

# 第五章：控制系统的性能

2022年10月7日

# 知识点回顾

控制系统的多种数学模型

动态响应的数学解析

$$Y(s) = G(s)R(s) \quad y(t) = L^{-1}(Y(s))$$

数学解析远远不够！

工程目标：性能可接受的控制系统

稳，

第六章  
控制系统的稳定性

快，准！

第五章  
控制系统的性能

---

本章的基本要求：

- **掌握**二阶系统时域性能指标的定义与计算
- **掌握**极点位置与性能指标之间的对应关系
- **掌握**稳态误差的计算方法

能力要求：

对二阶系统性能**了如指掌**，调控自如

---

# 内容安排

5.1

时域响应概述

5.2

瞬态响应和瞬态性能指标

5.3

一阶系统的时域响应性能分析

5.4

二阶系统的时域响应性能分析

5.5

高阶系统的时域响应性能分析

5.6

系统的稳态性能分析

5.7

MATLAB在时域响应分析中的应用

快

准

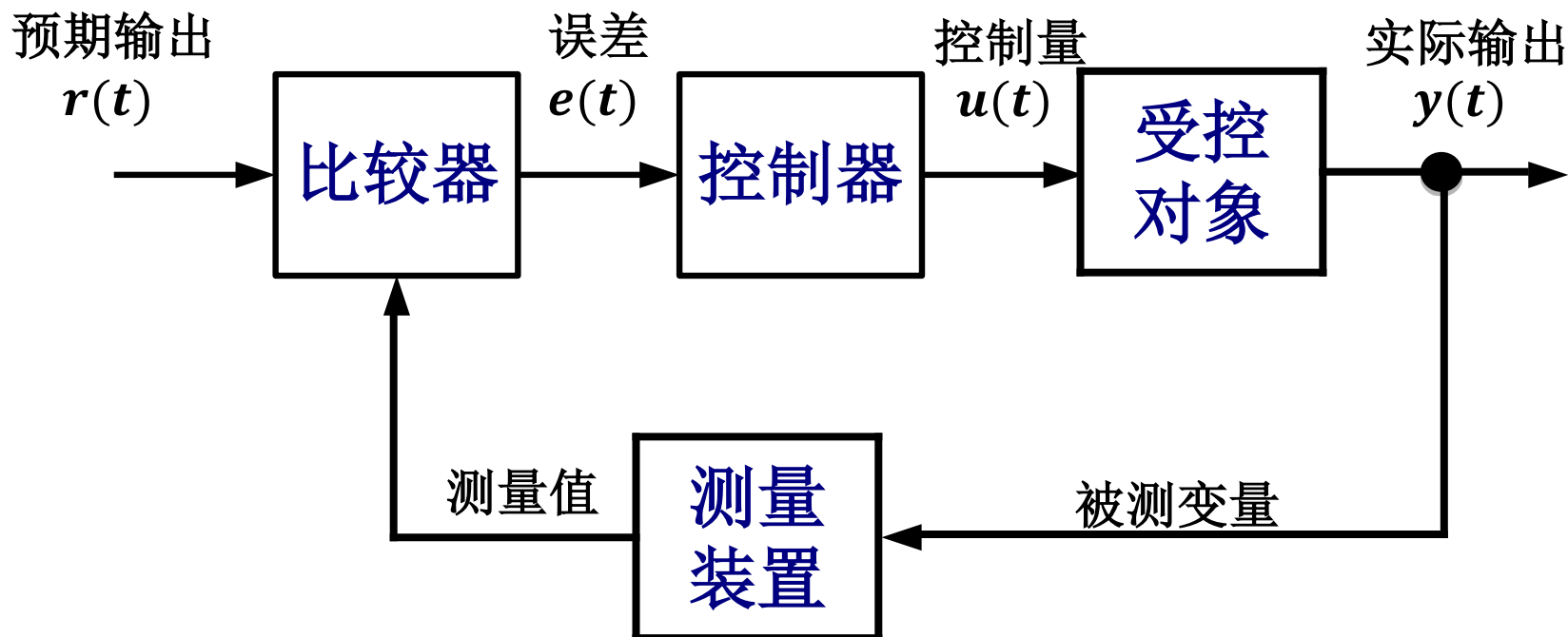
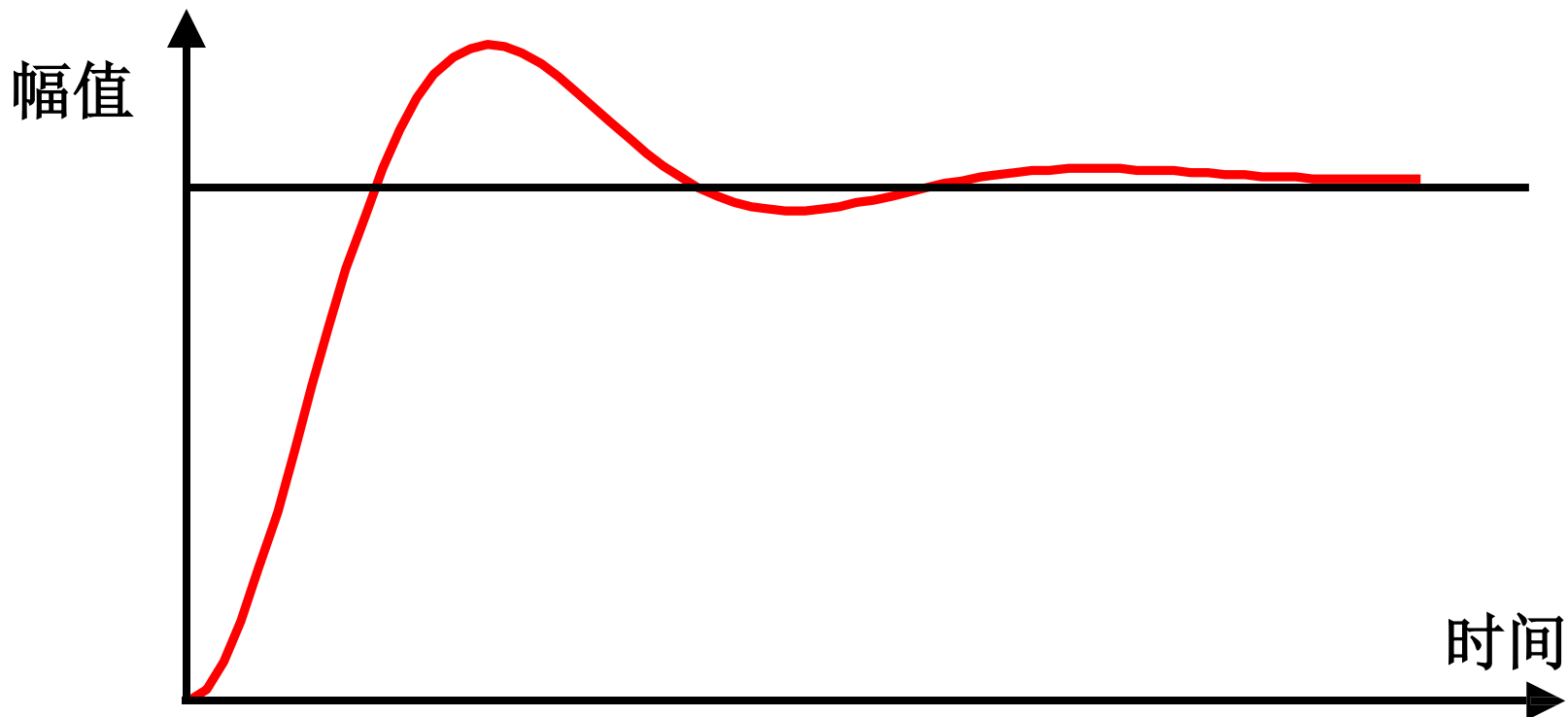


