.2\text{ m})^2} = 2.4\text{ m}$$

b) Para obtener el desplazamiento y la velocidad media, expresamos el vector de posición $\vec{r}$ en función del tiempo *t*. De la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\\ &= [2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath}\\ &\quad + [(1.0\text{ m/s})t + (0.025\text{ m/s}^3)t^3]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el instante $t = 0.0$ s el vector de posición $\vec{r}_0$ es

$$\vec{r}_0 = (2.0\text{ m})\hat{\imath} + (0.0\text{ m})\hat{\jmath}$$

Del inciso *a*) sabemos que, en $t = 2.0$ s, el vector de posición $\vec{r}_2$ es

$$\vec{r}_2 = (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}$$

Por lo tanto, el desplazamiento entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 &= (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath} - (2.0\text{ m})\hat{\imath}\\ &= (-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Durante el intervalo entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s, el vehículo se movió 1.0 m en la dirección $-x$ y 2.2 m en la dirección $+y$. La velocidad media en este intervalo es el desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido (ecuación 3.2):

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \frac{(-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}}{2.0\text{ s} - 0.0\text{ s}}\\ &= (-0.50\text{ m/s})\hat{\imath} + (1.1\text{ m/s})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Las componentes de esta velocidad media son

$$v_{\text{med-}x} = -0.50\text{ m/s} \qquad v_{\text{med-}y} = 1.1\text{ m/s}$$

c) Por la ecuación (3.4), las componentes de la velocidad instantánea son las derivadas de las coordenadas respecto a *t*:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\text{ m/s}^2)(2t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\text{ m/s} + (0.025\text{ m/s}^3)(3t^2)$$

Así, podemos escribir el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ como

$$\begin{aligned}\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= (-0.50\text{ m/s}^2)t\hat{\imath}\\ &\quad + [1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el tiempo $t = 2.0$ s, las componentes de la velocidad instantánea son

$$v_x = (-0.50\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = -1.0\text{ m/s}$$
$$v_y = 1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^2 = 1.3\text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad instantánea (es decir, la rapidez) en $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1.0\text{ m/s})^2 + (1.3\text{ m/s})^2}\\ &= 1.6\text{ m/s}\end{aligned}$$

Su dirección con respecto al eje $+x$ está dada por el ángulo α, donde, por la ecuación (3.7),

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1.3\text{ m/s}}{-1.0\text{ m/s}} = -1.3 \qquad \text{así} \qquad \alpha = 128°$$

Una calculadora mostraría que la tangente inversa de -1.3 es $-52°$. No obstante, como vimos en la sección 1.8, hay que examinar un dibujo del vector para decidir su dirección. La figura 3.5 muestra que la respuesta correcta para α es $-52° + 180° = 128°$.

EVALUAR: Tómese un momento para comparar las componentes de la velocidad *media* que obtuvimos en el inciso *b*) para el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s ($v_{\text{med-}x} = -0.50$ m/s, $v_{\text{med-}y} = 1.1$ m/s) con las componentes de la velocidad *instantánea* en $t = 2.0$ s que obtuvimos en el inciso *c*) ($v_x = -1.0$ m/s, $v_y = 1.3$ m/s). En general, la comparación muestra que, igual que en una sola dimensión, el vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante un intervalo *no* es igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo (véase el ejemplo 2-1).

