Ch 8.4 正态总体抽样分布定理

回顾前一次课

统计三大分布：χ^2-分布、t-分布、F-分布

统计五大采样定理

1）设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，则有$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$　　$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$

2）有$\bar{X}$和S^2相互独立，且$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

3）$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$

正态分布的抽样分布定理四和五

定理： 设$X_1, X_2, \cdots, X_m$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$分别来自总体$N(\mu_X, \sigma_X^2)$和$N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$的两个独立样本, 其修正样本方差分别为S_X^2和S_Y^2, 则

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1).$$

定理： 设$X_1, X_2, \cdots, X_m$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$分别来自总体$N(\mu_X, \sigma^2)$和$N(\mu_Y, \sigma^2)$的两个独立样本，令其样本均值分别$\bar{X}$和$\bar{Y}$，修正样本方差分别为S_X^2和S_Y^2, 则

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2).$$

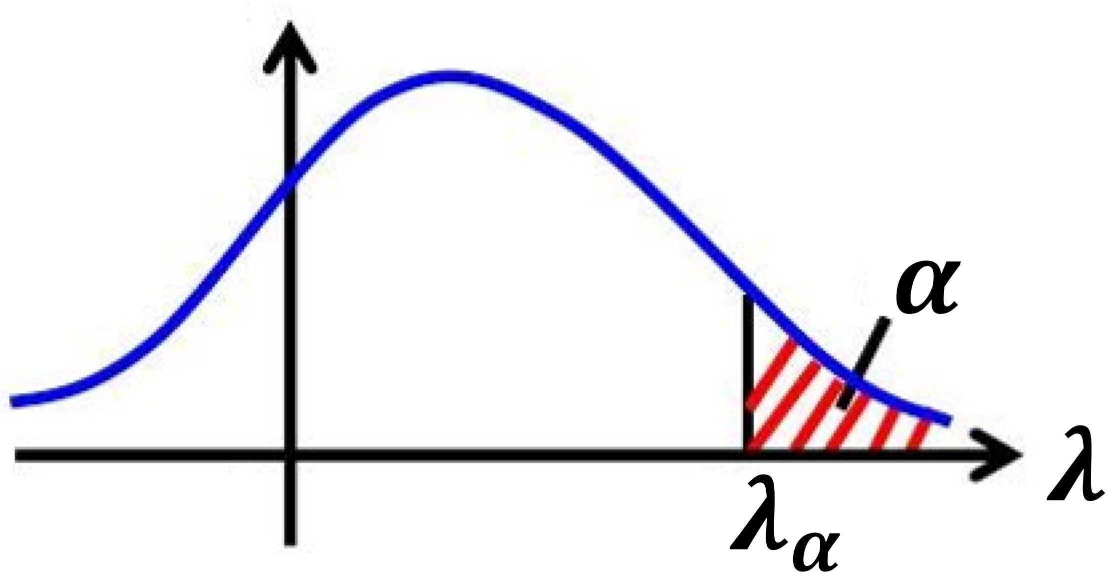
分位数(点)

对给定$\alpha \in (0,1)$ 和随机变量X, 称满足

$$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$$

的实数λ_α为上侧α分位数(点):

$\boldsymbol{\mu_\alpha}$、$\boldsymbol{\chi^2_\alpha(n)}$、$\boldsymbol{t_\alpha(n)}$、$\boldsymbol{F_\alpha(m,n)}$



$F-$分布的分位数

定理：对F-分布的分位点有

$$F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_{\alpha}(n,m)}.$$

Ch 9 参数估计

问题

设总体X的分布/密度函数为$F(X,\theta)$, 其中θ为未知参数(或未知向量)

现从总体中抽取一样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

问题：如何依据样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$估计参数θ, 或θ的函数$g(\theta)$, 此类问题称为 **参数估计问题**

