第七章：根轨迹法

2022年11月4日

本章的**基本要求**：

1. 熟练掌握根轨迹图的绘制

2. 利用根轨迹法设计控制器

内容安排

例7.1 单位负反馈系统的开环传递函数如下，

$$G(s)=\frac{5K_A}{s(s+34.5)}$$

$K_A=200$、1500和13.5时，试分别确定闭环极点并分析系统性能。

解：

$$\phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{5K_A}{s^2+34.5s+5K_A}$$

考察$K_A=200$ $\Rightarrow$ $\phi(s)=\frac{1000}{s^2+34.5s+1000}$

$$\phi(s)=\frac{1000}{s^2+34.5s+1000}$$

$$\omega_n^2=1000,\quad 2\zeta\cdot\omega_n=34.5$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\omega_n=31.6,\\&\zeta=\frac{34.5}{2\omega_n}=0.545\end{aligned}}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.12 \qquad t_s\approx\frac{3}{\zeta\cdot\omega_n}=0.174$$

$$P.O.=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times 100\%=13\%$$

$$N=\frac{t_s}{2\pi/\omega_d}=\frac{t_s\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi}=0.72$$

闭环极点为:

$$S_{1,2}=-17.25\pm j\,26.5$$

考察$K_A = 1500$

$$\omega_n = 86.2;\ \zeta = 0.2$$

此时有：

$$t_p = 0.037,\ t_s = 0.174$$

$$P.O. = 52.7\%$$

闭环极点为：$S_{1,2} = -17.25 \pm j84.5$

调大K_A后，极点位置垂直变化，ζ变小，ω_n变大；t_p变小，$P.O.$变大；而t_s保持不变。

考察$K_A = 13.5$

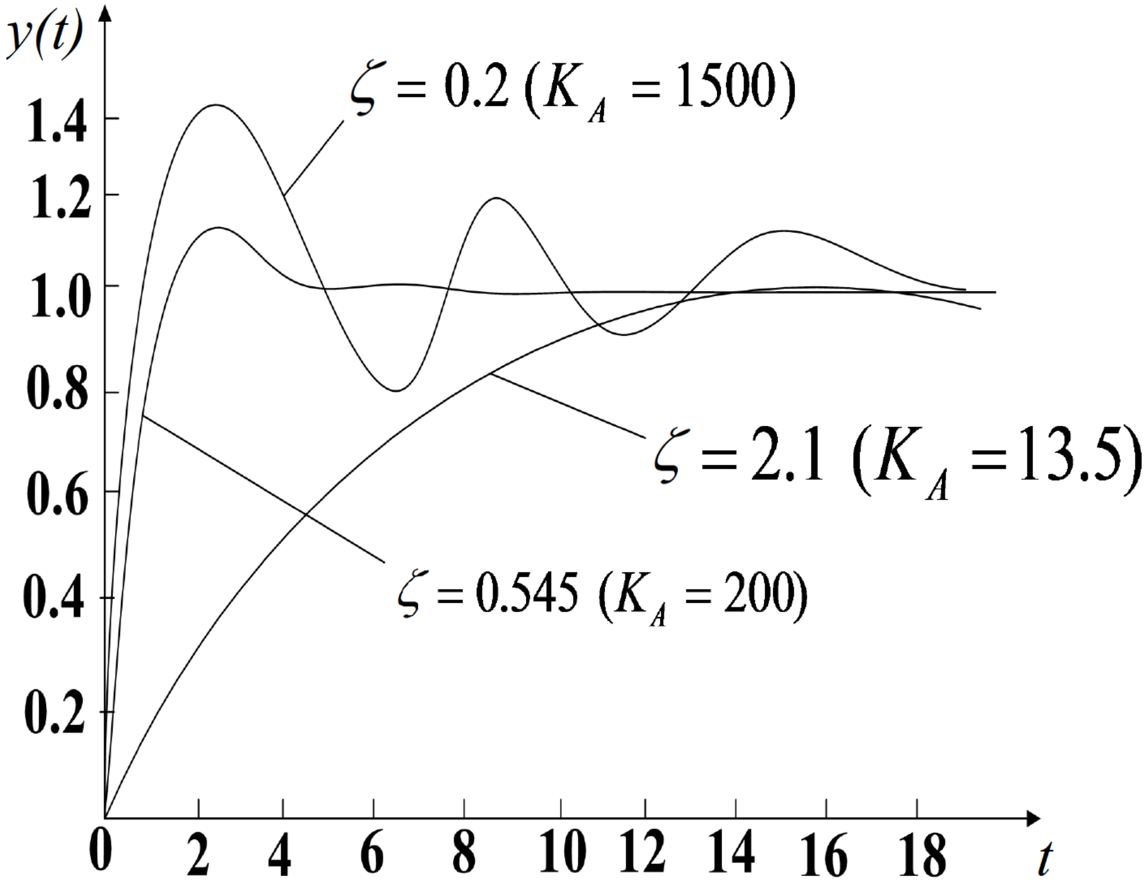
$$\omega_n = 8.22, \zeta = 2.1$$

此时系统变成了过阻尼，调节时间由较大的时间常数决定。

$$\frac{1}{T_1} = \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

$$t_s \approx 3T_1 = 1.46$$

闭环极点为： $S_1 = -32.44 \quad S_2 = -2.08$

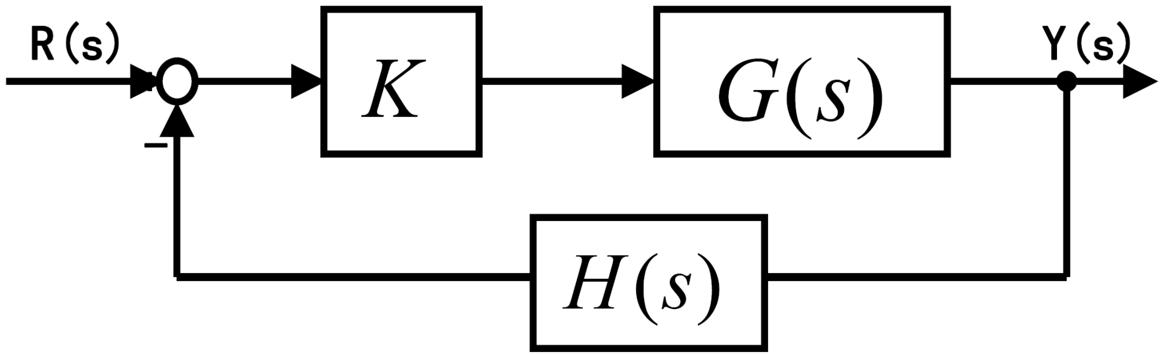


盲人摸象
或一叶障目

1、调参数可以改变极点位置，进而改变系统性能。

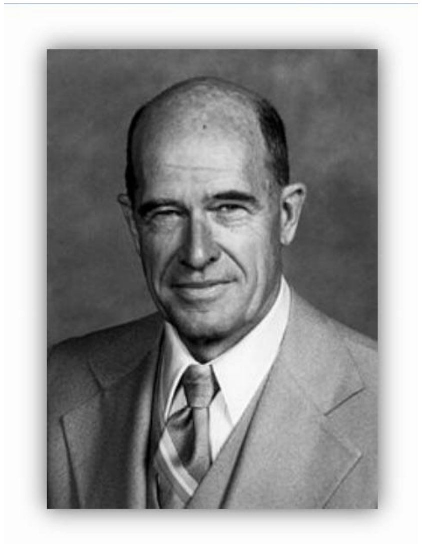
2、兼顾稳、快、准，如何调参数？

最典型的控制结构：比例控制



例7.1案例考察了调节 *K* 时，极点位置、系统性能的变化

问题： 能否**简便地**获知 *K* 变化时，极点位置以及系统性能变化的**全貌**？



美国工程师 W. R. Evans

1948年

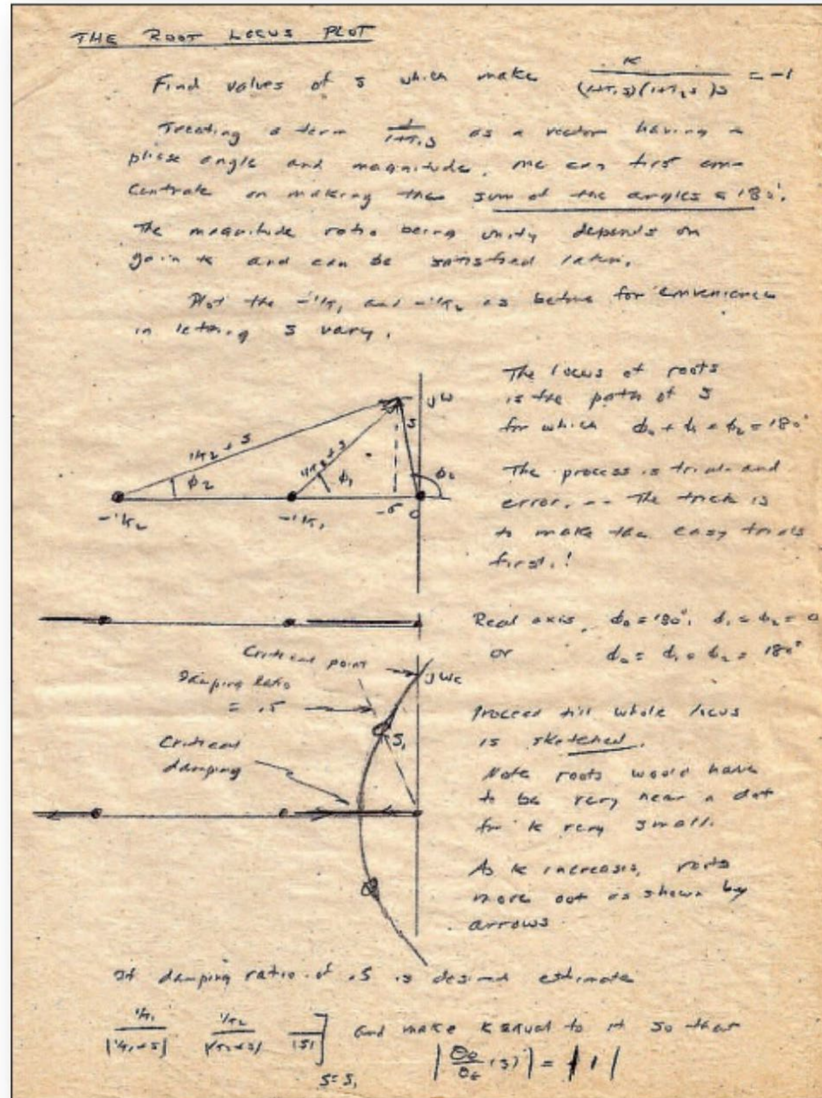
《控制系统的图解分析》

根轨迹：开环系统某一参数从0 变到正无穷时，闭环系统的极点在s平面上变化的轨迹。

1948 年…

Figure 1. *Walter R. Evans as a student in the 1940s. Evans*

Walter R. Evans, 1948



THE ROOT LOCUS PLOT

Find values of s which make $\frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)s} = -1$

Treating a term $\frac{1}{1+T_1 s}$ as a vector having a phase angle and magnitude, we can first concentrate on making the sum of the angles = 180°. The magnitude ratio being unity depends on gain K and can be satisfied later.