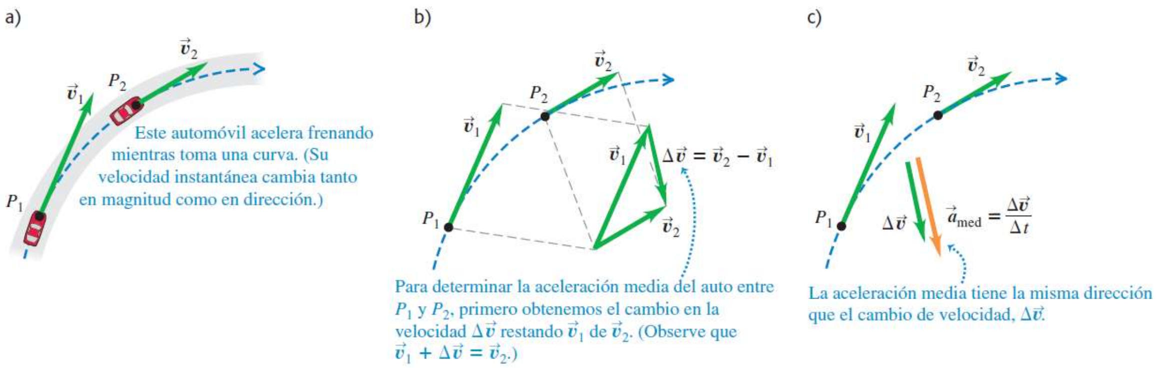
Usted debería calcular el vector de posición, el vector de velocidad instantánea, la rapidez y dirección del movimiento en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. Los vectores de posición $\vec{r}$ y velocidad instantánea $\vec{v}$ en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s se muestran en la figura 3.5. Observe que en todos los puntos el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria. La magnitud de $\vec{v}$ aumenta al avanzar el vehículo, lo que indica que la rapidez del vehículo está aumentando.

1) Vector aceleración

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{(vector de aceleración media)}$$

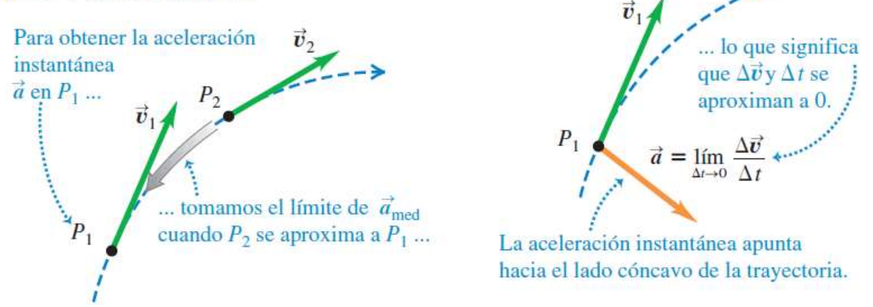
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{(vector de aceleración instantánea)}$$

<u>Aceleración media:</u>



<u>Aceleración instantánea:</u>

3.7 La aceleración instantánea $\vec{a}$ en el punto P_1 de la figura 3.6.



$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad \text{(componentes de la aceleración instantánea)}$$

En términos de vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

Ejemplo 3.2 Cálculo de aceleración media e instantánea

Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del ejemplo 3.1. Determinamos que las componentes de la velocidad instantánea en cualquier instante t son

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\ \text{m/s}^2)(2t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\ \text{m/s} + (0.025\ \text{m/s}^3)(3t^2)$$

y que el vector de velocidad es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (-0.50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath} + [1.0\ \text{m/s} + (0.075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}$$

a) Obtenga las componentes de la aceleración media en el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s. *b*) Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación vectorial entre velocidad, aceleración media y aceleración instantánea.

PLANTEAR: En el inciso *a*), determinamos primero los valores de v_x y v_y al principio y al final del intervalo, y después usamos la ecuación (3.8) para calcular las componentes de la aceleración media. En el inciso *b*) determinamos las componentes de la aceleración instantánea en cualquier tiempo t derivando respecto al tiempo las componentes de la velocidad, como en la ecuación (3.10).

EJECUTAR: *a*) Si sustituimos $t = 0.0$ s, o bien, $t = 2.0$ s en las expresiones para v_x y v_y, veremos que al principio del intervalo ($t = 0.0$ s) las componentes de velocidad son

$$v_x = 0.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.0\ \text{m/s}$$

y que al final del intervalo ($t = 2.0$ s) las componentes son

$$v_x = -1.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.3\ \text{m/s}$$

Los valores en $t = 2.0$ s son los mismos que obtuvimos en el ejemplo 3.1.) Así, las componentes de la aceleración media en el intervalo son

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1.0\ \text{m/s} - 0.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = -0.5\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{med-}y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1.3\ \text{m/s} - 1.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = 0.15\ \text{m/s}^2$$

b) Con la ecuación (3.10), obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0.50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0.075\ \text{m/s}^3)(2t)$$

