根据上述定理有如下推理:

推论 4.1 对随机变量 X 和连续函数 $g(x)$, 有

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx = \int_0^{+\infty} P(g(X) > t)dt.$$

定义 4.4 设连续随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}(t - E(X))^2 f(t)dt$ 收敛, 称为随机变量 X 的 **方差**, 记为 $\mathrm{Var}(X)$, 即

$$\mathrm{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt.$$

其等价性定义为

$$\mathrm{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt\right)^2.$$

性质 4.6 对任意常数 a, b 和随机变量 X, 有 $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

4.2 常用连续型随机变量

本章介绍三种常用连续型随机变量.

4.2.1 均匀分布(uniform distribution)

给定区间 $[a, b]$, 考虑一个随机变量 X, 其落入区间 $[a, b]$ 内任何一个点的概率相等.

定义 4.5 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

称 X 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 记 $X \sim U(a, b)$.

对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有$f(x) \geqslant 0$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{+\infty} f(t)dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}dt = 1.$$

均匀分布的几何解释: 若 $X \sim U(a, b)$, 则 X 落入 $[a, b]$ 内任一子区间的概率与该区间的长度成正比, 与该区间的位置无关.

根据分布函数的定义可知 $X \sim U(a,b)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}$$

定理 4.3 若 $X \sim U(a,b)$, 则

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

证明 根据期望和方差的定义有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b t dt = \frac{a+b}{2} \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b t^2 dt = \frac{a^2+ab+b^2}{3}, \end{aligned}$$

从而得到方差

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

例 4.9 设随机变量 $\xi \sim U(-3,6)$, 试求方程 $4x^2 + 4\xi x + (\xi+2) = 0$ 有实根的概率.

解 易知随机变量 ξ 的概率密度函数

$$f(t) = \begin{cases} 1/9 & x \in [-3,6] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

设事件 A 表示方程有实根, 于是有

$$\begin{aligned} P(A) &= P((4\xi)^2 - 4 \times 4 \times (\xi+2) \geqslant 0) \\ &= P((\xi+1)(\xi-2) \geqslant 0) = P(\xi \leqslant -1) + P(\xi \geqslant 2) \\ &= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{9} dt + \int_2^6 \frac{1}{9} dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

例 4.10 已知随机变量 $X \sim U(0,1)$, 对任意 $\lambda > 0$ 求 $E[\lambda^{\max(X,1-X)}]$.

4.2.2 指数分布

定义 4.6 给定常数 $\lambda > 0$, 若随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记 $X \sim e(\lambda)$.

指数分布一般用于时间等待等实际问题. 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \geqslant 0$, 进一步有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

对于指数函数的分布函数: 当 $x \leqslant 0$ 时有 $F(x) = 0$; 当 $x > 0$ 时,

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

定理 4.4 若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

证明 根据连续函数的定义有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}, \\ E(X^2) &= \lambda \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2te^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

于是得到 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1/\lambda^2$.

下面研究指数分布的一个重要性质: 指数分布的无记忆性.

定理 4.5 给定常数 $\lambda > 0$, 若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 则对任意 $s > 0, t > 0$, 有

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

证明 根据指数分布函数的性质: 对任意 $x > 0$, 有 $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$, 从而直接验证 $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$.

指数分布是唯一具有无记忆性的连续型随机变量.

例 4.11 打一次公用电话所用时间 $X \sim e(1/10)$, 如果某人刚好在你前面使用公用电话, 求你需等待 $10 \sim 20$ 分钟的概率.

解 根据指数分布函数有

$$P(10 \leqslant X \leqslant 20) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.2325.$$

4.2.3 正态分布

定义 4.7 给定 $u \in (-\infty, +\infty)$ 和 $\sigma > 0$, 如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

称 X 服从参数为 (μ, σ^2) 的正态分布 (Normal distribution), 又被称为高斯分布 (Gaussian distribution), 记 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

特别地, 若 $\mu = 0$ 和 $\sigma = 1$, 称 $\mathcal{N}(0,1)$ 为标准正态分布, 其密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \geqslant 0$, 进一步有

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d\frac{r^2}{2} = 2\pi, \end{aligned}$$

这里使用极坐标变换, 由此可证 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$.

下面考虑正太分布概率密度 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 的图形:

1) 关于直线 $x = \mu$ 对称, 即 $f(\mu - x) = f(\mu + x)$.

2) 当 $x = \mu$ 时取最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

3) 概率密度函数的二阶导数

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ((x-\mu)^2 - \sigma^2),$$

可得其拐点为 $x = \mu \pm \sigma$. 根据

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

可得渐近线为 $y = 0$.

4) 当 σ 固定时, 改变 μ 的值, $f(x)$ 沿 x 轴左右平行移动, 不改变其形状.

5) 当 μ 固定时, 改变 σ 的值, 根据 $f(x)$ 的最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 可知: 当 σ 越小, 图形越陡, $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ 落入 μ 附近的概率越大; 反之 σ 越大, 图形越平坦, X 落入 μ 附近的概率越小.

定理 4.6 若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1);$$

若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则 $Y=\sigma X+\mu\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

证明 若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 随机变量 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P[Y\leqslant y]=P[X-\mu\leqslant y\sigma]=P[X\leqslant y\sigma+\mu]=\int_{-\infty}^{\mu+y\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

令 $x=(t-\mu)/\sigma$, 代入得到分布函数

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

由此可得 $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$. 若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sigma X+\mu\leqslant y)=P(X\leqslant(y-\mu)/\sigma)=\int_{-\infty}^{(y-\mu)/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

令 $t=(x-\mu)/\sigma$, 代入得到

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

定理 4.7 若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则

$$E(X)=\mu\qquad\text{和}\qquad\mathrm{Var}(X)=\sigma^2.$$

特别地, 若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则 $E(X)=0$ 和 $\mathrm{Var}(X)=1$.

证明 若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 根据期望的定义有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=0$$

因为奇函数在对称的区间上积分为 0. 进一步有

$$\mathrm{Var}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}tde^{-t^2/2}=\left[te^{-t^2/2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=1.$$

如果 $Y\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则 $(Y-\mu)/\sigma\sim\mathcal{N}(0,1)$, 于是有

$$0=E((Y-\mu)/\sigma)=(E(Y)-\mu)/\sigma\quad\Rightarrow\quad E(Y)=\mu,$$