南京大学
人工智能学院
SCHOOL OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE, NANJING UNIVERSITY

第二章：系统数学模型

章宗长

2022年9月16日

基本要求：

- 掌握控制系统的模型建立、线性近似和等效化简方法

- 掌握线性常微分方程的求解方法

内容安排

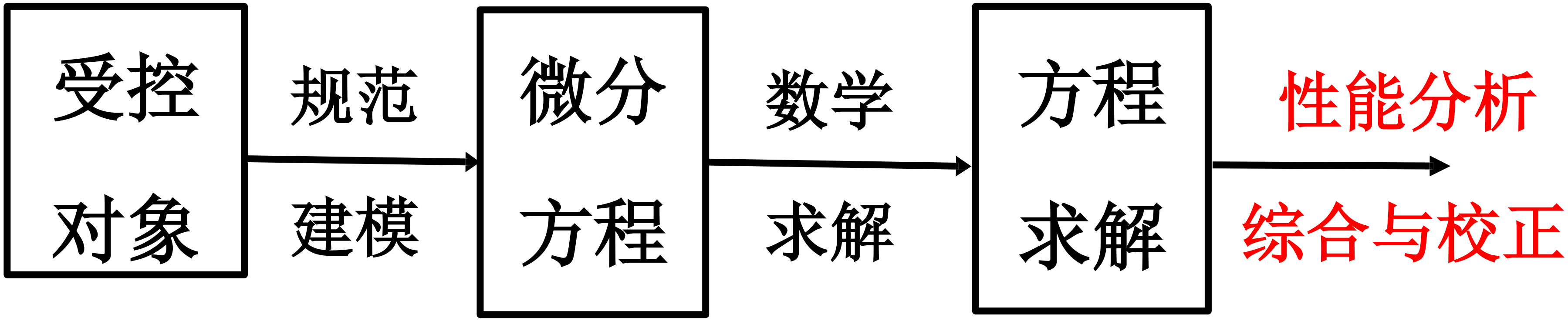


图2.1 第二章涉及的工作流程模块

受控对象通常非常复杂，建模的原则是抓住主要矛盾，合理简化复杂问题

□ 控制理论研究两类问题：

1）控制系统性能分析问题：

控制系统的元部件（结构）及参数已给定，需要分析它能达到什么指标，能否满足所要求的各项性能指标

2）控制系统的综合与校正问题：

若系统不能全面地满足所要求的性能指标，则需对原已选定的系统增加必要的元件或环节，使系统能够全面地满足所要求的性能指标

这两类问题都离不开对控制系统动态特性的研究！

□ 控制理论的基础

——描述控制系统动态特性的数学模型

建立控制系统的数学模型，并在此基础上对控制系统进行分析、综合，是自动控制的基本方法

- 经典控制理论采用的数学模型以传递函数为基础
- 现代控制理论采用的数学模型以状态空间方程为基础
- 微分方程是列写传递函数和状态空间方程的基础

系统的数学模型

数学模型：描述系统输入、输出量以及内部各变量之间关系的数学表达式，揭示了系统结构及其参数与其性能之间的内在关系

数学模型的形式

- 时间域：微分（差分）方程、状态方程
- 复数域：传递函数（基于微分方程）、
  结构图（框图、信号流图）
- 频率域：频率特性函数（基于传递函数）

如何描述物体的运动？

$$x(t),\qquad \dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt},\qquad \ddot{x}(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2},\qquad \cdots$$

位置　　　　速度　　　　加速度

通常采用微分方程描述受控对象的动态行为

例2.1：电阻—电感—电容电路(RLC电路)

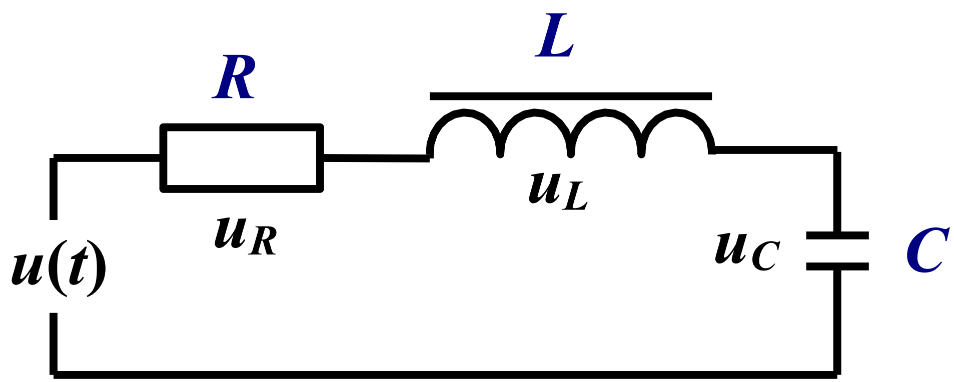


图2.2 RLC电路

假设：1、电感L，电容C，电阻R均为理想器件

2、导线电阻忽略不计

研究：

在外加电压$u(t)$作用下，电容上电压$u_c(t)$的变化

分析：电阻、电感、电容的特性

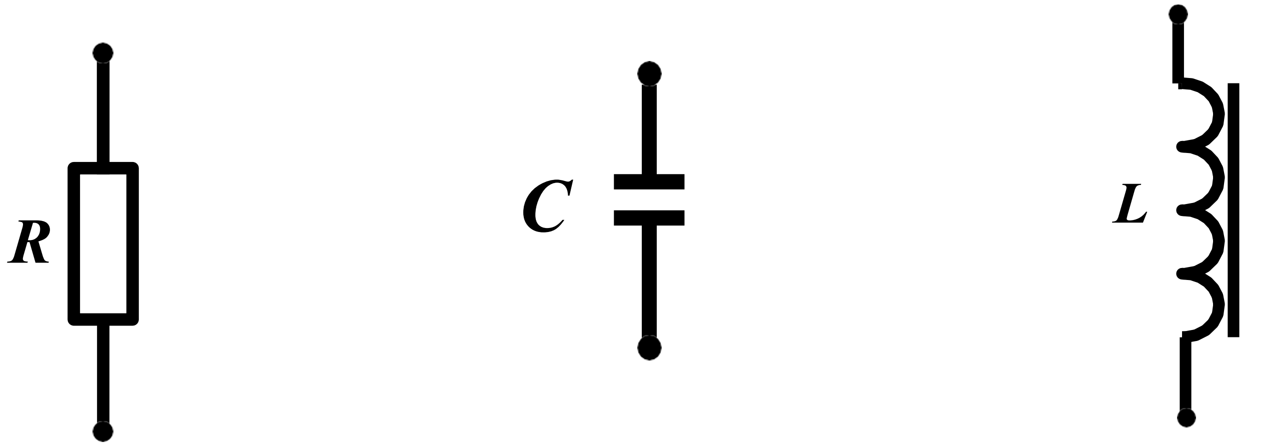


图2.3 电子器件的动态特性

$$u_R = Ri_R$$

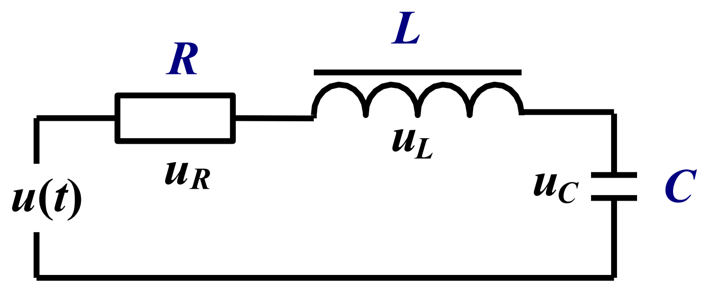
$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

一、确定输入、输出量

输入$\boldsymbol{u(t)}$，输出$\boldsymbol{u_c(t)}$

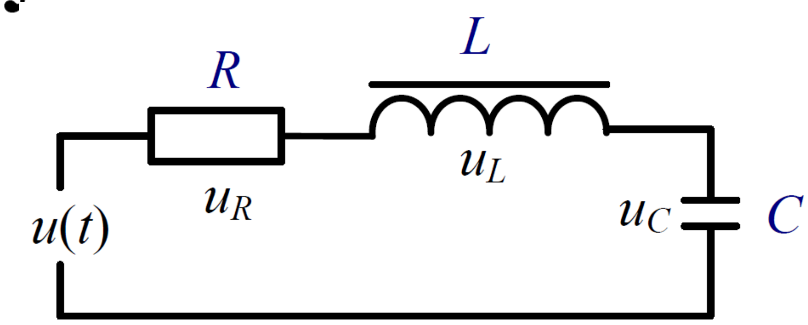


二、元件遵循的定律：基尔霍夫定律

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$



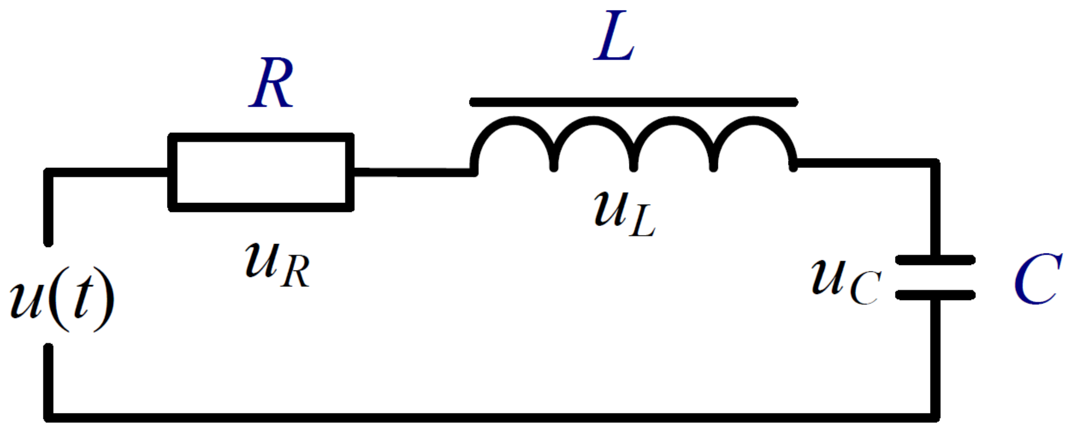
三、消除中间变量

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$u(t) = LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