Plot the $-1/T_1$ and $-1/T_2$ as before for convenience in letting s vary.

The locus of roots is the path of s for which $\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 = 180°$

The process is trial and error. -- The trick is to make the easy trials first.!

Real axis, $\phi_0 = 180°$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ or $\phi_0 = \phi_1 = \phi_2 = 180°$

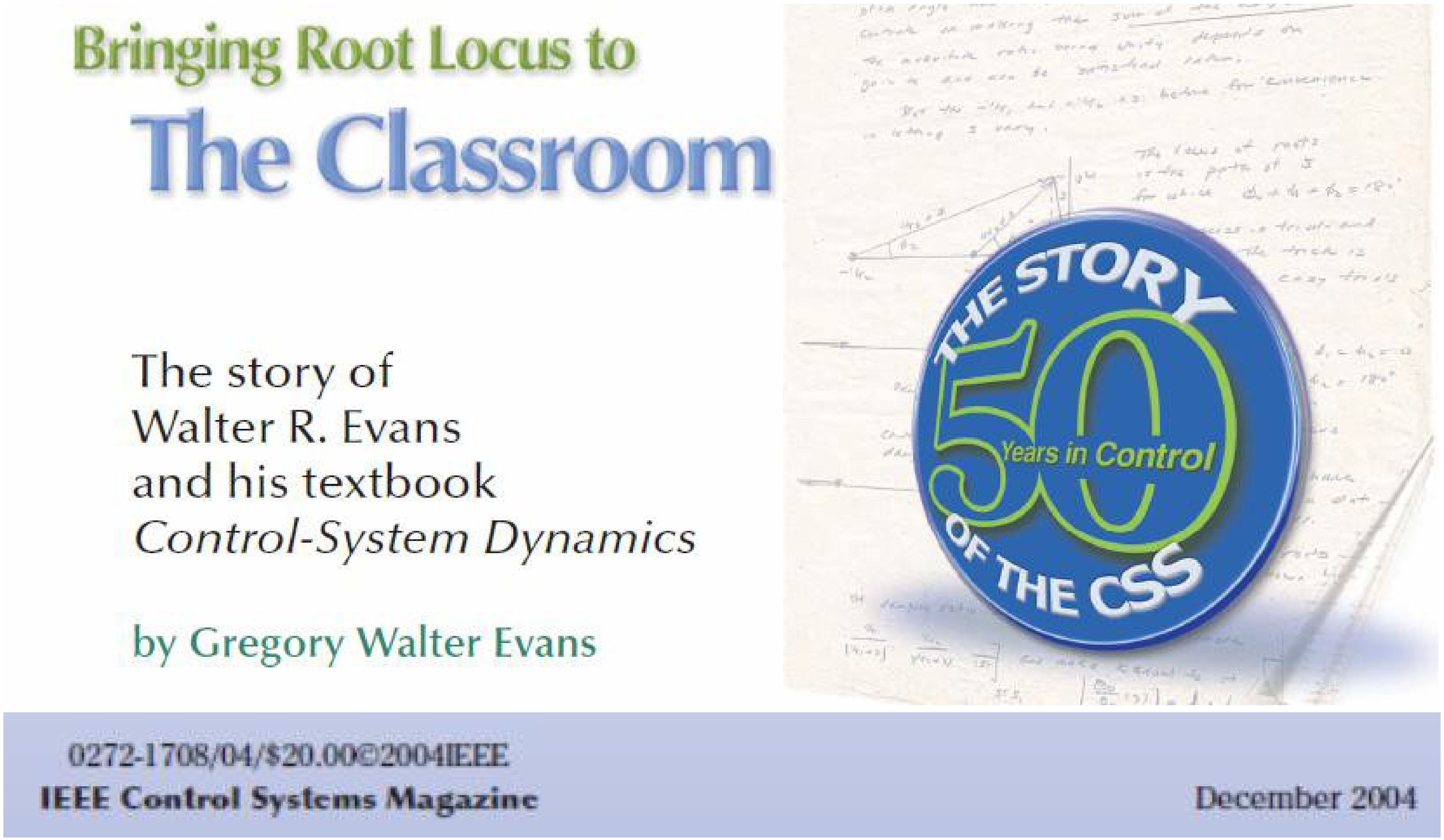
Proceed till whole locus is sketched.

Note roots would have to be very near a dot for K very small.

As K increases, roots move out as shown by arrows.

If damping ratio of .5 is desired estimate $\frac{1/T_1}{|1/T_1 + s|}$ $\frac{1/T_2}{|1/T_2 + s|}$ $\frac{1}{|s|}\Big]_{s=s_1}$ and make K equal to it so that $\left|\frac{\theta_o}{\theta_\varepsilon}(s)\right| = 1$

2004年...


Bringing Root Locus to

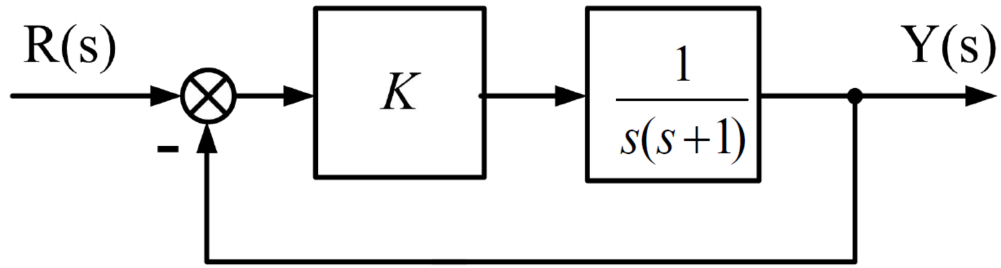
The Classroom

The story of
Walter R. Evans
and his textbook
Control-System Dynamics

by Gregory Walter Evans

0272-1708/04/$20.00©2004IEEE
IEEE Control Systems Magazine
December 2004

例7.2：确定如下闭环系统的根轨迹。



解:

闭环传递函数: $$T(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

特征方程: $$s^2 + s + K = 0$$

特征方程的根: $$s_{1,2} = -0.5 \pm 0.5\sqrt{1-4K}$$

考察 ***K*** 从零到无穷大变化时，极点的变化情况

$$s_{1,2} = -0.5 \pm 0.5\sqrt{1-4K}$$

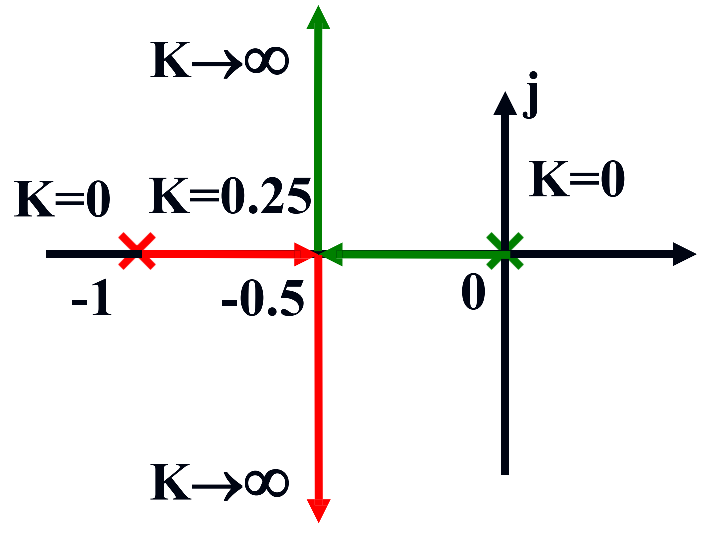
1、*K*=0 时， $s_1 = 0, s_2 = -1$

2、0<*K*<0.25 时，两个互异负实根

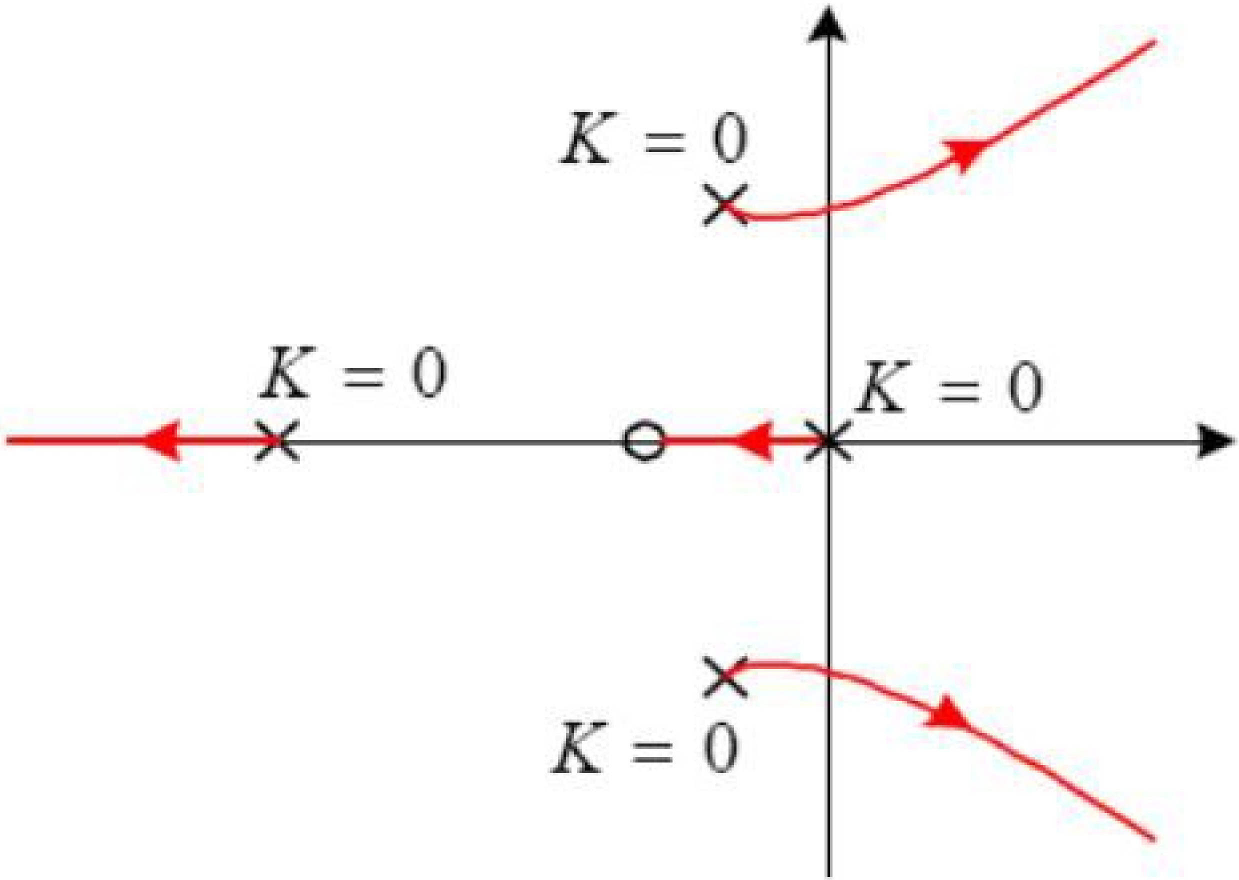
$$s_{1,2} = -0.5 \pm 0.5\sqrt{1-4K}$$

3、*K*=0.25 时， $s_{1,2} = -0.5$

4、0.25<*K*<∞ 时， $s_{1,2} = -0.5 \pm 0.5j\sqrt{4K-1}$

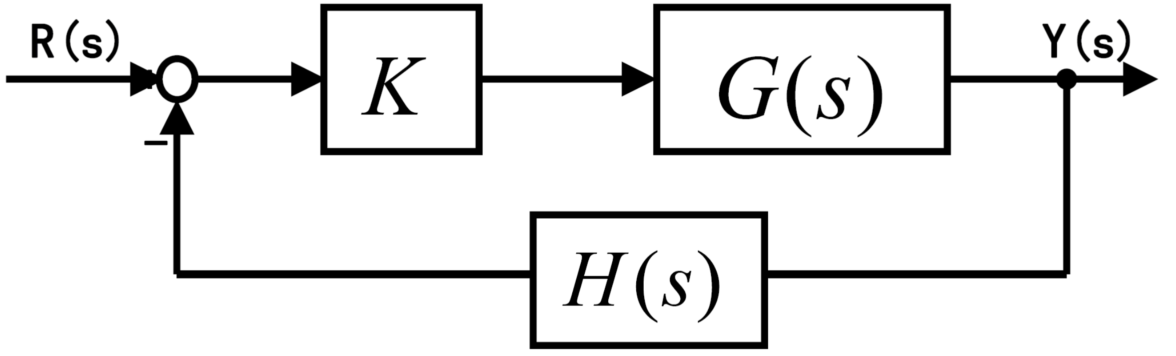


根轨迹图：以系统根轨迹增益K为参变量，当K由$0 \longrightarrow \infty$时，系统闭环极点在S平面上变化的轨迹。



极点变化全貌，如何解读性能？

根轨迹方程和约束条件



S平面上的点s在根轨迹上，必须满足闭环特征方程：

$$1+KG(s)H(s)=0$$

其中，开环传递函数为：

$$KG(s)H(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

由特征方程得到：

$$KG(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=-1$$

$$\angle KG(s)H(s)=180^\circ+k360^\circ$$

$$\left(k=0,1,2,\cdots,n-m-1\right) \longrightarrow$$ 相角条件

$$\boxed{\begin{aligned}\angle KG(s)H(s)=\angle\,(s-z_1)+\angle\,(s-z_2)+\ldots+\angle\,(s-z_m)\\ -\angle\,(s-p_1)-\angle\,(s-p_2)-\ldots-\angle\,(s-p_n)\end{aligned}}$$

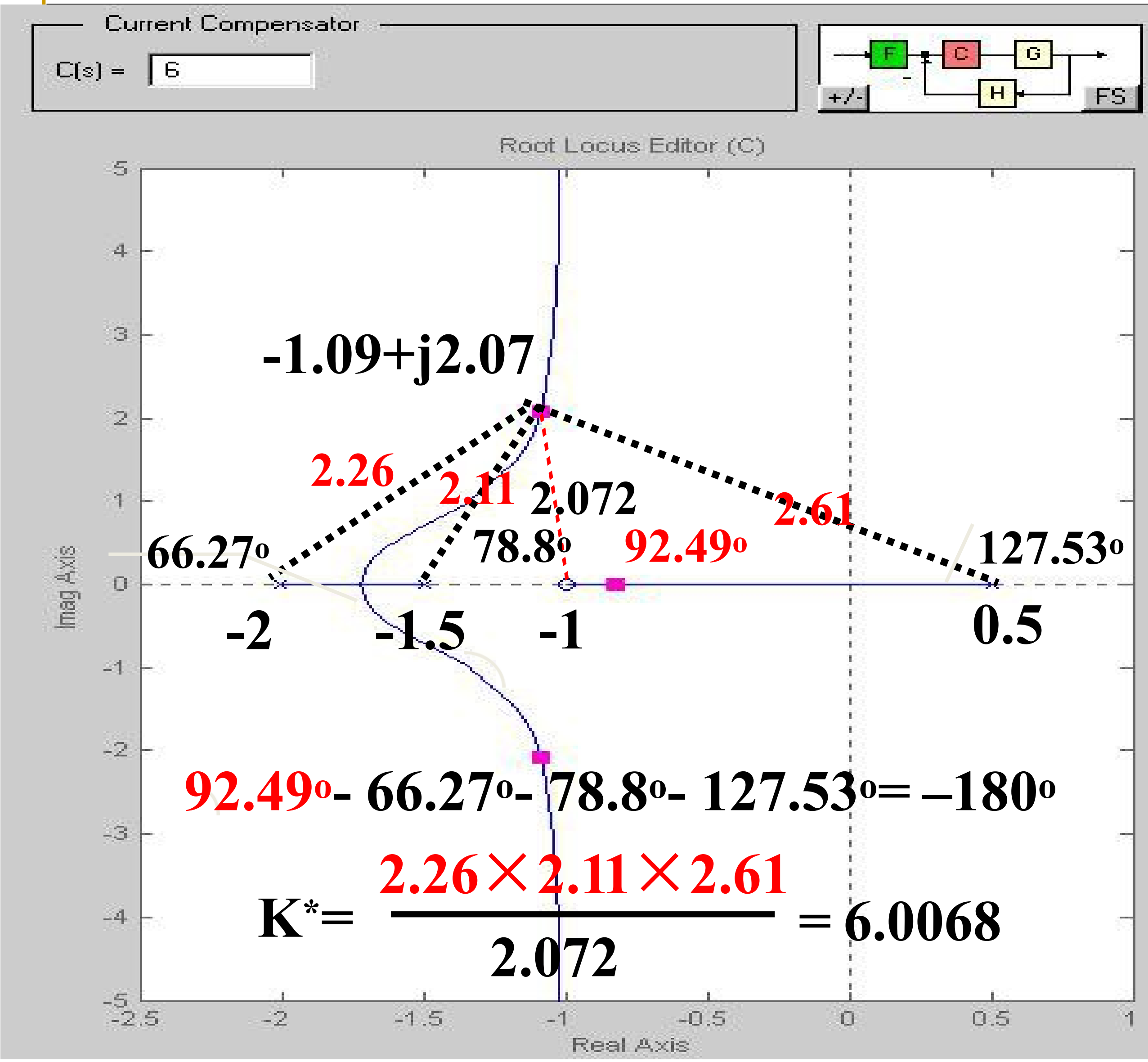
$$\left|KG(s)H(s)\right|=1 \longrightarrow$$ 幅值条件

$$\angle KG(s)H(s) = 180^\circ + k360^\circ$$
$$\left(k = 0, 1, 2, \cdots, n-m-1\right)$$

相角条件决定了整条根轨迹，即哪些点是极点。

$$\left|KG(s)H(s)\right| = 1$$

幅值条件决定了极点 s 的匹配增益值。



例7.3： 已知

开环零极点为：

$z_1=-1$

$p_1=-2$

$p_2=-1.5$

$p_3=0.5$

验证：

$s_{2,3}=-1.09\pm j2.07$

在根轨迹上。

$$\frac{K(s+1)}{(s+2)(s+1.5)(s-0.5)}=-1$$

$s_1=-0.825$

内容安排

1、根轨迹的分支数

N 阶系统有 N 个闭环极点。根轨迹的分支数为系统阶数，也等于开环极点的个数。

2、根轨迹的对称性

N阶系统的N个闭环极点，要么是实根，要么是共轭复根，因此，根轨迹关于实轴对称。

3、根轨迹的起点

$$1+KG(s)H(s)=1+\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}=0$$

$$(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)+K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)=0$$

$K\rightarrow 0$

$$(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)=0$$

根轨迹起始于开环极点。

4、根轨迹的终点

$$1+KG(s)H(s)=1+\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}=0$$

$$(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)+K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)=0$$