Podemos escribir el vector de aceleración instantánea $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (-0.50\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} + (0.15\ \text{m/s}^3)t\hat{\jmath}$$

En el instante $t = 2.0$ s, las componentes de la aceleración instantánea son

$$a_x = -0.50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = (0.15\ \text{m/s}^3)(2.0\ \text{s}) = 0.30\ \text{m/s}^2$$

El vector de aceleración en este instante es

$$\vec{a} = (-0.50\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} + (0.30\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$$

La magnitud de la aceleración en este instante es

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.50\ \text{m/s}^2)^2 + (0.30\ \text{m/s}^2)^2} = 0.58\ \text{m/s}^2$$

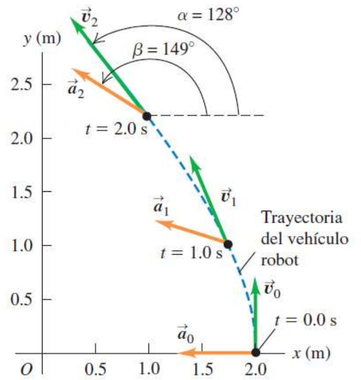
La dirección de $\vec{a}$ con respecto al eje x positivo está dada por el ángulo β, donde

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0.30\ \text{m/s}^2}{-0.50\ \text{m/s}^2} = -0.60$$

$$\beta = 180° - 31° = 149°$$

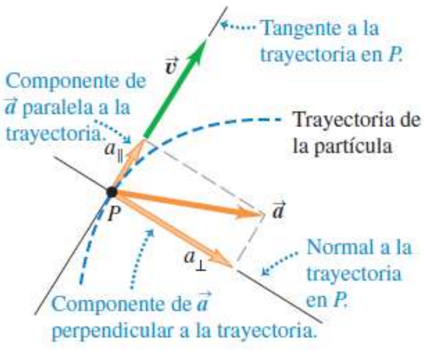
EVALUAR: Usted debería utilizar los resultados del inciso *b*) para calcular la aceleración instantánea en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. La figura 3.9 muestra la trayectoria y los vectores de velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s. Observe que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ *no* están en la misma dirección en ningún momento. El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria, y el de aceleración $\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo de ésta.

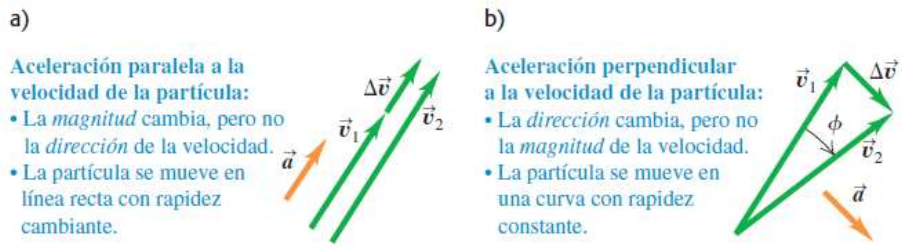
3.9 Trayectoria del vehículo robot que muestra la velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s ($\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$), $t = 1.0$ s ($\vec{v}_1$ y $\vec{a}_1$) y $t = 2.0$ s ($\vec{v}_2$ y $\vec{a}_2$).



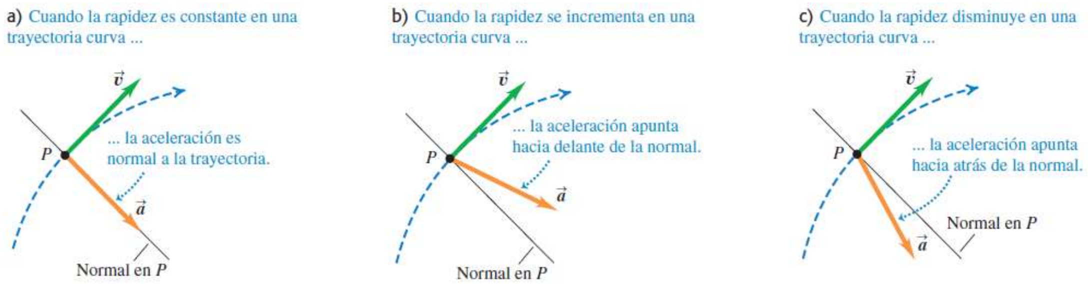
<u>Componentes perpendicular y paralela de la aceleración</u>

El vector aceleración puede generar cambios en el módulo y en la dirección del vector velocidad. Componente paralela: cambio en el módulo. Componente normal: cambio de dirección.





