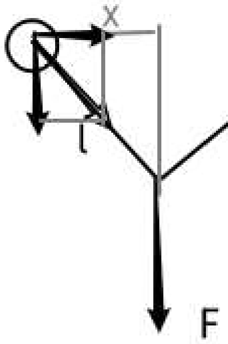
3.1 3.2 3.5 3.10 3.13 3.14

第三次习题

3.1



如图, 对单独一个质点分析, 由图中几何关系可得:

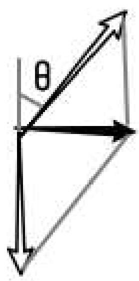
$\because \dfrac{-\frac{1}{2}F}{ma_x} = \dfrac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}$

$\therefore a_x = -\dfrac{F}{2m} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}$

当 $x = l$ 时:

每个质点速度为零, 不存在与 F 同向或反向的加速度, 与 F 垂直的方向上存在较大的加速度.

3.2



(a)

对立方块 m:

$mg = F\cos\theta$

$ma = F\sin\theta$

$\therefore a = g\tan\theta$

$\because$ 楔块和立方块相对静止, 即有相同的加速度

$\therefore$ 楔块应该以 $g\tan\theta$ 大小的水平加速度运动

(b)

对相对静止时的系统:

$\therefore F = (m+m')a = (m+m')g\tan\theta$

若没有外力作用, 以楔块为参考系 S':

以向上和向右为正方向.

假设楔块相对于地面的加速度为 a, 立方块相对于楔块的水平加速度为 $\ddot{x}'$, 竖直加速度为 $\ddot{y}'$, 压力为 F.

对小物块于 S':

$$\begin{aligned}\therefore\ & F\sin\theta - ma = m\ddot{x}' \quad (1)\\ & F\cos\theta - mg = m\ddot{y}' \quad (2)\end{aligned}$$

对楔块于 S:

$\therefore -F\sin\theta = m'a \quad (3)$

分别合并 (1)(3) 和 (2)(3) 得:

$$\begin{aligned}& -ma - m'a = m\ddot{x}' \quad (4)\\ & \frac{m\ddot{y}' + mg}{\cos\theta} = -\frac{m'a}{\sin\theta} \quad (5)\end{aligned}$$

$\because -\mathrm{d}y = \mathrm{d}x'\tan\theta$

$\therefore -\ddot{y}' = \ddot{x}'\tan\theta \quad (6)$

联解 (5)(6) 得

$$\frac{-m\ddot{x}'\tan\theta + mg}{\cos\theta} = -\frac{m'a}{\sin\theta} \quad (7)$$

联解 (4)(7) 得

$$a=-\frac{mg}{m'}\frac{m'\sin\theta}{m'+m\sin^2\theta}$$

$$\ddot{x}'=\frac{(m+m')g}{m'}\frac{m'\sin\theta}{m'+m\sin^2\theta}$$

最终可得

$$\ddot{x}=\ddot{x}'+a=\frac{m'g\sin\theta}{m'+m\sin^2\theta}$$

$$\ddot{y}=\ddot{y}'=-\ddot{x}'\tan\theta=-\frac{(m+m')\tan\theta}{m'}\frac{m'g\sin\theta}{m'+m\sin^2\theta}$$

$\therefore$ 楔块以加速度 a 在桌面上匀加速直线运动.

立方块 m 水平加速度和竖直加速度恒定, 且初速度为零, 说明是沿着一定的角度 α 做匀加速直线运动, 且 $\tan\alpha=|\dfrac{\ddot{y}}{\ddot{x}}|=\dfrac{m+m'}{m'}\tan\theta$.

3.5

设物体的质量为 m.

(a)

对下落稳定时:

$$\boldsymbol{F}_d+m\boldsymbol{g}=m\boldsymbol{g}-k\boldsymbol{v}=0$$

$$\therefore\boldsymbol{v}=\frac{m\boldsymbol{g}}{k}$$

(b)

对下落过程:

$$\boldsymbol{F}_d+m\boldsymbol{g}=m\boldsymbol{g}-k\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{a}$$

取竖直向下为正方向:

$$mg-kv=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore\frac{\mathrm{d}t}{m}=\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}$$

$$\therefore \int \frac{\mathrm{d}t}{m} = \int \frac{\mathrm{d}v}{mg - kv}$$

$$\therefore \frac{t}{m} + C = -\frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{d}(mg - kv)}{mg - kv} = -\frac{1}{k}\ln(mg - kv)$$

