向量

$A \cdot B = ||A|| \cdot ||B|| \cos\theta$

$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

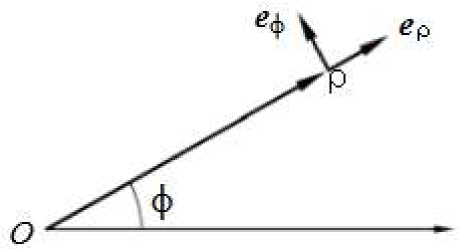
$(A \times B) \cdot C = (C \times A) \cdot B = (B \times C) \cdot A$

$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t)$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t)$

极坐标



平面极坐标

任意矢量 $A = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho + A_\phi \boldsymbol{e}_\phi$

位置矢量 $\boldsymbol{\rho} = \rho \boldsymbol{e}_\rho$, 分量和端点坐标分别为 $(\rho, 0), (\rho, \phi)$, 并不一致

假设有 $\rho = \rho(t), \phi = \phi(t)$

对单位向量的定义如下, 分别为径向和横向, 本质是对直角坐标做了一个旋转变换

$$\begin{aligned} \because \boldsymbol{e}_\rho &= \cos\phi i + \sin\phi j \\ \boldsymbol{e}_\phi &= -\sin\phi i + \cos\phi j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t} &= (-\sin\phi i + \cos\phi j)\dot{\phi} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t} &= (-\cos\phi i - \sin\phi j)\dot{\phi} = -\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{\boldsymbol{\rho}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \boldsymbol{e}_\rho) = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi \qquad \text{(常常代表速度)} \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi \qquad \text{(常常代表加速度)} \end{aligned}$$

应用于圆周运动, 得

$$\dot{\rho} = \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$\ddot{\rho} = -\dot{\varphi}^2\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

角速度大小 $\omega = \dot{\varphi}$

角速度方向使 $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{\omega}$ 三者满足右手螺旋关系, 即沿旋转轴方向

那么就有圆周运动速度 $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, 且方向为 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向

极矢量叉乘为轴矢量, 轴矢量叉乘也为轴矢量, 极矢量叉乘轴矢量为极矢量.

简谐运动

在弹性力作用下的运动方程为: $m\ddot{x} = -kx$ 即 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

则 $\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}, \dot{\theta} = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

若在恒定外力 F 下运动, 则运动方程可以写为 $m\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x - \dfrac{F}{k}) = -k(x - \dfrac{F}{x})$

即平衡位置发生了改变, 振动特性却没有改变, 仍有 $\dot{\theta} = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \cos\omega t \\ \dot{\theta} = -\omega\theta_0 \sin\omega t \end{cases}$$

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= A[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)] \\ &= 2A|\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t|\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi) \end{aligned}$$

假设该音叉和标准音叉分别为 $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi), x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$

所以两只音叉合并为

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) + x_2(t) &= A[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)] \\ &= 2A|\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t|\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi) \end{aligned}$$

拍的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

拍频为 $f=|f_1-f_2|$

伯努利方程

伯努利方程为 $p+\dfrac{1}{2}\rho v^2+\rho gz=C$, 其中 C 为常量.

可以用于求流体力学里的压强. 同时可以解释伯努利现象.

旋转坐标系

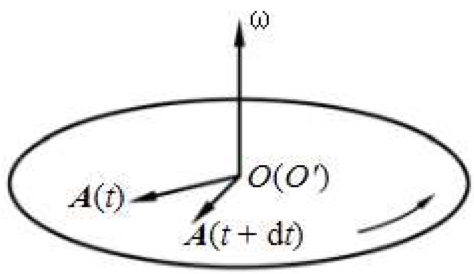


图 2.17　平面旋转坐标系

有相对桌面参考系 S 和匀速圆周运动参考系 S'

对于固定在 S' 上的一点:

$\because \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$

$\therefore \mathrm{d}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}t$

若 $\boldsymbol{A}$ 相对 S' 运动, 增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}'$

那么我们有一般关系式

$$(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t})_S=(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t})_{S'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$

或写作符号, t 旁边的一撇只是用来说明参考系的选取

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}+\boldsymbol{\omega}\times$$

将位置矢量带入得速度

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

再带入得加速度

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t'^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\end{aligned}$$

可以看出, 分为三项, 第一项是 S' 中的加速度, 第三项为向心加速度,
而多出来的第二项, 称为科里奥利加速度.

在地球上, 由于重力加速度是相对 S 而言的, 所以有

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

科里奥利加速度指向运动方向的右手边.

旋转坐标系中的各种量

在旋转坐标系中:

- 角速度 $\dot{\theta}$ 的地位等同于惯性系的速度;
- 角加速度 $\ddot{\theta}$ 的地位等同于惯性系的加速度;
- 转动惯量 $I = \displaystyle\int \rho^2 \mathrm{d}m$ 的地位等同于惯性系的质量;
- 力矩 $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}$ 的地位等同于惯性系里的力;
- 角动量 $L = r \times p = r \times mv = mr \times v$ 的地位等同于惯性系的动量;
- 转动动能 $E = \dfrac{1}{2} I \dot{\theta}^2$.

角动量大小 $L = |r \times p| = |r \times mv| = m|r \times v| = 2mS'$.

并且我们有角动量定理: 质点所受的合外力矩等于它的角动量对时间的变化率.

角动量守恒定律指出, 当合外力矩为零时, 角动量守恒, 物体与中心点的连线单位时间扫过的面积不变, 在天体运动中表现为开普勒第二定律.

