Ch 4 连续型随机变量

回顾前一次课

方差：$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

均匀分布 $X \sim U(a,b)$: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

指数分布 $X \sim e(\lambda)$: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

指数分布的无记忆性: $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 定义 、图像

- 若$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = (X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$
- 若$X \sim N(0,1)$, 则 $Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

正态分布的期望和方差

若$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$\mathrm{E}(X) = \mu \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

若$X \sim N(0,1)$, 则

$$\mathrm{E}(X) = 0 \qquad \mathrm{Var}(X) = 1$$

正态分布的估计

若$X \sim N(0,1)$, 对任意$\epsilon > 0$有

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2/2}$$

[Mill不等式] 若$X \sim N(0,1)$, 对任意$\epsilon > 0$有

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \min\left(1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{2}}}{\epsilon}\right)$$

正态分布的估计

设$N(0,1)$ 的分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求概率$P(a \le X \le b)$

Ch 4.3 连续随机变量函数

问题与数学工具

已知连续随机变量X的概率密度为$f_X(x)$

给定的连续函数$g(x)$: $R \to R$

问题: 新的随机变量$Y = g(X)$的概率密度$f_Y(y)$?

数学工具 — 积分求导公式

$$F(y) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x)dx$$

$$F'(y) = f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y) - f\big(\psi(y)\big)\psi'(y)$$

求解步骤

- 求解Y=g(X)的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

- 利用分布函数和概率密度关系求解密度函数

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

例题

设连续型随机变量X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0<x<4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求$Y=2X+8$的密度函数

例题

设随机变量X概率密度为$f_X(x)$, 求$Y = X^2$的概率密度

课题练习题

设随机变量X概率密度为$f_X(x)$, 求$Y = |X|$的概率密度

定理

随机变量X的概率密度为$f_X(x)$，其中$x \in (-\infty, +\infty)$. 函数$y = g(x)$处处可导且严格单调（即$g'(x) > 0$ 或 $g'(x) < 0$), 令其反函数$x = g^{-1}(y) = h(y)$, 则随机变量$Y = g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\big(h(y)\big)|h'(y)| & y \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$

上述定理推广至区间函数$x \in [a, b]$

此时$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$和$\beta = \max\{g(a), g(b)\}$

例题

设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则变量$Y = aX + b\ (a > 0)$服从正态分布$N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

例题

设连续随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求随机变量$Y = e^X$的概率密度函数

定理

设随机变量X的分布函数是严格单调的连续函数，则

$$Y = F(X) \sim U(0,1)$$