

数字信号处理

作业一

方盛俊 201300035

2022 年 11 月 21 日

作业提交注意事项

- (1) 本次作业提交截止时间为 **2022/11/27 23:59:59**，截止时间后不再接收作业，本次作业记零分；
- (2) 作业提交方式：使用此 LaTeX 模板书写解答，只需提交编译生成的 pdf 文件，将 pdf 文件以 ftp 方式上传，账号为 dsp2022，密码为 12345asd!@。请远程连接 www.lamda.nju.edu.cn，提交到/D:/courses/DSP2022/HW/HW1 路径下。
- (3) 文件命名方式：学号-姓名-作业号-v 版本号, 例 MG1900000-张三-1-v1；如果需要更改已提交的解答，请在截止时间之前提交新版本的解答，并将版本号加一；
- (4) 未按照要求提交作业，或 pdf 命名方式不正确，将会被扣除部分作业分数。

1 [20pts] 信号的周期性

判断下列信号的周期性，并回答是、否或无法判断。如果是周期信号，请给出其最小正周期。

(1) $x(t) = \sin^2 t + \cos \pi t$

(2) $x(t) = (\sin 2t + \cos t)^2$

(3) $x(t) = \frac{\cos 2t + 1 + \sin t + \sin 2t + \sin 3t}{\cos t}$

(4) $x(t) = \sin et + \cos \pi t$

(5) $x(n) = \sin 2kn + \cos 3kn$, k 为某一正实数。

• (1)

$$x(t) = \sin^2 t + \cos \pi t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t + \cos \pi t$$

其中 $\cos 2t$ 周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $\cos \pi t$ 的周期为 $T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

由于 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$ 为无理数, 因此 $x(t)$ 不是周期信号。

• (2)

$$\begin{aligned} x(t) &= (\sin 2t + \cos t)^2 \\ &= \sin^2 2t + 2 \sin 2t \cos t + \cos^2 t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t + (\sin(2t+t) + \sin(2t-t)) + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 4t + \sin 3t + \frac{1}{2} \cos 2t + \sin t + 1 \end{aligned}$$

由于 $\cos 4t, \sin 3t, \cos 2t, \sin t$ 的周期分别为 $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, 2\pi$.

它们两两间的周期之比为有理数, 因此 $x(t)$ 为周期信号, 周期为它们的最小公倍数 2π .

• (3)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos 2t + 1 + \sin t + \sin 2t + \sin 3t}{\cos t} \\ &= \frac{2 \cos^2 t + \sin t + 2 \sin t \cos t + 3 \sin t - 4 \sin^3 t}{\cos t} \\ &= \frac{2 \cos^2 t + 4 \sin t + 2 \sin t \cos t - 4 \sin t(1 - \cos^2 t)}{\cos t} \\ &= \frac{2 \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + 4 \sin t \cos^2 t}{\cos t} \\ &= \frac{2 \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + 2 \sin 2t \cos t}{\cos t} \\ &= 2 \cos t + 2 \sin t + 2 \sin 2t \end{aligned}$$

其中 $\cos t, \sin t, \sin 2t$ 的周期分别为 $2\pi, 2\pi, \pi$.

它们两两间的周期之比为有理数, 因此 $x(t)$ 为周期信号, 周期为它们的最小公倍数 2π .

• (4)

$$x(t) = \sin et + \cos \pi t$$

其中 $\sin et, \cos \pi t$ 的周期分别为 $\frac{2\pi}{e}, 2$.

由于 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{e}$ 不清楚是有理数还是无理数, 因此无法判定 $x(n)$ 的周期性.

• (5)

$$x(n) = \sin 2kn + \cos 3kn$$

$$\text{若令 } \sin 2k(n + N) = \sin 2kn$$

$$\text{则我们可知 } 2kN = 2\pi m_1$$

$$\text{即 } 2kN \text{ 是 } 2\pi \text{ 的整数倍, 且周期为 } N = \frac{\pi m_1}{k}$$

$$\text{若令 } \cos 3k(n + N) = \cos 3kn$$

$$\text{则我们可知 } 3kN = 2\pi m_2$$

$$\text{即 } 3kN \text{ 是 } 2\pi \text{ 的整数倍, 且周期为 } N = \frac{2\pi m_2}{3k}$$

$$\text{如果同时有 } 2kN = 2\pi m_1 \text{ 与 } 3kN = 2\pi m_2$$

$$\text{则我们两式相减有 } kN = 2\pi(m_2 - m_1), \text{ 即 } kN \text{ 是 } 2\pi \text{ 的整数倍,}$$

且 kN 是 2π 的整数倍也可以推出 $2kN$ 和 $3kN$ 是 2π 的整数倍.

