概率统计第二次作业

201300035 方盛俊

1.10

(i) $P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{1}{20}$

(ii) $P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{12}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{2}{5}$

(iii) $P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{1}\binom{12}{1}}{\binom{16}{2}} + \frac{\binom{12}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{3}{4}$

1.11

两个女生间恰好有 k 个男生的情况数可以用这种方法获取: 抽出 k 个男生, 对这 k 个男生进行全排列, 再对两个女生进行全排列, 将这 k 个男生和两个女生看作一个团体, 让他们排入进行了全排列的剩下 $(n-k)$ 个男生当中, 可以排入的位置有 $(n-k+1)$ 个.

而任意排列的情况, 只需要 $(n+2)$ 全排列就好.

记 "两女生之间恰有 k 个男生" 为事件 A, 则

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k} \cdot (k)_k \cdot (2)_2 \cdot (n-k)_{n-k} \cdot (n-k+1)}{(n+2)_{n+2}} = \frac{-2k+2n+2}{(n+1)(n+2)}$$

1.12

记 "排成一列任意两个女生不相邻" 为事件 A, "排成一圆环任意两个女生不相邻" 为事件 B.

$$P(A) = \frac{(n)_n \cdot \binom{n+1}{m} \cdot (m)_m}{(m+n)_{m+n}}$$

$$P(B) = \frac{(n)_n \cdot \binom{n}{m} \cdot (m)_m}{(m+n)_{m+n}}$$

1.13

对于 m 只不同的白球和 n 只不同的红球:

$$P(D) = \frac{\binom{n}{1} \cdot (m+n-1)_{m+n-1}}{(m+n)_{m+n}} = \frac{n}{m+n}$$

对于 m 只不同的白球和 n 只相同的红球:

$$P(A) = \frac{\frac{\binom{n}{1} \cdot (m+n-1)_{m+n-1}}{(n)_n}}{\frac{(m+n)_{m+n}}{(n)_n}} = \frac{n}{m+n}$$

对于 m 只相同的白球和 n 只不同的红球:

$$P(A) = \frac{\frac{\binom{n}{1} \cdot (m+n-1)_{m+n-1}}{(m)_m}}{\frac{(m+n)_{m+n}}{(m)_m}} = \frac{n}{m+n}$$

对于 m 只相同的白球和 n 只相同的红球:

$$P(A) = \frac{\frac{\binom{n}{1} \cdot (m+n-1)_{m+n-1}}{(n)_n \cdot (m)_m}}{\frac{(m+n)_{m+n}}{(n)_n \cdot (m)_m}} = \frac{n}{m+n}$$

1.14

分别记杯中球的最大个数为 1, 2, 3 为事件 A, B, C.

$$P(A) = \frac{(4)_3}{4^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1}}{4^3} = \frac{1}{16}$$

$$P(B) = 1 - P(A) - P(C) = \frac{9}{16}$$

1.15

将两个事件依次记为 A, B.

$$P(A) = \frac{\binom{b}{1} \cdot (a+b-1)_{k-1}}{(a+b)_k} = \frac{b}{a+b}$$

$$P(B) = \frac{\binom{b}{1} \cdot (a+b)^{k-1}}{(a+b)^k} = \frac{b}{a+b}$$

1.16

使用容斥原理.

总排列数: $\dfrac{(2n)!}{2n}=(2n-1)!$

选定一对夫妻, 他们坐在一起的排列数: $2\cdot\dbinom{n}{1}\cdot\dfrac{(2n-1)!}{2n-1}=2\cdot\dbinom{n}{1}\cdot(2n-2)!$

选定两对夫妻, 他们坐在一起的排列数: $2^2\cdot\dbinom{n}{2}\cdot\dfrac{(2n-2)!}{2n-2}=2^2\cdot\dbinom{n}{2}\cdot(2n-3)!$

$\cdots$

选定 k 对夫妻, 他们坐在一起的排列数: $2^k\cdot\dbinom{n}{k}\cdot(2n-k-1)!$

$\cdots$

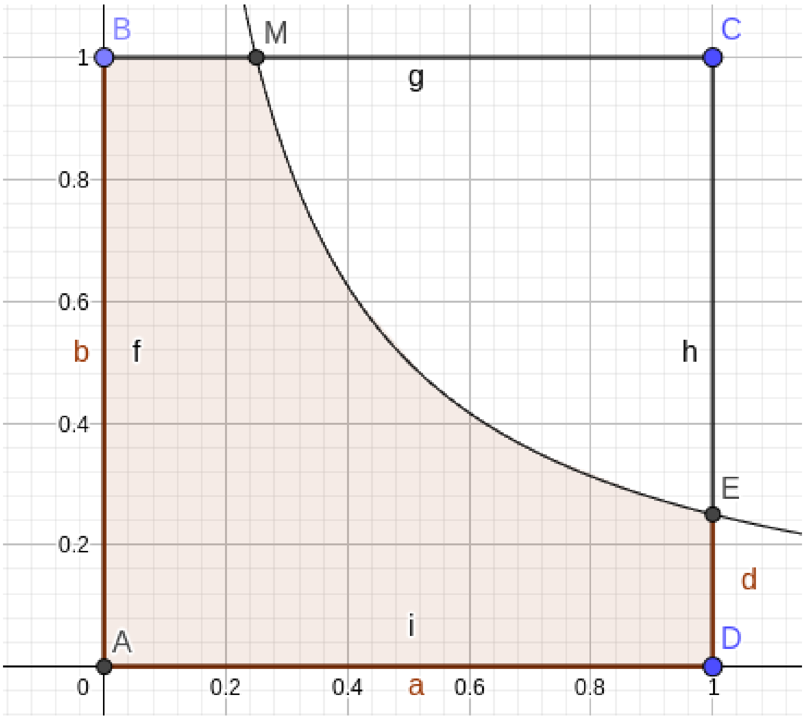
当 $k=0$ 时, 恰好满足 $2^k\cdot\dbinom{n}{k}\cdot(2n-k-1)!=(2n-1)!$, 即总排列数.

