高等代数作业

1.

题目: 设 V 是 P 上的 n 维线性空间, 则 $V \cong P^n$.

解答:

在 V 中取定一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 后, V 中的每一个向量 α 都有唯一确定的坐标 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

向量坐标是 P 上的 n 维数组, 因此属于 P^n, 则我们得到 V 到 P^n 的一个单射

$$\sigma : V \to P^n, \alpha \mapsto (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

并且对于 P^n 中任一元素 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 均有 $\alpha = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n$ 这一唯一确定的元素与之对应, 所以 σ 是双射.

任取 $\alpha, \beta \in V$, 设 $\alpha = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n, \beta = \varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_n b_n$

则有 $\sigma(\alpha) = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \sigma(\beta) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$$\begin{aligned}
\therefore \sigma(\alpha + \beta) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \\
&= (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) \\
&= \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)
\end{aligned}$$

$$\sigma(k\alpha) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) = k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = k\sigma(\alpha)$$

$\therefore V \cong P^n$

2.

题目: 设 V, U 是数域 P 上的线性空间, $\varphi : V \to U$ 是同构映射, 则存在同构映射 $\psi : U \to V$, 使得 $\varphi \circ \psi = I_U$.

解答:

$\because \varphi$ 是双射

$\therefore \varphi^{-1}$ 也是双射

则我们有 $\varphi \circ \varphi^{-1} = I_U, \varphi^{-1} \circ \varphi = I_V$

任取 $\alpha, \beta \in U$, 由于 φ 是同构映射, 我们有

$$\begin{aligned}\therefore \varphi(\varphi^{-1}(\alpha+\beta)) &= (\varphi\circ\varphi^{-1})(\alpha+\beta)\\ &= \alpha+\beta\\ &= (\varphi\circ\varphi^{-1})(\alpha)+(\varphi\circ\varphi^{-1})(\beta)\\ &= \varphi(\varphi^{-1}(\alpha))+\varphi(\varphi^{-1}(\beta))\\ &= \varphi(\varphi^{-1}(\alpha)+\varphi^{-1}(\beta))\end{aligned}$$

$\because \varphi$ 是双射

$\therefore \varphi^{-1}(\alpha+\beta) = \varphi^{-1} + \varphi^{-1}(\beta)$

$\because \varphi(\varphi^{-1}(k\alpha)) = (\varphi\circ\varphi^{-1})(k\alpha) = k\alpha = k(\varphi\circ\varphi^{-1})(\alpha) = k\varphi(\varphi^{-1}(\alpha)) = \varphi(k\varphi^{-1}(\alpha))$

$\therefore \varphi^{-1}(k\alpha) = k\varphi^{-1}(\alpha)$

$\therefore \varphi^{-1}$ 也是双射, 是 U 到 V 的同构映射

$\therefore \varphi^{-1}$ 即为所求的 ψ, 满足 $\psi\circ\varphi = I_U$

3.

题目: 设 V, U 是线性空间, $\varphi: V \to U$ 是同构映射, 若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则 $U = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$.

解答:

$\because \varphi: V \to U$ 是同构映射

$\therefore \varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$

取 $k=0$ 得 $\varphi(0)=0$

若 $\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)=0, \varphi(\alpha_1)\in\varphi(V_1), \varphi(\alpha_2)\in\varphi(V_2)$

则有 $\varphi(\alpha_1+\alpha_2)=\varphi(0)$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2=0, \alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2$

$\because V = V_1\oplus V_2$

$\therefore \alpha_1=\alpha_2=0$

$\therefore \varphi(\alpha_1)=\varphi(\alpha_2)=0$

$\therefore U = \varphi(V_1)\oplus\varphi(V_2)$

4.

题目: 证明 $P^{2\times2}\cong P^4$, 并写出同构映射.

解答:

构造映射 $\sigma:P^{2\times2}\to P^4,\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\mapsto(a_1,a_2,a_3,a_4)$

易知该映射为双射.

设有 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\therefore\sigma(A+B)&=\sigma(\begin{pmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_3+b_3 & a_4+b_4\end{pmatrix})\\&=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4)\\&=(a_1,a_2,a_3,a_4)+(b_1,b_2,b_3,b_4)\\&=\sigma(A)+\sigma(B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(kA)&=\sigma(\begin{pmatrix}ka_1 & ka_2\\ ka_3 & ka_4\end{pmatrix})\\&=(ka_1,ka_2,ka_3,ka_4)\\&=k(a_1,a_2,a_3,a_4)\\&=k\sigma(A)\end{aligned}$$

$\therefore\sigma$ 是 $P^{2\times2}$ 到 P^4 的一个同构映射

$\therefore P^{2\times2}\cong P^4$

5.

题目: 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 定义 $\varphi_A:P^n\to P^n,x\to Ax$, 证明: φ_A 是同构映射.

解答:

$\because A$ 是 n 阶可逆矩阵

$\therefore$ 对于任意 $y\in P^n$ 均能找到 $A^{-1}y\in P^n$ 符合 $\varphi_A^{-1}(y)=A^{-1}y$

即 φ_A 是双射

对于任意向量 $\alpha,\beta\in P^n$

$\therefore\varphi_A(\alpha+\beta)=A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=\varphi_A(\alpha)+\varphi_A(\beta)$

$\varphi_A(k\alpha)=A(k\alpha)=k(A\alpha)=k\varphi_A(\alpha)$

$\therefore \varphi_A$ 是同构映射