若未知 k 为多少, 则无法判定 $x(n)$ 的周期性.

若存在正整数 N 使得其满足 kN 是 2π 的整数倍, 则有 $x(n)$ 为周期信号, 且周期为 $N = \frac{2\pi m}{k}$, 其中 m 是使得 $kN = 2\pi m$ 成立的最小正整数.

若不存在正整数 N 使得其满足 kN 是 2π 的整数倍, 则 $x(n)$ 不是周期信号.

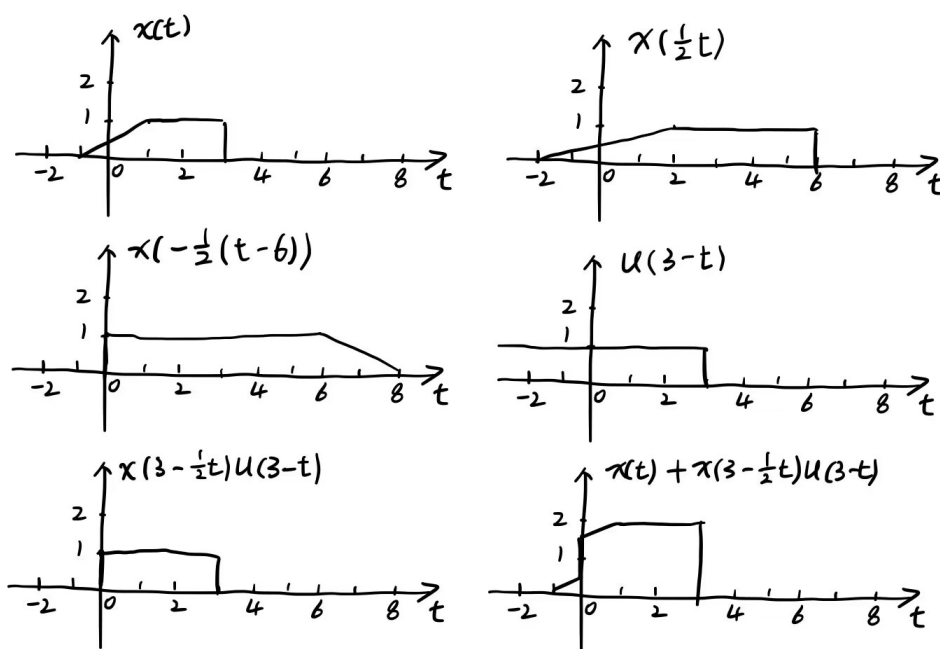
2 [22pts] 连续信号的性质与变换

已知信号

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1), & t \in [-1, 1] \\ 1, & t \in [1, 3] \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

- (1) 求 $x(t) + x(3 - \frac{1}{2}t)u(3 - t)$ 的表达式和图像。
- (2) 求 $x'(t) - x''(t)$ 的表达式和图像。(冲激偶函数用 $\delta'(t)$ 表示, 其图像为原点向 y 轴正负半轴分别延伸的箭头)
- (3) 设 $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} [x(t + 4n) + x(t - 4n)]$, $h(t)$ 是否为能量信号或功率信号? 请说明理由。

• (1)



最后的图像为右下角所示, 表达式为:

$$x(t) + x(3 - \frac{1}{2}t)u(3 - t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1), & t \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2}(t+3), & t \in [0, 1] \\ 2, & t \in [1, 3] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

• (2)

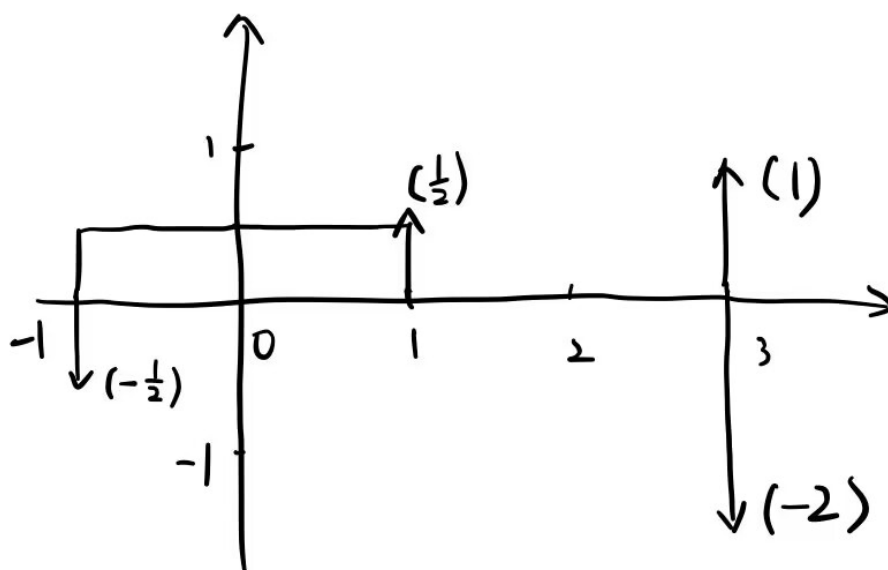
$$x'(t) = -\delta(t-3) + y(t), \text{ 其中 } y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [-1, 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x''(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) - \frac{1}{2}\delta(t-1) - \delta'(t-3)$$