研究内容包括: 点估计, 估计量标准, 区间估计

点估计包括：矩估计法、极大似然估计法、Bayes估计

矩估计法

总体X的k阶矩: $a_k = E[X^k]$　　样本k阶矩: $A_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$

用样本矩去估计总体矩求参数θ的方法称为 矩估计法

理论基础: 大数定理 $X_1, X_2, \cdots, X_n$为独立同分布的随机变量, 若$E(X) = \mu$, 则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

推论: 若$E[X^k] = a_k$存在, 则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{p} a_k = E[X^k].$$

中心矩估计

总体X的k阶中心矩: $b_k = E\left[\left(X - E(X)\right)^k\right]$

样本k阶中心矩: $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$

用样本中心矩去估计总体中心矩求参数θ的方法亦称为**矩估计法**

矩估计方法

总体X的分布函数F包含m个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$

- 计算总体X的k阶矩：$a_k = a_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) = E[X^k]$ $k\in[m]$ (a_k一般为$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的函数)
- 计算样本的k阶矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$
- 令样本矩等于总体矩：

$$A_k = a_k = a_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ k\in[m]$$

得到m个关于$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的方程组

- 求解方程组得到估计量$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$

例题

设总体X的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha} & x\in(0,1)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本, 求参数α的矩估计.

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本, 以及总体X的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} & x \geq \mu \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中$\theta > 0$, 求μ和θ的矩估计.

课堂习题

求正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的μ, σ^2的矩估计法.

求总体$X \sim U(a, b)$中a, b的矩估计法.

最大似然估计法

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本．若总体X为离散型随机变量，其分布列为$P(X = x) = P(X = x; \theta)$，则样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的分布列为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i; \theta)$$

这里$L(\theta)$表示样本$X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n$发生的概率

称$\boldsymbol{L(\theta)}$**为样本**$\boldsymbol{X_1, X_2, \cdots, X_n}$**的似然函数**

最大似然估计法

若总体X为连续型随机变量，其概率密度为$f(x;\theta)$，则$X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n$的联合概率密度为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

根据概率密度定义可知$L(\theta)$ 越大，样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$落入$x_1,x_2,\cdots,x_n$的邻域内概率越大

称$\boldsymbol{L(\theta)}$**为样本**$\boldsymbol{X_1,X_2,\cdots,X_n}$**的似然函数**

似然函数

综合离散和连续随机变量, 统称$\boldsymbol{L(\theta)}$**为样本**$\boldsymbol{X_1, X_2, \cdots, X_n}$**的似然函数**, 可以发现$L(\theta)$是$\theta$的函数，若

$$\hat{\theta} = \mathrm{argmax}_{\theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_m; \theta)$$

则称 $\boldsymbol{\hat{\theta}}$**为**$\boldsymbol{\theta}$**的最大似然估计量**

直觉而言：最大似然估计量$\hat{\theta}$是使观测值$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$出现的概率最大

求解最大似然估计量的步骤

- 计算对数似然函数$\ln\left(L(x_1, x_2, \cdots, x_m; \theta)\right)$
- 求对数似然函数中参数θ的一阶偏导, 令其等于零
- 求解方程组得到最大似然估计量$\hat{\theta}$

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自总体$X \sim B(1, p)$的样本，求参数p的最大似然估计

最大似然估计不可变性

定理： 设$\mu(\theta)$为θ的函数，且存在反函数$\theta = \theta(\mu)$. 若$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计，则$\hat{\mu} = \mu\left(\hat{\theta}\right)$是$\mu$的最大似然估计

称为 **最大似然估计的不变性**

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，求μ和$\sigma > 0$的最大似然估计

例题

设总体X的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha} & x\in(0,1)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本, 求α的最大似然估计

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$X \sim U(a, b)$的样本，求a和b的最大似然估计

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本, 以及总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\,e^{-(x-\mu)/\theta} & x\geq\mu\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\theta>0$, 求μ和θ的最大似然估计.