$K\to\infty$

$$(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)=0$$

根轨迹终止于开环零点。

（m个有限零点、$n-m$个无限零点）

5、实轴上的根轨迹段

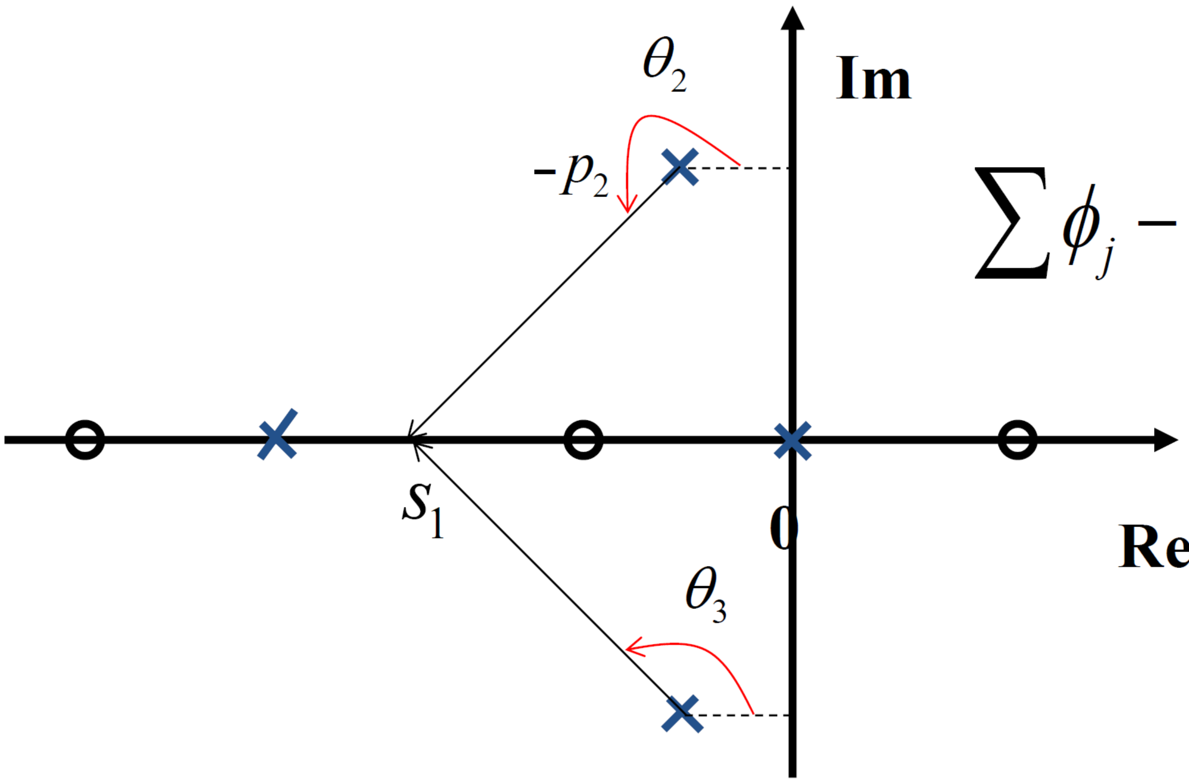
实轴上的点s_1，其右侧的开环零点、极点的个数之和为奇数时，该点在根轨迹上。

实轴上的点s_1在根轨迹上，必须满足相角条件：

$$\sum \phi_j - \sum \theta_i = (2k+1)\pi$$

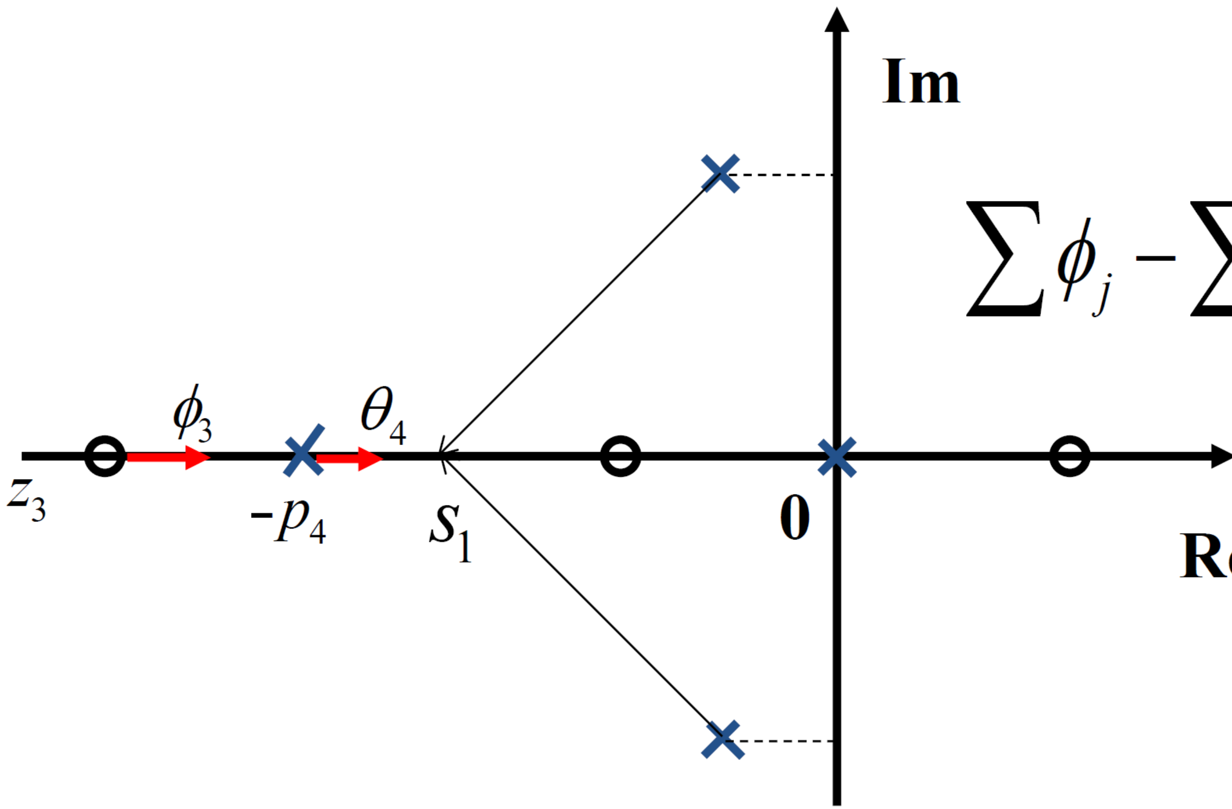
上式左边的各个相角由开环零、极点诱导产生。

共轭开环零点或极点，诱导的相角成对出现，且为 360^o，对是否满足相角条件无实质性影响。



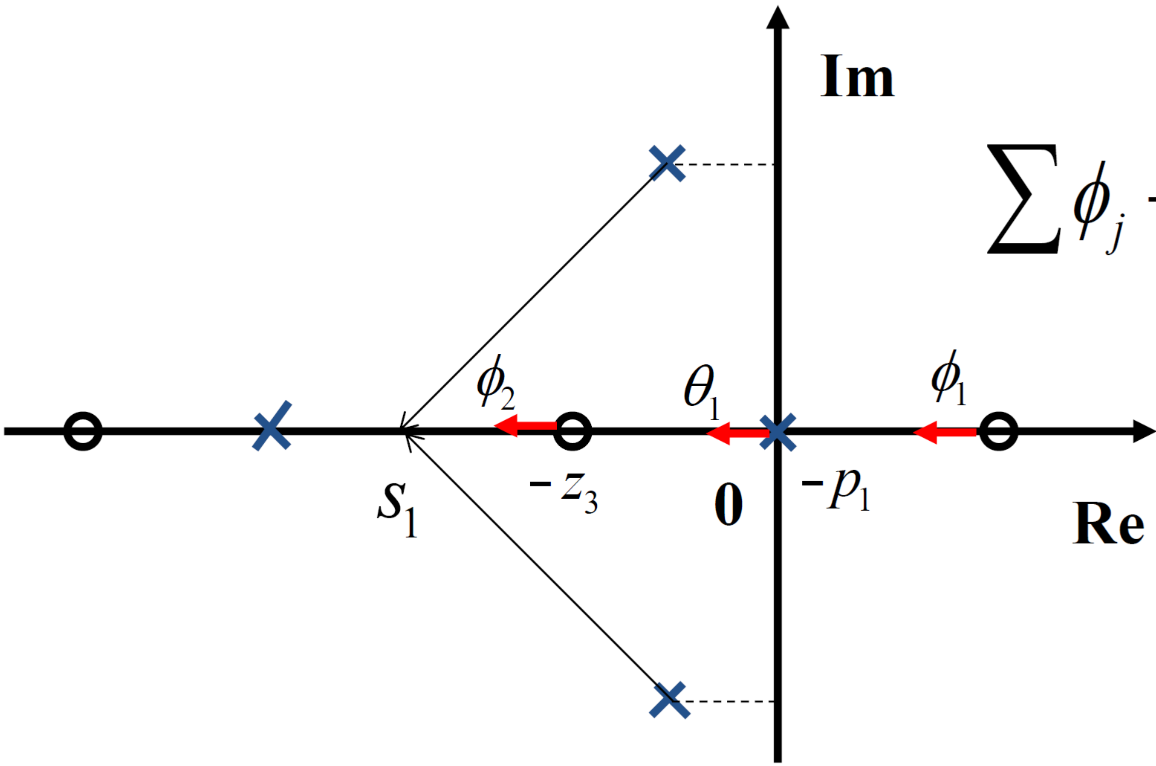
$$\sum \phi_j - \sum \theta_i = (2k+1)\pi$$

点s_1左侧的开环实零点或极点，诱导的相角都为0°，对是否满足相角条件无实质性影响。



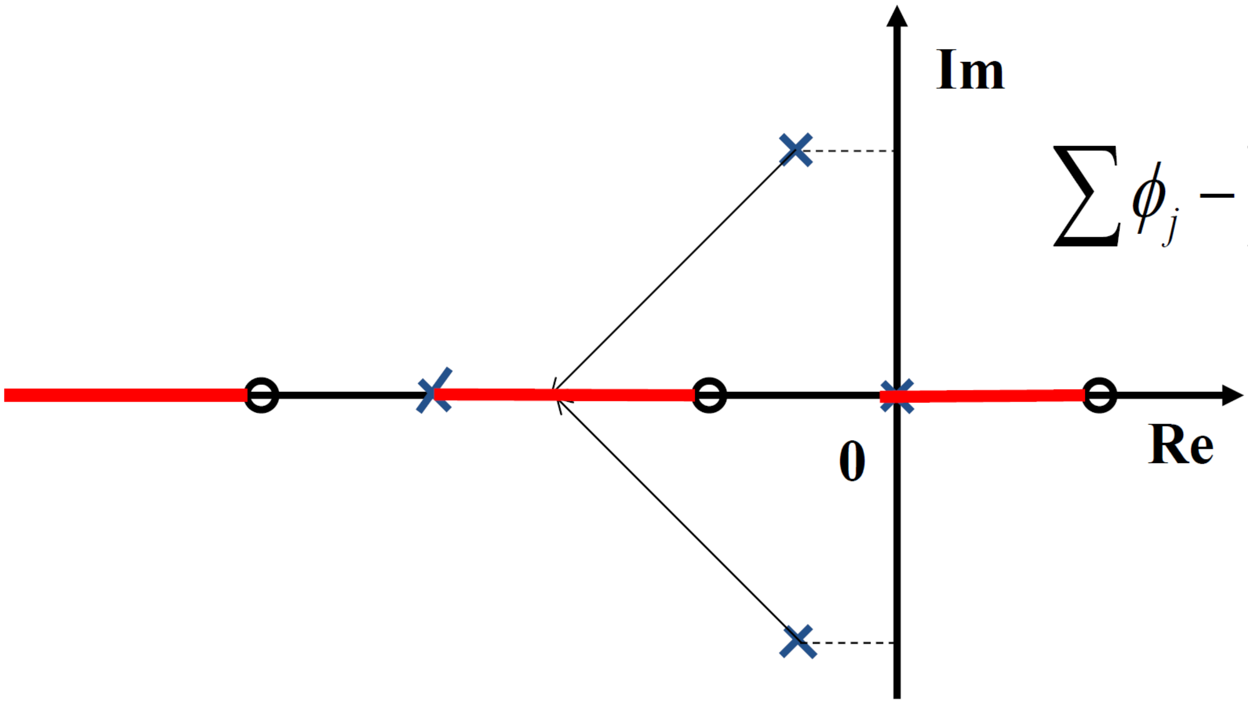
$$\sum \phi_j - \sum \theta_i = (2k+1)\pi$$