因此, 由容斥原理可知, 任意一对夫妻不相邻的排列数为: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-2)^k\cdot\binom{n}{k}\cdot(2n-k-1)!$

任意一对夫妻不相邻的概率为 $P(A)=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-2)^k\cdot\binom{n}{k}\cdot(2n-k-1)!}{(2n-1)!}$

1.17

既有 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\\xy\leqslant\frac{1}{4}\end{cases}$



$$P(A) = \frac{\frac{1}{4} \times 1 + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x} \mathrm{d}x}{1 \times 1} = \frac{1}{4} + \frac{2 \ln 2}{4}$$

1.18

Algorithm 1 Probability

function PROBABILITY()
  $n_A \leftarrow 0$
  for $i = 1$ **to** N **do**
    $a \leftarrow$ Random(0,1)
    $b \leftarrow$ Random(0,1)
    $c \leftarrow$ Random(0,1)
    $d \leftarrow$ Random(0,1)
    if $a^2 + \sin(b) + a \cdot e^c \leqslant d$ **then**
      $n_A \leftarrow n_A + 1$
    end if
  end for
  return the 5-digit of $(n_A \ / \ N)$
end function

1.19

$$\binom{9}{3,4,2} = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = \frac{9!}{3! \times 4! \times 2!} = 1260$$

1.20

对于 $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} + \frac{n!r}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r}$$

更好的解释是, 从 $n+1$ 个元素中取出 r 个元素, 可以分为两个方式的和: 选定一个元素 x, 第一种方式是从除 x 以外的 n 个元素中取出 r 个元素, 第二种方式是先确定要选取 x, 然后从剩下的 n 个元素中取出还需要的 $r-1$ 个元素.

对于 $\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$:

$\binom{m+n}{r}$ 可以看作是从 $m+n$ 个人中挑出 r 个人, 这件事我们可以分成几件事的和: 先从 m 个人中挑 i 个人, 再从 n 个人中挑还需要的 $r-i$ 个人. 只要这个 i 取了 0 到 r 中的所有值, 我们就可以认为它们的结果一致.

因此我们有 $\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$

对于 $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$:

我们使用上面的结论可知

$$\binom{2n}{n} = \binom{n+n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

1.21

从 m 个不同元素中无放回地取出 r 个元素进行排列的排法: $\binom{m}{r} \cdot (r)_r = (m)_r$

从 m 个不同元素中有放回地取出 r 个元素进行排列的排法: $\prod_{i=1}^{r} \binom{m}{1} = m^r$

从 m 个不同元素中无放回地取出 r 个元素的取法: $(m)_r$

从 m 个不同元素中有放回地取出 r 个元素的取法: m^r

1.22

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k \leqslant n$ 的正整数解个数, 等同于求 $x_1+x_2+\cdots+x_k=i, k \leqslant i \leqslant n$ 的正整数解个数的和, 即 $\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}$

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k \leqslant n$ 的非负整数解个数, 等同于求 $x_1+x_2+\cdots+x_k=i, 0 \leqslant i \leqslant n$ 的非负整数解个数的和, 即 $\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{i+k-1}{k-1}$

1.23

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k < n$ 的正整数解个数, 等同于求 $x_1+x_2+\cdots+x_k=i, k \leqslant i \leqslant n-1$ 的正整数解个数的和, 即 $\sum\limits_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1}$

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k < n$ 的非负整数解个数, 等同于求 $x_1+x_2+\cdots+x_k=i, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 的非负整数解个数的和, 即 $\sum\limits_{i=k}^{n-1}\binom{i+k-1}{k-1}$

1.24

我们已知递推关系 $S(n,k)=kS(n-1,k)+S(n-1,k-1)$

使用归纳法.

奠基 (Basis):

当 $k=1$ 时, 将 n 个不同的球放入 k 个相同的箱子, 放法只有 1 种.

代入公式 $S(n,1)=\dfrac{1}{1!}\sum\limits_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{1}{i}(1-i)^n=1+0=1$ 成立.

当 $n=1, k>1$ 时, 我们认为 $S(1,k)=0$.

代入公式 $S(1,k)=\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^1=\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i\dfrac{k!}{i!(k-i-1)!}=0$ 成立.

归纳假设 (I.H.):

假设 $S(n-1,k)=\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^{n-1}$ 成立.

假设 $S(n-1,k-1)=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}(k-i-1)^{n-1}$ 成立.

归纳推理 (I.S.):

$$
\begin{aligned}
S(n,k) &= kS(n-1,k)+S(n-1,k-1)\\
&= k\cdot\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^{n-1}+\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}(k-i-1)^{n-1}\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^{n-1}+\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}(k-i-1)^{n-1}\right]\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left[\binom{k}{i}(k-i)^{n-1}+\binom{k-1}{i}(k-i-1)^{n-1}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left[k\frac{k!}{i!(k-i)!}(k-i)^{n-1}+k\frac{(k-1)!\cdot(k-i)}{i!(k-i)!}(k-i-1)^{n-1}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left[\frac{k\cdot k!\cdot(k-i)^{n-1}+k!\cdot(k-i)\cdot(k-i-1)^{n-1}}{i!(k-i)!}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left[k!\cdot\frac{(k-i)^{n-1}}{i!(k-i)!}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^{n-1}
\end{aligned}
$$

归纳成立.

因此 $S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^{n-1}$