Se deben sumar vectorialmente las dos contribuciones a "delta velocidad" para obtener la variación de velocidad total.



Ejemplo 3.3 Cálculo de las componentes paralela y perpendicular de la aceleración

Para el vehículo de los ejemplos 3.1 y 3.2, obtenga las componentes paralela y perpendicular de la aceleración en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

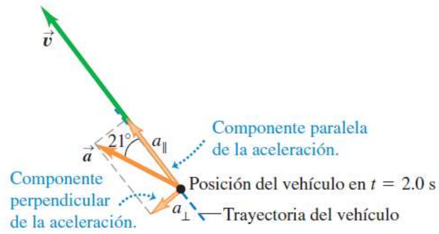
IDENTIFICAR: Queremos obtener las componentes del vector de aceleración $\vec{a}$ que sean paralela y perpendicular al vector de velocidad $\vec{v}$.

PLANTEAR: Obtuvimos las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{v}$ en los ejemplos 3.2 y 3.1, respectivamente, lo cual nos permite determinar el ángulo entre los dos vectores y, por lo tanto, las componentes de $\vec{a}$.

EJECUTAR: En el ejemplo 3.2 vimos que en $t = 2.0$ s la partícula tiene una aceleración de magnitud 0.58 m/s^2 con un ángulo de 149° con respecto al eje $+x$. Por el ejemplo 3.1, sabemos que en ese instante el vector de velocidad tiene un ángulo de 128° con respecto al eje $+x$. Así, la figura 3.9 muestra que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{v}$ es $149° - 128° = 21°$ (figura 3.13). Las componentes paralela y perpendicular de la aceleración son entonces

$$a_{\parallel} = a\cos 21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\cos 21° = 0.54\ \text{m/s}^2$$
$$a_{\perp} = a\,\text{sen}\,21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,21° = 0.21\ \text{m/s}^2$$

3.13 Componentes paralela y perpendicular de la aceleración del vehículo en $t = 2.0$ s.



EVALUAR: La componente paralela $a_{\parallel}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$, lo cual indica que la rapidez aumenta en este instante; el valor de $a_{\parallel} = 0.54$ m/s^2 significa que la rapidez está aumentando a una tasa de 0.54 m/s por segundo. Como la componente perpendicular $a_{\perp}$ no es cero, se sigue que en este instante el vehículo cambia de dirección y sigue una trayectoria curva; en otras palabras, el vehículo está dando vuelta.

----

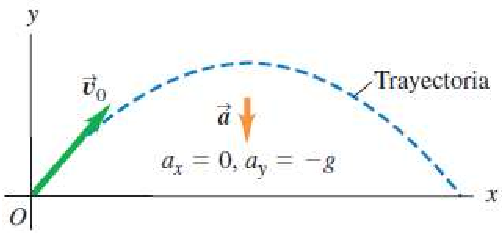
2) **<u>Tiro oblicuo:</u>**

Tiro de proyectiles

- Acción vertical de la aceleración de gravedad. Magnitud y dirección constante.
- Despreciamos la resistencia del aire.

El movimiento ocurre **<u>en un plano</u>**. La curva que describe el móvil es la **<u>trayectoria</u>**.

Podemos tratar por separado las coordenadas x e y. En el eje horizontal se realiza un movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante); en el eje vertical hay un movimiento acelerado (por acción de la gravedad). La composición de los dos movimientos con las componentes x e y da la trayectoria resultante.