四、整理成标准化的形式

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t)$$



$$\boxed{LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=u(t)}$$

RLC电路的微分方程模型

微分方程模型的建立步骤

1.分析元件和系统的工作原理，确定系统输入量、输出量

2.根据元件遵循的定律列写动态方程式（忽略次要因素）

3.消除中间变量，只保留输入-输出的数学关系式

4.动态方程标准化：等式右边与输入变量有关，等式左边与输出变量有关

例2.2：质量块-弹簧-阻尼器系统

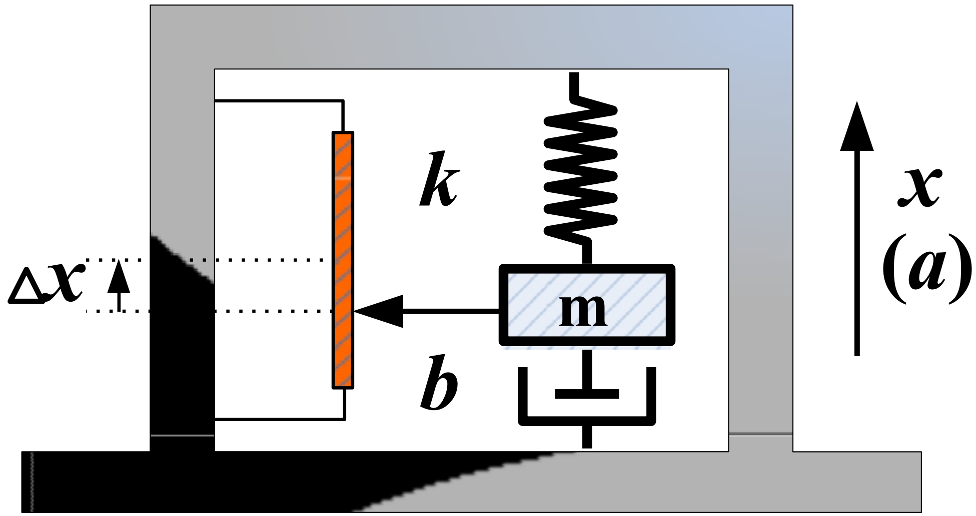


图2.4 质量块-弹簧-阻尼器系统

假设：

1、不考虑摩擦；

2、弹簧的伸长在弹性限度内；

3、不考虑弹簧和阻尼器质量；

参　数	
质量块质量	m
阻尼系数	b
弹性系数	k

一、确定输入、输出量

系统输入：外力（加速度a）

系统输出：系统相对质量块m的位移$\Delta x(t)$

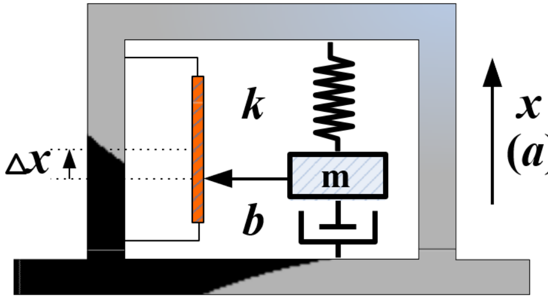
二、运动遵循的物理规律

1) 令$x(t)$表示质量块m的位移

系统的位移$x(t)+\Delta x(t)$满足 $\dfrac{d^2(x(t)+\Delta x(t))}{dt^2}=a$

由牛顿定律，质量块m所受合力：

$$F_\Sigma = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = ma - m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2}$$



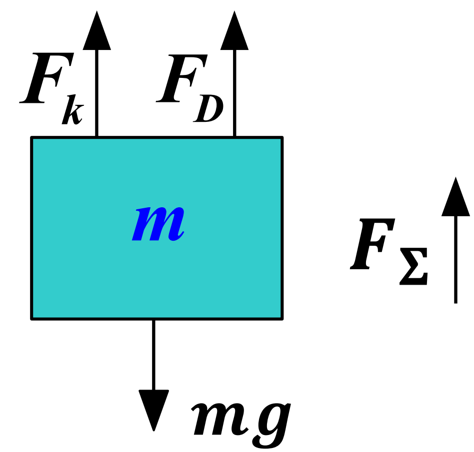
2) k为弹簧弹性系数，由虎克定律有，弹簧拉力为

$$F_k = k\Delta x(t)$$

3) 粘性阻尼的阻尼力与质量块速度成正比，方向相反

$$F_b = b\frac{d\Delta x(t)}{dt}$$

4) 质量块m所受合力：重力、弹簧拉力和阻尼力的叠加



$$F_\Sigma = F_k + F_b - mg$$

三、质量块m的运动方程为：

$$ma - m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} = k\Delta x(t) + \mathrm{b}\frac{d\Delta x(t)}{dt} - mg$$

整理后，有

视加速度

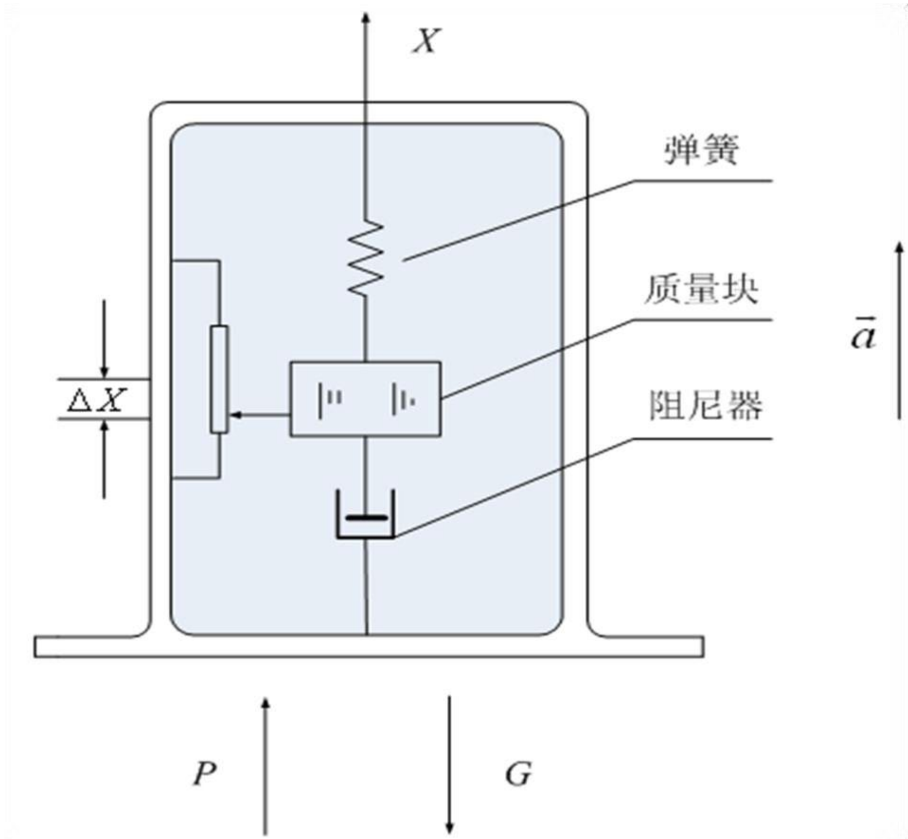
$$m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} + k\Delta x(t) + \mathrm{b}\frac{d\Delta x(t)}{dt} = m(\underline{a+g})$$

取$u = m(a+g)$，则上式整理为

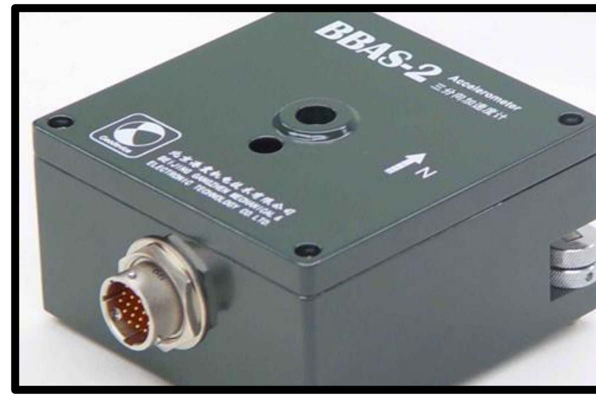
$$m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} + k\Delta x(t) + \mathrm{b}\frac{d\Delta x(t)}{dt} = u(t)$$

质量块-弹簧-阻尼器系统描述了加速度计原理

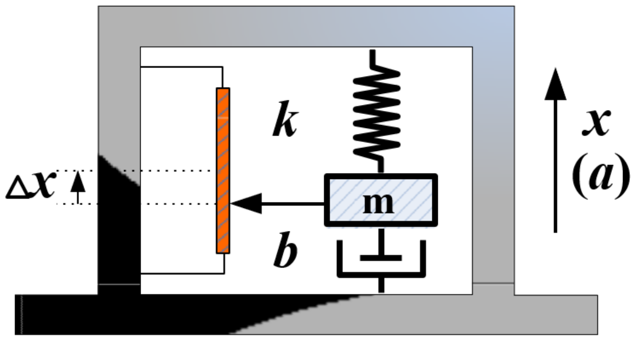
加速度计是测量运载体加速度的仪表

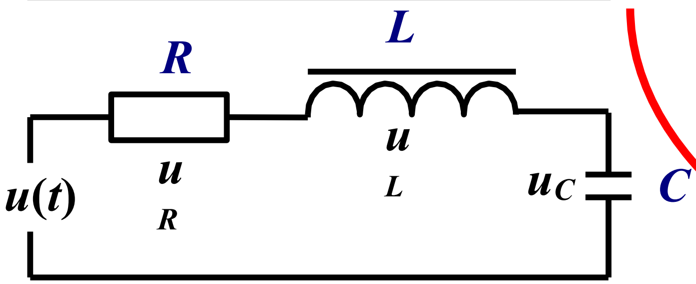


常见的加速度计



物理系统的相似性





$$m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2}+k\Delta x(t)+\mathrm{b}\frac{d\Delta x(t)}{dt}=u(t)$$

