

数字信号处理

作业一

你的名字 你的学号

2022 年 11 月 17 日

作业提交注意事项

- (1) 本次作业提交截止时间为 **2022/11/27 23:59:59**，截止时间后不再接收作业，本次作业记零分；
- (2) 作业提交方式：使用此 LaTeX 模板书写解答，只需提交编译生成的 pdf 文件，将 pdf 文件以 ftp 方式上传，账号为 dsp2022，密码为 12345asd!@。请远程连接 www.lamda.nju.edu.cn，提交到/D:/courses/DSP2022/HW/HW1 路径下。
- (3) 文件命名方式：学号-姓名-作业号-v 版本号, 例 MG1900000-张三-1-v1；如果需要更改已提交的解答，请在截止时间之前提交新版本的解答，并将版本号加一；
- (4) 未按照要求提交作业，或 pdf 命名方式不正确，将会被扣除部分作业分数。

1 [20pts] 信号的周期性

判断下列信号的周期性，并回答是、否或无法判断。如果是周期信号，请给出其最小正周期。

(1) $x(t) = \sin^2 t + \cos \pi t$

(2) $x(t) = (\sin 2t + \cos t)^2$

(3) $x(t) = \frac{\cos 2t + 1 + \sin t + \sin 2t + \sin 3t}{\cos t}$

(4) $x(t) = \sin et + \cos \pi t$

(5) $x(n) = \sin 2kn + \cos 3kn$, k 为某一正实数。

• (1)

$$x(t) = \sin^2 t + \cos \pi t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t + \cos \pi t$$

其中 $\cos 2t$ 周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $\cos \pi t$ 的周期为 $T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

由于 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$ 为无理数, 因此 $x(t)$ 不是周期信号。

• (2)

$$x(t) = (\sin 2t + \cos t)^2$$

$$= \sin^2 2t + 2 \sin 2t \cos t + \cos^2 t$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t + (\sin(2t+t) + \sin(2t-t)) + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 4t + \sin 3t + \frac{1}{2} \cos 2t + \sin t + 1$$

由于 $\cos 4t, \sin 3t, \cos 2t, \sin t$ 的周期分别为 $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, 2\pi$.

它们两两间的周期之比为有理数, 因此 $x(t)$ 为周期信号, 周期为它们的最小公倍数 2π .

• (3)

$$x(t) = \frac{\cos 2t + 1 + \sin t + \sin 2t + \sin 3t}{\cos t}$$

$$= \frac{2 \cos^2 t + \sin t + 2 \sin t \cos t + 3 \sin t - 4 \sin^3 t}{\cos t}$$

$$= \frac{2 \cos^2 t + 4 \sin t + 2 \sin t \cos t - 4 \sin t(1 - \cos^2 t)}{\cos t}$$

$$= \frac{2 \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + 4 \sin t \cos^2 t}{\cos t}$$

$$= \frac{2 \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + 2 \sin 2t \cos t}{\cos t}$$

$$= 2 \cos t + 2 \sin t + 2 \sin 2t$$

其中 $\cos t, \sin t, \sin 2t$ 的周期分别为 $2\pi, 2\pi, \pi$.

它们两两间的周期之比为有理数, 因此 $x(t)$ 为周期信号, 周期为它们的最小公倍数 2π .

• (4)

$$x(t) = \sin et + \cos \pi t$$

其中 $\sin et, \cos \pi t$ 的周期分别为 $\frac{2\pi}{e}, 2$.

由于 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{e}$ 为无理数, 因此 $x(t)$ 不是周期信号.

• (5)

$$x(n) = \sin 2kn + \cos 3kn$$

其中 $\sin 2kn, \cos 3kn$ 的周期分别为 $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{3k}$.

由于 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2}$ 为有理数, 因此 $x(t)$ 是周期信号, 周期为最小公倍数 $\frac{2\pi}{k}$.

2 [22pts] 连续信号的性质与变换

已知信号

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1), & t \in [-1, 1] \\ 1, & t \in [1, 3] \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

- (1) 求 $x(t) + x(3 - \frac{1}{2}t)u(3 - t)$ 的表达式和图像。
- (2) 求 $x'(t) - x''(t)$ 的表达式和图像。(冲激偶函数用 $\delta'(t)$ 表示, 其图像为原点向 y 轴正负半轴分别延伸的箭头)
- (3) 设 $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} [x(t+4n) + x(t-4n)]$, $h(t)$ 是否为能量信号或功率信号? 请说明理由。

- 你的解答。

3 [28pts] 卷积的计算

计算下列各小题的结果：

(1) 设

$$x(t) = \begin{cases} 2t + 1, & t \in [-1, 1] \\ 3, & t \in [1, 3] \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

试求 $x(t) * x(t)$ 的结果。

(2) 求 $y(t) = [2e^{-2(t-1)}u(t-2)] * [3e^{-3(t+1)}u(t-1)]$ 的表达式。

(3) 设 $x(n) = \{1, 1, 4, 5, 1, 4\}$, $y(n) = \{1, 9, 1, 9, 8, 1\}$, 求 $x(n) * y(n)$.

(4) 设

$$x(n) = \begin{cases} n, & n = 1, 2, \dots, k \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

试求 $x(n) * x(n)$ 的结果。

- 你的解答。

4 [30pts] 系统微分方程的求解

求解以下微分方程：

(1) $y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) + 12y(t) = 2\sin(2t)$ ($t \geq 0$), 边界条件 $y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 1$.

(2) $y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{16}y(n-3) = x(n) - x(n-1)$ ($n \geq 0$), 其中 $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 边界条件 $y(0) = y(1) = 0, y(2) = 1$ 。

- 你的解答。