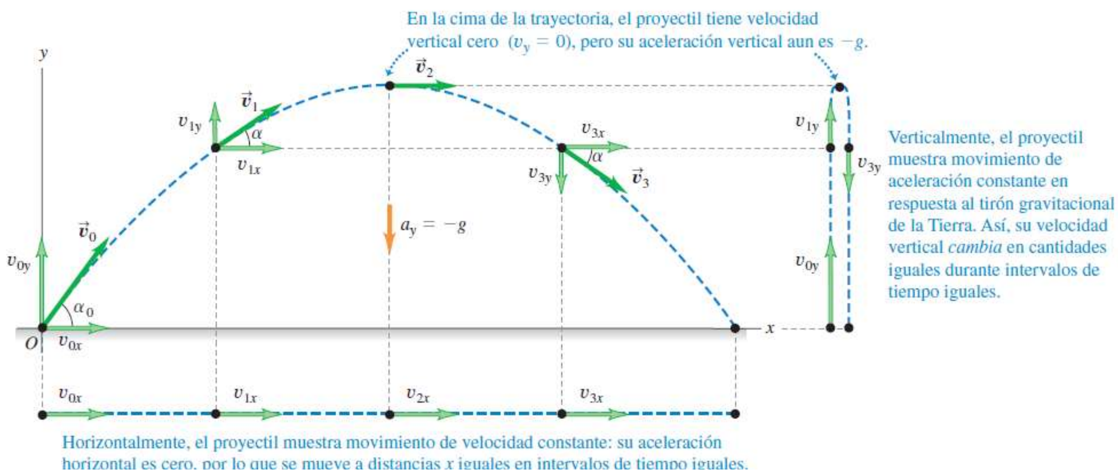
$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$



$$t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$$

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$$

Es la ecuación de una <u>parábola</u>, con la concavidad hacia abajo.

Cálculo del alcance: **y = 0**

Cálculo de la altura máxima: y max, (**derivada = 0**)

Ejemplo 3.6 Cuerpo que se proyecta horizontalmente

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez que el acróbata sale del risco, se mueve como un proyectil. Por lo tanto, su velocidad en el borde del risco es su velocidad inicial.

PLANTEAR: El esquema se muestra en la figura 3.22. Elegimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el borde del risco, donde la motocicleta se convierte en proyectil, así que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. La velocidad inicial es puramente horizontal (es decir, $\alpha_0 = 0$), así que sus componentes son $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = 9.0$ m/s y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 = 0$. Para determinar la posición de la motocicleta en $t = 0.50$ s, usamos las ecuaciones (3.20) y (3.21), que dan x y y en función del tiempo. Dados estos valores, calcularemos la distancia del origen con la ecuación (3.24). Por último, usaremos las ecuaciones (3.22) y (3.23) para determinar las componentes de velocidad v_x y v_y en $t = 0.50$ s.

EJECUTAR: ¿Dónde está la motocicleta en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas x y y son

$$x = v_{0x}t = (9.0 \text{ m/s})(0.50 \text{ s}) = 4.5 \text{ m}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s})^2 = -1.2 \text{ m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está debajo de su punto inicial.

¿A qué distancia está ahora la motocicleta del origen? Por la ecuación (3.24),

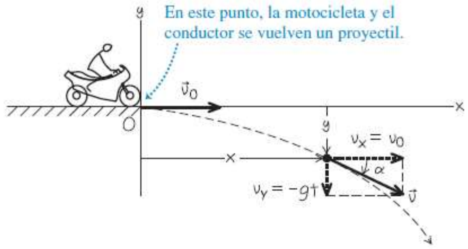
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (-1.2 \text{ m})^2} = 4.7 \text{ m}$$

¿Qué velocidad tiene en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en ese momento son

$$v_x = v_{0x} = 9.0 \text{ m/s}$$

$$v_y = -gt = (-9.8 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s}) = -4.9 \text{ m/s}$$

3.22 Esquema para este problema.



La motocicleta tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando salió del risco en $t = 0$ pero, además, hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (negativa). Si usamos vectores unitarios, la velocidad en $t = 0.50$ s es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9.0 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-4.9 \text{ m/s})\hat{\jmath}$$

También podemos expresar la velocidad en términos de magnitud y dirección. Por la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en este instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(9.0 \text{ m/s})^2 + (-4.9 \text{ m/s})^2} = 10.2 \text{ m/s}$$

Por la ecuación (3.26), el ángulo α del vector de velocidad es

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\left(\frac{-4.9 \text{ m/s}}{9.0 \text{ m/s}}\right) = -29°$$

En este instante la velocidad está dirigida 29° por debajo de la horizontal.

