Ch 5.3 二维连续随机变量

回顾前一次课

二维随机变量

二维联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$、性质

边缘分布函数$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

随机变量X和Y的独立性

二维离散随机变量：联合分布列、边缘分布列、独立性

二维连续随机变量：联合概率密度、边缘概率密度

连续随机变量独立性

对任意$x \in (-\infty, +\infty)$和$y \in (-\infty, +\infty)$，若二维连续随机变量(X, Y)的联合概率密度与边缘概率密度满足

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

则称随机变量**X和Y相互独立**

定理：设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)$, 有

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \iff f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

例题

设二维随机变量的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求X与Y的独立性

例题

设随机变量X与Y相互独立，已知X服从$[-1,1]$均匀分布，Y服从参数$\lambda = 2$的指数分布，求$P(X + Y \le 1)$

二维正态分布

设$|\rho| < 1$, 令

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

若随机变量X和Y的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = (2\pi)^{-2/2}|\Sigma|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(\xi-\mu)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\xi-\mu)} \qquad \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

则称随机变量**X和Y服从参数为μ和Σ的正太分布**，记为 $(X,Y) \sim N(\mu,\Sigma)$

性质

设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\Sigma)$, 其中

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_x\\ \mu_y\end{pmatrix}\qquad\qquad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{pmatrix}$$

则随机变量X和Y的边缘分布为

$$X\sim N(\mu_x,\sigma_x^2)\qquad\qquad Y\sim N\left(\mu_y,\sigma_y^2\right)$$

二维正态分布的独立性

若二维随机变量$(X,Y) \sim N(\mu,\Sigma)$，则X与Y独立的充要条件为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

多维正态分布

设 向 量 $\mu \in \mathbb{R}^n$ 和 正 定 矩 阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$， 若 随 机 向 量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度函数为

$$f(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\xi - \mu)^{\top} \Sigma^{-1} (\xi - \mu)}$$

其中$\xi = (x_1, \dots, x_n)^{\top}$，则称随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$服从参数为$\mu$和$\Sigma$的多维正态分布, 记

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim N(\mu, \Sigma)$$

定理

设随机向量$(X,Y)=(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m)\sim \mathrm{N}(\mu,\Sigma)$, 其中

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_x\\ \mu_y\end{pmatrix}\quad \mu_x=\begin{pmatrix}\mu_{x_1}\\ \mu_{x_2}\\ \vdots\\ \mu_{x_n}\end{pmatrix}\quad \mu_y=\begin{pmatrix}\mu_{y_1}\\ \mu_{y_2}\\ \vdots\\ \mu_{y_n}\end{pmatrix}\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{xx} & \Sigma_{xy}\\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy}\end{pmatrix}$$

- 随机向量X和Y边缘分布分别服从$X\sim N(\mu_x,\Sigma_{xx})$和$Y\sim \mathrm{N}\left(\mu_y,\Sigma_{yy}\right)$
- 随机向量X与Y相互独立的充要条件是$\Sigma_{xy}=\Sigma_{yx}=0$

定理

若随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma)$, 且正定矩阵$\Sigma$的特征值分解为$\Sigma = U^\top \Lambda U$, 则随机向量

$$Y = \Lambda^{-1/2} U(X - \mu) \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}_n, I_n)$$

其中$\mathbf{0}_n$为全为零的n维向量, I_n表示$n \times n$的单位阵

若随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim N(\mu, \Sigma)$, 则

$$Y = AX + b \sim N(A\mu + b, A\Sigma A^\top)$$

其中$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$和$b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

定理

若随机向量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}_n,I_n)$,则其概率密度函数为$p_X(\boldsymbol{x})$, 则有

$$\int p_X(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=1$$

Ch 5.4 多维随机变量函数的分布

离散随机变量函数的分布

问题：已知(X,Y)的分布, 求$Z=g(X,Y)$的分布

若$X_1,X_2,\cdots,X_n$是n维离散型随机变量, 那么

$$Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

为一维随机变量, 其分布列可以通过如下两步求得:

① 对$X_1,X_2,\cdots,X_n$的各种取值, 计算随机变量Z的取值

② 对相同的Z值, 合并其概率

例题

设(X,Y)的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/8
1	1/4	1/8	1/12

求$Z_1 = X + Y$和$Z_2 = XY$的分布列

连续随机变量函数的分布

对于连续随机变量(X,Y)，其联合概率密度为$f(x,y)$，如何求解随机变量$Z=g(X,Y)$的概率密度.

求解思路为分布函数法, 即

① 求$Z=g(X,Y)$的分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(x,y)\le z)$$

$$=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

② 求Z的密度函数$f_Z(z)=F_Z'(z)$.

极大极小分布

随机变量X和Y相互独立, 分布函数为$F_X(x)$和$F_Y(y)$, 求

$$Z_1 = \max(X, Y) \qquad\qquad Z_2 = \min(X, Y)$$

的分布函数和概率密度函数

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为n个相互独立的随机变量，其分布函数分别为$F_{X_i}(x_i)$, 求:

- 随机变量$Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为$F_Y(y)$
- 随机变量$Y = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数为$F_Z(z)$

独立同分布情况？

例题

设随机变量X与Y相互独立，且有$X \sim e(\alpha)$和$Y \sim e(\beta)$，求随机变量$Z_1 = \max(X, Y)$和$Z_2 = \min(X, Y)$的概率密度