因此有

$$x'(t) - x''(t) = y(t) - \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1) - \delta(t-3) + \delta'(t-3)$$

图像为:



• (3)

由于 $x(t)$ 只在 $t \in [-1, 3]$ 处有正值, 其他情况下 $x(t) = 0$, 因此有 $x(t), x(t+4n), x(t-4n), n = 1, 2, \dots, \infty$ 互不冲突, 即任取 $t \in (-\infty, \infty)$ 都仅有其中一个函数值非零.

展开 $h(t)$ 即可得

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} [x(t+4n) + x(t-4n)] \\ &= 2x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} [x(t+4n) + x(t-4n)] \\ &= \begin{cases} t+1, & t \in [-1, 1] \\ 2, & t \in [1, 3] \\ \frac{1}{2^{n+1}} [(t \mp 4n) + 1], & t \in [-1 \pm 4n, 1 \pm 4n], n = 1, 2, \dots, \infty \\ \frac{1}{2^n}, & t \in [1 \pm 4n, 3 \pm 4n], n = 1, 2, \dots, \infty \end{cases} \end{aligned}$$

能量:

$$\begin{aligned}
 W &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |h(t)|^2 dt \\
 &= \int_{-1}^1 (t+1)^2 dt + \int_{-1}^1 2^2 dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1+4n}^{1+4n} \left(\frac{1}{2^{n+1}}[(t-4n)+1]\right)^2 dt \\
 &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1+4n}^{3+4n} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 dt \\
 &= \frac{8}{3} + 8 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \left(\frac{t+1}{2^{n+1}}\right)^2 dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^3 \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 dt \\
 &= \frac{8}{3} + 8 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}} \cdot \frac{8}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot 2 \\
 &= \frac{8}{3} + 8 + \frac{4}{9} + \frac{4}{3} \\
 &= \frac{112}{9}
 \end{aligned}$$

功率: $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} W = 0$

因此可知 $h(t)$ 是能量信号.

3 [28pts] 卷积的计算

计算下列各小题的结果：

(1) 设

$$x(t) = \begin{cases} 2t + 1, & t \in [-1, 1] \\ 3, & t \in [1, 3] \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

试求 $x(t) * x(t)$ 的结果。

(2) 求 $y(t) = [2e^{-2(t-1)}u(t-2)] * [3e^{-3(t+1)}u(t-1)]$ 的表达式。

(3) 设 $x(n) = \{1, 1, 4, 5, 1, 4\}$, $y(n) = \{1, 9, 1, 9, 8, 1\}$, 求 $x(n) * y(n)$.

(4) 设

$$x(n) = \begin{cases} n, & n = 1, 2, \dots, k \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

试求 $x(n) * x(n)$ 的结果。

• (1)

当 $t < -2$ 时, 有 $x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau = 0$

当 $-2 \leq t < 0$ 时,

$$\begin{aligned} x(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-1}^{t+1} (2\tau+1)(2(t-\tau)+1)d\tau \\ &= \int_{-1}^{t+1} (-4\tau^2 + 4t\tau + 2t+1)d\tau \\ &= \left(-\frac{4}{3}\tau^3 + 2t\tau^2 + (2t+1)\tau\right)\Big|_{-1}^{t+1} \\ &= \left(-\frac{4}{3}(t+1)^3 + 2t(t+1)^2 + (2t+1)(t+1)\right) \\ &\quad - \left(-\frac{4}{3}(-1)^3 + 2t(-1)^2 + (2t+1)(-1)\right) \\ &= \frac{2t^3}{3} + 2t^2 + t - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