点 s_1 右侧的开环实零点或极点，诱导的相角 都 为 180^o，因此，右侧开环实零点和极点个数之和为奇数时，相角条件得以满足。



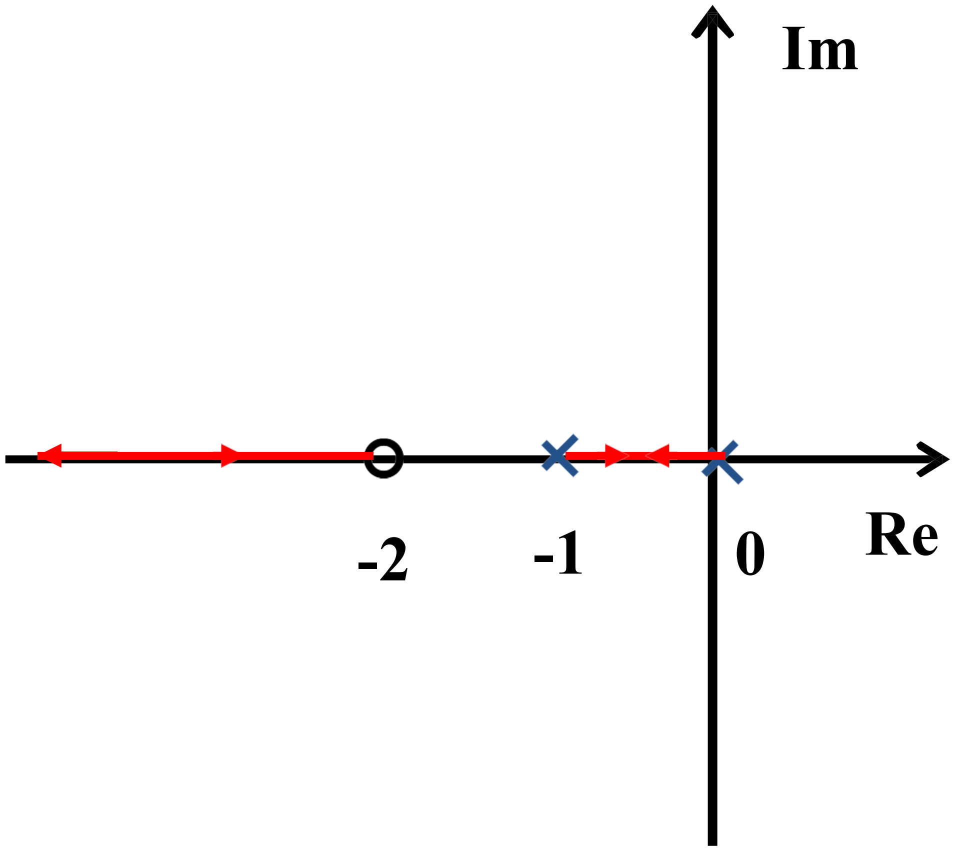
$$\sum \phi_j - \sum \theta_i = (2k+1)\pi$$

实轴上有三段是根轨迹段。



$$\sum \phi_j - \sum \theta_i = (2k+1)\pi$$

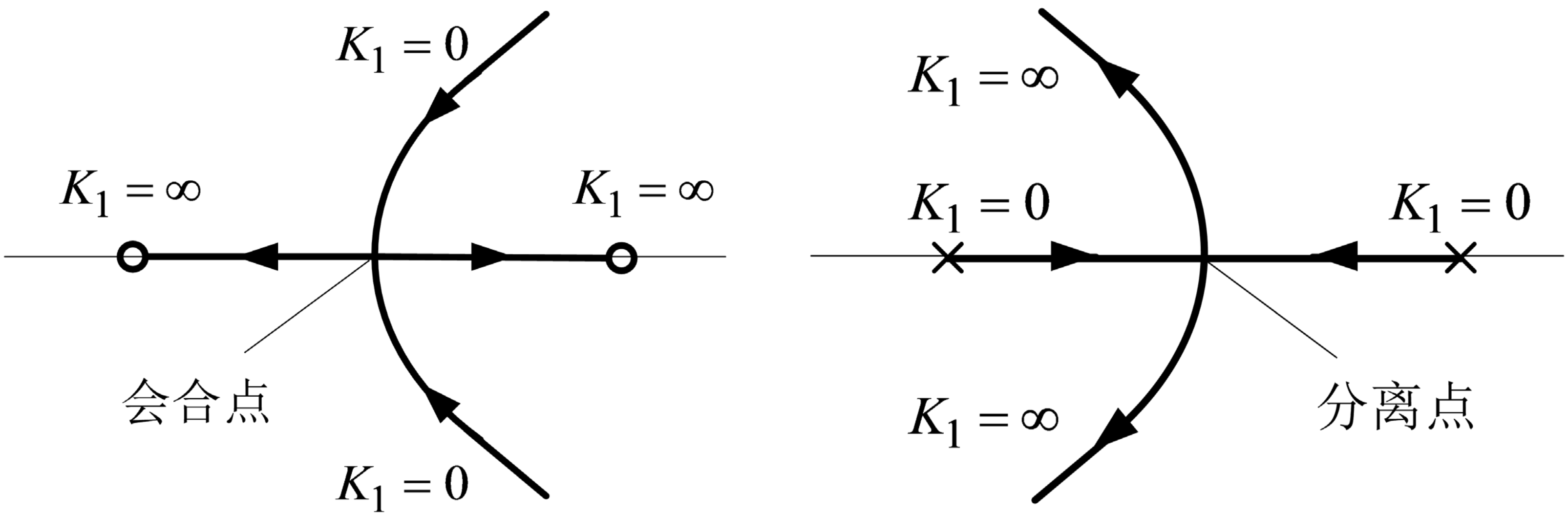
例7.4：开环传递函数为：$KG(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{s(s+1)}$



请确定根轨迹的起始点、终止点和实轴上的根轨迹段

与求解无数次特征方程等效！

6、根轨迹的分离点（会合点）



根轨迹在*S*平面上相遇，表明系统有相同的根。即根轨迹上的分离点/会合点与特征方程式的**重根**相对应。

根据根轨迹方程：

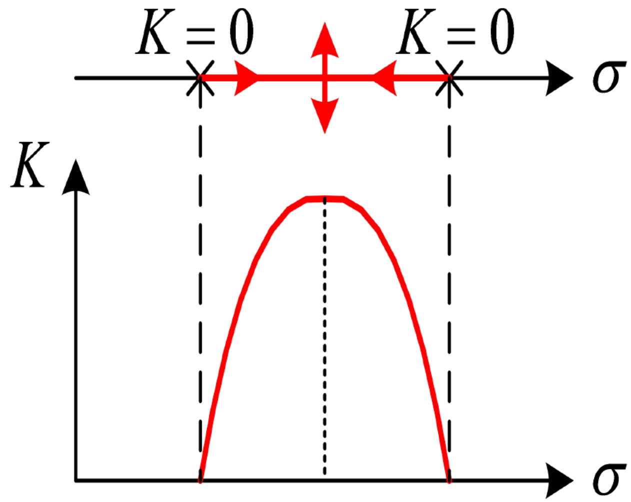
$$KG(s)H(s)=K\frac{P(s)}{Q(s)}=-1$$

$$KG(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=K\frac{P(s)}{Q(s)}，\text{其中}P(s)=\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)，\quad Q(s)=\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)$$

