高等代数作业

201300035 方盛俊

P317 17. 19. (4)(5)(6)(7) 22. 24.

17.

存在 $X = A^{-1}$

使得 $AB = X^{-1}BAX = ABAA^{-1} = AB$ 成立

$\therefore AB$ 与 BA 相似

19.

(4)

对于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

令 $B = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$

其行列式为 $\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 4 = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 2\right)$

解得特征值 $2, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$

令 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$

则 $B_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得 $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

因此特征值 $\lambda_1 = 2$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 对应的所有特征向量为 $k_1\xi_1 \ (k_1 \neq 0, k_1 \in P)$

同理 $B_2 = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\sqrt{3} & -6 & 3 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & -1 \\ -1 & -2 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得 $sympy.latex(var[''B_2''].doit().rref()) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-15\sqrt{3}-21}{29+17\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (0,\ 1) \right)$

因此特征值 $\lambda_2 = 1-\sqrt{3}$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 6-3\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, 所有特征向量为 $k_2\xi_2 \ (k_2 \neq 0, k_2 \in P)$

同理有特征值 $\lambda_3 = 1+\sqrt{3}$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 6+3\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, 所有特征向量为 $k_3\xi_3 \ (k_3 \neq 0, k_3 \in P)$

(5)

对于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

令 $B = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

其行列式为 $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$

解得特征值 $-1, 1$

令 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

则 $B_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得 $\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

因此特征值 $\lambda_1 = -1$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, 所有特征向量为 $k_1\xi_1\ (k_1 \neq 0, k_1 \in P)$

同理 $B_2 = \lambda_2 \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得 $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

因此特征值 $\lambda_2 = 1$ 对应的线性无关特征向量基础解系为 $\xi_{21} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\xi_{22} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, 所有特征向量为 $k_{21}\xi_{21} + k_{22}\xi_{22}\ (k_{21} \neq 0, k_{22} \neq 0, k_{21}, k_{22} \in P)$

(6)

对于矩阵 $A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}$

令 $B = \lambda \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & -2 & -1\\ 2 & \lambda & -3\\ 1 & 3 & \lambda\end{bmatrix}$

其行列式为 $\begin{vmatrix}\lambda & -2 & -1\\ 2 & \lambda & -3\\ 1 & 3 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^3 + 14\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 14\right)$

解得特征值 $0,\ -\sqrt{14}i,\ \sqrt{14}i$

令 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\sqrt{14}i, \lambda_3 = \sqrt{14}i$

则 $B_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得 $\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

因此特征值 $\lambda_1=0$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_1\xi_1\ (k_1\neq 0,k_1\in P)$

同理 $B_2=\lambda_2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{14}i&-2&-1\\2&-\sqrt{14}i&-3\\1&3&-\sqrt{14}i\end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得

$$\begin{bmatrix}-\sqrt{14}i&-2&-1\\2&-\sqrt{14}i&-3\\1&3&-\sqrt{14}i\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-(\frac{\sqrt{14}}{14}i)r_1]{r_2-(\frac{\sqrt{14}}{7}i)r_1}$$
$$\begin{bmatrix}-\sqrt{14}i&-2&-1\\0&-\frac{5\sqrt{14}i}{7}&-3+\frac{\sqrt{14}i}{7}\\0&3+\frac{\sqrt{14}i}{7}&-\frac{13\sqrt{14}i}{14}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+(-\frac{3}{10}\sqrt{14}i+\frac{1}{5})r_2}\begin{bmatrix}-\sqrt{14}i&-2&-1\\0&-\frac{5\sqrt{14}i}{7}&-3+\frac{\sqrt{14}i}{7}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

因此，特征值 $\lambda_2=-\sqrt{14}i$ 对应的线性无关特征向量基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{14}i}{10}\\\frac{1}{5}+\frac{3\sqrt{14}i}{10}\\1\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_2\xi_2\ (k_2\neq 0,k_2\in P)$

同理，特征值 $\lambda_3=\sqrt{14}i$ 对应的线性无关特征向量基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{14}i}{10}\\\frac{1}{5}-\frac{3\sqrt{14}i}{10}\\1\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_3\xi_3\ (k_3\neq 0,k_3\in P)$

(7)

对于矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$

令 $B=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-3&-1&0\\4&\lambda+1&0\\-4&8&\lambda+2\end{bmatrix}$

其行列式为 $\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\4&\lambda+1&0\\-4&8&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

解得特征值 $-2,1$

令 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$

则 $B_1=\lambda_1\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-1&0\\4&-1&0\\-4&8&0\end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得 $\begin{bmatrix}-5&-1&0\\4&-1&0\\-4&8&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