图5.1 闭环控制随动系统框图—稳压器等

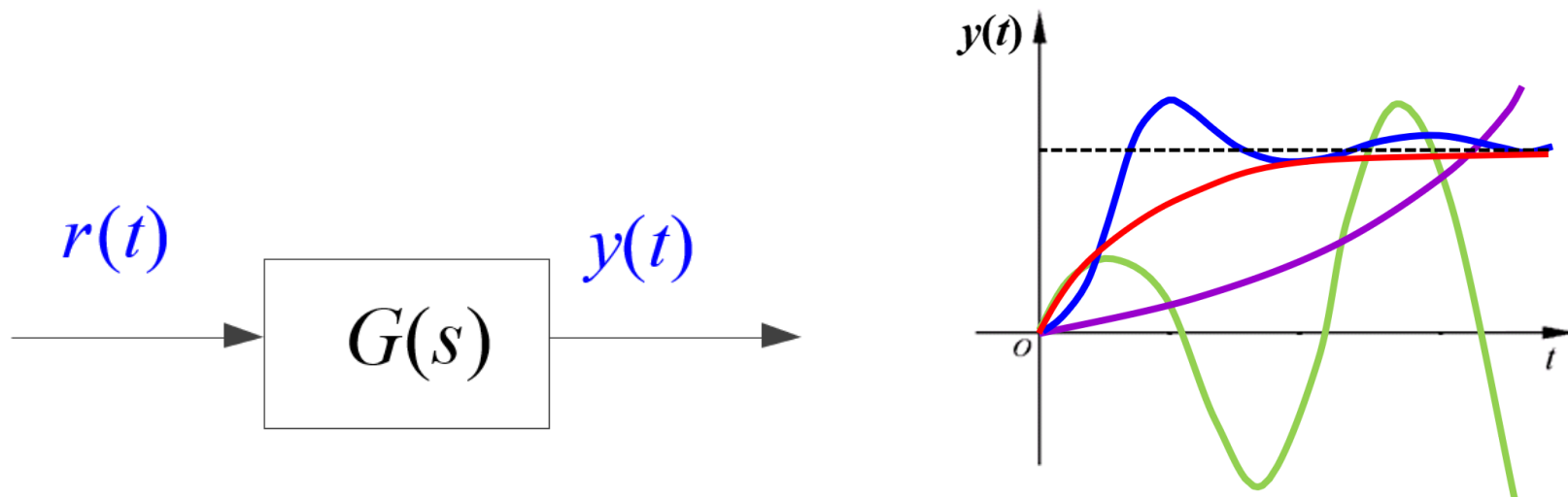
控制目的:  $y(t) = r(t)$

如何衡量输出信号对输入信号的跟踪品质？

-----性能指标与分析

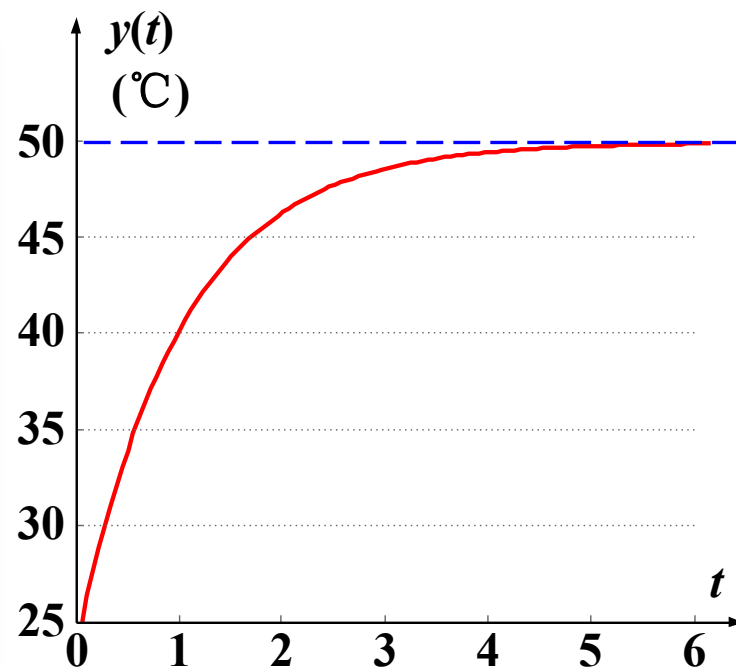
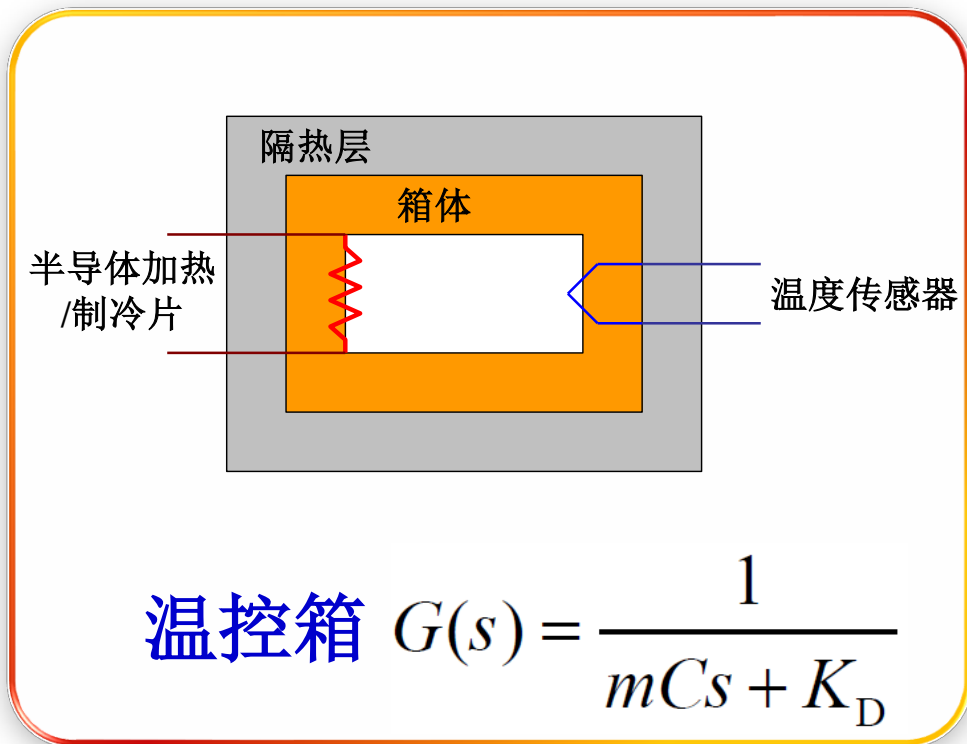


**时域响应：**系统在输入信号作用下，输出  
随时间的变化过程  
又称时间响应



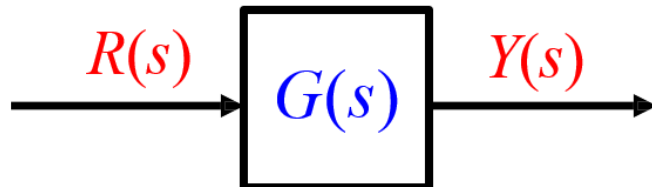


# 温控箱的时域响应



时域响应能直观地反映系统性能

时域响应的求取：



$$Y(s) = G(s) R(s)$$

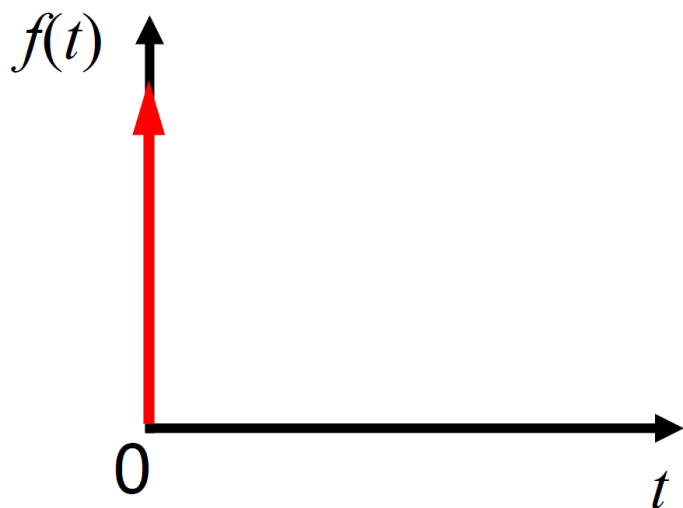
$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s) R(s)]$$

时域响应（函数）等于系统传递函数与输入信号的象函数之积取拉普拉斯反变换。

# 典型系统在典型输入信号下的时域响应

典型系统	典型输入信号
一阶系统 $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$	单位脉冲信号 1
二阶系统 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	单位阶跃信号 $\frac{1}{s}$
	单位斜坡信号 $\frac{1}{s^2}$
	单位加速度信号 $\frac{1}{s^3}$
	正弦信号 $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