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=u(t)$$

不同物理元件组成的系统，可以有**相同的数学模型**

$$\boxed{a_0\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=r(t)}$$

例2.3：单摆系统（简单非线性）

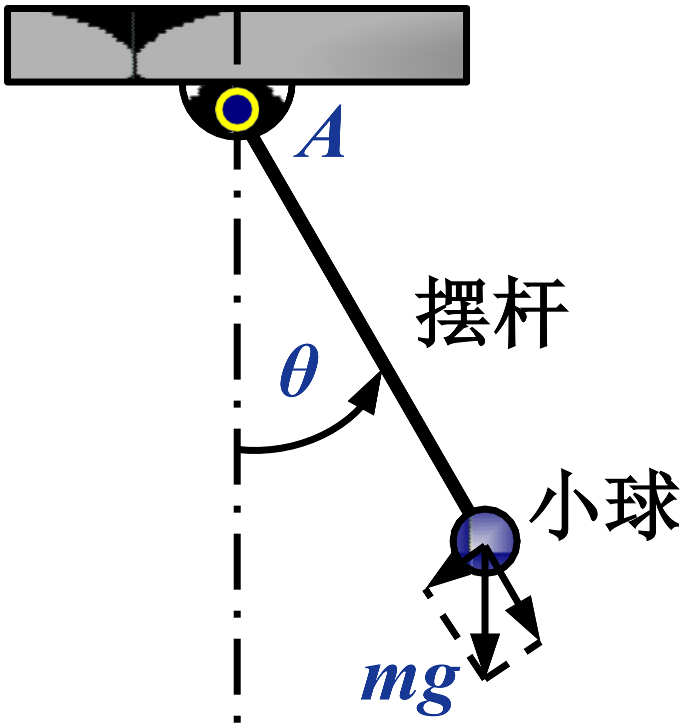


图2.5 单摆系统

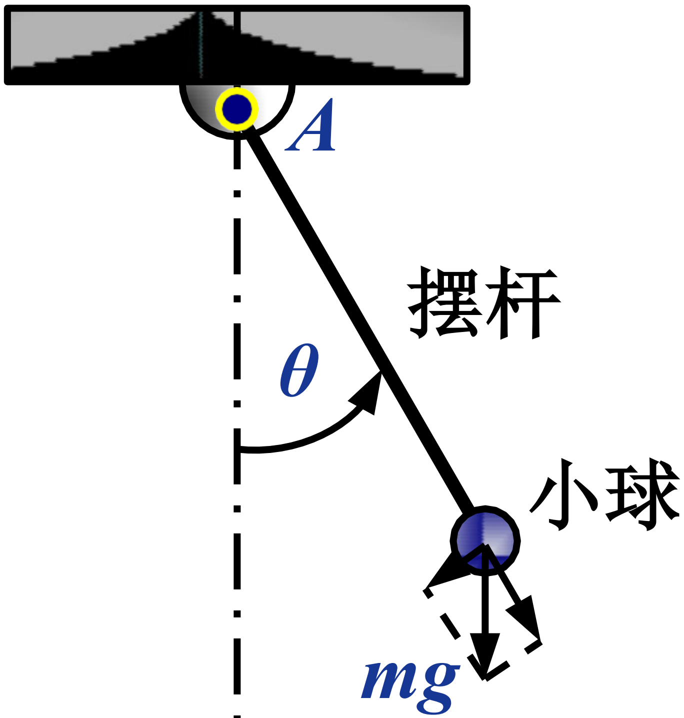
参数与变量	
摆杆长度	L
小球质量	m
摆角	θ

假设：

1、不考虑空气阻力

2、不考虑摆杆在A点的摩擦

3、单摆系统进行小角度摆动



摆杆角度变化的方程：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$$

方程求解比较困难。非线性！

实际物理系统都存在非线性，准确的模型应该是非线性方程。这会增加模型的复杂性，因此，线性化近似是建模的一个重要问题。

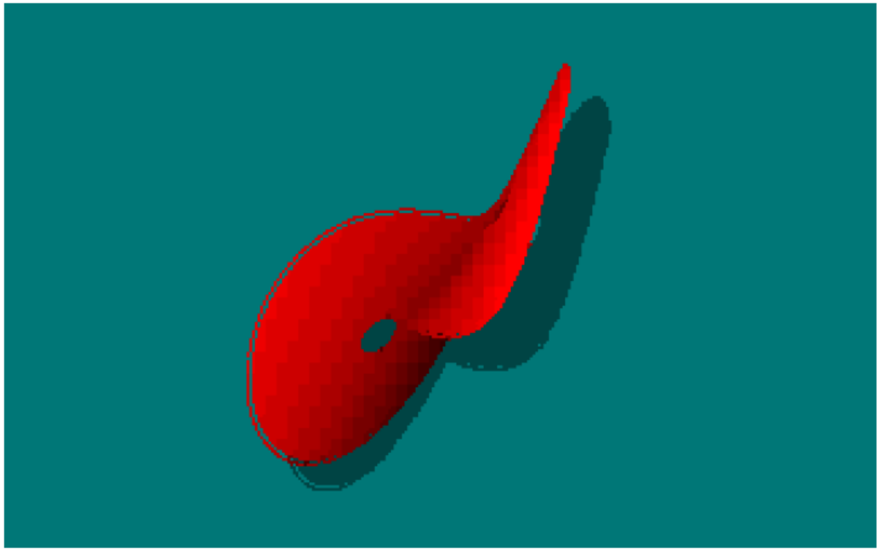
但也有无法线性化近似的场合。

例2.4：混沌系统：Lorenz 方程（复杂非线性）

$$\frac{dx}{dt}=a\left(y-x\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=bx-y-xz$$

$$\frac{dz}{dt}=xy-cz$$



$$a=10$$

$$b=28$$

$$c=8/3$$

红色曲线初值: (x,y,z) = (0.0,20.01,25.0)
蓝色曲线初值: (x,y,z) = (0.0,20.00,25.0)

