# 第五次作业

## 5.2

设小圆球速度为  $v_1$ , 球壳速度为  $v_2$ 

对小圆球和球壳水平动量守恒得:

$$\therefore mv_1 + mv_2 = 0$$

对时间求积分得:

$$x_1 + x_2 = 0$$

∵静止时小圆球位于球壳底部, 两者相对位移为 R

$$\therefore x_2 = \frac{1}{2}R$$

$$\therefore$$
 球壳移动了  $\frac{1}{2}R$ 

## 5.3

设落在桌面上的链条质量为m'

 $\therefore$  当前接触桌面的链接的原始高度  $h=rac{m'}{m}L$ 

$$\because rac{1}{2}\Delta mv^2 = \Delta mgh$$

$$\Delta m = rac{v\Delta t}{L}m$$

$$F\Delta t = \Delta m(v-0)$$

$$\therefore F = \frac{mv^2}{L} = \frac{2mgh}{L} = 2m'g$$

桌面对链条的力由支持力和反冲力组成

$$\therefore N = m'g + F = 3m'g$$

桌面作用于链条上的力为 3m'g

#### 5.11

#### (a)

设  $m_1$  撞前速度为  $v_0$ , 沿 x 轴正方向, 撞后速度为  $oldsymbol{v}_1$ ,  $m_2$  撞后速度为  $oldsymbol{v}_2$ 

#### 由动量守恒:

$$m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = 0$$
  $m_1v_0 = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}$ 

#### 由能量守恒:

$$\because \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1x}^2 + \frac{1}{2}m_1v_{1y}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2x}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2y}^2$$

#### 将前两个式子带入后一个式子得

$$\therefore 0 = (m_1 + m_2)(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + (m_1 - m_2)v_0^2 - 2m_1v_0v_{1x}$$

$$\therefore \cos^2 heta_1 = rac{v_{1x}^2}{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = rac{m_1 + m_2}{(m_2 - m_1)(rac{v_0}{v_{1x}})^2 + 2m_1(rac{v_0}{v_{1x}})}$$

分母可以看作一个以 
$$\dfrac{v_0}{v_{1x}}$$
 的二次函数, 对称轴为  $\dfrac{v_0}{v_{1x}}=\dfrac{m_1}{m_1-m_2}$ 

当 $m_1 > m_2$ 时,

$$\dfrac{m_1}{m_1-m_2}>0$$
,此时带入可取得最大散射角  $heta_m$ 

$$\therefore \cos^2 heta_m = rac{m_1 + m_2}{(m_2 - m_1)(rac{m_1}{m_1 - m_2})^2 + rac{2m_1^2}{m_1 - m_2}} = 1 - rac{m_2^2}{m_1^2}$$

$$\cos^2 \theta_m \in [0,1]$$

$$v_{1x} > 0$$

$$\therefore 0 \le \theta_m \le \frac{\pi}{2}$$

## (b)

当 $m_1=m_2$ 时,

#### 由动量守恒得:

$$m_1 oldsymbol{v}_0 = m_1 oldsymbol{v}_1 + m_2 oldsymbol{v}_2$$

由能量守恒得:

$$rac{1}{2}m_1oldsymbol{v}_0^2 = rac{1}{2}m_1oldsymbol{v}_1^2 + rac{1}{2}m_2oldsymbol{v}_2^2$$

一式去掉质量两边平方得

$$oldsymbol{v}_0^2 = oldsymbol{v}_1^2 + oldsymbol{v}_2^2 + 2v_1v_2\cos heta$$

减去去质量二式得

$$2v_1v_2\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=0$$

$$\therefore \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

### (c)

当  $m_1 < m_2$  时,

由 (a) 可知  $\cos^2 \theta \in [0,1]$ 

当粒子正碰时,

解得 
$$v_{1x}=rac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0<0, v_{1y}=0$$

散射角  $\theta_1$  为最大值  $\pi$ .

当粒子  $m_1$  近似于与粒子  $m_2$  插肩而过时,可以看作没有发生碰撞,

散射角  $\theta_1$  为最小值 0.

因为这个过程是连续且动态的,

所以  $\theta_1$  可以取到 0 到  $\pi$  之间的所有值.

### 5.12

# (a)

对于动量变化:

$$\Delta p = 
ho a_2(v_2\Delta t)v_2 - 
ho a_1(v_1\Delta t)v_1 = 
ho a_2v_2\Delta t(v_2-v_1)$$

对于冲量:

$$I=p_1a_1\Delta t-p_2a_2\Delta t+p_1(a_2-a_1)\Delta t=(p_1-p_2)a_2\Delta t$$

由动量定理可知,  $\Delta p = I$ 

因此可得

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2)$$

(b)

伯努利方程为  $p+rac{1}{2}
ho v^2+
ho gz=C$ , 其中 C 为常量.

本题中为水平管道, 高度 z 不变.

即有

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gz = C$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gz = C$$

两式相减并移项得

$$p_2-p_1=rac{1}{2}
ho(v_1^2-v_2^2)$$

(c)

压强的损失:

$$\Delta p = rac{1}{2}
ho(v_1^2-v_2^2) - 
ho v_2(v_1-v_2) = rac{1}{2}
ho(v_1-v_2)^2$$

可以类比于非弹性碰撞.

5.13

(a)

设大气压为  $p_0$ 

对D点到C点由伯努利公式可得

$$\because p_0+
ho g(d+h_2)=p_0+rac{1}{2}
ho v_c^2$$

$$\therefore v_c = \sqrt{2g(d+h_2)}$$

(b)

对 B 点到 C 点由伯努利公式可得

$$p_B + 
ho g(d+h_1+h_2) + rac{1}{2}
ho v_B^2 = p_0 + rac{1}{2}
ho v_c^2$$

又因为管道内液体流速相同, 我们有

$$v_B = v_C$$

$$\therefore p_B = p_0 - \rho g(d + h_1 + h_2)$$

#### (c)

由 (b) 可知

$$h_1=rac{p_0-p_B}{
ho q}-d-h_2$$

当  $p_B = 0$  时取到最大值

$$h_{1max}=rac{p_0}{
ho g}-d-h_2$$

#### 6.5

对质心沿着 x 轴的运动:

$$\therefore x = L \cos \theta$$

$$\therefore \dot{x} = -L\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{x} = -L(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta})$$

$$\therefore N_1 = m\ddot{x} = -mL(\cos heta\dot{ heta}^2 + \sin heta\ddot{ heta})$$

以木板与地面的接触点为旋转轴的转动参考系, 有扭矩方程:

$$N_1 \cdot 2L\sin heta - mgL\cos heta = (\int_0^{2L}
ho^2rac{m}{2L}\mathrm{d}
ho)\ddot{ heta} = rac{4}{3}mL^2\ddot{ heta}$$

同时令  $N_1=0$  可得

$$\dot{ heta}^2 = -rac{\sin heta}{\cos heta}\ddot{ heta}^2 = rac{\sin heta}{\cos heta}\cdotrac{mgL\cos heta}{rac{4}{3}mL} = rac{3g}{4L}\sin heta$$

由能量守恒可得:

$$mgL\sin heta_0 = mgL\sin heta + rac{1}{2}mL^2\dot{ heta}^2 + rac{1}{2}[rac{1}{12}m(2L)^2]\dot{ heta}^2$$

联解上述公式, 解得

$$\sin heta = rac{2}{3} \sin heta_0$$

所以可知木板高度为原来的  $\frac{2}{3}$  时, 与顶端脱离.