1.2 作业

思考与练习

1.计算$f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$,其中

$$f(x)=2x^4-x^3+2x^2-x+1,\quad g(x)=x^2-3x-1.$$

2.求k,l,m,使

$$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1.$$

3. 例2中，若$f(x), g(x)$为复数域上多项式. 能否由

$$f^2(x)+g^2(x)=0 \Rightarrow f(x)=g(x)=0 \text{ ?}$$

考虑$f(x)=ix, g(x)=x$. 显然 $f^2(x)+g^2(x)=0$ 但 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$.

4. 证明：在$P[x]$中，如果 $f(x)=h(x)g(x)$，且 $f(x)\neq 0$，那么：

$$\partial(g(x)) \leq \partial(f(x))$$

5. 设R是一个有单位元$1\ (\neq 0)$的环，对于$a\in R$，如果存在$b\in R$，使$ab=ba=1$，则称a是可逆元，称b是a的逆元，记作a^{-1}

证明：如果a是可逆元，那么a的逆元b唯一

1.

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (2x^4-x^3+2x^2-x+1)+(x^2-3x-1) \\ &= 2x^4-x^3+3x^2-4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (2x^4-x^3+2x^2-x+1)(x^2-3x-1) \\ &= 2x^6-x^5+2x^4-x^3+x^2-6x^5+3x^4-6x^3+3x^2-3x-2x^4+x^3-2x^2+x-1 \\ &= 2x^6-7x^5+3x^4-6x^3+2x^2-2x-1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1) \\ =& 2x^4+lx^3-x^2-2kx^3-klx+kx+2x^2+lx-1 \\ =& 2x^4+(l-2k)x^3+x^2+(k+l-kl)x-1 \\ =& 2x^4+5x^3+mx^2-x-1 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} l-2k=5 \\ 1=m \\ k+l-kl=-1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} k=-2 \\ m=1 \\ l=\frac{1}{3} \end{cases}$$

3.

答: 不能由$f^2(x)+g^2(x)=0 \Rightarrow f(x)=g(x)=0$

解:

令$f(x)=ix, g(x)=x$

则此时 $f^2(x)+g^2(x)=0$, 且 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$

4.

证明: 在$P[x]$中, 如果$f(x)=h(x)g(x)$, 且$f(x)\neq 0$, 那么$\partial(g(x))\leq \partial(f(x))$

解:

$$\partial(f(x)) = \partial(h(x)g(x)) = \partial(h(x)) + \partial(g(x))$$

因为

$$f(x) = h(x)g(x) \neq 0$$

所以

$$h(x) \neq 0, g(x) \neq 0$$

$$\partial(h(x)) \geq 0$$

所以

$$\begin{aligned}\partial(f(x)) &= \partial(h(x)) + \partial(g(x)) \\ &\geq \partial(g(x))\end{aligned}$$

5.

设R是一个有单位元1(不等于0)的环, 对于$a \in R$, 如果存在$b \in R$,
使得 ab = ba = 1, 则称a是可逆元, 称b是a的逆元, 记作a^{-1}

证明: 如果a是可逆元, 那么a的逆元唯一

解:

假设a有两个或两个以上的逆元, 设a其中两个逆元为b, c 且 $b \neq c$

则

$$ab = ba = 1, ac = ca = 1$$

所以, 前式减后式得

$$ab - ac = a(b - c) = 0$$

因为$ab = 1$, 则有$a \neq 0$, 则

$$b - c = 0$$

即

$$b = c$$

与题设$b \neq c$不符

所以a的逆元唯一