当 $t = 0$ 时, $v = 0$, 带入可得

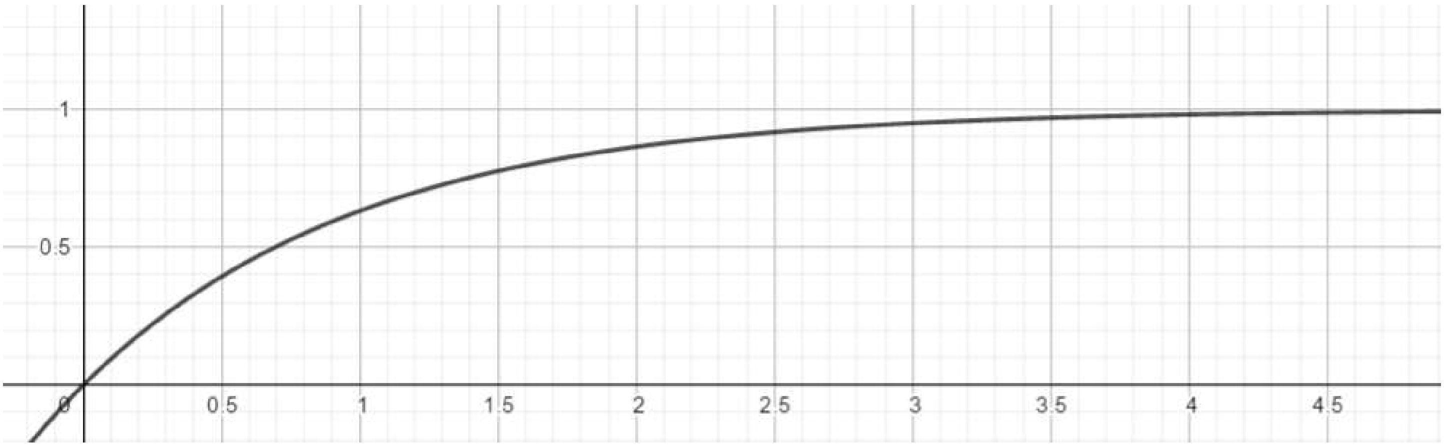
$$\therefore C = -\frac{1}{k}\ln(mg)$$

$$\therefore \ln(mg - kv) = \ln(mg) - \frac{k}{m}t$$

$$\therefore mg - kv = e^{\ln(mg) - \frac{k}{m}t} = \frac{mg}{e^{\frac{k}{m}t}}$$

$$\therefore v = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{ke^{\frac{k}{m}t}}$$

如图:



(c)

$$\therefore a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ge^{-\frac{k}{m}t}$$

如图:

(d)

$$\therefore x=\int v\mathrm{dt}=\frac{mgt}{k}+\frac{m^2g}{k^2}\int e^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}(-\frac{k}{m}t)=\frac{mgt}{k}+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}+C$$

当 $t=0$ 时, 带入 $x=0$ 得:

$$\therefore x=\frac{m^2g}{k^2}e^0+C=0$$

$$\therefore C=-\frac{m^2g}{k^2}$$

$$\therefore x=\frac{mgt}{k}+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m^2g}{k^2}$$

如图:

3.10

假设 μ 的单位为 $\mathrm{L/s}$, 易知其与 $\mathrm{kg/s}$ 有相同的数量关系.

$$\therefore \Delta m=\mu\Delta t$$

$$F\Delta t=\Delta mv-(-\Delta mv)$$

$$\therefore F\Delta t=2\Delta mv=2\mu v\Delta t$$

$$\therefore F=2\mu v$$

3.13

(a)

对质点恰好达到轨道最高点:

$$\because mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgr$$

$$\therefore v_m = \sqrt{5gr}$$

(b)

对 P 点:

$$\because mg\sin\theta = m\frac{v_P^2}{r}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 + mg(r + r\sin\theta)$$

$$\therefore v_P^2 = v_0^2 - 2gr(1+\sin\theta)$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{v_P^2}{gr} = \frac{v_0^2}{gr} - 2 - 2\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{v_0^2}{3gr} - \frac{2}{3} = 0.334375$$

$$\therefore \theta = \arcsin 0.334375$$

3.14

(a)

由能量守恒:

$$\therefore mg(l+\Delta l) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

对最底端受力分析:

$$\therefore k\Delta l - mg = m\frac{v^2}{l+\Delta l}$$

$$\therefore \Delta l = \frac{3mg}{k}$$

(b)

将 $\Delta l = \dfrac{3mg}{k}$ 带入上式:

$$\therefore v^2 = 2g(l + \frac{3mg}{k}) - \frac{k}{m}(\frac{3mg}{k})^2 = 2gl - \frac{3mg^2}{k}$$

$$\therefore v = \sqrt{2gl - \frac{3mg^2}{k}}$$

因为这种情况下有重力势能转为了弹性势能, 相比于悬线来说自然速度更小.

观察上面给出的式子也可以得出该结论.