类似牛顿第二定律: $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r} = I\ddot{\theta} = \displaystyle\int \rho \mathrm{d}m \ddot{\theta}$

圆环以直径为轴旋转时的转动惯量为

$$I = 2\int_0^{\pi} \frac{m}{2\pi R} (R\sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} mR^2$$

圆球的转动惯量为:

$$I=\int \mathrm{d}m(r\sin\theta)^2=\int \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}[2\pi(r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta](r\sin\theta)^2=\frac{2}{5}mR^2$$

木棍沿着中心的转动惯量为:

$$I=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{m}{l}\mathrm{d}xx^2=\frac{1}{12}ml^2$$

平行轴定理, 可以实现两个不同的平行轴之间转动惯量的转换, 其中 I_C 为经过质心的转轴的转动惯量, d 为两个轴之间的距离:

$$I=I_C+md^2$$

使用平行轴定理可知, 木棍沿着端点的轴的转动惯量为:

$$I=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{2})^2=\frac{1}{3}ml^2$$

两体系统

对于只有两质点之间相互作用的系统, 有运动方程:

$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-f(r)\boldsymbol{r}, m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2=f(r)\boldsymbol{r}$, 其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$

进而有 $m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1+m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2=0$ 和 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}_1-\ddot{\boldsymbol{r}}_2=-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)f(r)\boldsymbol{r}$

定义约化质量 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, 质心 $m_C=m_1+m_2, m_C\boldsymbol{r}_C=m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2$

则我们可以将运动方程写作 $\ddot{\boldsymbol{r}}_C=0, \mu\ddot{\boldsymbol{r}}=-f(r)\boldsymbol{r}$

解方程组, 就可以很容易地讨论两个质点的运动:

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_C, \boldsymbol{r}_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_C$$

波动方程

柔软绳上的横波

只需要记住:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0, v=\sqrt{\frac{F_T}{\rho}}$$

u 为质点的位移, x 为质点的位置, t 为时间, v 为波传播的速度, F_T 为绳子的张力, ρ 为绳子的密度.

橡皮泥中的纵波

杨氏模量 $Y=\frac{L}{S}\left(\frac{\partial F_T}{\partial L}\right)$, L, S 分别为橡皮泥的长度和横截面积.

运动方程为

$$\rho_0 \mathrm{d}x S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=YS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \text{其中 } c=\sqrt{\frac{Y}{\rho_0}}$$

声音波速

$F_T \to -pS$

$$Y=\frac{L}{S}\left(\frac{\partial F_T}{\partial L}\right)\to -\frac{L}{S}\frac{\partial(pS)}{\partial L}=-V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)\equiv B=\frac{1}{\kappa_T}$$

其中 B 为体积弹性模量, κ_T 为等温压缩率

那么 $p=p_0+\Delta p, \Delta p=-B\frac{\Delta V}{V}$

那么声波波速为 $v=\sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$

驻波

驻波也可以看作是两频率相等方向相反行波的叠加, 振动最弱点称为波节或节点而振动最强为波腹或反节点.

洛伦茨变换

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-ut) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-\frac{u}{c^2}x) \end{cases}$$

常微分方程

$y' + P(x)y = 0$ 对应的解是 $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$y' + P(x)y = Q(x)$ 对应的解是 $y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$

综上所述，求二阶常系数线性齐次方程

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 0$$

通解的步骤可归纳如下：

第一步，根据微分方程写出它的特征方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$；

第二步，求解特征方程得两个特征根 λ_1 与 λ_2；

第三步，根据特征根的不同情况参照下表写出微分方程的通解：

特征根 λ_1, λ_2	二阶常系数齐次方程的通解
两个不同实根 λ_1, λ_2	$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$
两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2$	$x = e^{\lambda_1 t}(C_1t + C_2)$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$x = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$

自由落体

物体下落过程中受到空气的阻力 $F_d = -kv$, 其中 v 是物体的速度, k 为与速度无关的常量.

终极速度

对下落稳定时:

$$\boldsymbol{F}_d + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v} = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{g}}{k}$$

速度对时间

对下落过程:

$$\boldsymbol{F}_d + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{a}$$

取竖直向下为正方向:

$$mg - kv = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}t}{m} = \frac{\mathrm{d}v}{mg - kv}$$

$$\therefore \int \frac{\mathrm{d}t}{m} = \int \frac{\mathrm{d}v}{mg - kv}$$

$$\therefore \frac{t}{m} + C = -\frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{d}(mg - kv)}{mg - kv} = -\frac{1}{k}\ln(mg - kv)$$

当 $t = 0$ 时, $v = 0$, 带入可得

$$\therefore C = -\frac{1}{k}\ln(mg)$$

$$\therefore \ln(mg - kv) = \ln(mg) - \frac{k}{m}t$$

$$\therefore mg - kv = e^{\ln(mg) - \frac{k}{m}t} = \frac{mg}{e^{\frac{k}{m}t}}$$

$$\therefore v = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{ke^{\frac{k}{m}t}}$$

加速度对时间

$$\therefore a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ge^{-\frac{k}{m}t}$$

下落距离对时间

$$\therefore x = \int v\mathrm{d}t = \frac{mgt}{k} + \frac{m^2g}{k^2}\int e^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}(-\frac{k}{m}t) = \frac{mgt}{k} + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

当 $t = 0$ 时, 带入 $x = 0$ 得:

$$\therefore x = \frac{m^2g}{k^2}e^0 + C = 0$$

$$\therefore C = -\frac{m^2g}{k^2}$$

$$\therefore x = \frac{mgt}{k} + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m^2g}{k^2}$$