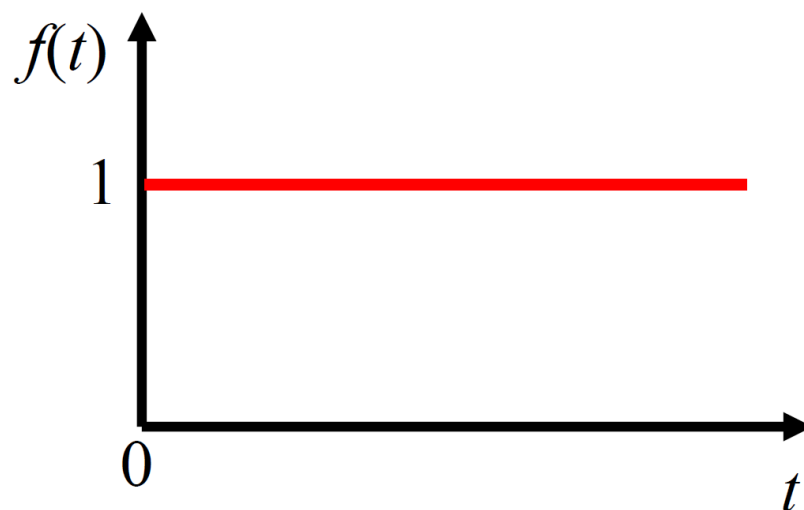
## □ 单位脉冲信号 $\delta(t)$



单位脉冲信号

$$L[\delta(t)] = 1$$

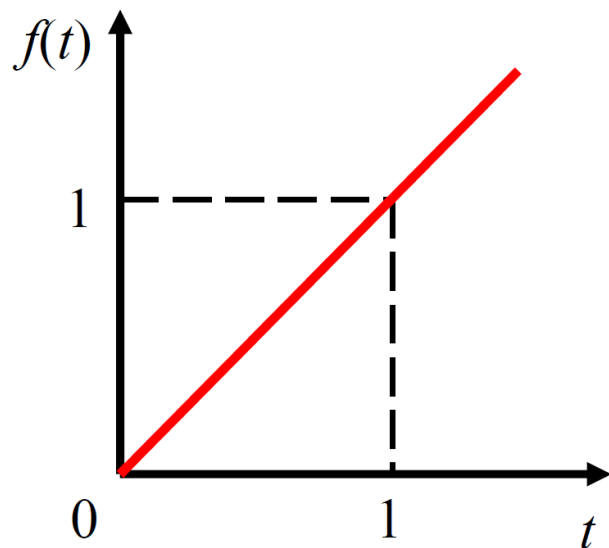
## □ 单位阶跃信号 $1(t)$



单位阶跃信号

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}$$

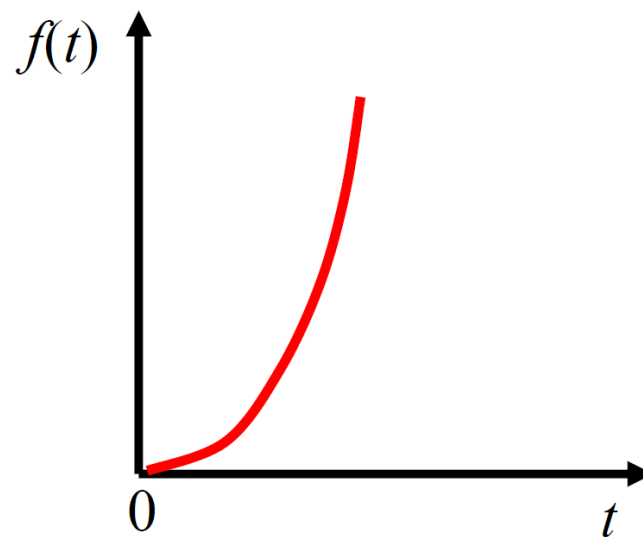
## □ 单位速度(斜坡)信号



单位速度信号

$$L[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$

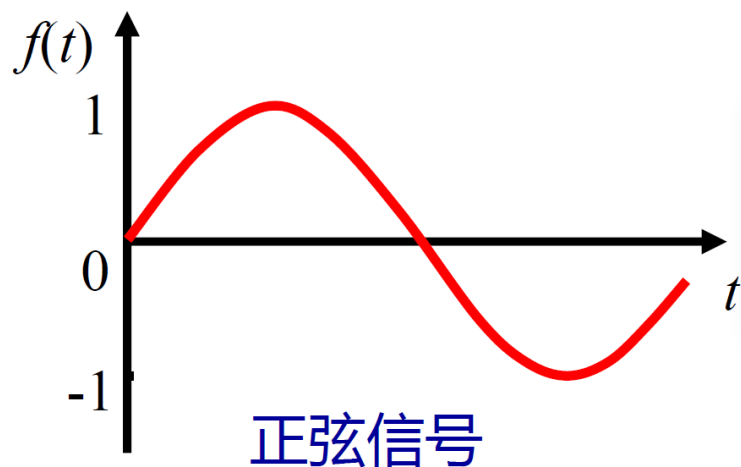
## □ 单位加速度信号



单位加速度信号

$$L\left[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3}$$

## □ 正弦信号



$$L[\sin(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

脉冲信号、阶跃信号、斜坡信号和加速度信号  
常用于分析系统的时域瞬态响应；

正弦输入信号常用于分析系统的频率响应特性。

# 内容安排

5.1

时域响应概述

5.2

**瞬态响应和瞬态性能指标**

5.3

一阶系统的时域响应性能分析

5.4

二阶系统的时域响应性能分析

5.5

高阶系统的时域响应性能分析

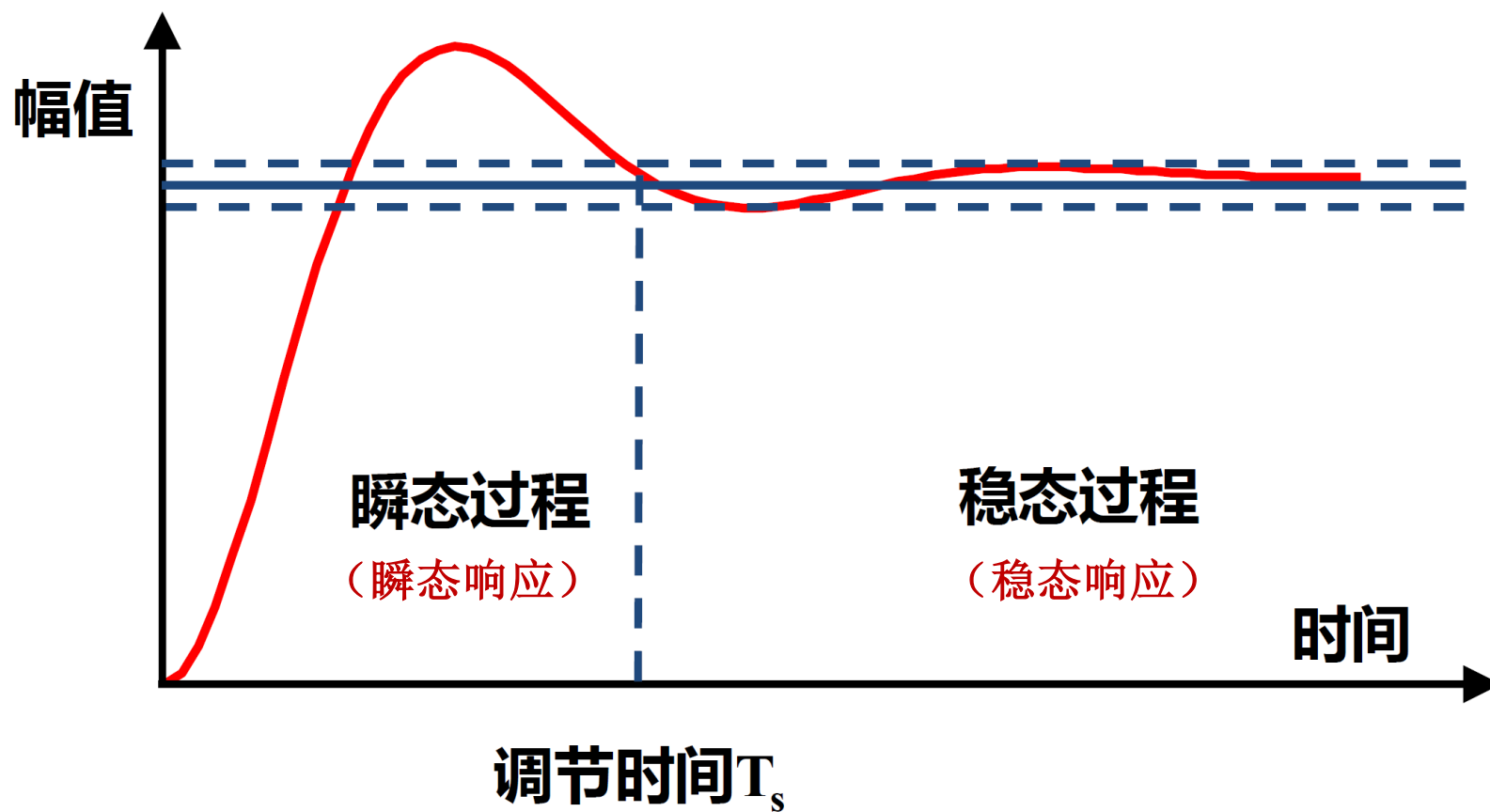
5.6

系统的稳态性能分析

5.7

MATLAB在时域响应分析中的应用

**时域分析法**：在时间域内研究控制系统性能的方法。



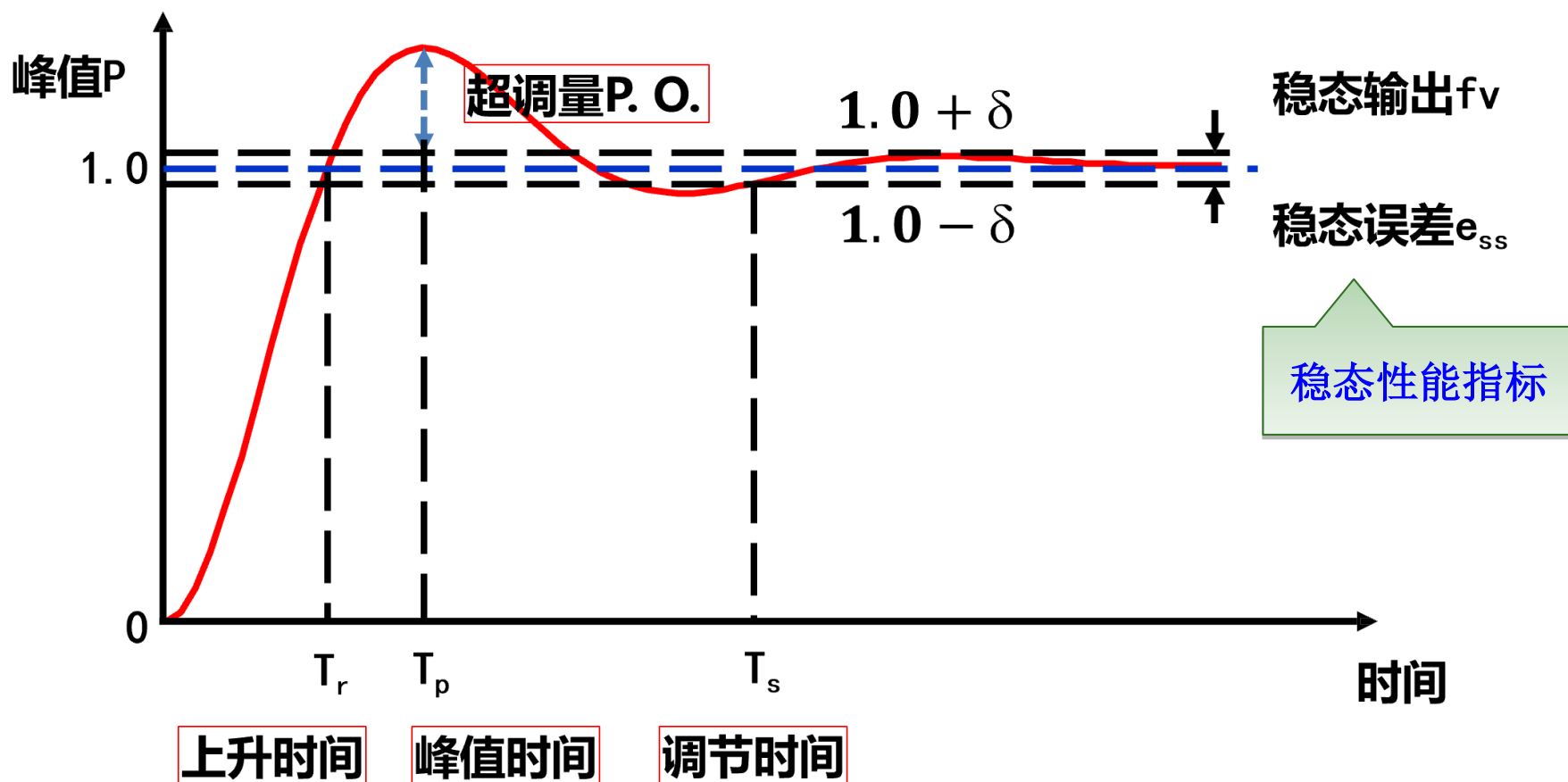


时域响应由两部分组成：

**瞬态响应：**系统在输入信号的作用下，输出量从初始状态到稳定状态的响应过程。  
也称瞬态过程、过渡过程。  
能反映系统的稳定性、快速性。

**稳态响应：**系统在输入信号作用下，当时间 $t$ 趋于无穷大时，系统输出量的表现方式。  
表征输出量最终复现输入量的程度。  
也称稳态过程，能反映系统的准确性。

**瞬态性能指标：**一组刻画瞬态过程**快速、平稳**等动态特性的定量指标。



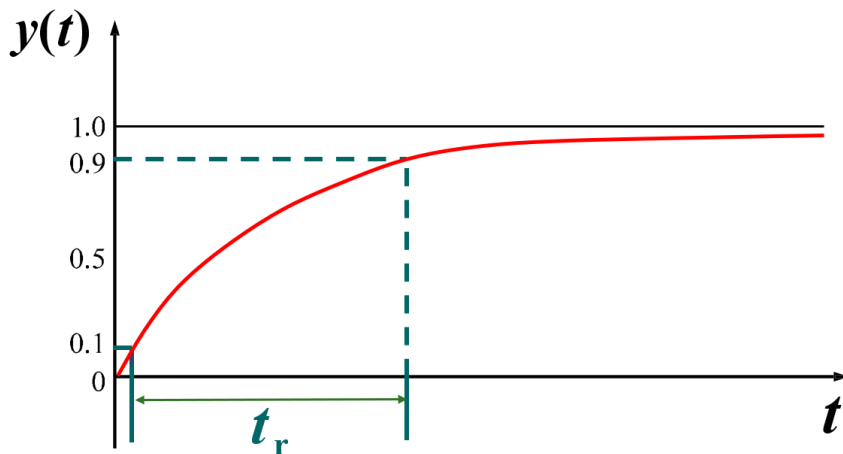
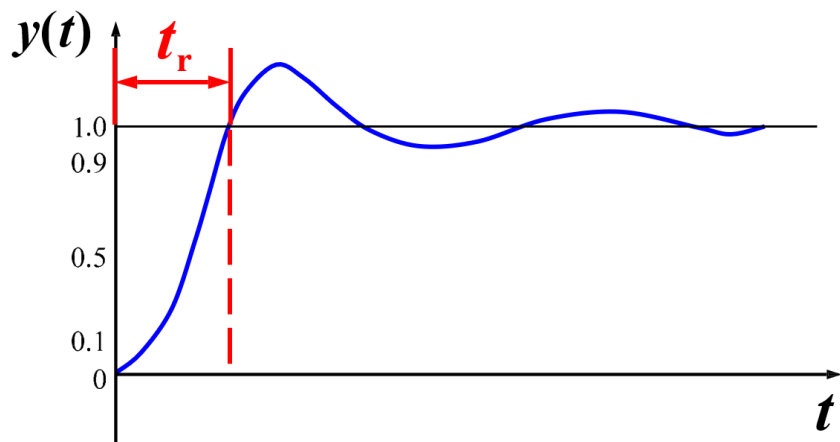
# 1. 上升时间 (Rise Time) $t_r$