内容安排

数学模型 $\xleftrightarrow{\text{近似}}$ 实际系统

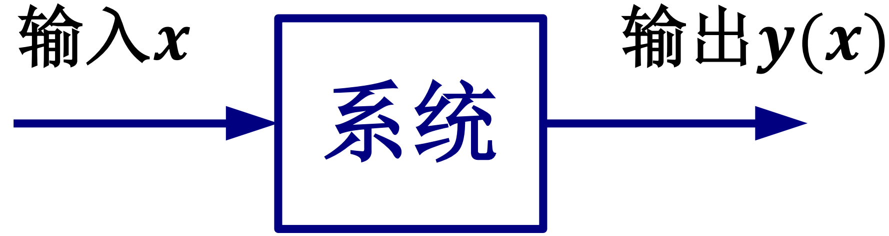
许多情况下，线性微分方程足以近似描述现实世界的变化。

线性微分方程具有非常成熟的理论，因此成为控制理论的重要基础。

本门课只讨论线性定常（时不变）模型。

线性系统：同时满足叠加性和齐次性的系统

叠加性：



对任意输入，如果当

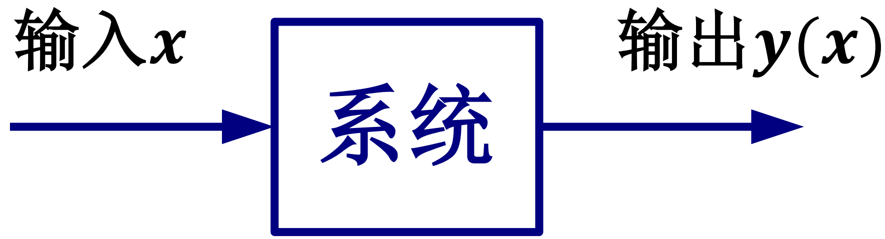
（1）输入为x_1时，系统输出为$y(x_1)$；

（2）输入为x_2时，系统输出为$y(x_2)$；

则输入为x_1+x_2时，系统输出满足：

$$y(x_1+x_2)=y(x_1)+y(x_2)$$

齐次性：

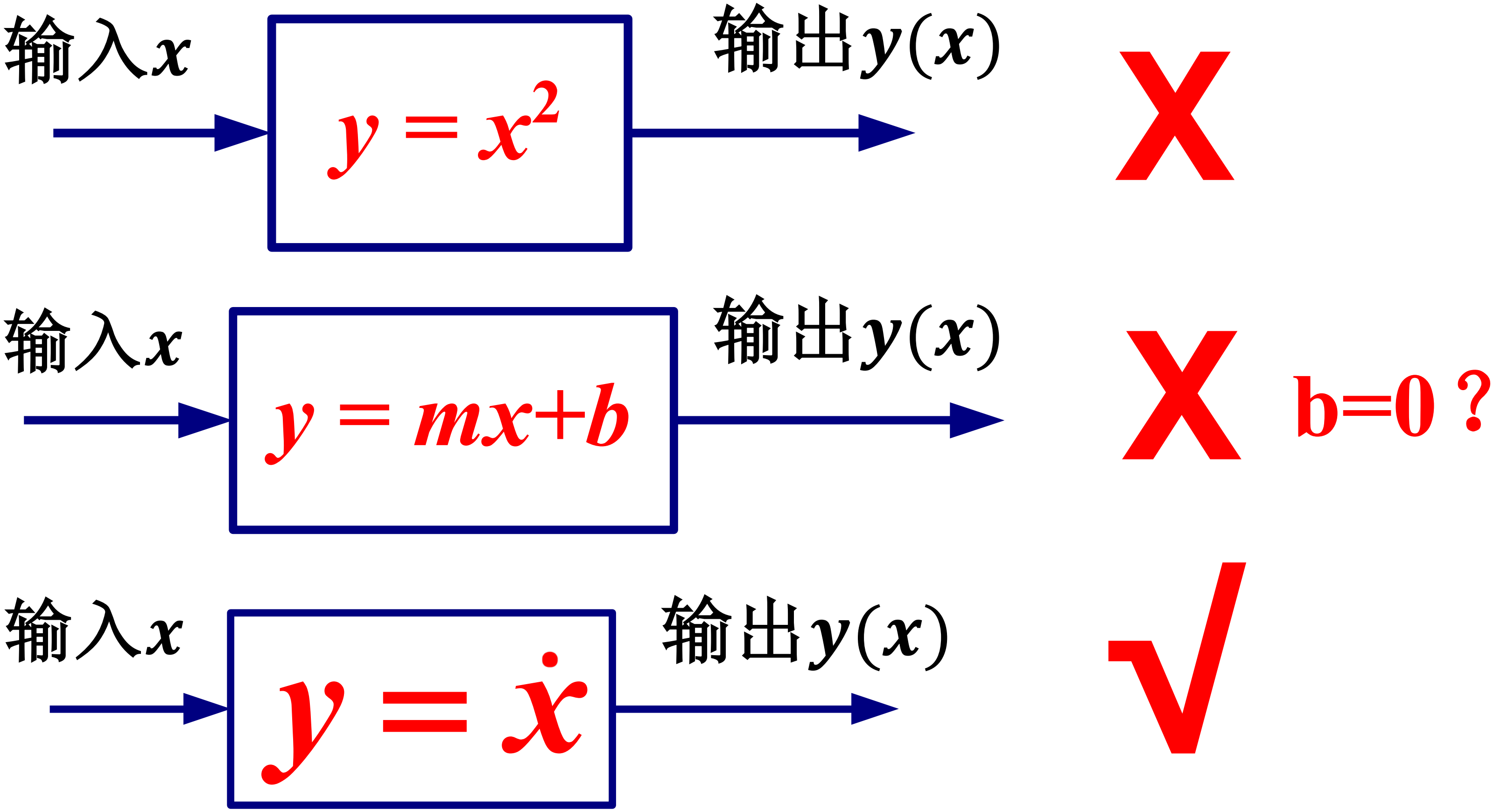


对于任意的输入x和任意的常数β，如果输入为x时, 系统输出为$y(x)$；

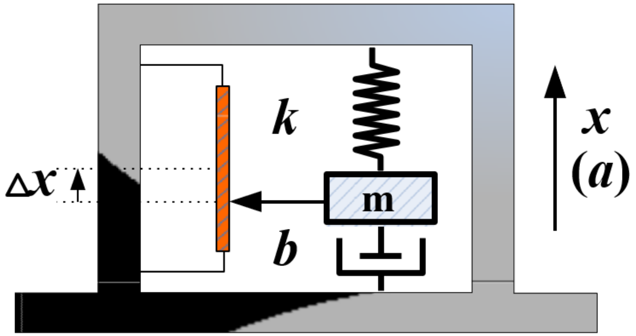
则输入为βx时，系统输出满足：

$$y(\beta x) = \beta y(x)$$

例2.5：线性系统判别

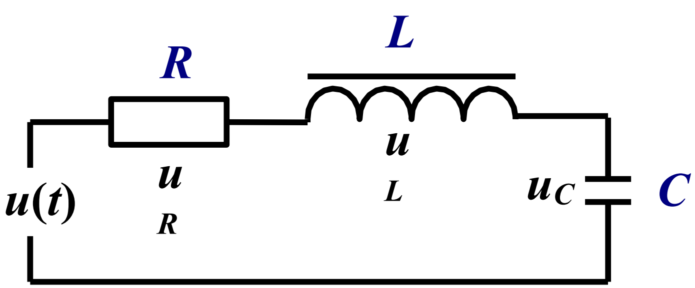


问题：下面两个系统是否线性系统？



$$m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2}+k\Delta x(t)+\mathrm{b}\frac{d\Delta x(t)}{dt}=u(t)$$

√



$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=u(t)$$

√

一般n阶线性定常（时不变）微分方程模型的通式为：

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}y(t)+a_n y(t)$$
$$=b_0\frac{d^m}{dt^m}r(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{d}{dt}r(t)+b_m r(t)$$

其中，$y(t)$为系统的输出，$r(t)$为系统输入，$m<n$。a_i，$b_j(i=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$均为实数，由系统本身的结构参数所决定。

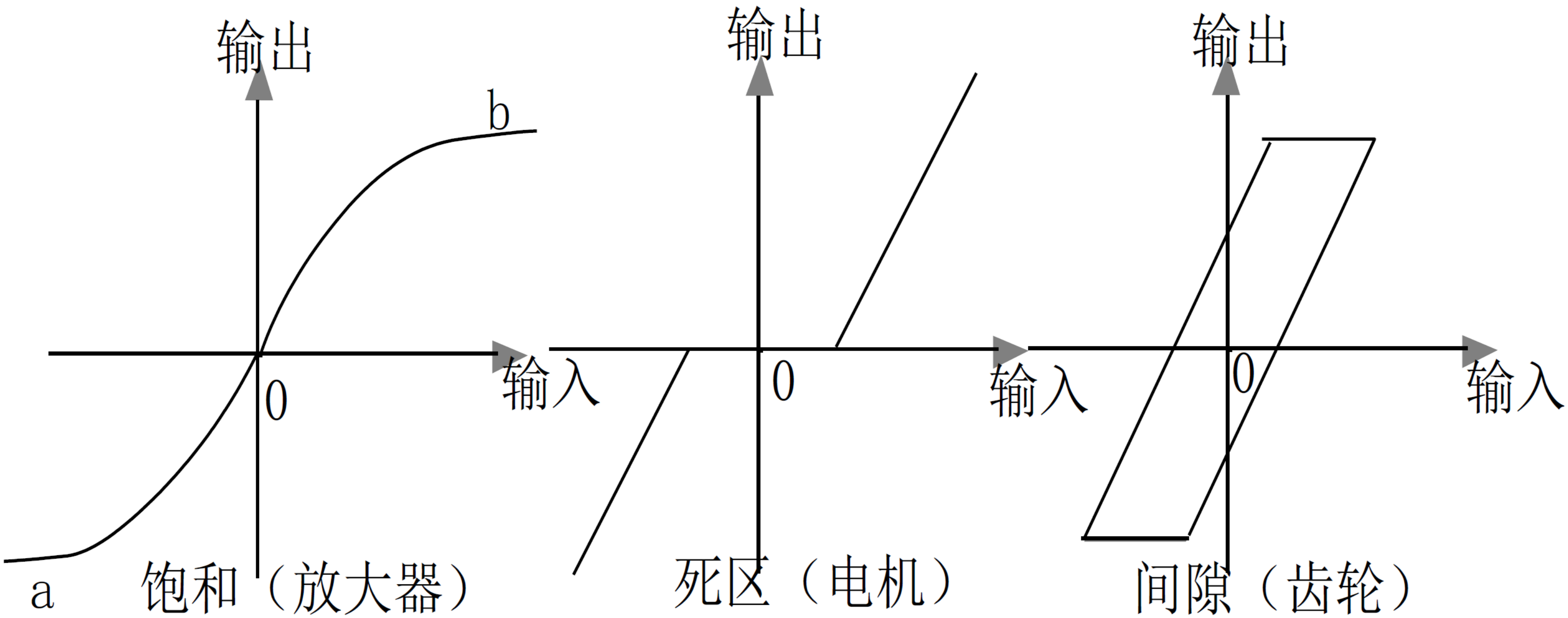
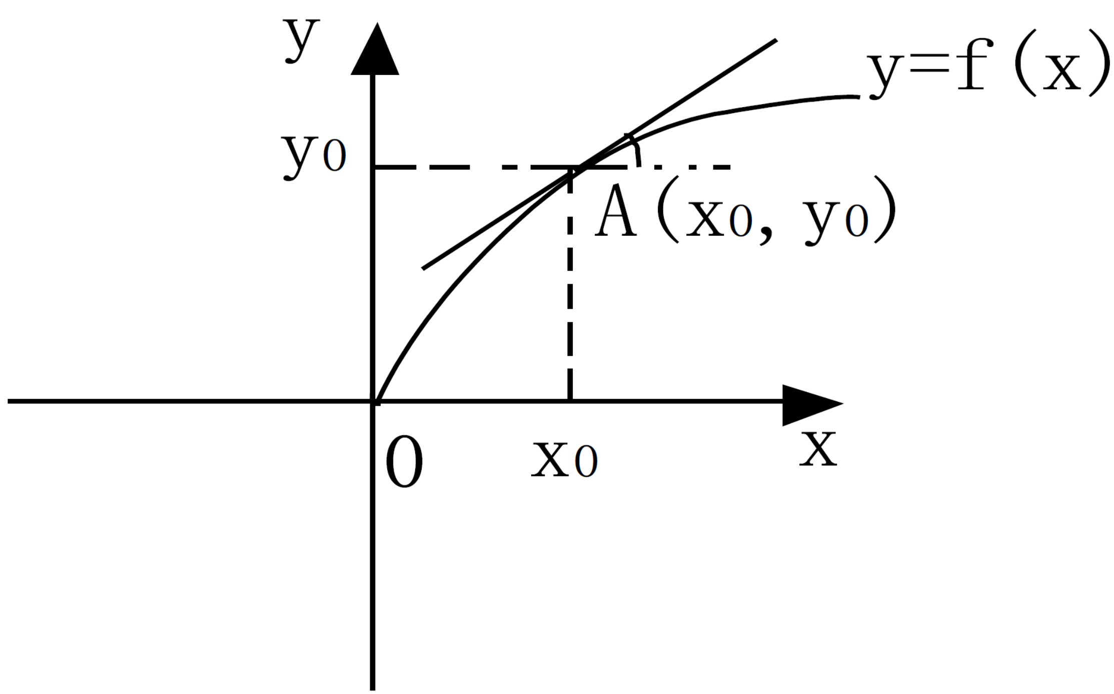


图2.7 机电系统的典型非线性系统响应



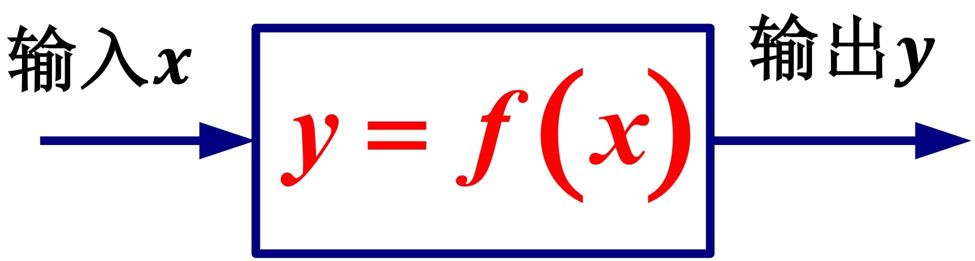
饱和（放大器）

图2.8 放大器电路在工作点A的线性化过程

建立线性化近似模型的常用策略：

1、限制范围，使系统工作在线性区，忽略非线性

2、换一个角度考察所谓的小信号。可以用线性模型来代替非线性模型



1、限制输入电流在线性工作区（足够小），则输入输出关系可以用线性模型近似

$$y = kx$$

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$$

2、若工作点A(x_0, y_0)（工作点）出了线性区，换个角度考察输出量的变化量（小信号），同样可以把握输出随时间的变化。假设 $y = f(x)$ 在工作点处的导数为A，由泰勒级数展开式，有：

$$y = f(x) = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

忽略高阶无穷小，则有：

$$\Delta y = k\Delta x$$

$$\Delta y = y - y_0 \quad \Delta x = x - x_0 \quad k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$$

