教材习题 2.3，2.5，2.8，2.9，2.14，2.16

运动学

2.3

取 $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

假设钢球在窗最上端速度为 v_1, 最下端为 v_2, 接触地面速度为 v_3

$\therefore$ 由钢球在 $h = 1.3$ m 的窗前下落了 $t_0 = 0.125$ s

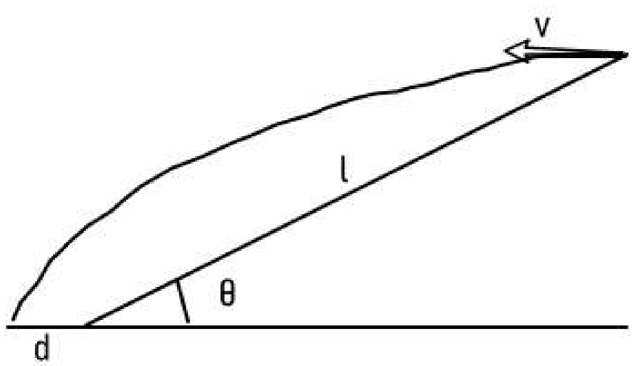
$$\therefore \begin{cases} v_2 = v_1 + gt_0 \\ h = v_1 t_0 + \dfrac{1}{2} g t_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{h - \frac{1}{2} g t_0^2}{t_0} = 8 \times (\dfrac{13}{10}) = 9.775\ \mathrm{m/s} \\ v_2 = v_1 + gt_0 = 11.025\ \mathrm{m/s} \end{cases}$$

$\because t_1 = 2.0$ s 后重返窗最下端

$$\therefore v_3 = v_2 + g\frac{t_1}{2} = 21.025\ \mathrm{m/s}$$

$$\therefore H = \frac{v_3^2}{2g} = 22.10253125\ \mathrm{m}$$

2.5



(a)

$\therefore h = l \sin\theta$

$\because h = \frac{1}{2} g t^2$

$\therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2l\sin\theta}{g}}$

$\therefore d = x - l\cos\theta = vt - l\cos\theta = v\sqrt{\frac{2l\sin\theta}{g}} - l\cos\theta$

$\therefore d = v\sqrt{\frac{2l\sin\theta}{g}} - l\cos\theta$

(b)

令 $d = v\sqrt{\frac{2l\sin\theta}{g}} - l\cos\theta > 0$

$\therefore v > l\cos\theta\sqrt{\frac{g}{2l\sin\theta}}$

$\therefore$ 只有当抛射体速度 v 大于 $l\cos\theta\sqrt{\frac{g}{2l\sin\theta}}$ 时才能越过观察者头顶

2.8

设已知地球自转周期为 T_e, 地球绕太阳公转周期为 T_s, 地球赤道半径为 R_e, 地球绕太阳公转半径为 R_s

要求地球自转加速度与公转加速度之比 $a_e : a_s$

$\because F = ma = m\omega^2 R = m(\frac{2\pi}{T})^2 R$

$\therefore a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$

$\therefore a_e : a_s = \frac{4\pi^2 R_e}{T_e^2} \cdot \frac{T_s^2}{4\pi^2 R_s} = \frac{R_e T_s^2}{R_s T_e^2}$

2.9

假设该音叉和标准音叉分别为 $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi), x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$

所以两只音叉合并为

$$\begin{aligned}x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)] \\ &= 2A|\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t|\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi)\end{aligned}$$

拍的周期为 $T = \dfrac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$

拍频为 $f = |f_1 - f_2|$

$\because$ 当音叉一支粘上一小块蜡时, 音叉的频率会降低, 此时拍频也跟着降低

$\therefore$ 说明 $f_1 > f_2$

$\therefore f_1 = f_2 + f = 387$ Hz

2.14

设 A 地与 B 地的距离为 s

(a)

$\therefore t_a = \dfrac{2s}{v'}$

(b)

