高等代数作业

练习

在 $P[x]_n (n>1)$ 中, 求微分变换 D 的特征多项式. 并证明: D 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵 (即 D 不可对角化).

解:

对于一组基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$, 其对应的线性变换矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

所以 D 的特征值为 0

带入 $\lambda E - A$ 可得 $-A$.

求解 $-AX=0$ 方程组可知, 解空间的维度是 1, 即只有一个线性无关的特征向量.

所以对于 $n>1$ 的 D 来说, D 不可对角化.

例 3

线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 在 V 中是否存在一组基, 使 σ 在该基下为对角矩阵, 若存在, 则求之.

解:

对于矩阵: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

令 $B = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$

行列式为 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$

解得其特征值为 $1, 2$

令 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

则 $B_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

进行初等行变换化简:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于特征值 $\lambda_1 = 1$, 其中一个特征向量是 $\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

同理 $B_2 = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

进行初等行变换化简:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于特征值 $\lambda_2 = 2$, 其中一个特征向量是 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

因为 A 是 3 维的矩阵, 而只有 2 个线性无关的特征向量

所以不存在一组基, 使得 σ 在其之下为对角矩阵.

例 4

实数域上的矩阵 A 能否与对角矩阵相似? 如果能, 求可逆矩阵 X 使 $X^{-1}AX=\Lambda$ 为对角阵, 这里 $A=\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}$.

解:

令 $B=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{bmatrix}$

其行列式为 $\lambda^3-3\lambda^2+4=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

解得其特征值为 $-11,2$

令 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$

则 $B_1=\lambda_1\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{bmatrix}$

进行初等行变换化简:

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

对于特征值 $\lambda_1=-1$, 其中一个特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

同理 $B_2=\lambda_2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\4&-1&-1\end{bmatrix}$

进行初等行变换化简:

$$\begin{bmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\4&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

对于特征值 $\lambda_2=2$, 其中两个线性无关的特征向量为 $\xi_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\1\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\1\end{bmatrix}$

因此可以令 $X=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

则有 $\Lambda = X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 为对角阵.

14.

(2)

对于 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

设 V 中的向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, 即 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

令 $\mathcal{A}(\alpha) = 0$, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}\left((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) &= \mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

即 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$

进行初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_2 + r_1, r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可知 $\eta_1 = -2\varepsilon_1 - \dfrac{3}{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \eta_2 = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$ 为其的两个基础解系.

$\therefore$ 核 $\mathcal{A}^{-1}(0)=L(\eta_1,\eta_2)$, 维度为 2, 秩为 2

$\therefore$ 值域 $\mathcal{A}(V)$ 的秩为 $4-2=2$

由 A 可知 $\mathcal{A}(V)$ 的一组基 $\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4, \mathcal{A}(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4$

$\therefore$ 值域 $\mathcal{A}(V)=L(\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2))$

(3)

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ 扩展 η_1,η_2 为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\eta_1,\eta_2$

$$\because (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\eta_1,\eta_2$ 下的矩阵 B 为

$$\therefore B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

将基扩充为 $\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4, \mathcal{A}(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_4$

$$\because (\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵 B 为

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$