有超调的系统

响应曲线从零时刻首次到达稳态值的时间。

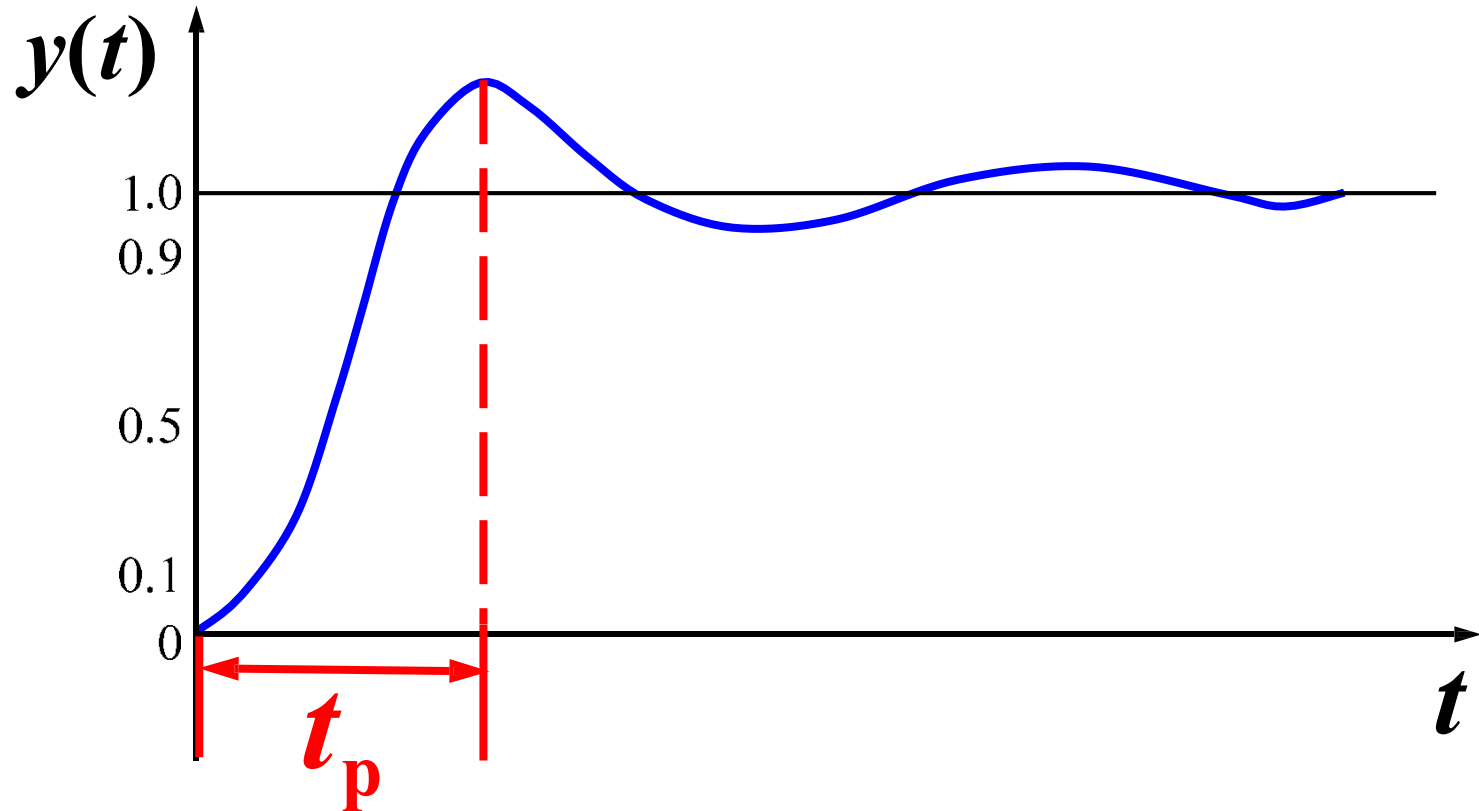
或从稳态值的10%上升到稳态值的90%所需的时间。

无超调的系统



## 2. 峰值时间 (Peak Time) $t_p$

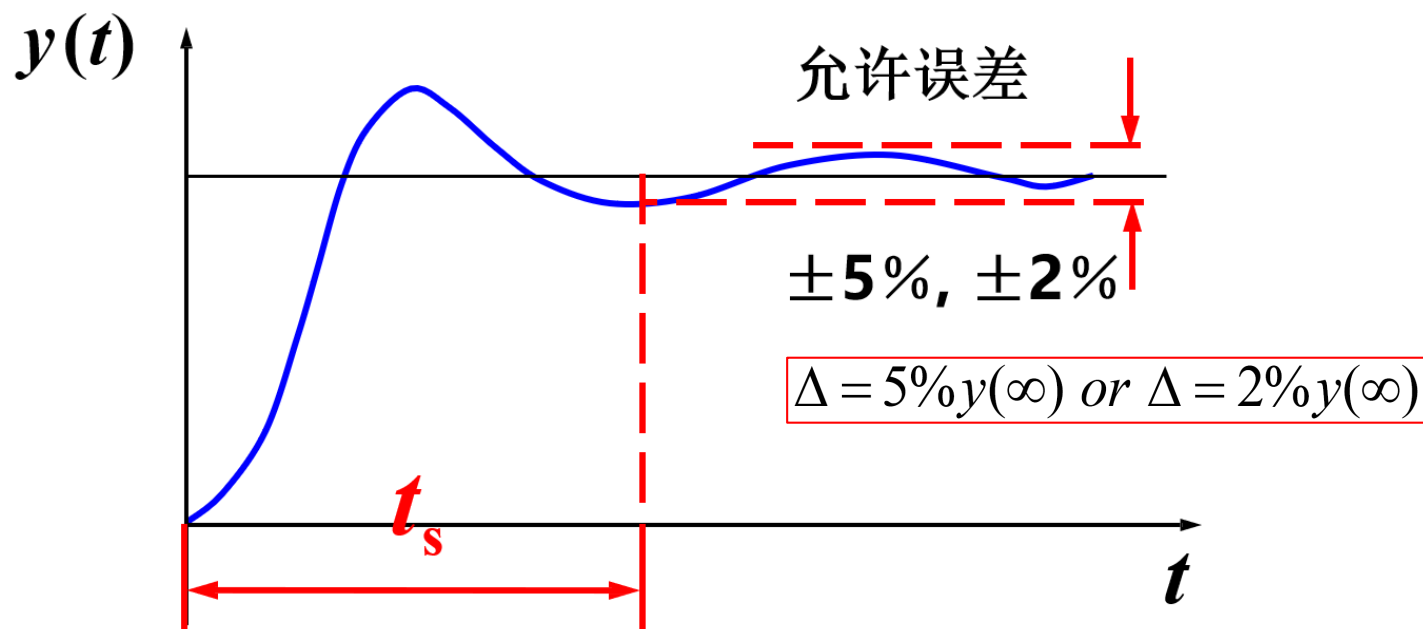
响应曲线从零时刻上升到第一个峰值点所需要的时间。



上升时间和峰值时间：主要衡量了系统响应的敏捷性。

### 3. 调节时间 (Settling Time) $t_s$

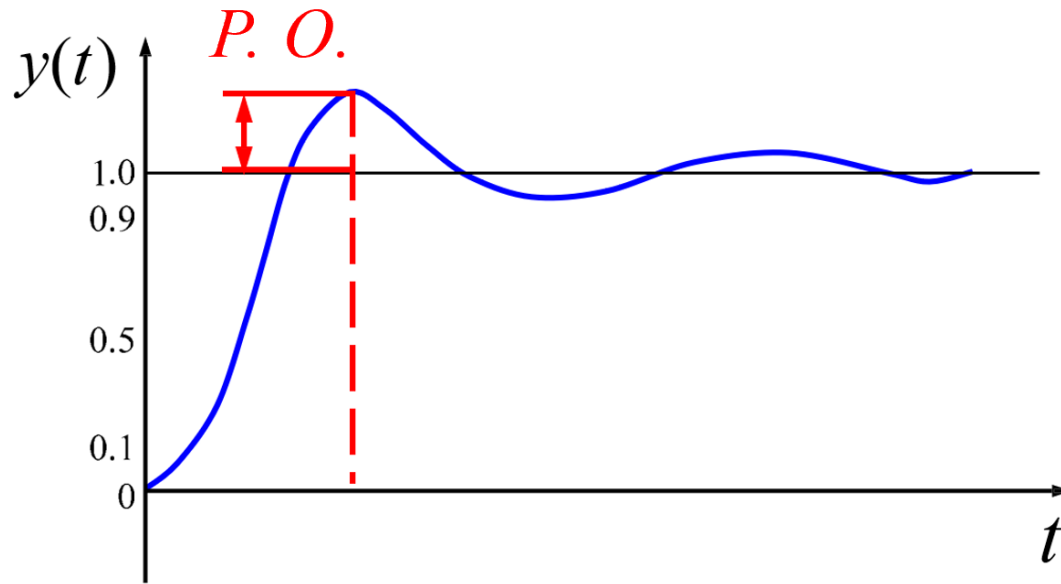
响应曲线达到并一直保持在允许误差范围内的最短时间。



该指标标志着过渡过程的结束，衡量了系统响应的快速性。

## 4. 超调量 (Percent Overshoot) P. O.

响应曲线的最大峰值与稳态值 1 的差。



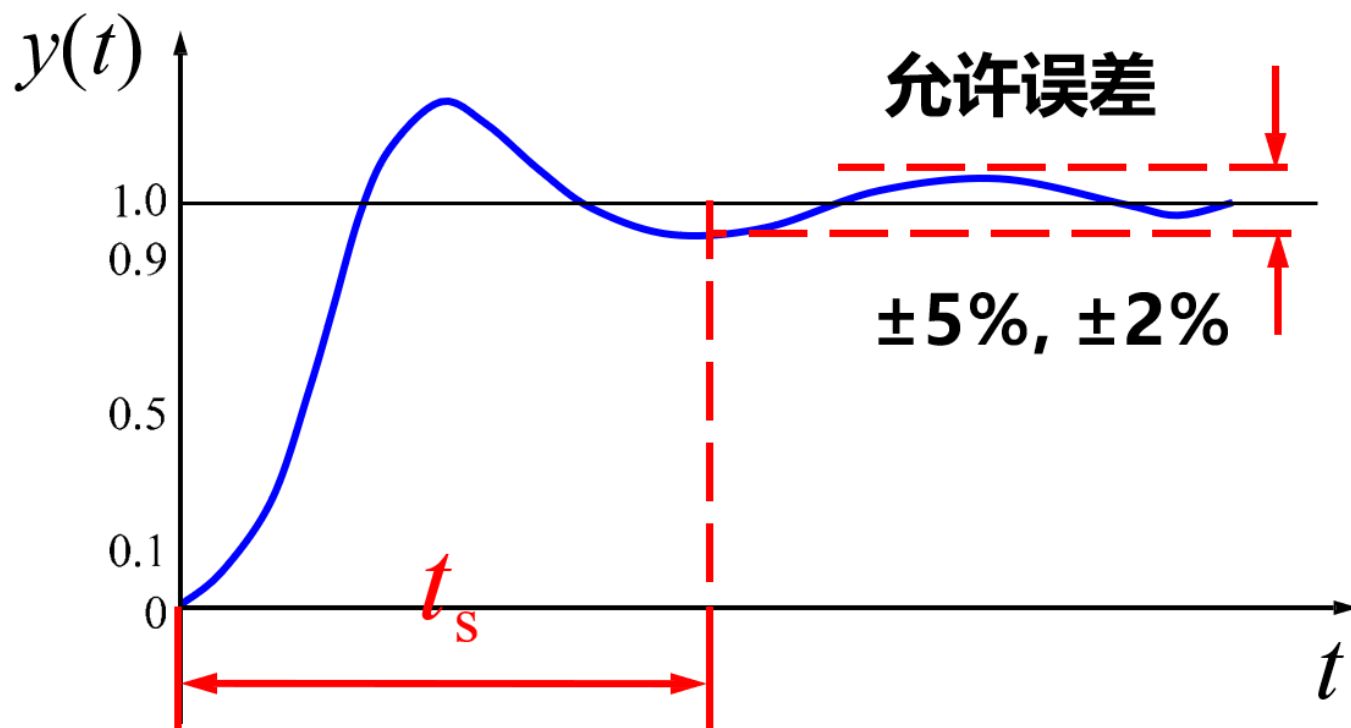
注：超调量为相对值，用百分比表示。

$$P. O. = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%$$

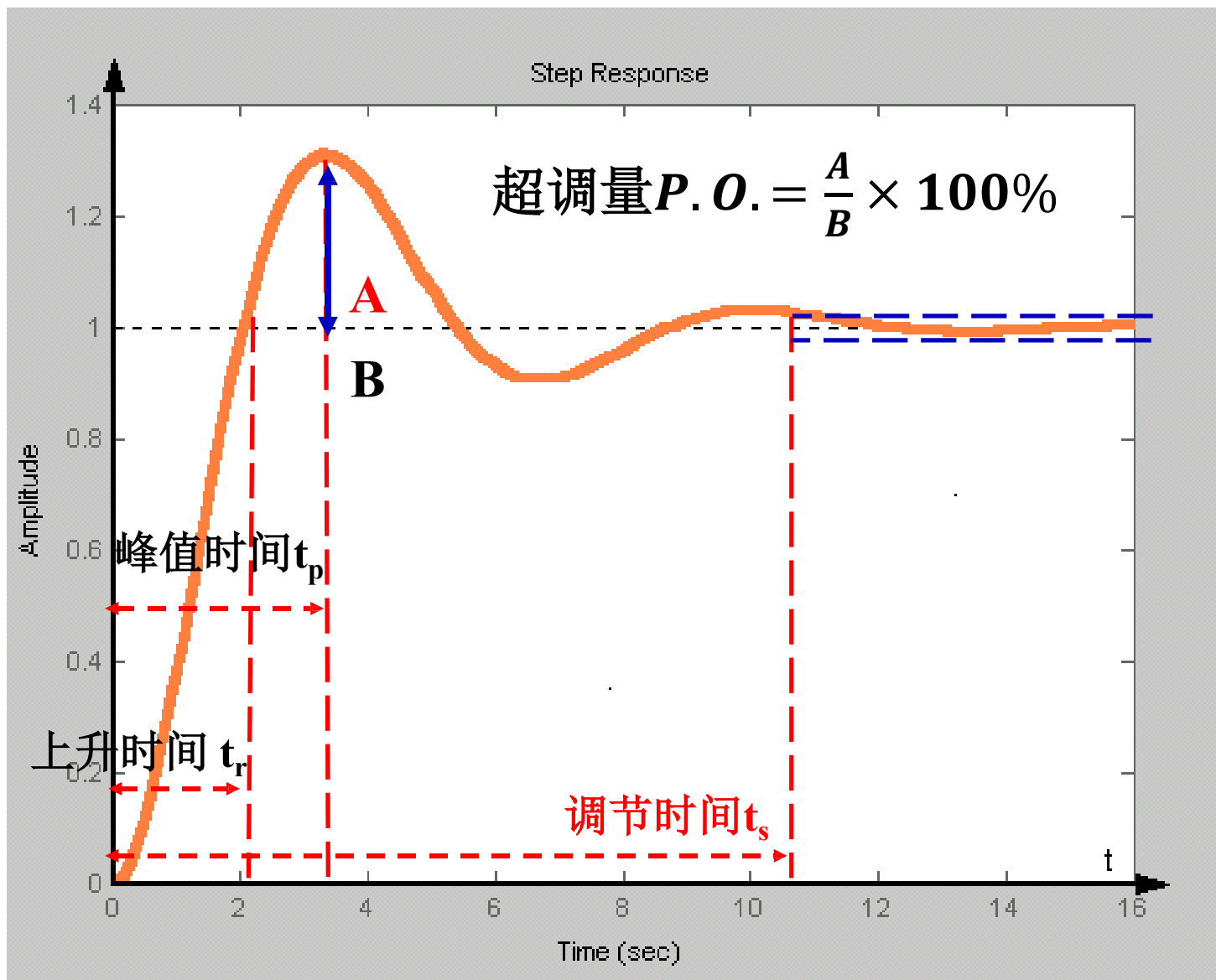
该指标衡量了系统响应的平稳性。

## 5. 振荡次数 (Oscillation Number)

在调节时间 $t_s$ 内响应曲线振荡的次数。