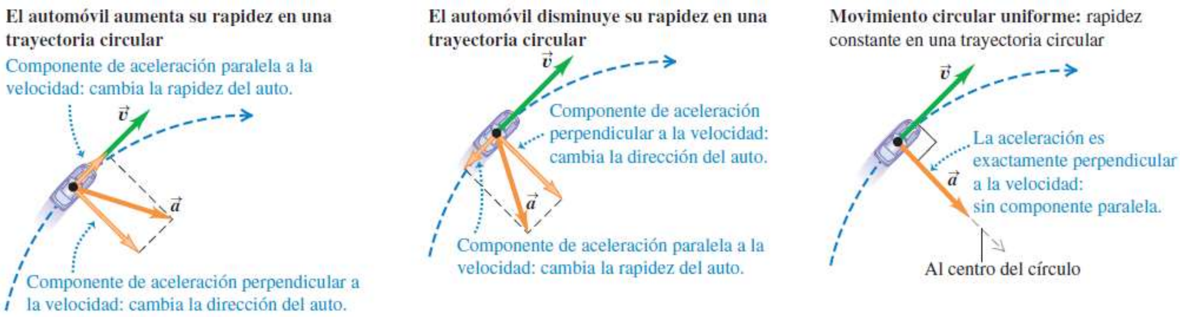
EVALUAR: Al igual que en la figura 3.17, el aspecto horizontal del movimiento no cambia por la gravedad; la motocicleta se sigue moviendo horizontalmente a 9.0 m/s, cubriendo 4.5 m en 0.50 s. Dado que la motocicleta tiene cero velocidad inicial vertical, cae verticalmente igual que un objeto que se suelta desde el reposo y desciende una distancia de $\frac{1}{2}gt^2 = 1.2$ m en 0.50 s.

Ver “Ejemplos 3.7 a 3.10.pdf”

----

3) <u>Movimiento circular uniforme:</u>

En el movimiento en una trayectoria curva la velocidad cambia constantemente. El vector cambia de dirección.
Por lo menos hay una aceleración con componente perpendicular a la trayectoria, aun si el módulo de la velocidad es constante.
Movimiento circular uniforme: módulo de la velocidad=constante.



MCU: La aceleración se dirige al centro de la circunferencia y es perpendicular a la trayectoria.

Como los triángulos son semejantes resulta:

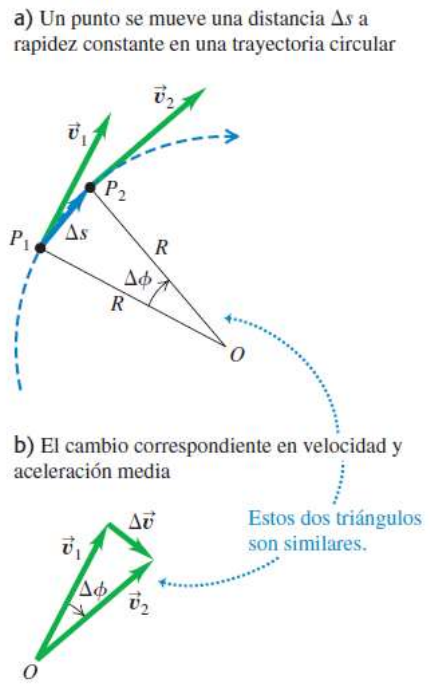
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{o} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

$$a_{\text{med}} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)}$$

La aceleración tiene dirección "radial", hacia el centro de la circunferencia.
Se llama **"aceleración centrípeta"**



Si el módulo de la velocidad es constante, la aceleración es siempre normal al vector v.

Si **T = período de revolución** (medido en segundos), resulta:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)}$$