当 $0 \leq t < 2$ 时,

$$\begin{aligned}
x(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-1}^{t-1} (2\tau+1)d\tau + \int_{t-1}^1 (2\tau+1)(2(t-\tau)+1)d\tau \\
&\quad + \int_1^{t+1} (2(t-\tau)+1)d\tau \\
&= (\tau^2 + \tau)|_{-1}^{t-1} + \left(-\frac{4}{3}\tau^3 + 2t\tau^2 + (2t+1)\tau\right)|_{t-1}^1 \\
&\quad + (-\tau^2 + (2t+1)\tau)|_1^{t+1} \\
&= t(t-1) + \left(-\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 7t - \frac{2}{3}\right) + t(t-1) \\
&= -\frac{2t^3}{3} + 5t - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

当 $2 \leq t < 4$ 时,

$$\begin{aligned}
x(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{t-3}^1 (2\tau+1)d\tau + \int_1^{t-1} 1d\tau + \int_{t-1}^3 (2(t-\tau)+1)d\tau \\
&= (\tau^2 + \tau)|_{t-3}^1 + \tau|_1^{t-1} + (-\tau^2 + (2t+1)\tau)|_{t-1}^3 \\
&= -2t^2 + 11t - 10
\end{aligned}$$

当 $4 \leq t < 6$ 时,

$$\begin{aligned}
x(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{t-3}^3 1d\tau \\
&= 6 - t
\end{aligned}$$

当 $t \geq 6$ 时, $x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau = 0$

因此我们有

$$x(t) * x(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ \frac{2t^3}{3} + 2t^2 + t - \frac{2}{3}, & 0 \leq t < 2 \\ -2t^2 + 11t - 10, & 2 \leq t < 4 \\ 6 - t, & 4 \leq t < 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

• (2)

当 $t < 3$ 时, $y(t) = 0$

当 $t \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}
y(t) &= [2e^{-2(t-1)}u(t-2)] * [3e^{-3(t+1)}u(t-1)] \\
&= \int_2^{t-1} [2e^{-2(\tau-1)}] \cdot [3e^{-3(t-\tau+1)}] d\tau \\
&= \int_2^{t-1} 6e^{\tau-3t-1} d\tau \\
&= 6e^{\tau-3t-1} \Big|_2^{t-1} \\
&= 6e^{-2t-2} - 6e^{1-3t}
\end{aligned}$$

因此有

$$y(t) = \begin{cases} 6e^{-2t-2} - 6e^{1-3t}, & t \geq 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases}$$

• (3)

当 $n = 0$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 = 1$

当 $n = 1$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 9 + 1 \times 1 = 10$

当 $n = 2$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 1 \times 9 + 4 \times 1 = 14$

当 $n = 3$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 9 + 1 \times 1 + 4 \times 9 + 5 \times 1 = 51$

当 $n = 4$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 8 + 1 \times 9 + 4 \times 1 + 5 \times 9 + 1 \times 1 = 67$

当 $n = 5$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 1 \times 8 + 4 \times 9 + 5 \times 1 + 1 \times 9 + 4 \times 1 = 63$

当 $n = 6$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 4 \times 8 + 5 \times 9 + 1 \times 1 + 4 \times 9 = 115$

当 $n = 7$ 时, $x(n) * y(n) = 4 \times 1 + 5 \times 8 + 1 \times 9 + 4 \times 1 = 57$

当 $n = 8$ 时, $x(n) * y(n) = 5 \times 1 + 1 \times 8 + 4 \times 9 = 49$

当 $n = 9$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 4 \times 8 = 33$

当 $n = 10$ 时, $x(n) * y(n) = 4 \times 1 = 4$

因此有 $x(n) * y(n) = \{1, 10, 14, 51, 67, 63, 115, 57, 49, 33, 4\}$

• (4)

$x(n)$ 也可以改写为

$$x(n) = \begin{cases} n, & n = 0, 1, 2, \dots, k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当 $0 \leq n \leq k$ 时,

$$x(n) * x(n) = \sum_{i=0}^n x(i)x(n-i) = \sum_{i=0}^n i(n-i) = \frac{1}{6}n(n^2-1)$$

当 $k+1 \leq n \leq 2k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
x(n) * x(n) &= \sum_{i=n-k}^k x(i)x(n-i) \\
&= \sum_{i=n-k}^k i(n-i) \\
&= n \sum_{i=n-k}^k i - \sum_{i=n-k}^k i^2 \\
&= n \cdot \frac{n(2k-n+1)}{2} - \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \Big|_{n-k-1}^k \\
&= -\frac{1}{6}(2k-n+1)(2k^2-2kn+2k-n^2-n)
\end{aligned}$$

因此可得

$$x(n) * x(n) = \begin{cases} \frac{1}{6}n(n^2-1), & 0 \leq n \leq k \\ -\frac{1}{6}(2k-n+1)(2k^2-2kn+2k-n^2-n), & k+1 \leq n \leq 2k+1 \end{cases}$$

此处的 $x(n) * x(n)$ 依然是从 0 开始的, 而非从 1 开始的.

