概率统计第十二次作业

201300035 方盛俊

1.

因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

所以两组样本均值 $\bar{X}_m \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{m}), \bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

进而有 $Y = \bar{X}_m - \bar{X}_n \sim N(0, \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n})$

因此 $P(|Y| < \epsilon) = P(-\frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{Y}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}}) = 2\Phi(\frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}}) - 1$

2.

设随机变量 $Z = X + Y$, 根据独立同分布随机变量和函数分布可知

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^z \frac{\lambda^{\alpha 1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha 1 - 1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{\alpha 2}}{\Gamma(\alpha_2)} (z-x)^{\alpha 2 - 1} e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^{\alpha 1 + \alpha 2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{\alpha - 1}(z-x)^{\alpha 2 - 1} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

令变量替换 $x = zt$ 有

$\int_0^z x^{\alpha 1 - 1}(z-x)^{\alpha 2 - 1} \mathrm{d}x = z^{\alpha 1 + \alpha 2 - 1} \int_0^1 t^{\alpha 1 - 1}(1-t)^{\alpha 2 - 1} \mathrm{d}t = z^{\alpha 1 + \alpha 2 - 1} \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)$

由 Beta 函数性质 $\mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$, 代入可得

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda z}$$

即有 $Z = X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)$

3.

首先求解 $Y = X^2$ 的分布函数, $X \sim N(0,1)$

当 $y \leqslant 0$ 时, 有 $F_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时, 有

$$F_Y(y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

求导可知 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}}$

即可知 $Y = X^2 \sim \Gamma(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$

当 k 为奇数时,

$E(X^k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$, 可以看出, 是一个奇函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上积分,

则 $E(X^k) = 0$

当 k 为偶数时,

$$
\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k y^k}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} \frac{(\rho\cos\theta)^k(\rho\sin\theta)^k}{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^{k+2}}\int_0^{4\pi}\sin^k t\mathrm{d}t\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{(k-1)!!}{k!!}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(k-1)!!}{k!!}\int_0^{+\infty} -t^k\frac{2}{t}\mathrm{d}e^{-\frac{t}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(k-1)!!}{k!!}(-2t^{k-1}e^{-\frac{t}{2}}\,|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}2t^{k-1})} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(k-1)!!}{k!!}(2(k-1)\int_0^{+\infty} t^{k-2}e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t)} \\
&= (k-1)!!
\end{aligned}
$$

4.

由题意知我们要使得 $Z_1=\sqrt{a}(X_1+2X_2+\cdots+nX_n)\sim N(0,1), Z_2=\sqrt{b}(Y_m+2Y_{m-1}+\cdots+mY_1)\sim N(0,1)$

我们知道 $D(Z_n)=D(X_1+\cdots+nX_n)=(1^2+2^2+\cdots+n^2)\sigma^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sigma^2$, 同理可知 $D(Z_m)=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)\sigma^2$

因此 $a=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)\sigma^2}, b=\frac{6}{m(m+1)(2m+1)\sigma^2}$

分布为 $Z\sim\chi^2(2)$

5.

可知 $Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i^2}{n}}}$, 其中 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{n}}Y_i\sim N(0,1)$

因此 $Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}}\sim t(n)$

6.

我们知道 $Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=4\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\sim\chi^2(n-1)$

$P(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\geqslant\epsilon)=P(4\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\geqslant4\epsilon)=P(Y\geqslant4\epsilon)$

7.

转化为 t 分布

由定理可知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

进而可知 $T=\frac{\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-12)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}}\sim t(n-1)$

$P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant\epsilon)=P(\frac{\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-12)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}}\geqslant\frac{\epsilon-12}{\sqrt{S^2}})=P(T\geqslant\frac{\epsilon-12}{\sqrt{S^2}})$

8.

2. (2)

因为 X_i 分布函数 $F_i(x)=\Phi(\frac{x-12}{2})$,

因此 $M=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数为 $F_M(x)=[\Phi(\frac{x-12}{2})]^5$

因此 $P(M>15)=1-F_M(15)=1-[\Phi(\frac{15-12}{2})]^5=1-0.9332^5=0.2923$

同理知 $N=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数为 $F_N(x)=1-[1-\Phi(\frac{x-12}{2})]^5$

因此 $P(N<10)=1-[1-\Phi(\frac{10-12}{2})]^5=1-[\Phi(1)]^5=1-(0.8413)^5=0.5785$

4. (2)

由题意知 $X_1+X_2\sim N(0,2), X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi^2(3)$

因此 $\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{X_1+X_2}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{\frac{1}{2}}}\sim t(3)$

因此常数 $C=\sqrt{\frac{3}{2}}$

7.

因为 $E(X)=n, D(X)=2n$

因此 $E(\bar{X})=n, D(\bar{X})=\frac{2n}{10}=\frac{n}{5}$

且 $E(S^2)=D(X)=2n$

9.

(1)

因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 而 $n=16$, 即 $\frac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$

因此 $p=P(\frac{S^2}{\sigma^2}\leqslant 2.041)=1-P(\frac{15S^2}{\sigma^2}>30.615)$

查表可知 $p=1-0.01=0.99$

(2)

由 (1) 可知 $D(\frac{15S^2}{\sigma^2})=2\times 15=30$

因此 $\frac{15^2}{\sigma^4}D(S^2)=30,$

则 $D(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{15}$