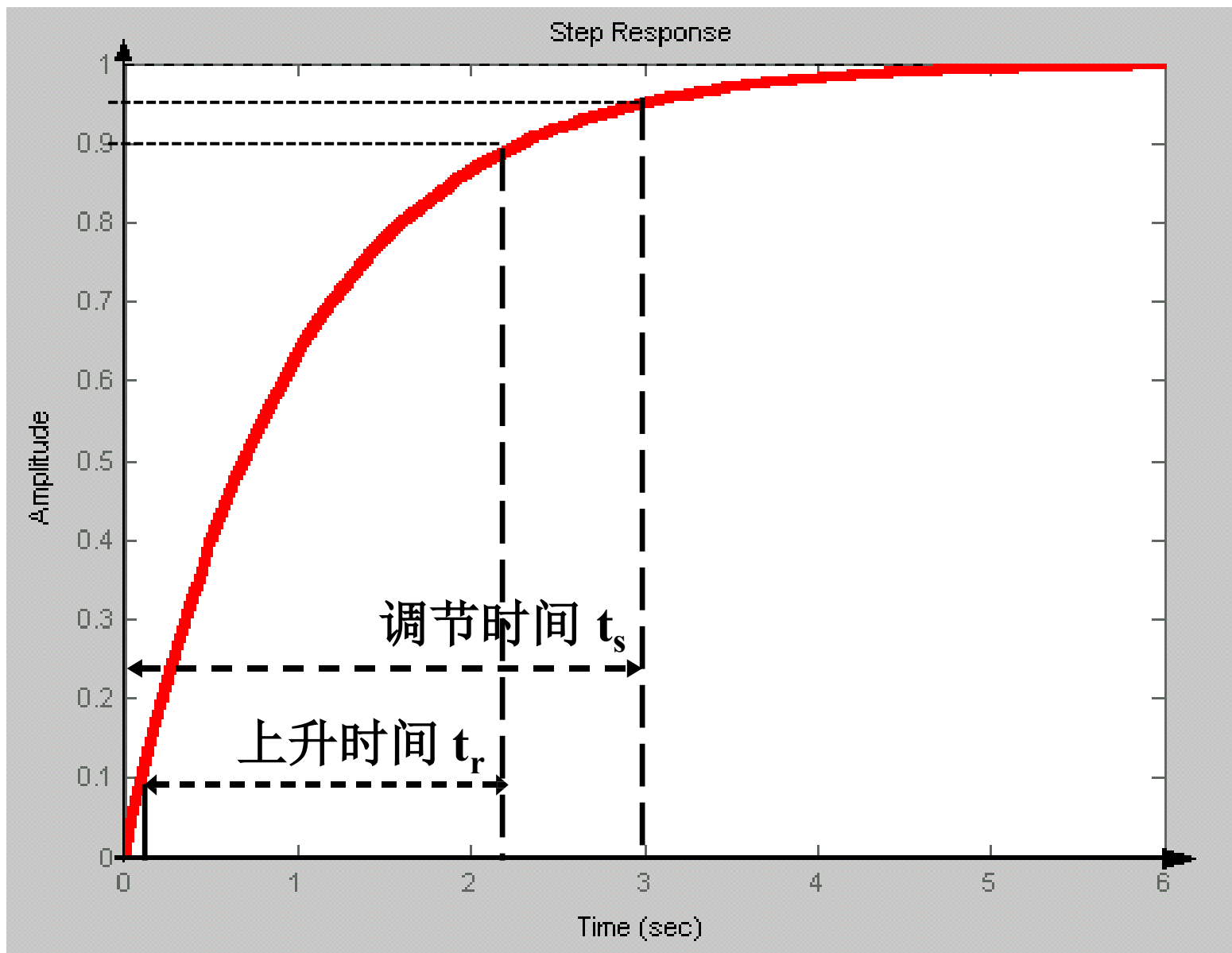


# 瞬态性能指标 (欠阻尼)





# 瞬态性能指标 (过阻尼)



# 内容安排

5.1

时域响应概述

5.2

瞬态响应和瞬态性能指标

5.3

**一阶系统的时域响应性能分析**

5.4

二阶系统的时域响应性能分析

5.5

高阶系统的时域响应性能分析

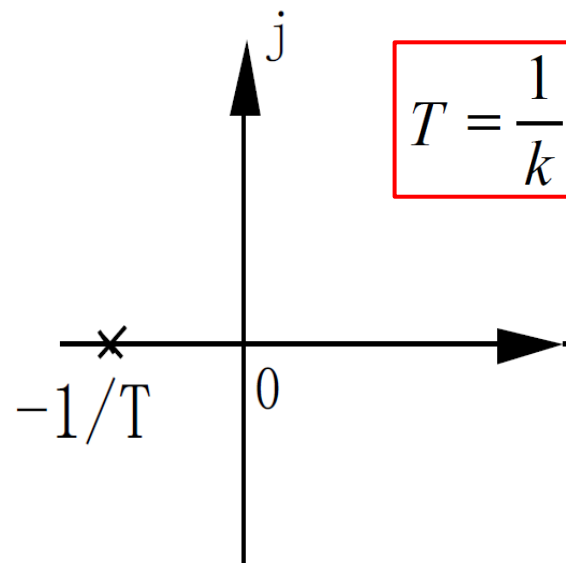
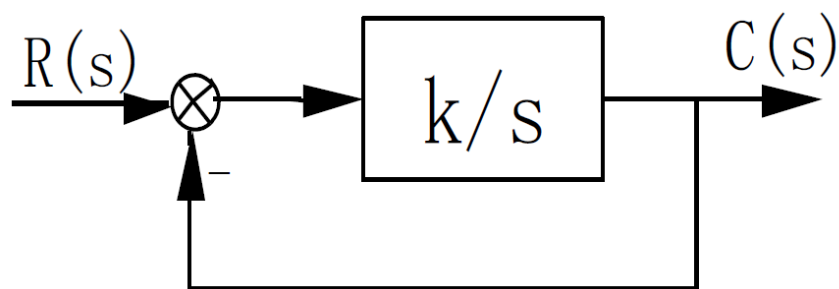
5.6

系统的稳态性能分析

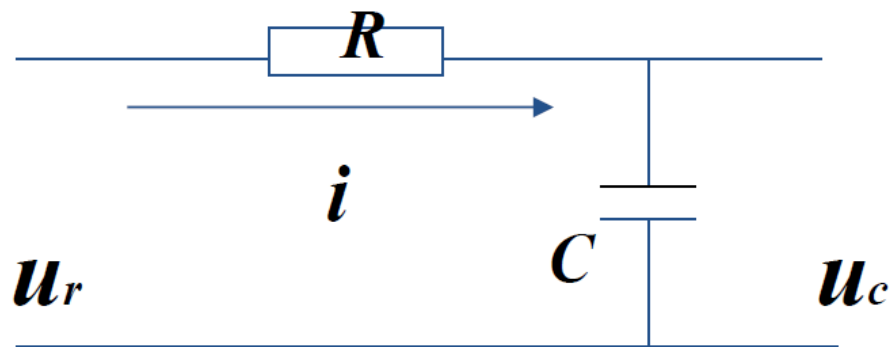
5.7

MATLAB在时域响应分析中的应用

## 典型一阶系统框图与零极点图



典型的例子是RC低通滤波器



## 一阶系统的数学模型

微分方程模型:  $T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$

开环传递函数:  $G(s) = \frac{1}{Ts} = \frac{k}{s}, k = \frac{1}{T}$

闭环传递函数:  $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$

其中，T称为**时间常数**，是一阶系统唯一的性能参数。