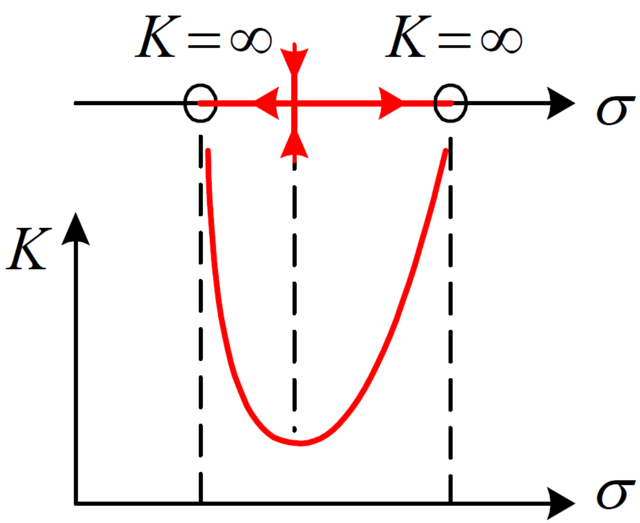
换个角度，得到极点**s**的匹配增益值函数：

$$K=-\frac{Q(s)}{P(s)}$$

这是*N*个定义域不同的匹配增益值函数。



匹配增益值函数分支在极点s的实定义域内单调增（减），且在分离点处取得极大值。



匹配增益值函数分支在极点 s 的实定义域内单调减（增），且在会合点处取得极小值。

分离点和会合点是实数域内极值点，其必要条件为：

$$\boxed{\frac{dK}{ds}=-\frac{P(s)Q'(s)-P'(s)Q(s)}{P^2(s)}=0}$$

再考虑到 $K\geq 0$ （且为实数）的约束条件，就能得到真正的分离点和会合点。

7、根轨迹的渐近线

共有$n-m$条根轨迹分支沿着一组渐近线趋向无穷远处，渐近线与实轴夹角为ϕ_A，与实轴交点为同一点σ_A。

渐近线与实轴的夹角：

$$\phi_A=\frac{(2k+1)180^\circ}{n-m},\ \ k=0,1,2,\cdots,n-m-1$$

渐近线与实轴的交点（渐进中心）：

$$\sigma_A=\frac{\sum_{i=1}^{n}(-p_i)-\sum_{j=1}^{m}(-z_j)}{n-m}$$

8、根轨迹与虚轴的交点

A. 利用特征方程求取

用 $j\omega$ 替代 s，令特征方程的实部、虚部等于零，求得ω和对应的K。

$$1+KG(s)H(s)|_{s=j\omega}=0$$

B. 用劳斯判据求取

确定稳定性改变时，增益K的临界值，再代入特征方程求得交点$j\omega$。

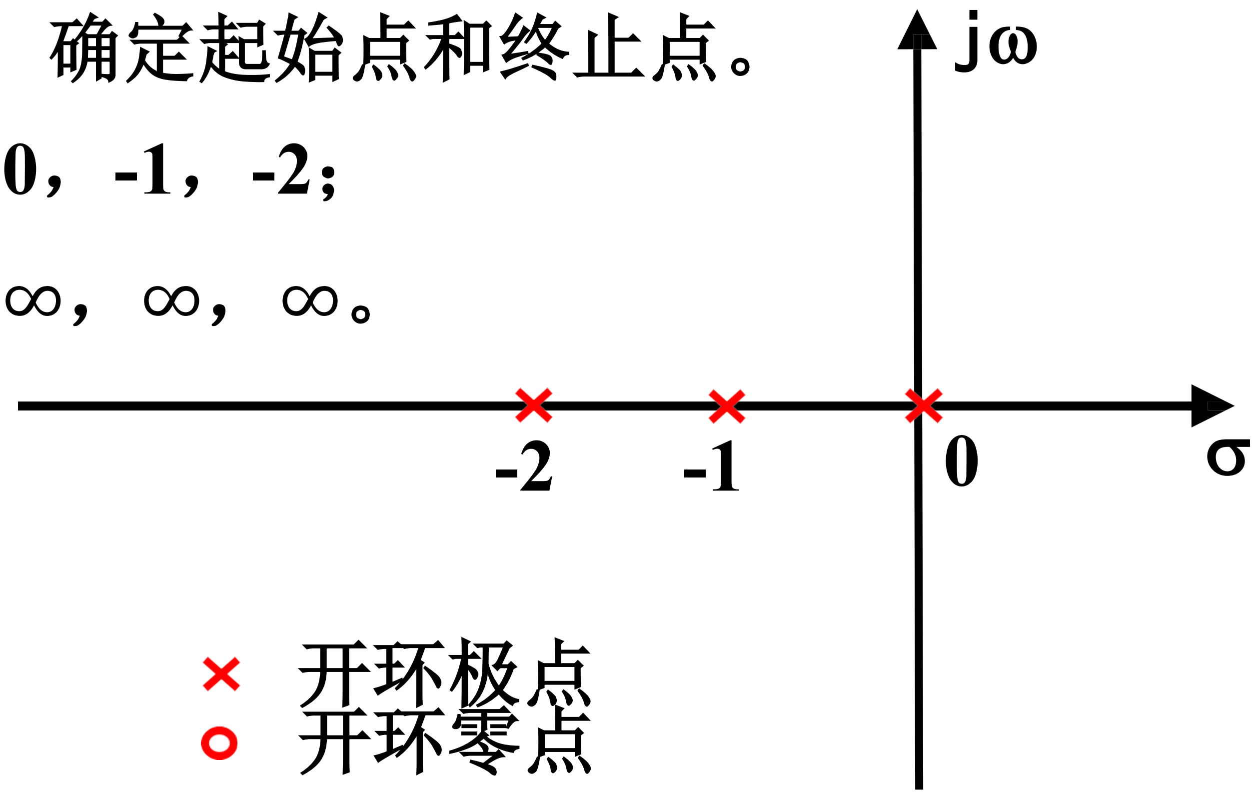
例7.5 单位负反馈系统的特征方程如下，试绘制其根轨迹草图。

$$1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}=0$$

解：第一步，确定起始点和终止点。

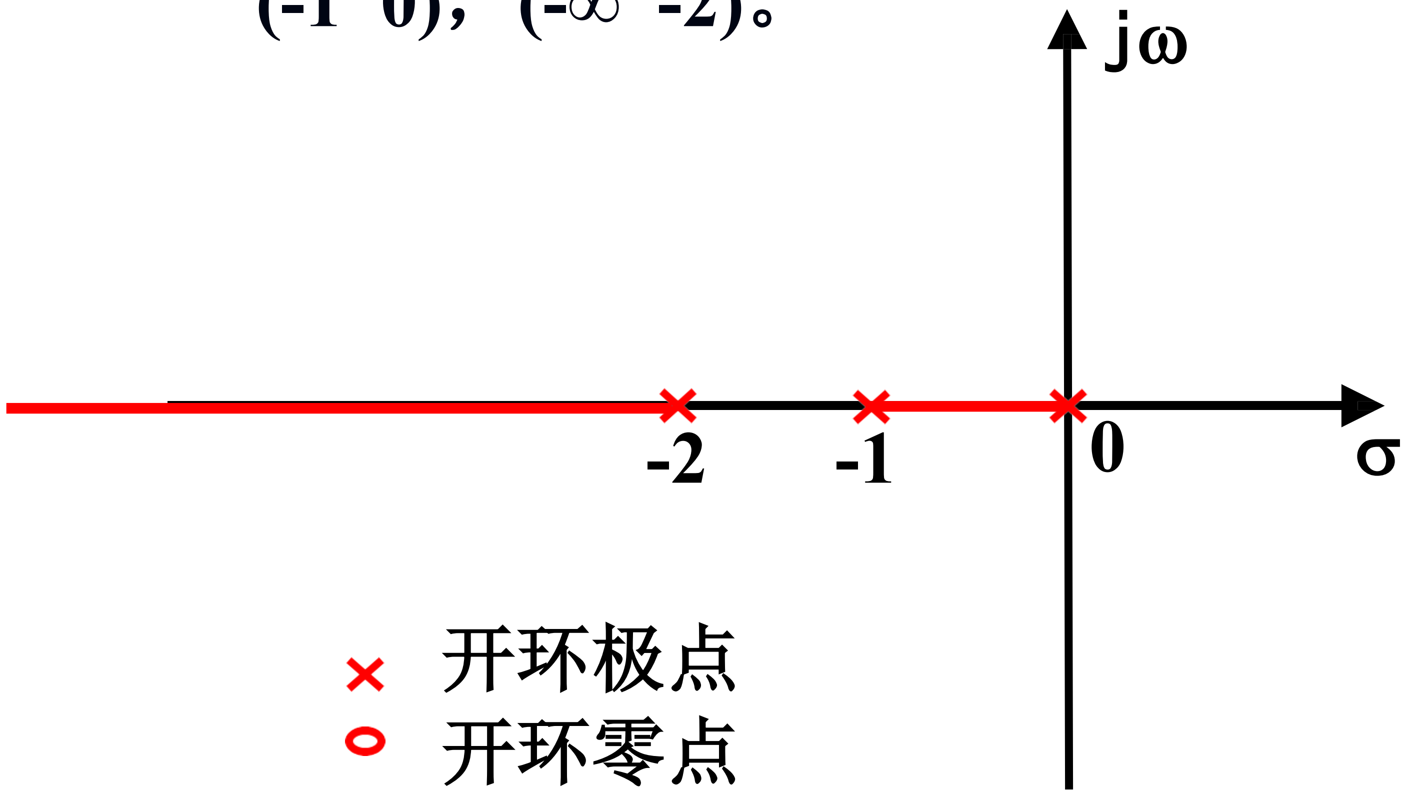
起点：0，-1，-2；

终点：∞，∞，∞。



第二步，确定实轴上的根轨迹段。

(-1 0)，(-∞ -2)。



第三步，确定分离点或会合点。

系统的开环传递函数为：

$$KG(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$P(s)=1,\ \ Q(s)=s(s+1)(s+2)$$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{P(s)Q'(s)-P'(s)Q(s)}{P^2(s)}=3s^2+6s+2=0$$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{P(s)Q'(s)-P'(s)Q(s)}{P^2(s)}=3s^2+6s+2=0$$

求得：$s_1=-1.58$，$s_2=-0.42$

代入特征方程:

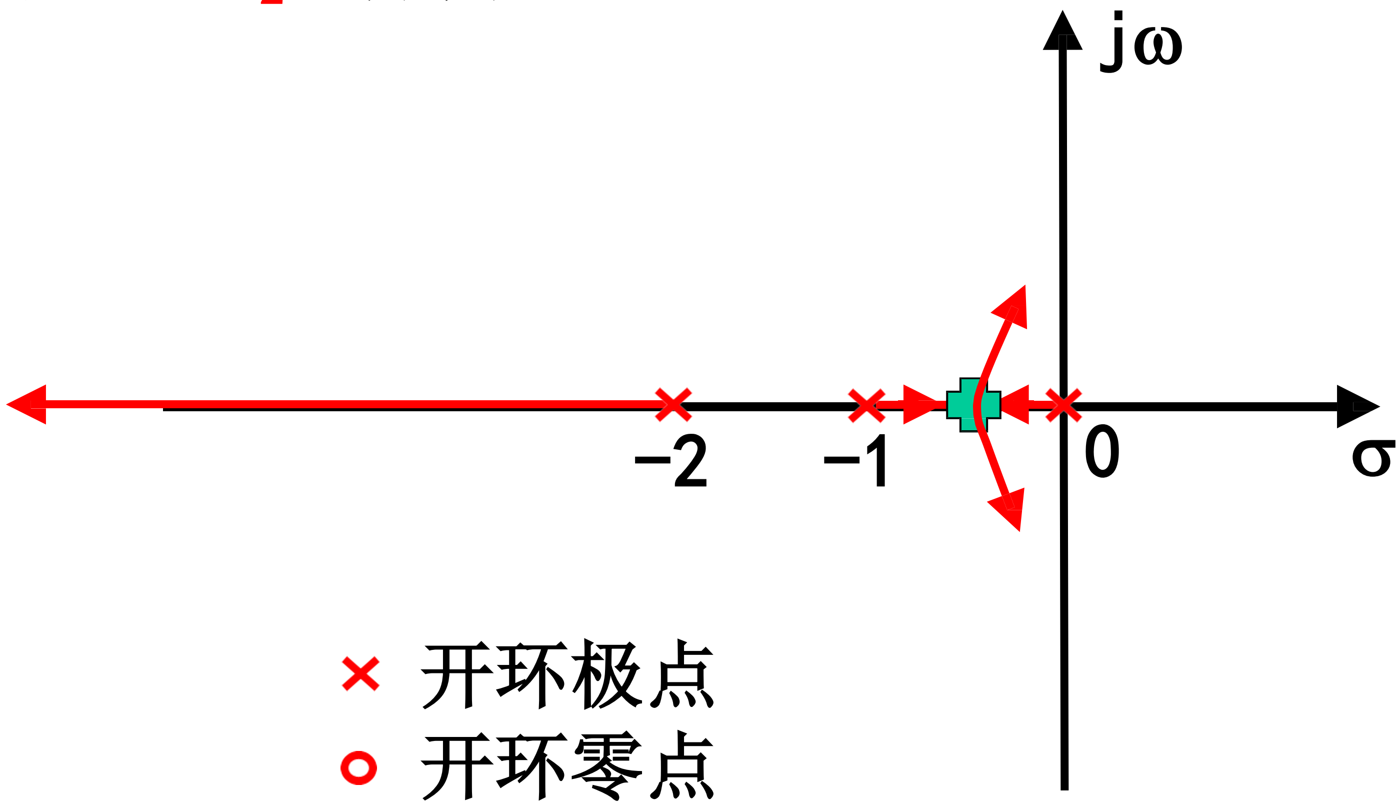
$$K=-\frac{Q(s)}{P(s)}=-s(s+1)(s+2)$$

s_1代入，$K=-0.384<0$，故舍去；

s_2代入，$K=0.384>0$，是分离点。

$$s_1 = -1.58, \quad s_2 = -0.42$$

s_1舍去， s_2是分离点。



第四步，确定渐近线。

渐近线共有3条，渐近线的倾角：

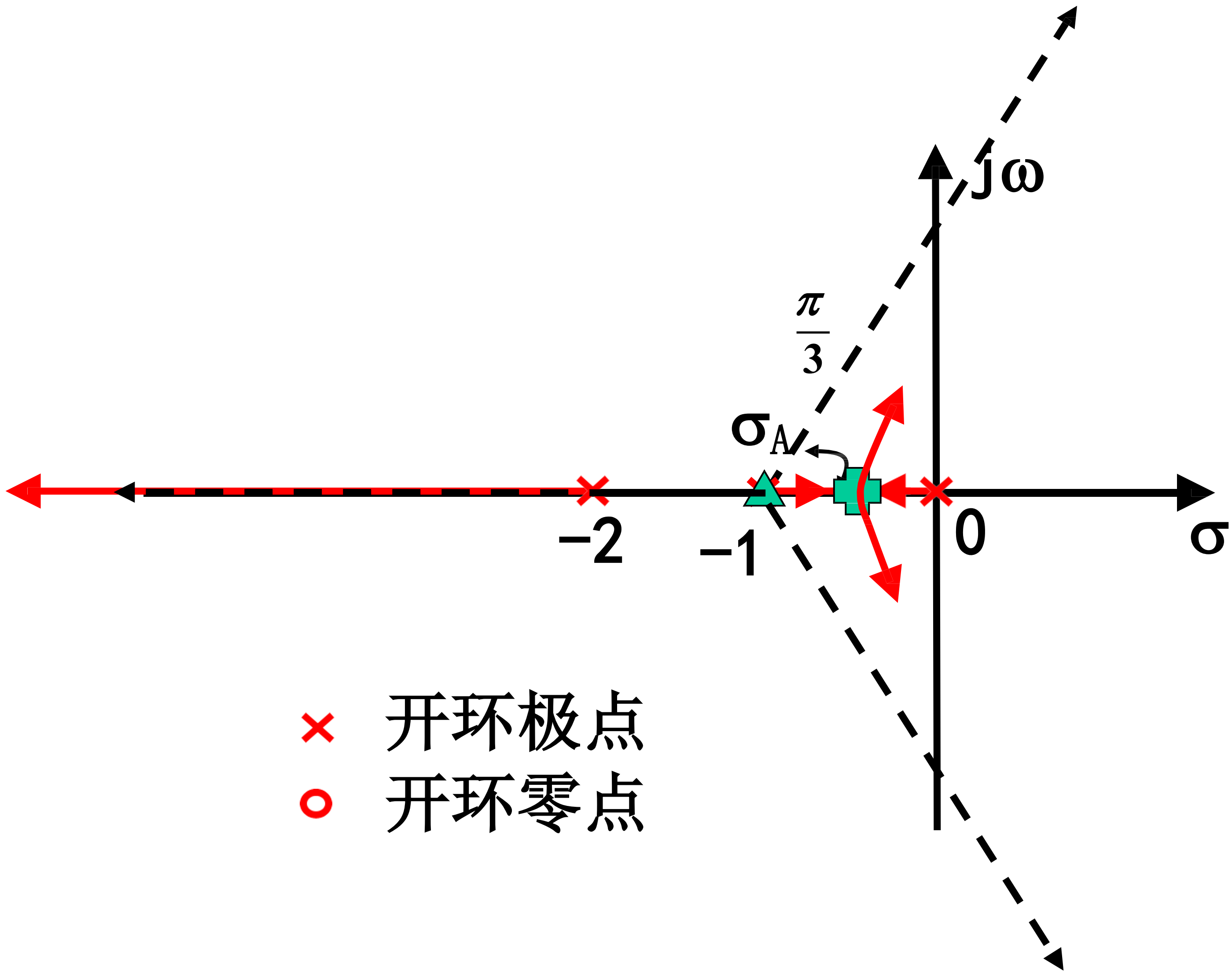
$$\phi_A = \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-m-1$$

取k＝0，1，2，得到：

$$\phi_{A1} = 60^\circ \qquad \phi_{A2} = 180^\circ \qquad \phi_{A3} = 300^\circ$$

渐近线与实轴的交点（渐进中心）：

$$\sigma_A = -\frac{(0+1+2)+0}{3-0} = -1$$



jω
π/3
σ_A
−2
−1
0
σ
开环极点
开环零点

第五步，确定根轨迹与虚轴交点。

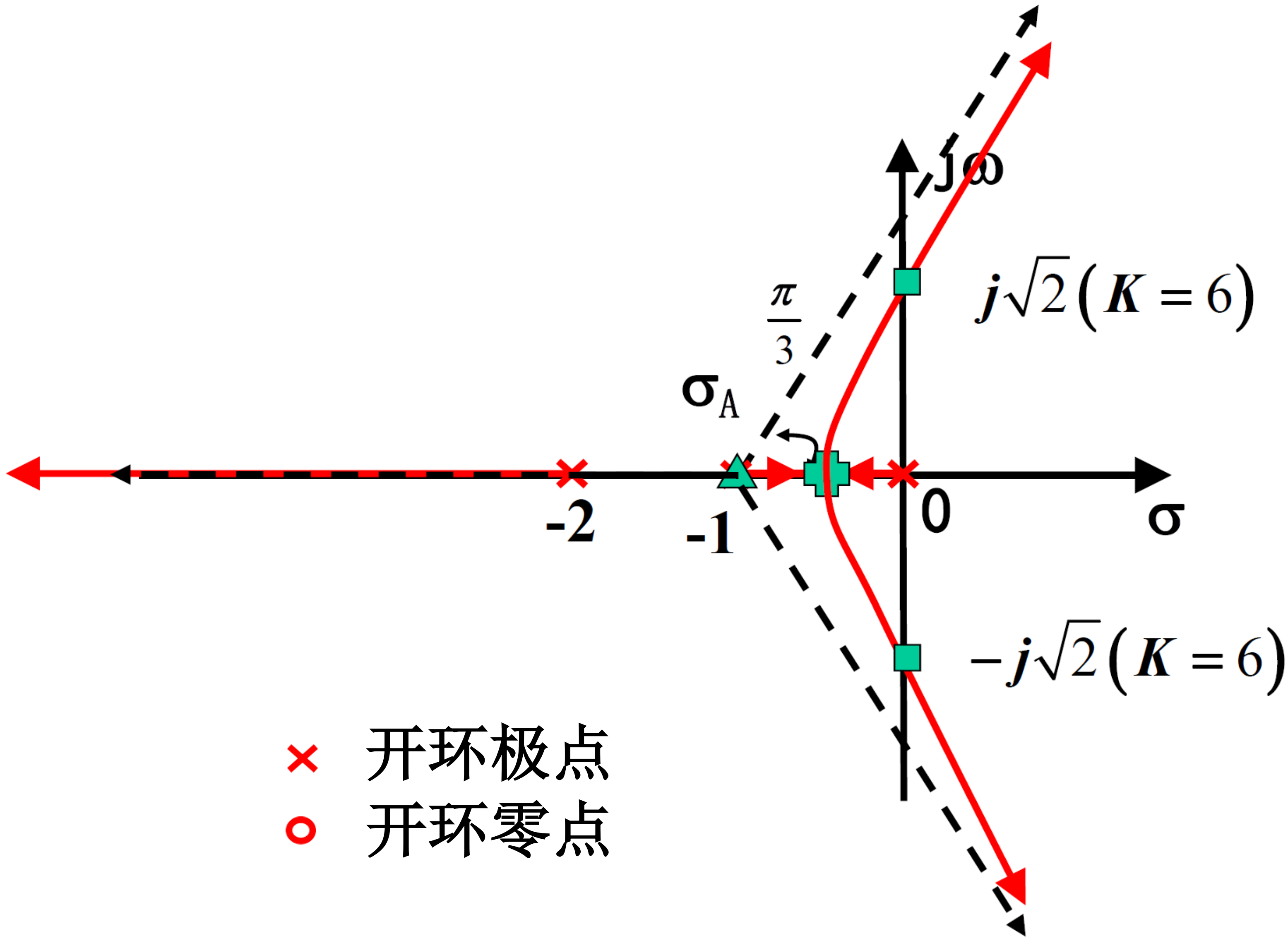
特征方程：

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

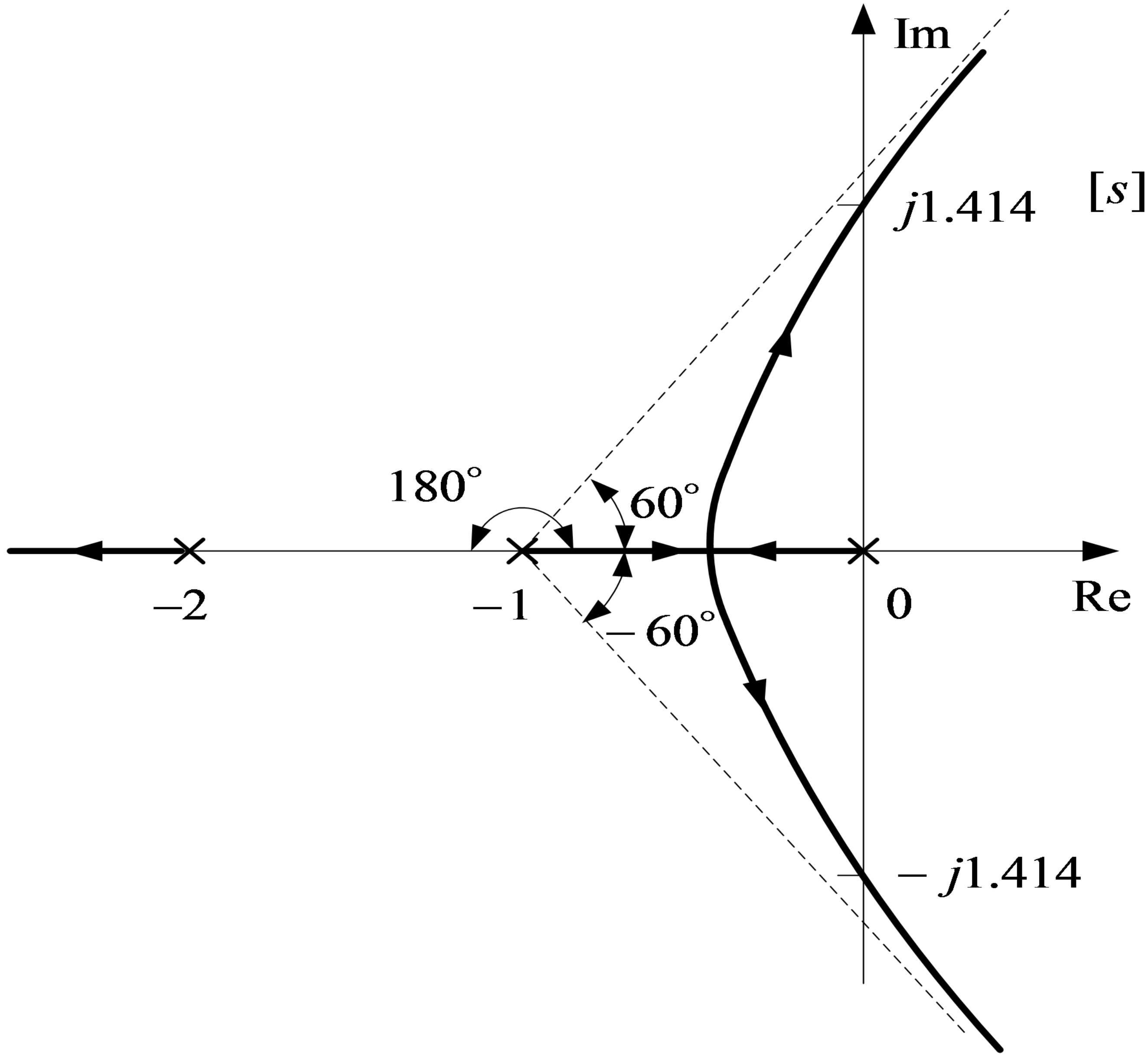
令 $s = j\omega$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + K = 0$$

$$\begin{cases} \omega^3 = 2\omega \\ K = 3\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 6 \end{cases}$$



jω
$j\sqrt{2}(K=6)$
$\frac{\pi}{3}$
σ_A
-2
-1
0
σ
$-j\sqrt{2}(K=6)$
× 开环极点
o 开环零点