因此特征值 $\lambda_1=-2$ 对应的线性无关特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 所有特征向量为 $k_1\xi_1\ (k_1\neq 0,k_1\in P)$

同理 $B_2=\lambda_2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1&0\\4&2&0\\-4&8&3\end{bmatrix}$

进行初等行变换化简得 $\begin{bmatrix}-2&-1&0\\4&2&0\\-4&8&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{20}\\0&1&\frac{3}{10}\\0&0&0\end{bmatrix}$

因此, 特征值 $\lambda_2=1$ 对应的线性无关特征向量基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{20}\\-\frac{3}{10}\\1\end{pmatrix}$, 所有特征向量为 $k_2\xi_2\ (k_2\neq 0,k_2\in P)$

22.

对于 $A=\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}$

因为我们有 $T^{-1}A^kT=(T^{-1}AT)^k$

只需 $T^{-1}AT$ 是一个对角型, 就能较为简单地算出 $A^k=T(T^{-1}AT)^kT^{-1}$

由特征值和特征向量相关的知识可知, 只要将 A 转化为以 3 个不同的特征向量 $\xi_i,i=1,2,3$ 为基的矩阵 $T^{-1}AT$ 即可, 其中 $T=\begin{pmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{pmatrix}$

令 $B=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-1&-4&-2\\0&\lambda+3&-4\\0&-4&\lambda-3\end{bmatrix}$

其行列式为 $\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&-2\\0&\lambda+3&-4\\0&-4&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-25\lambda+25=(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda+5)$

解得奇异值为 $-5,\ 1,\ 5$

令 $\lambda_1=1, \lambda_2=-5, \lambda_3=5$

则 $B_1=\lambda_1\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-4&-2\\0&4&-4\\0&-4&-2\end{bmatrix}$

使用初等行变换化简: $\begin{bmatrix}0&-4&-2\\0&4&-4\\0&-4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

对于特征值 $\lambda_1=-5$, 其一个奇异向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

同理 $B_2=\lambda_2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-4&-2\\0&-2&-4\\0&-4&-8\end{bmatrix}$

使用初等行变换化简: $\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

对于特征值 $\lambda_2=-5$, 它的一个奇异向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

同理可知, 对于特征值 $\lambda_3=5$, 它的一个奇异向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

则 $T=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{bmatrix}, T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

而 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$, 那么 $(T^{-1}AT)^k=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(-5)^k&0\\0&0&5^k\end{bmatrix}$

$$A^k=T(T^{-1}AT)^kT^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(-5)^k&0\\0&0&5^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

$$A^k=T(T^{-1}AT)^kT^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{2(-5)^k}{5}+\frac{2\cdot5^k}{5}&-(-5)^{k-1}+4\cdot5^{k-1}-1\\0&\frac{4(-5)^k}{5}+\frac{5^k}{5}&-\frac{2(-5)^k}{5}+\frac{2\cdot5^k}{5}\\0&-\frac{2(-5)^k}{5}+\frac{2\cdot5^k}{5}&\frac{(-5)^k}{5}+\frac{4\cdot5^k}{5}\end{bmatrix}$$

24.

(1)

$\because \lambda_1, \lambda_2$ 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的两个不同特征值, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 对应的两个特征向量

$\therefore \mathcal{A}\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2 = \lambda_2\varepsilon_2$

假设 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量, 即

$\therefore \mathcal{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \lambda_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \lambda_0\varepsilon_1 + \lambda_0\varepsilon_2 = \mathcal{A}\varepsilon_1 + \mathcal{A}\varepsilon_2 = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2$

$\because \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是不同特征值对应的特征向量

$\because \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 线性无关

$\therefore (\lambda_0 - \lambda_1)\varepsilon_1 + (\lambda_0 - \lambda_2)\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0, \lambda_2 = \lambda_0$, 但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 矛盾

假设不成立, 即有 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量

(2)

假设 $\mathcal{A}$ 有两个或以上不同的特征值.

选取两个线性无关的特征向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

由 (1) 可知, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量, 与 $\mathcal{A}$ 每个非零向量均为其特征向量矛盾

假设 $\mathcal{A}$ 没有特征值, 也与 $\mathcal{A}$ 每个非零向量均为其特征向量矛盾

因此对于 $\mathcal{A}$ 中所有的非零向量, 均存在唯一的特征值 λ_0 与其对应

即对于任意一个非零向量 ξ, 均有 $\mathcal{A}\xi = \lambda_0\xi$

对于零向量也有 $\mathcal{A}\vec{0} = \vec{0} = \lambda_0\vec{0}$

可知 $\mathcal{A}$ 是数乘变换.