# 一阶系统的单位脉冲响应

单位脉冲输入  $r(t) = \delta(t)$       其象函数  $R(s) = 1$

输出信号的拉普拉斯变换:

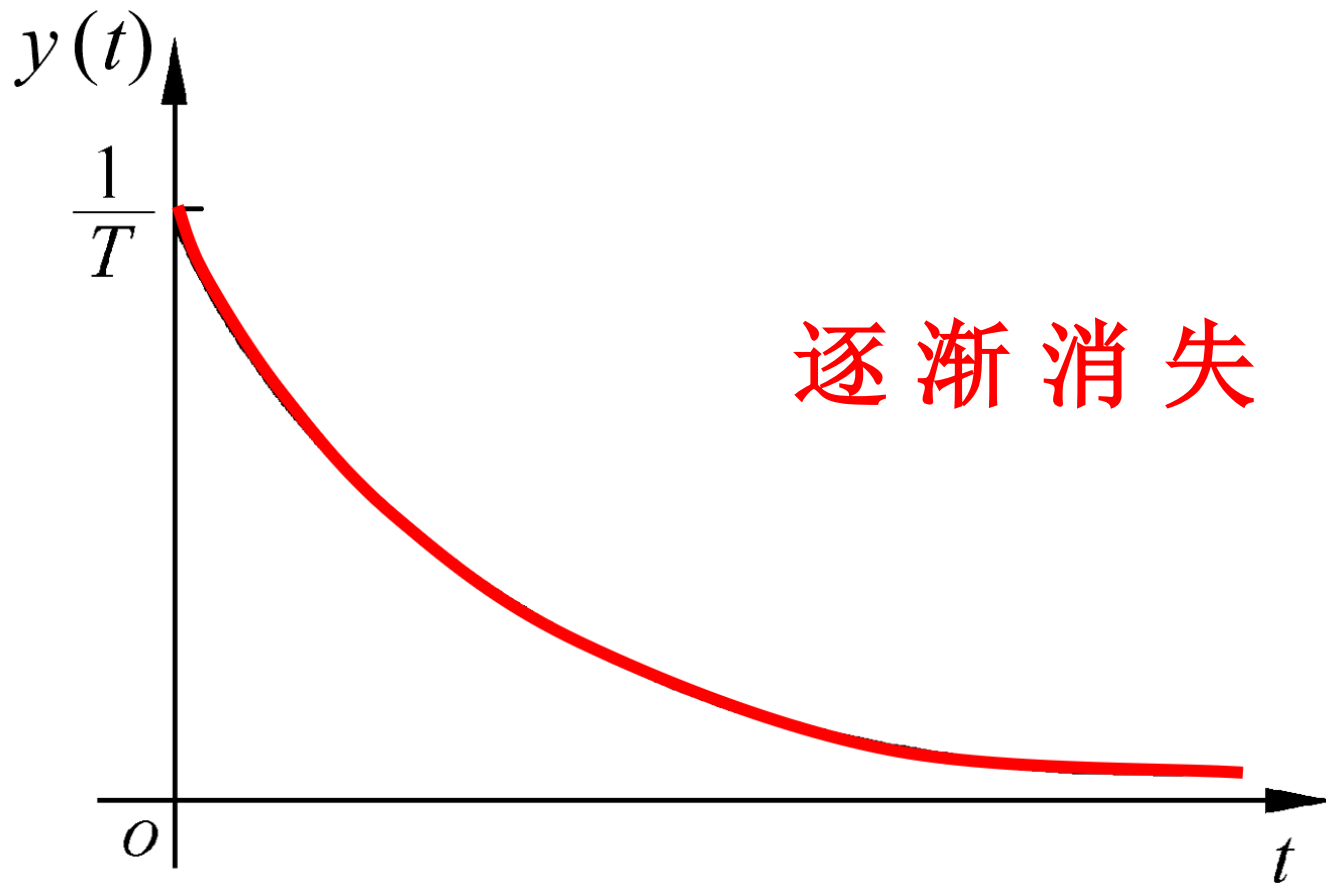
$$Y(s) = \Phi(s) R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

时域响应函数(脉冲响应函数):

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \left( \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \right) \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left( \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \right) 1(t)$$

一阶系统的单位脉冲响应



# 一阶系统的单位阶跃响应

单位阶跃输入  $r(t) = 1(t)$  其象函数为  $R(s) = \frac{1}{s}$

输出信号的拉普拉斯变换:

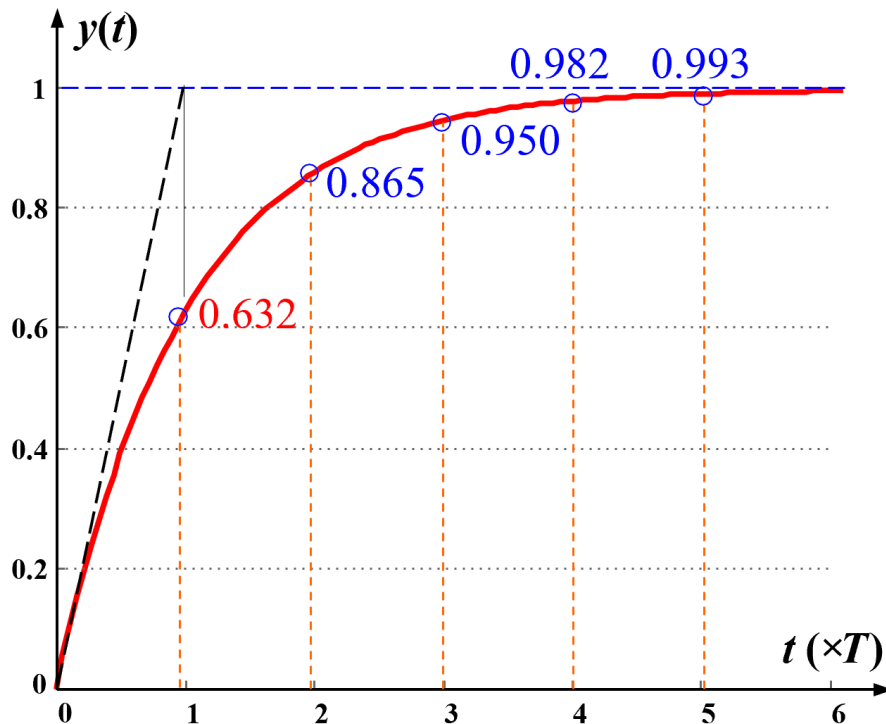
$$\begin{aligned} Y(s) &= \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