例2.6：单摆系统的线性化

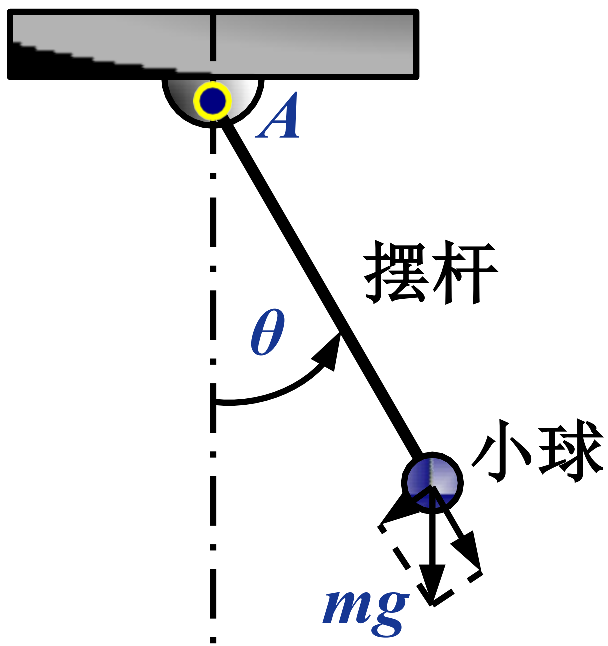


图2.9 单摆系统

非线性方程：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$$

线性近似方程：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\theta=0$$

±30°以内时，偏差在5%以内

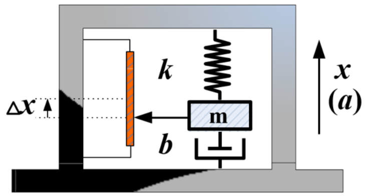
$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}\cdots\Rightarrow\sin\theta\approx\theta$$

小结

一、根据**物理机理**建立**线性常微分方程**模型，可以描述大量受控变量（简单对象）的动态行为

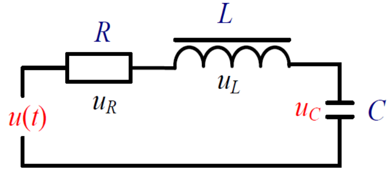
质量-弹簧-阻尼系统

$$m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2}+b\frac{d\Delta x(t)}{dt}+k\Delta x(t)=u(t)$$



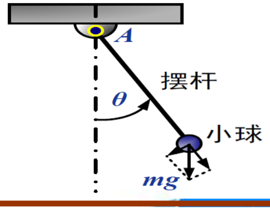
RLC电路

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=u(t)$$



单摆系统

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\theta=0$$



二、非本质非线性可以用近似线性常微分方程模型来描述其动态行为

三、数据建模（系统辨识）是建立线性常微分方程模型的重要途径

内容安排

线性常微分方程的求解

- 引言
- 拉普拉斯变换的定义
- 几种典型函数的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的主要性质
- 拉普拉斯反变换
- 应用拉普拉斯变换解线性常微分方程

线性常微分方程的求解：受控对象动态行为的数学解析

例2.7：匀速直线运动

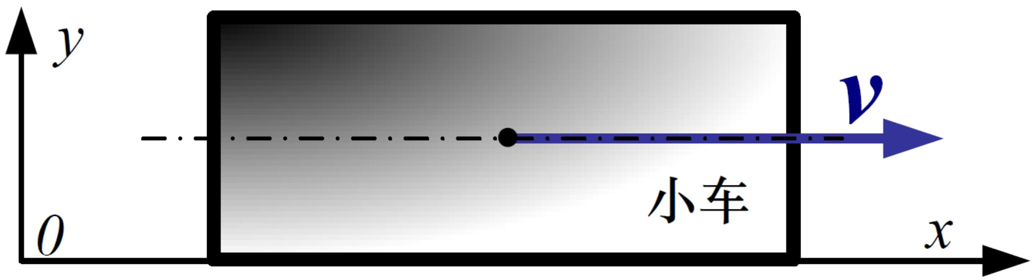


图2.10 小车系统

模型：匀速直线运动 $\dot{x}(t)=v$

数学解： 位移方程 $x(t)=x(0)+v\cdot t$

例2.8：匀加速直线运动

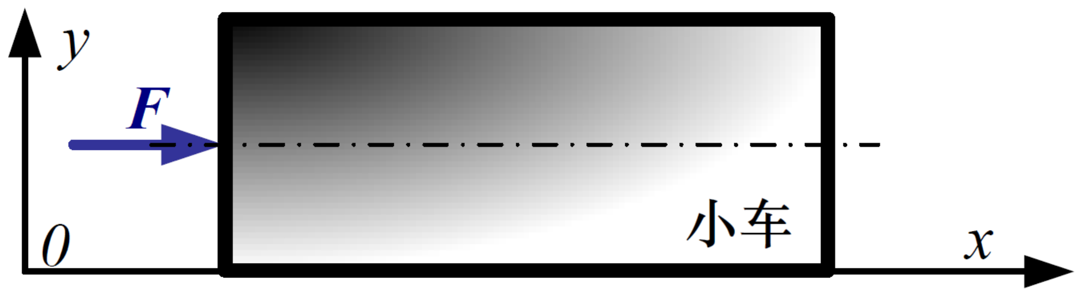


图2.11 小车系统

运动模型： $\ddot{x}(t) = a$

位移方程： $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}at^2$

例2.9：微分方程

$$\dot{x}(t)+x(t)=0$$

积分

$$\int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau+\int_0^t x(\tau)d\tau=\int_0^t 0d\tau$$

技巧，

技巧！

$t\to\infty$

$$\int_0^\infty \dot{x}(\tau)d\tau+\int_0^\infty x(\tau)d\tau=\int_0^\infty 0d\tau$$

有无程式？ 有！基于拉普拉斯（Laplace）变换

变换是常用数学技巧

$f(t)$的傅立叶（Fourier）变换：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt} f(t) dt$$

利用傅立叶变换，可以从谐波信号组合的角度，来分析时间信号

$F(\omega)$的傅立叶反变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

对于周期函数$f(t)$，它的傅立叶级数表示被定义为

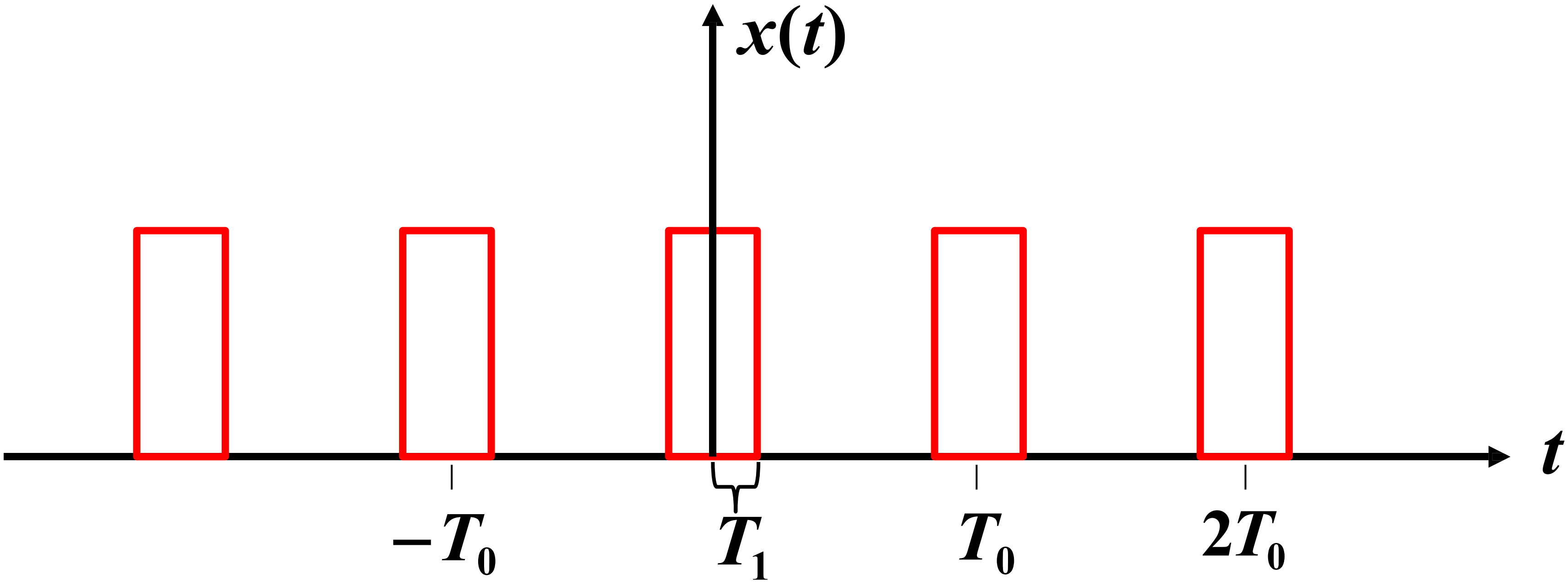
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$$