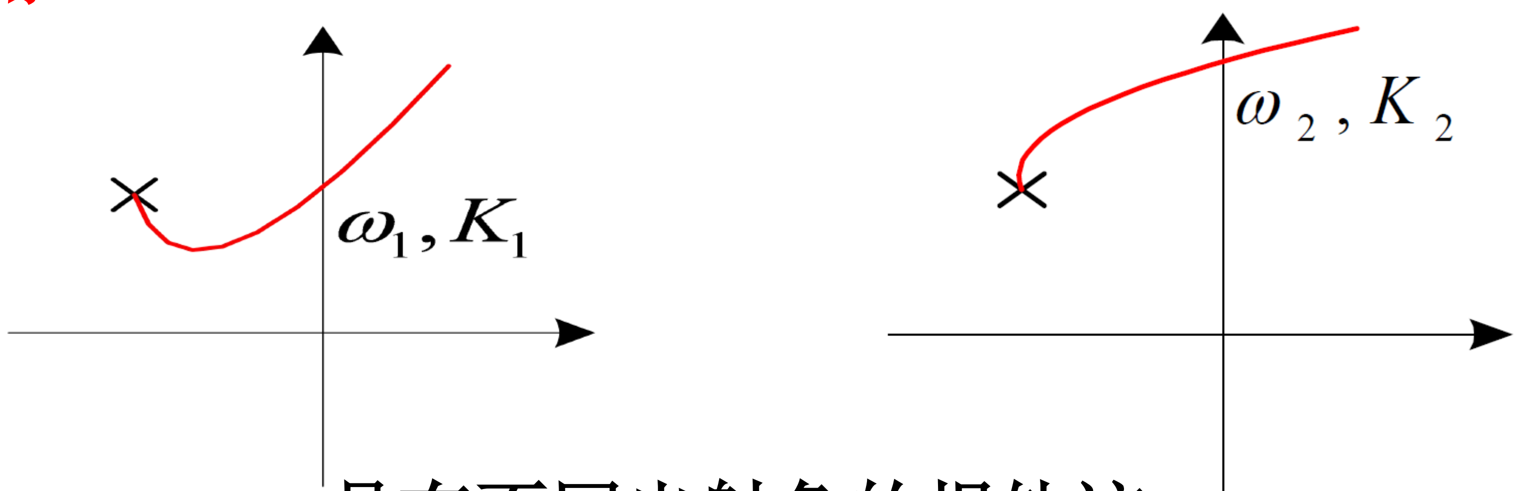


Im
[s]
j1.414
180°
60°
−2
−1
0
Re
− 60°
− j1.414

9、根轨迹的出射角和入射角

当开环零、极点为实数时，根轨迹或左或右沿实轴发展。

当开环零、极点为复数时，根轨迹离开复极点的出发角称为出射角；趋于复零点的终止角称为入射角。

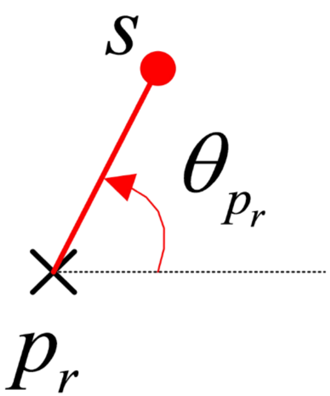


具有不同出射角的根轨迹

根轨迹始终满足相角条件

$$\sum \phi_j - \sum \theta_i = (2k+1)\pi$$

根轨迹点$\boldsymbol{s}$趋近开环出发极点$\boldsymbol{p_r}$时，两者之差的相角正好是出射角，而$\boldsymbol{s}$与其他开环零、极点诱导的相角，等效于由$\boldsymbol{p_r}$与其他开环零、极点诱导产生的相角。



$$\theta_{p_r} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^{m} \phi_{z_j p_r} - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq r)}}^{n} \theta_{p_i p_r} \right)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

根轨迹始终满足相角条件

$$\sum \phi_j - \sum \theta_i = (2k+1)\pi$$

入射角有类似的结论。

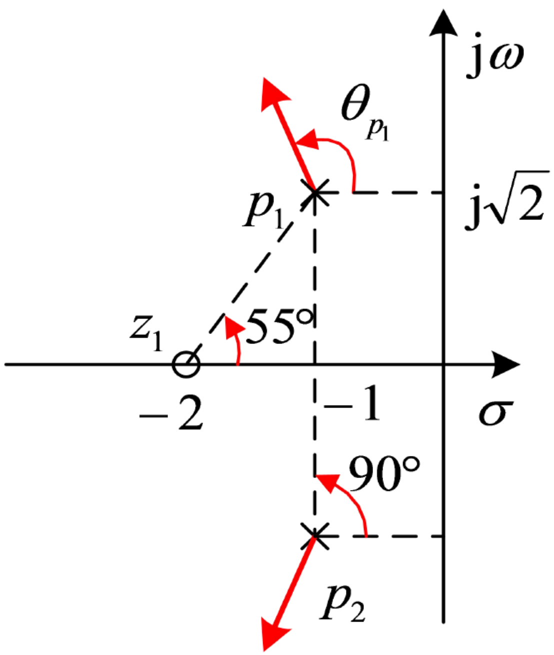
$$\phi_{z_r} = (2k+1)\pi - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^{m} \phi_{z_j z_r} - \sum_{i=1}^{n} \theta_{p_i z_r} \right)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

例7.6 确定下面的系统的根轨迹的出射角。

$$KG(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$$

解：开环极点为 $p_{1,2}=-1\pm j\sqrt{2}$



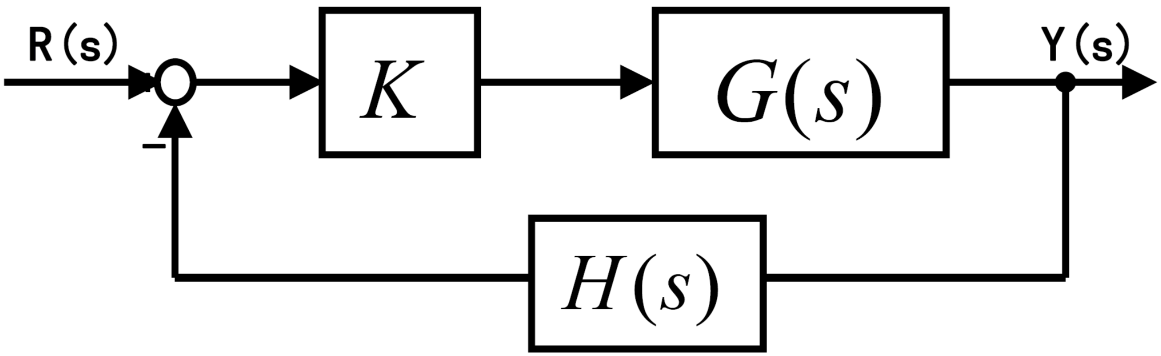
于是：

$$\theta_{p1}=55^o-90^o\pm180^o$$

$$=145^o$$

小结

最典型的控制结构：比例控制



根轨迹能够提供调节***K***时，极点位置以及系统性能变化的全貌

能够用绘图方法，简便地绘制根轨迹

作业7-1

E7.1 在图 E7.1 所示的圆环装置中，球体沿环的内壁自由滚动，圆环沿着水平方向自由旋转[11]。该装置可以用来模拟液体燃料在火箭中的晃动。作用于环上的转矩控制着圆环的角位移，而转矩 T 则由连接在圆环的驱动杆上的电机产生。当引入负反馈后，系统的特征方程为

$$1+\frac{Ks(s+4)}{s^2+2s+2}=0$$

(a) 绘制以 K 为参数的根轨迹。

(b) 当闭环特征根相等时，求出系统增益 K 的取值。

(c) 求出彼此相等的这两个特征根。

(d) 当闭环特征根相等时，计算系统的调节时间。

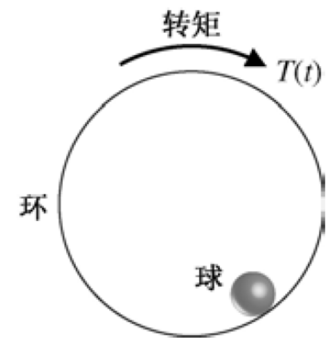


图 E7.1 由电机驱动旋转的圆环

作业7-2

E7.4　考虑某个单位负反馈系统，其开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2+4s+5}$$

（a）求根轨迹离开复极点的出射角。

（b）求根轨迹进入实轴的汇合点。

作业7-3

E7.8　单位负反馈系统的开环传递函数为

$$L(s)=G_c(s)G(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$$

（a）当三个特征根均为实数且彼此相等时，求增益 K 的取值。

（b）求出(a)中的三个彼此相等的闭环特征根。

作业7-4

E7.9 世界上最大的望远镜坐落在夏威夷，其主镜由 36 片六角形的镜片镶嵌而成，直径高达 10 m。望远镜能够对每个镜片的方位进行主动控制。假设单个镜片的控制由单位负反馈系统实现，且开环传递函数为

$$L(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

（a）在 s 平面上绘制闭环系统根轨迹的渐近线。

（b）求离开复极点的出射角。

（c）确定增益 K 的取值，使系统有两个特征根位于虚轴之上。

（d）绘制系统的根轨迹。

作业7-5

E7. 10　某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$KG(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}$$

（a）求实轴上的分离点和汇合点。

（b）当复特征根的实部为 -2 时，求出系统的增益和特征根。

（c）绘制系统的根轨迹。