单位阶跃的时域响应函数:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right) \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right) 1(t)$$

一阶系统的单位阶跃响应



$$y(0) = 0$$

$$y(\infty) = 1$$

$$y(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

$$y(3T) = 1 - e^{-3} = 0.950$$

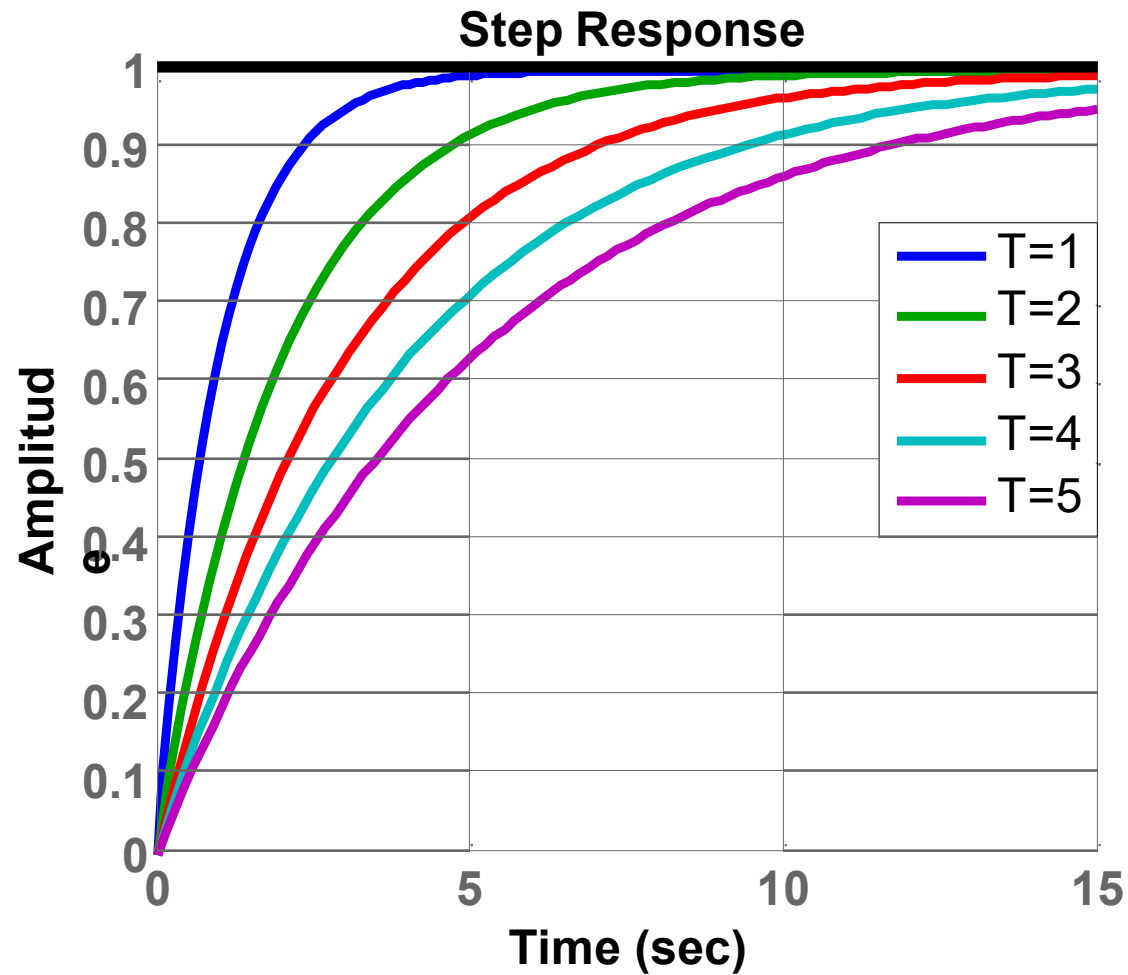
$$y(4T) = 1 - e^{-4} = 0.982$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$



## 特点:

- (1) 单调的指数曲线，稳定，无振荡，稳态误差为 0；
- (2) 经过时间  $T$ ，曲线上升到稳态值的 63.2%；
- (3) 调节时间为  $(3\sim 4)T$ ；
- (4) 在  $t = 0$  处，响应曲线的切线斜率为  $1/T$ ；
- (5)  $T$  越小，过渡过程持续时间越短，表明系统惯性越小，系统的快速性能越好。



$T$  越小，系统的快速性能越好

# 一阶系统的单位斜坡响应

单位斜坡输入  $r(t) = t \cdot 1(t)$  其象函数为  $R(s) = \frac{1}{s^2}$

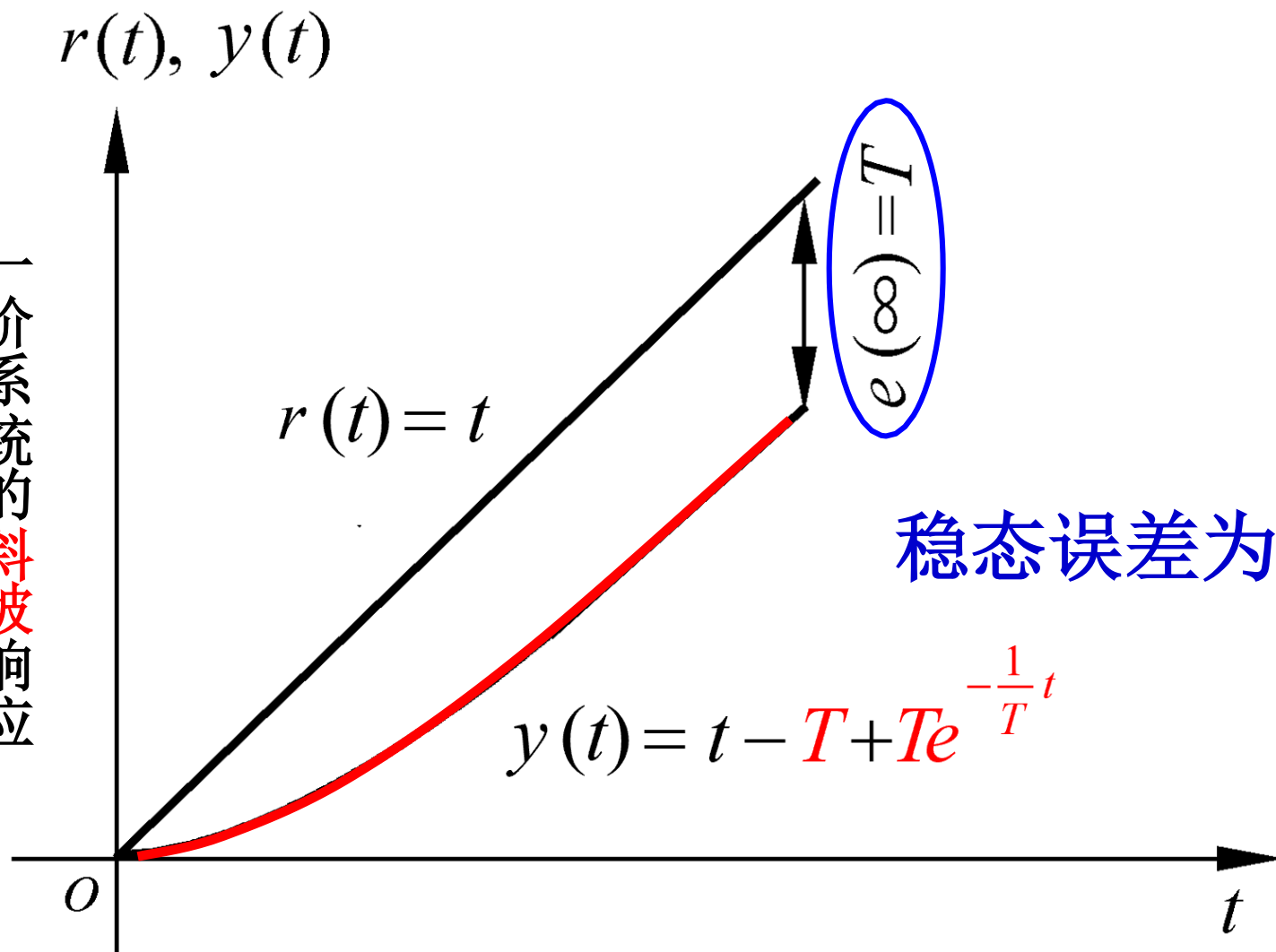
输出信号的拉普拉斯变换:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \Phi(s) R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

单位斜坡的时域响应函数:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \left( t - T + Te^{-\frac{1}{T}t} \right) \cdot 1(t)$$

一阶系统的斜坡响应



## 一阶系统的单位加速度响应

任务复杂时，有更恶劣的性能。

$$R(s) = \frac{1}{s^3},$$

$$Y(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \bullet \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + 1/T}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-t/T}), \quad t \geq 0$$