其中，T为函数的周期， a_n为傅立叶展开系数：

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

傅立叶变换：傅立叶级数的极限形式（ $T\rightarrow+\infty$），可以处理非周期函数

例2.10：将周期时间方波信号展开成傅立叶级数



解：

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt$$

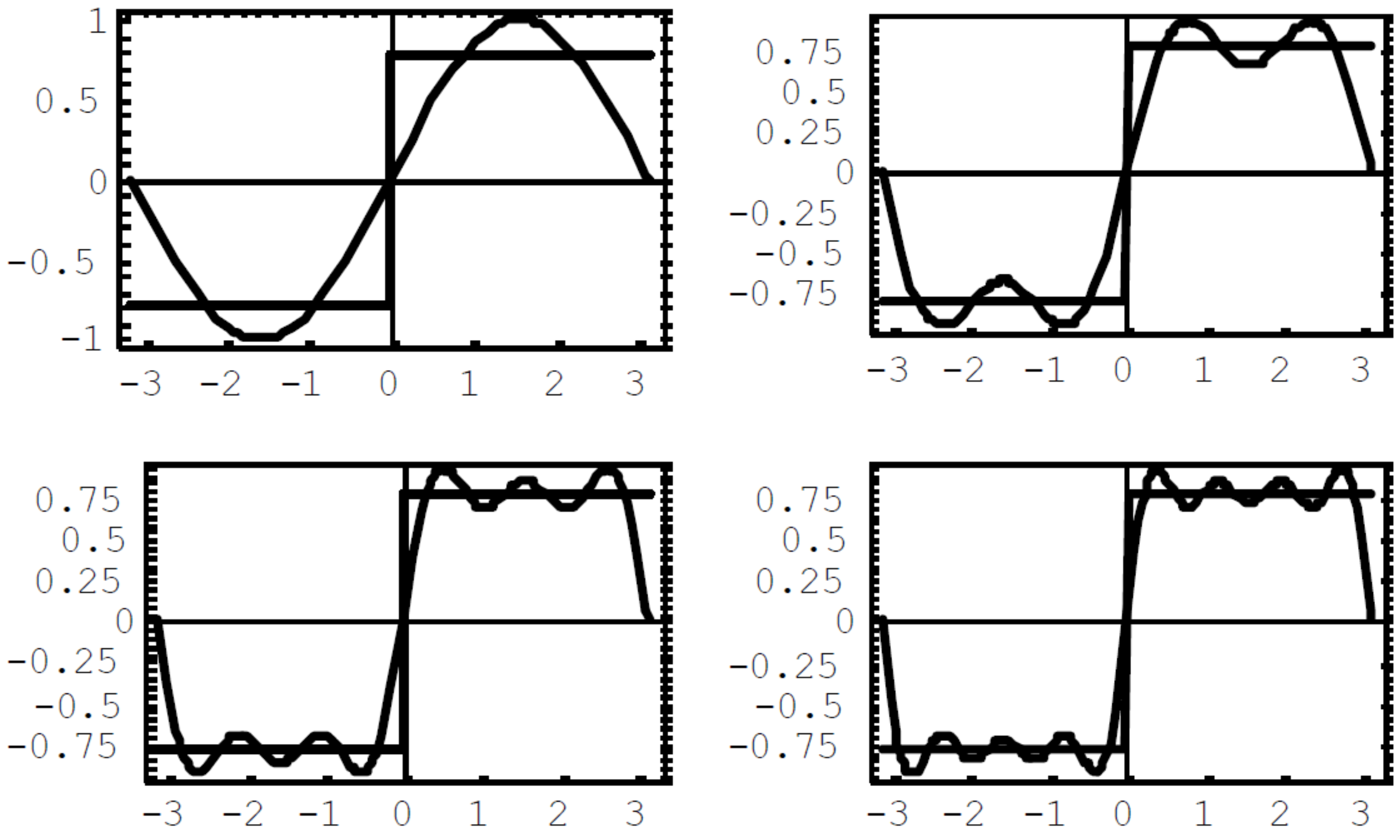
$$\boldsymbol{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$k \neq 0 \quad a_k = \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0 T_0}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{jk2\pi}(e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1})$$

$$= \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$k = 0 \quad a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0}$$

有限项谐波的合成



$$\sin x,\ \ \sin x+\frac{\sin 3x}{3},\ \sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5},\ \sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$$

不同频率谐波信号的组合强度系数

$$a_k = a(k\omega_0)$$

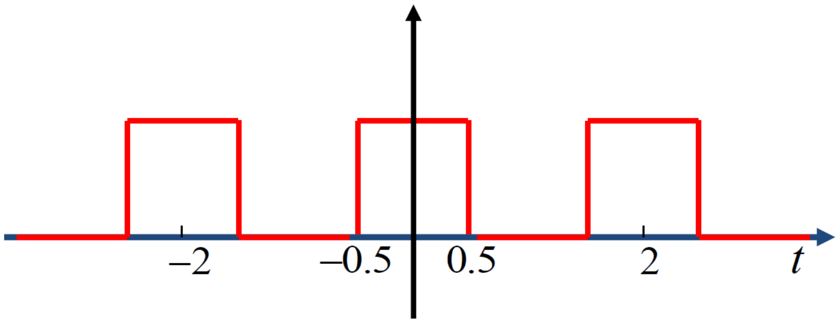
在频率域决定了时间域信号，称为离散谱函数

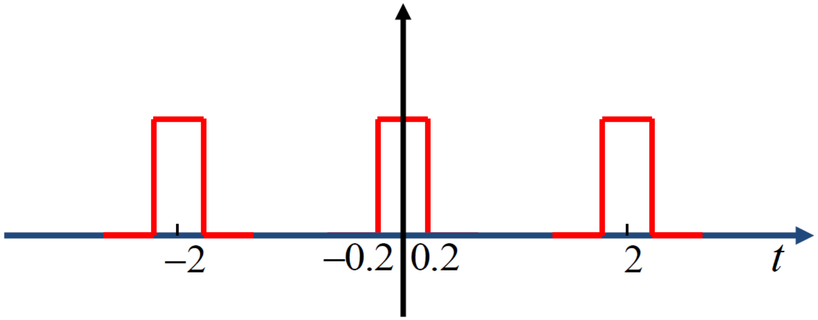
当基频趋近于0时，就在频率域定义了傅立叶连续谱函数

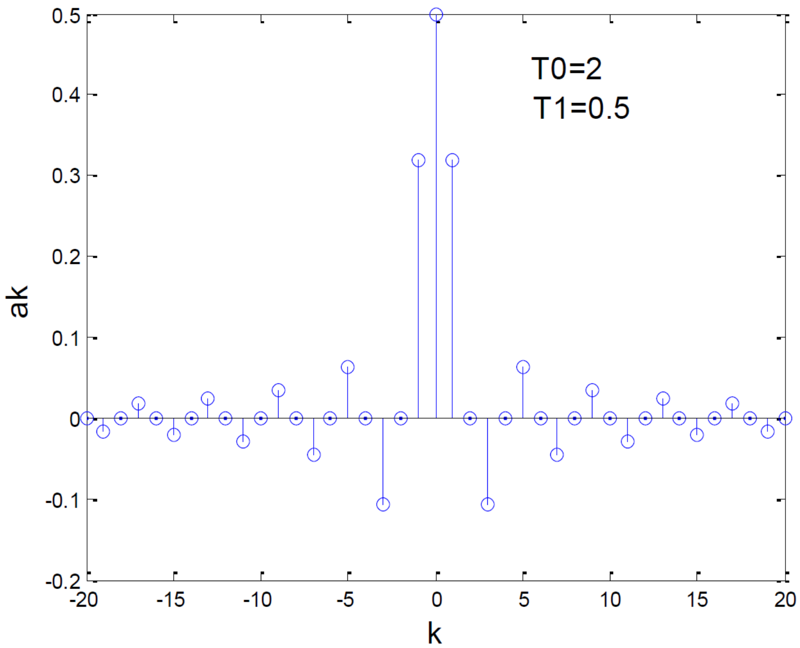
$$\text{时间域 } f(t) \underset{\text{傅立叶反变换}}{\overset{\text{傅立叶变换}}{\rightleftarrows}} \text{频率域 } F(\omega)$$

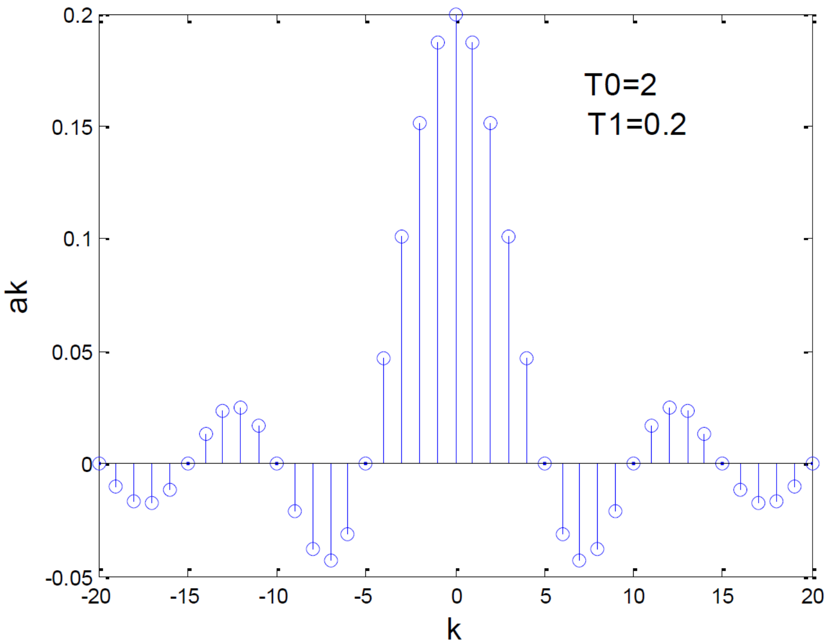
$$k \neq 0 \quad a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \qquad a_0 = \frac{2T_1}{T_0}$$

$$\boldsymbol{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi}$$



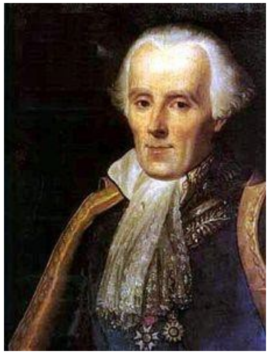






线性常微分方程的求解

- 引言
- **拉普拉斯变换的定义**
- 几种典型函数的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的主要性质
- 拉普拉斯反变换
- 应用拉普拉斯变换解线性常微分方程



- Laplace（拉普拉斯）
- 1749-1827年
- 拉普拉斯变换：线性微分方程的求解利器

$f(t)$的傅立叶变换$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}f(t)dt$可能发散！

1. $f(t)$变为$e^{-\sigma t}f(t)$
2. $-\infty$变为0

$f(t)$的拉普拉斯变换 $L(s)=\int_{0}^{+\infty}e^{-(\sigma+j\omega)t}f(t)dt$

自变量变成了复数$s=\sigma+j\omega$

函数f(t)的拉氏变换

拉氏积分运算符

$$F(s)=L(f(t))=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$s=\sigma+j\omega$$