4 [30pts] 系统微分方程的求解

求解以下微分方程:

(1) $y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) + 12y(t) = 2\sin(2t)$ ($t \geq 0$), 边界条件 $y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 1$.

(2) $y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{16}y(n-3) = x(n) - x(n-1)$ ($n \geq 0$), 其中 $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 边界条件 $y(0) = y(1) = 0, y(2) = 1$ 。

• (1)

求齐次解, 特征方程为

$$\alpha^2 + 7\alpha + 12 = (\alpha + 3)(\alpha + 4) = 0$$

$$\text{齐次解为 } y_h(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-4t}$$

$$\text{求特解, 设特解形式为 } y_p(t) = B_1 \cos(2t) + B_2 \sin(2t)$$

带入可得

$$\begin{aligned} & y_p^{(2)}(t) + 7y_p^{(1)}(t) + 12y_p(t) \\ &= -4B_1 \cos(2t) - 4B_2 \sin(2t) - 14B_1 \sin(2t) + 14B_2 \cos(2t) \\ &\quad + 12B_1 \cos(2t) + 12B_2 \sin(2t) \\ &= (8B_1 + 14B_2) \cos(2t) + (-14B_1 + 8B_2) \sin(2t) \\ &= 6 \sin(2t) \end{aligned}$$

$$\text{因此有 } \begin{cases} 8B_1 + 14B_2 = 0 \\ -14B_1 + 8B_2 = 6 \end{cases} \quad \text{即有 } \begin{cases} B_1 = -\frac{21}{65} \\ B_2 = \frac{12}{65} \end{cases}$$

因此我们有

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-4t} - \frac{21}{65} \cos(2t) + \frac{12}{65} \sin(2t)$$

根据初始条件有

$$\begin{cases} y(0) = A_1 + A_2 - \frac{21}{65} = 0 \\ y^{(1)}(0) = -3A_1 - 4A_2 + \frac{24}{65} = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } A_1 = \frac{25}{13}, A_2 = -\frac{8}{5}$$

$$\text{因此有 } y(t) = \frac{25}{13} e^{-3t} - \frac{8}{5} e^{-4t} - \frac{21}{65} \cos(2t) + \frac{12}{65} \sin(2t)$$

• (2)

$$\text{求齐次解, 特征方程为 } \alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(4\alpha + 1)(2\alpha - 1)^2 = 0$$

特征根为 $\alpha_1 = -\frac{1}{4}, \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$

齐次解为 $y_h(n) = A_1(-\frac{1}{4})^n + (A_2 + A_3n)(\frac{1}{2})^n$

设特解为 $y_p(n) = C(\frac{1}{3})^n$

带入可得

$$\begin{aligned} & y_p(n) - \frac{3}{4}y_p(n-1) + \frac{1}{16}y_p(n-3) \\ &= C(\frac{1}{3})^n - \frac{3}{4}C(\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{1}{16}C(\frac{1}{3})^{n-3} \\ &= \frac{7}{16}C(\frac{1}{3})^n \\ &= x(n) - x(n-1) \\ &= (\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{3})^{n-1} \\ &= -2 \cdot (\frac{1}{3})^n \end{aligned}$$

因此可得 $C = -2 \times \frac{16}{7} = -\frac{32}{7}$

特解为: $y_p(n) = -\frac{32}{7} \cdot (\frac{1}{3})^n$

因此我们有

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = A_1(-\frac{1}{4})^n + (A_2 + A_3n)(\frac{1}{2})^n - \frac{32}{7} \cdot (\frac{1}{3})^n$$

我们带入初始条件得

$$\begin{cases} y(0) = A_1 + A_2 - \frac{32}{7} = 0 \\ y(1) = -\frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{2} - \frac{32}{21} = 0 \\ y(2) = \frac{A_1}{16} + \frac{A_2}{4} + \frac{A_3}{2} - \frac{32}{63} = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1136}{567} \\ A_2 = \frac{208}{81} \\ A_3 = \frac{40}{27} \end{cases}$$

因此有

$$y(n) = \frac{1136}{567}(-\frac{1}{4})^n + (\frac{208}{81} + \frac{40}{27}n)(\frac{1}{2})^n - \frac{32}{7} \cdot (\frac{1}{3})^n$$