1.计算行列式

$$(1)\ D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (2)\ D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix} (n\geq 2)$$

2.证明

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$3.\quad D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \qquad (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

1.

(1)

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-\frac{5}{2}r_1, r_2-2r_1]{r_2+\frac{3}{2}r_1} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 7 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+8r_2]{r_3+7r_2} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

(2)

当$n=2$时,

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 \\ a_2+1 & a_2+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+1 & 1 \\ a_2+1 & 1 \end{vmatrix}=a_1+1-a_2-1=a_1-a_2$$

当$n\geq 3$时,

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_3} \begin{vmatrix} -2 & -1 & \cdots & a_1+n \\ -2 & -1 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -1 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix}=0$$

2.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_3-c_2} 2\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_1} 2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3.

$$
\begin{vmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix}
\xlongequal[i=1,2\cdots n-1]{r_i-r_n}
\begin{vmatrix}
a_1 & 0 & \cdots & -a_n \\
0 & a_2 & \cdots & -a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=1,2\cdots n-1]{r_n-\sum \frac{r_i}{a_i}}
\begin{vmatrix}
a_1 & 0 & \cdots & -a_n \\
0 & a_2 & \cdots & -a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1+a_n+\sum \frac{a_n}{a_i}
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=1,2\cdots n-1]{}(\prod_{i=1}^{n-1} a_i)(1+a_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i})
$$