当t<0时，f(t)=0

$$F(s)=F_r(s)+jF_i(s)$$

拉氏变换可理解为广义单边傅立叶变换

- $F(s)$称为函数$f(t)$的拉普拉斯变换（拉氏变换）或象函数
- $f(t)$称为$F(s)$的原函数

拉普拉斯变换是线性变换，连续时间函数与它的变换函数一一对应

$$\text{时间域}\quad f(t) \quad \underset{\text{拉普拉斯反变换}}{\overset{\text{拉普拉斯变换}}{\rightleftarrows}} \quad \text{复频域}\quad F(s)$$

线性常微分方程的求解

- 引言
- 拉普拉斯变换的定义
- **几种典型函数的拉普拉斯变换**
- 拉普拉斯变换的主要性质
- 拉普拉斯反变换
- 应用拉普拉斯变换解线性常微分方程

(1) 指数函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ Ae^{-at}, & t\ge 0\end{cases}$$

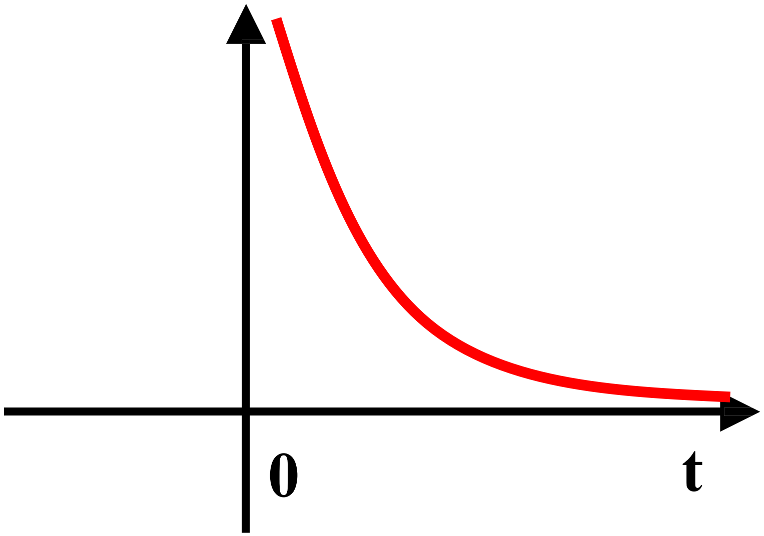


图2.13 指数衰减函数

$$L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty Ae^{-(s+a)t}dt$$

$$=-\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty=\frac{A}{s+a}$$

极点$s=-a$

2) 单位阶跃函数

$$1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$

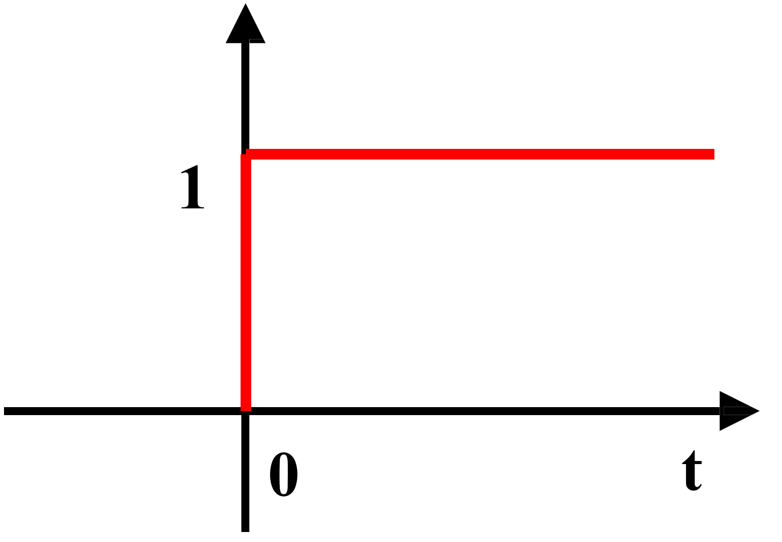


图2.14 阶跃函数

$$L[1(t)]=\int_0^{\infty}1(t)e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

极点$s=0$

3) 斜坡函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ At, & t\ge 0\end{cases}$$

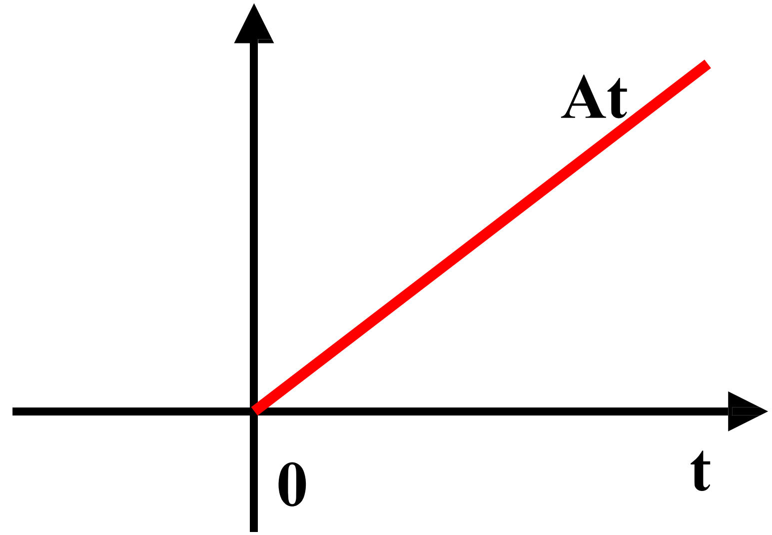


图2.15 斜坡函数

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}Ate^{-st}\mathrm{d}t=\left(-\frac{A}{s}te^{-st}-\frac{A}{s^2}e^{-st}\right)\bigg|_0^{\infty}=\frac{A}{s^2}$$

极点

$s_{1,2}=0$

4) 幂函数 $L[t^n\cdot 1(t)]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

5) 正弦函数与余弦函数

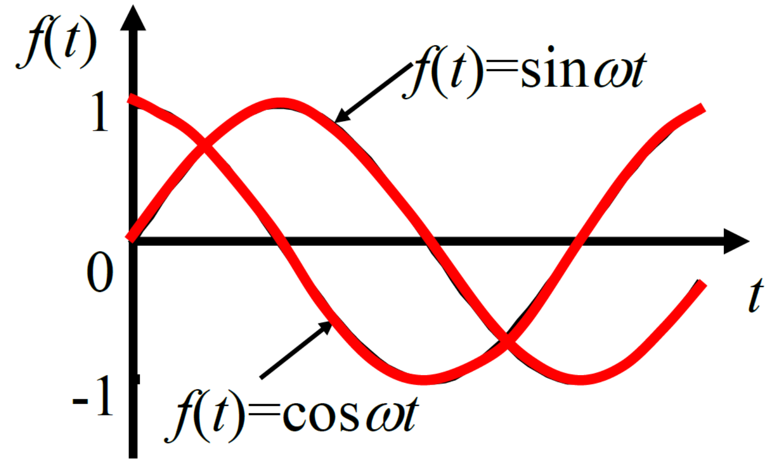


图2.16 正弦及余弦函数

由欧拉公式：

$$e^{\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t$$

有：

$$\sin\omega t = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(e^{\mathrm{j}\omega t} - e^{-\mathrm{j}\omega t}\right) \qquad \cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}\omega t} + e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

$$L[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{j}} \left(\int_0^{\infty} e^{\mathrm{j}\omega t} e^{-st} \mathrm{d}t - \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{j}\omega t} e^{-st} \mathrm{d}t \right)$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{j}} \left(\frac{1}{s - \mathrm{j}\omega} - \frac{1}{s + \mathrm{j}\omega} \right) = \underline{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

极点 $s_{1,2} = \pm j\omega$

同理：

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{1}{2} \frac{(s + j\omega) + (s - j\omega)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \underline{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

6) 单位脉冲函数

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{t} < \mathbf{0}\text{或}\boldsymbol{t} > \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}} & (\mathbf{0} \le \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{\varepsilon}) \end{cases}$$

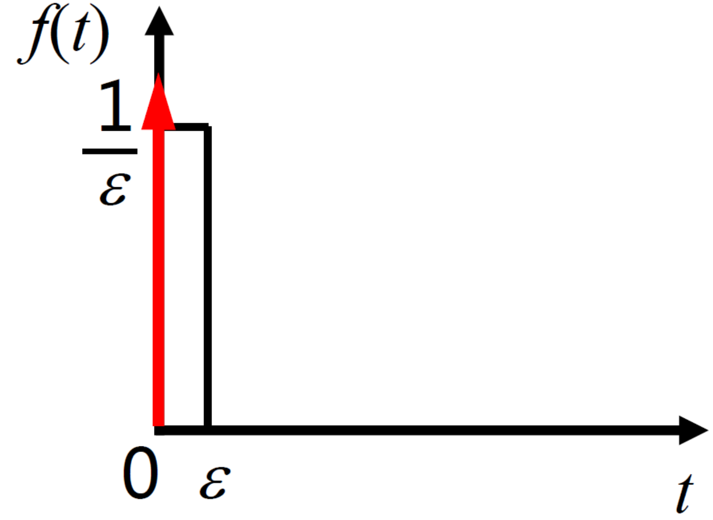


图2.17 单位脉冲函数

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-st} \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon s}(1 - e^{-\varepsilon s})$$

由洛必达法则：

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1 - e^{-\varepsilon s})'}{(\varepsilon s)'} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} = 1$$

$\boldsymbol{\delta(t)}$函数是物理不可实现的

典型函数	拉普拉斯变换
1) 指数函数e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
2) 阶跃函数A	$\frac{A}{s}$
3) 斜坡函数At	$\frac{A}{s^2}$
4) 幂函数t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5) 正弦函数$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6) 余弦函数$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7) 单位脉冲函数$\delta(t)$	1

线性常微分方程的求解

- 引言
- 拉普拉斯变换的定义
- 几种典型函数的拉普拉斯变换
- **拉普拉斯变换的主要性质**
- 拉普拉斯反变换
- 应用拉普拉斯变换解线性常微分方程

主要性质

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

位移定理 $L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$

微分定理 $L\left[\dfrac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)$ （零初始条件）