$\therefore t_b = \dfrac{s}{v'+u} + \dfrac{s}{v'-u}$

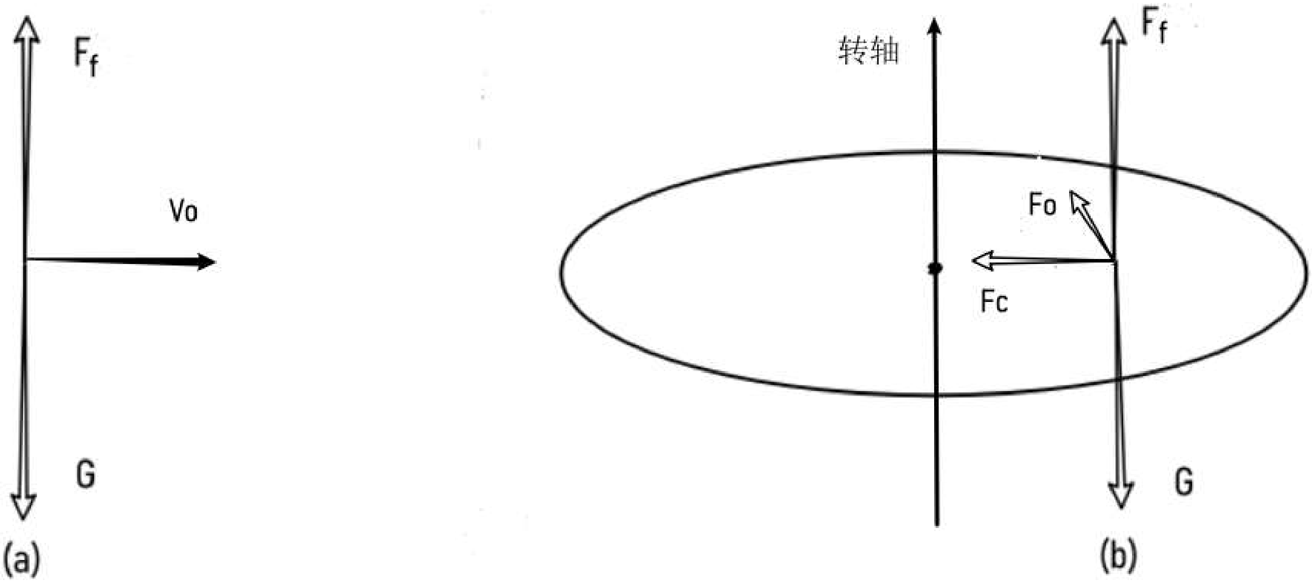
对 v' 要求为 $v' > u$

(c)

$\therefore t_c = \dfrac{2s}{\sqrt{v'^2 - u^2}}$

对 v' 要求为 $v' > u$

2.16



(a)

该病毒从离旋转轴 r 处开始, 沿着径向向外以速度 v_0 匀速直线运动, 加速度为零, 受力如图, 有向上的浮力 F_f 和向下的重力 G, 合力为零.

(b)

设旋转的参考系为 S, 实验室参考系为 S'

因为离心机每分钟 n 转

$\therefore$ 角速度 $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$

位置 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 t$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + t\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t'^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) \\ &= 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) \\ &= 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{R} \\ &= 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 - \frac{4\pi^2 n^2}{3600}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 t)\end{aligned}$$

如图, 病毒运动情形为以螺旋线的方式向外运动, 其中径向速度大小为 v_0

受力分别为浮力 $\boldsymbol{F}_f$, 重力 $\boldsymbol{G}$

向心力 $\boldsymbol{F}_c = -\dfrac{\pi^2 n^2}{900}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 t)$, 大小为 $F_c = \dfrac{\pi^2 n^2}{900}(r + v_0 t)$, 方向指向旋转轴

科里奥利力 $\boldsymbol{F}_o = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0$, 大小为 $F_o = 2\omega v_0 = \frac{\pi n v_0}{15}$, 方向垂直于转轴和向心力, 指向速度方向一侧