无限偏差！

性能分析  
与评价

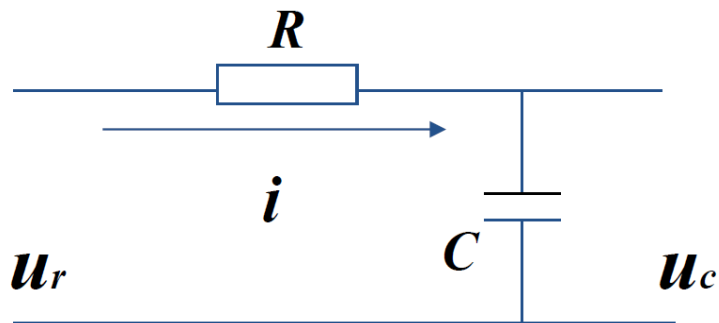


性能调节与改进：  
调参数、调结构等等

## 控制工程的循环主题

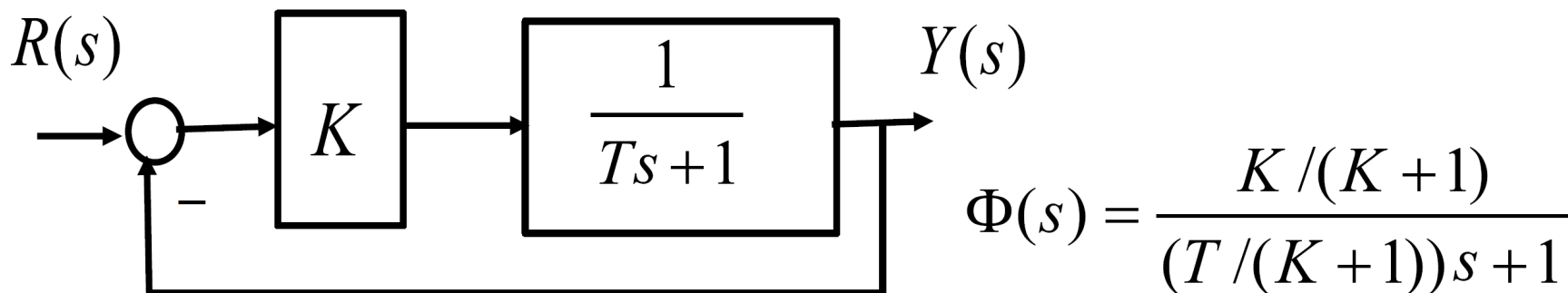
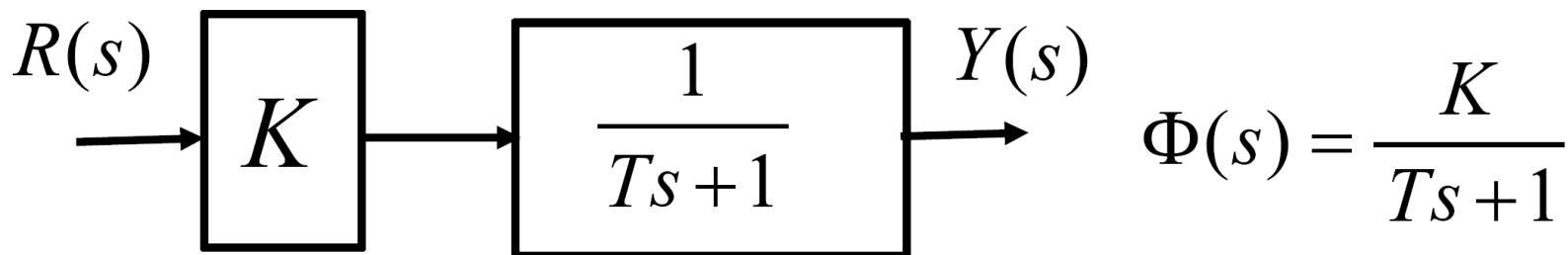
一阶系统功能简单，改善性能的空间和手段**有限**：

**1、选择元器件，以减小时间常数**



$$\Phi(s) = \frac{1}{RCs + 1} \quad T = RC$$

2、引入反馈，以减小时间常数。

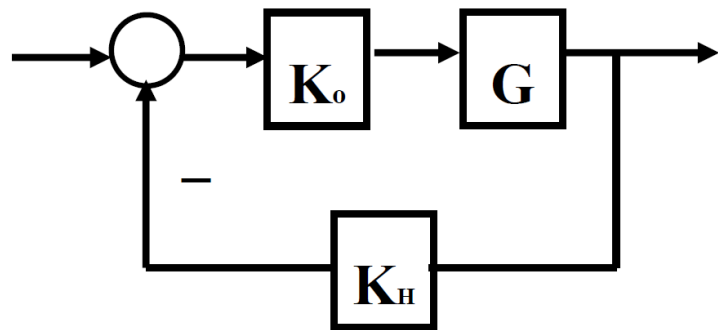


注意：反馈有功率损失的副作用。

例 5.1 系统原有的传递函数为:

$$G(s) = 10 / (0.2s + 1)$$

为了**加速**过渡过程, 需要将时间常数降低为原有值的**10%**, 同时保持系统稳态输出不变。试设计确定合适的放大器 $K_o$ 和反馈放大器 $K_H$ 。



解: 满足性能要求的闭环传递函数应该为:

$$\Phi(s) = \frac{10}{(0.2s / 10 + 1)}$$



$$\begin{aligned}
 \text{而 } \Phi(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_o G(s)}{1 + K_H K_o G(s)} = \frac{10K_o}{0.2s + 1 + 10K_H K_o} \\
 &= \frac{\frac{10K_o}{1 + 10K_H K_o}}{\left(\frac{0.2}{1 + 10K_H K_o} s + 1\right)}
 \end{aligned}$$

比较系数有：

$$\begin{cases} \frac{10K_o}{1 + 10K_H K_o} = 10 \\ 1 + 10K_H K_o = 10 \end{cases}$$

于是  $K_H = 0.09$

$$K_o = 10$$

## 例 5.2（复习，系统辨识）系统对输入信号

$$r(t) = (1 + t)1(t)$$

的零初始响应为：

$$y(t) = (t + 0.9) - 0.9e^{-10t}, \quad t \geq 0$$

试确定系统的传递函数。

解： 
$$Y(s) = L[y(t)] = \frac{1}{s^2} + \frac{0.9}{s} - \frac{0.9}{s+10} = \frac{10(s+1)}{s^2(s+10)}$$

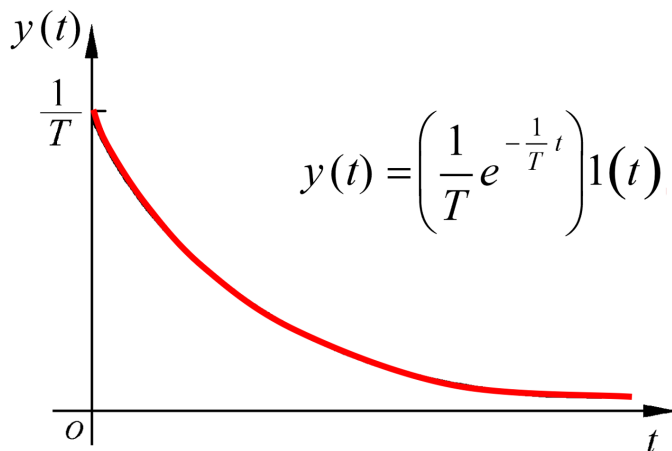
$$R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s+1}{s^2}$$

于是有：

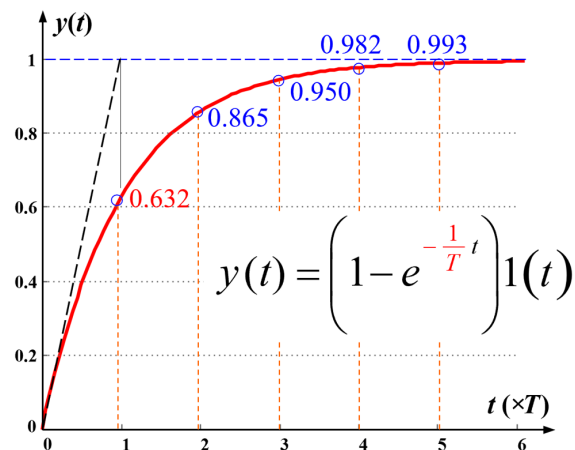
$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{0.1s + 1}$$

简单的一阶系统

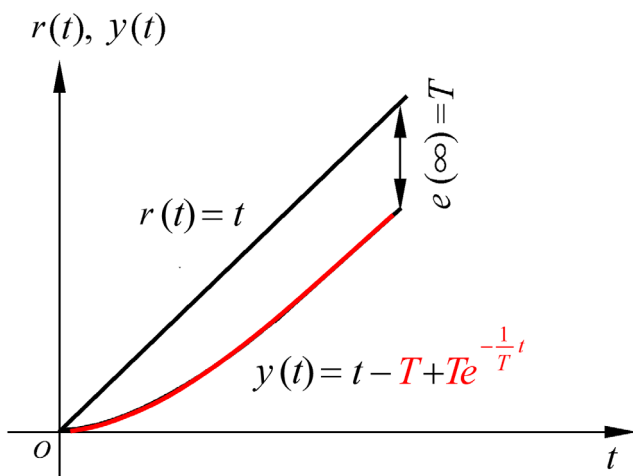
# 小结



## 1. 单位脉冲响应



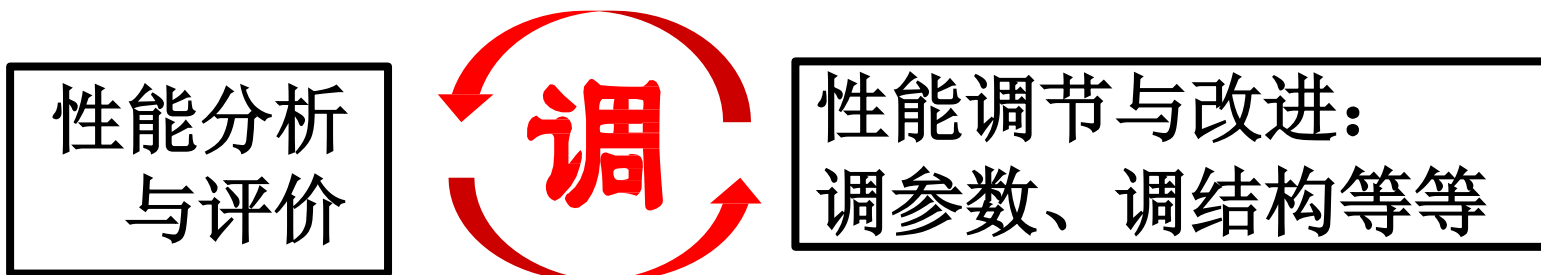
## 2. 单位阶跃响应



## 3. 单位斜坡响应

稳定性、快速性和准确性均与系统固有特性有关。稳定性、快速性与输入信号的形式无关；而准确性与输入信号的形式有关。

## 小结



### 控制工程的循环主题

- 一阶系统功能简单，性能改善的空间和手段有限：
  - 1、选择元器件以减小时间常数，
  - 2、引入反馈以减小时间常数。