积分定理 $L[\iint\cdots\int f(t)dt^n]=\dfrac{1}{s^n}F(s)$ （零初始条件）

终值定理 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

初值定理 $\boldsymbol{f}(0)=\lim\limits_{s\to\infty}\boldsymbol{sF}(\boldsymbol{s})$

性质0 线性

- 齐次性：$\boldsymbol{L}\big(af(t)\big) = aL\big(f(t)\big)$，$a$为常数

- 叠加性：

$$\boldsymbol{L}\big(af_1(t) + bf_2(t)\big) = aL\big(f_1(t)\big) + bL\big(f_2(t)\big)$$

a，b为常数

显然，拉普拉斯变换为线性变换

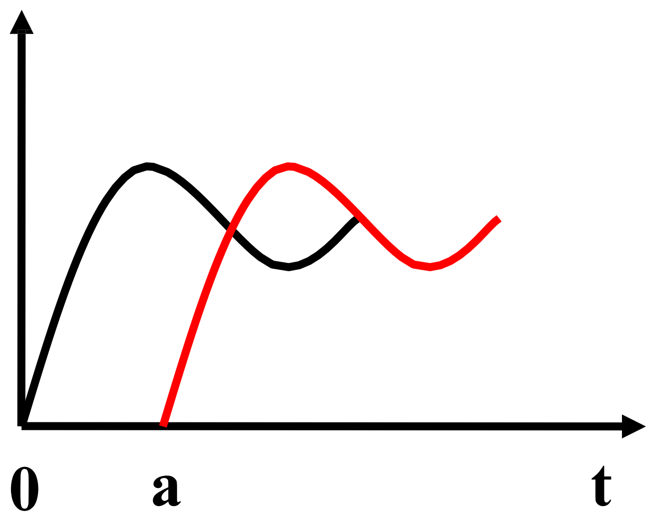
性质1 时间平移

$$f(t)1(t) \rightarrow f(t-a)1(t-a)$$

时间位移

$$L\left[f(t-a)1(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

f(t)的变换



新变换=原变换与指数函数之积

性质2 频率域平移

$$L\left[f(t)e^{-at}\right]=F(s+a)$$

源自时间域内的函数$f(t)$与指数函数之积

例 $L[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $L[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$$L\left[e^{-at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$L\left[e^{-at}\cos\omega t\right]=\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

性质3 尺度变换

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as)$$

证明：

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-st}dt$$

记 $\tau=\dfrac{t}{a}$

则 $$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\int_0^\infty f(\tau)e^{-sa\tau}d(a\tau)=aF(as)$$

例：已知

$$L\left(e^{-t}\right)=\frac{1}{s+1}$$

则有：

$$L\left(e^{-0.2t}\right)=\frac{5}{5s+1}$$

性质4 微分性质

重要！

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

其中, $f(0)$为 $t=0$ 时的初始值。

类似地，$f(t)$的n阶导函数的拉普拉斯变换为

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

零初始条件下，时间域求导运算变成了频率域代数运算！

$$s\equiv\frac{d}{dt}$$

证明：由定义有:

$$L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= sF(s) - f(0)$$

$f(t)$的二阶导函数的拉普拉斯变换满足:

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

类似地，n阶导函数满足:

$$L[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

性质5 终值定理

如果$f(t)$和$df(t)/dt$ 存在拉普拉斯变换，$F(s)$在虚轴上无极点，在原点处无多重极点，且$\lim_{t\to\infty} f(t)$存在，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

注：如果$t\to\infty$时，$\lim_{t\to\infty} f(t)$不存在，则终值定理失效

例，正弦函数就不适用

证明：由微分定理有

$$L[f'(t)]=\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt=sF(s)-f(0)$$

令s趋近于0

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\lim_{s\to 0} f'(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\infty} f'(t)dt=f(t)\Big|_0^{\infty}=\lim_{t\to\infty} f(t)-f(0)$$

$$\lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0)]=\lim_{s\to 0} sF(s)-f(0)$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

性质6 初值定理

如果$\boldsymbol{f(t)}$和$\boldsymbol{df(t)/dt}$的拉普拉斯变换和$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$都存在，则

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

性质7 积分定理

$$L\left(\int f(t)dt\right)=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s}$$

其中，$f^{-1}(0)=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$是积分函数初始值。以及

$$L[\iint f(t)dt^2]=\frac{1}{s^2}F(s)+\frac{1}{s^2}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s}f^{(-2)}(0)$$

初值为零时，$L[\iint\cdots\int f(t)dt^n]=\frac{1}{s^n}F(s)$

基本函数的拉普拉斯变换

x(t)	$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$	x(t)	$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$x(t)e^{-at}$	$X(s+a)$
1	$\frac{1}{s}$	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
$\delta(t)$	1	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0)$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{d^2x(t)}{d^2t}$	$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0}x(t)dt$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$s\equiv\frac{d}{dt}$	$\frac{1}{s}\equiv\int_{-\infty}^{t}dt$

作业2-1

P2. 1　某电子电路如图 P2. 1 所示，试用微积分方程组描述该电路。

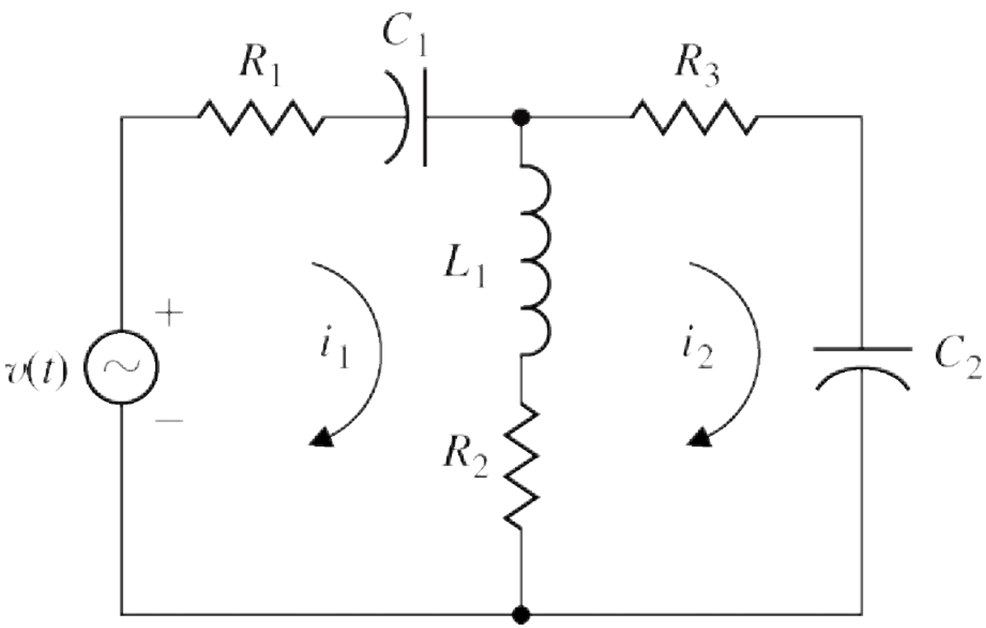


图 P2. 1　电子电路

作业2-2

P2.2　某动态减震器如图 P2.2 所示。该系统是许多实际情况的代表性描述，包括含有非平衡元件的机械震动吸收器。当 $F(t)=a\sin(\omega_0 t)$时，我们可以选择参数 M_2 和 k_{12}的合适取值，使主要的质量块 M_1 达到稳态之后不再振荡。试求该系统的微分方程组模型。

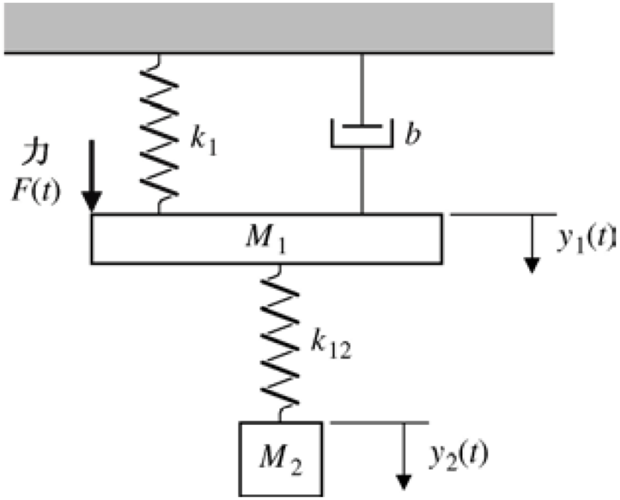


图 P2.2　减震器

作业2-3

P2. 3　相互耦合的质量块–弹簧系统如图 P2. 3 所示。假定两个质量块的质量均为 M，两个弹簧的弹性系数均为 k，试求该系统的微分方程组模型。

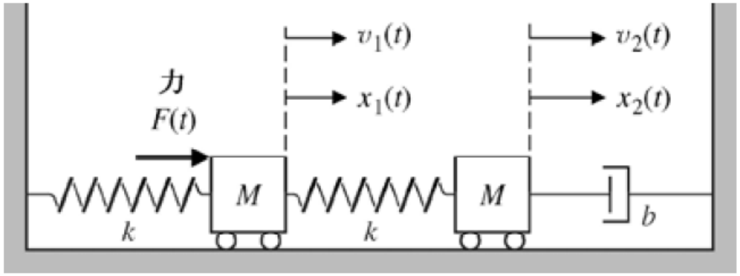


图 P2. 3　双质量块系统

作业2-4

E2. 1　如图 E2. 1 所示，单位负反馈系统有一个非线性环节，其输入–输出特性为 $y=f(e)=e^2$，输入 r 的变化范围为 0 到 4，试计算并绘图显示开环、闭环系统的输入与输出曲线，并说明反馈系统有更好的近似线性特性。

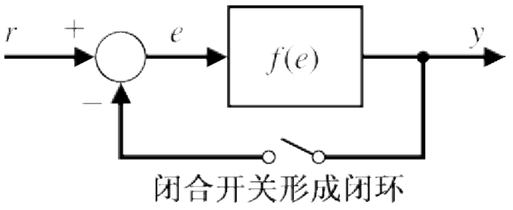


图 E2. 1　开环与闭环系统

作业2-5

E2.2　热敏电阻的温度响应特性为 $R=R_o e^{-0.1T}$，其中 $R_o=10\ 000\ \Omega$，R 表示电阻，T 为温度（单位为℃），在温度扰动很小的情况下，试给出该热敏电阻在工作点 $T=20$℃ 附近的小信号线性近似模型。