

姓名：方盛俊
学号：201300035

一. (30 points) 概率论基础

教材附录 C 介绍了常见的概率分布. 给定随机变量 X 的概率密度函数如下,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 < x < 1; \\ \frac{3}{8} & 3 < x < 5; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

1. 请计算随机变量 X 的累积分布函数 $F_X(x)$;
2. 随机变量 Y 定义为 $Y = 1/X$, 求随机变量 Y 对应的概率密度函数 $f_Y(y)$;
3. 试证明, 对于非负随机变量 Z , 如下两种计算期望的公式是等价的.

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{z=0}^{\infty} z f(z) dz. \quad (2)$$

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{z=0}^{\infty} \Pr[Z \geq z] dz. \quad (3)$$

同时, 请分别利用上述两种期望公式计算随机变量 X 和 Y 的期望, 验证你的结论.

解:

1. 当 $x \leq 0$ 时, $F_X(x) = 0$

$$\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{4} dx = \frac{x}{4}$$

$$\text{当 } 1 < x \leq 3 \text{ 时, } F_X(x) = F_X(1) = \frac{1}{4}$$

$$\text{当 } 3 < x \leq 5 \text{ 时, } F_X(x) = F_X(3) + \int_3^x \frac{3}{8} dx = \frac{3x}{8} - \frac{7}{8}$$

$$\text{当 } x > 5 \text{ 时, } F_X(x) = F_X(5) = 1$$

综上所述有

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{3x}{8} - \frac{7}{8}, & 3 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases} \quad (4)$$

2. 当 $y \leq 0$ 时, 有 $x < 0$, 因此 $F_Y(x) = 0$

当 $y > 0$ 时,

$$F_Y(y) = \Pr(Y < y) = \Pr(\frac{1}{X} < y) = \Pr(X > \frac{1}{y}) = 1 - F_X(\frac{1}{y})$$

因此

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{5} \\ \frac{15}{8} - \frac{3}{8y}, & \frac{1}{5} \leq y < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{3} \leq y < 1 \\ 1 - \frac{1}{4y}, & y \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

进而有

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{5} \\ \frac{3}{8y^2}, & \frac{1}{5} \leq y < \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3} \leq y < 1 \\ \frac{1}{4y^2}, & y \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

3. 首先观察到 $Z = \int_0^Z 1dt = \int_0^\infty \mathbb{I}(Z > t)dt$

与公式 $\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty zf(z)dz$

则有

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{I}(Z > t) dt\right] \\
 &= \int_0^\infty f(z) \int_0^\infty \mathbb{I}(z > t) dt dz \\
 &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \mathbb{I}(z > t) f(z) dz\right] dt \\
 &= \int_0^\infty \left[\int_0^t \mathbb{I}(z > t) f(z) dz + \int_t^\infty \mathbb{I}(z > t) f(z) dz\right] dt \\
 &= \int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(z) dz\right] dt \\
 &= \int_0^\infty \Pr[Z \geq t] dt \\
 &= \int_0^\infty \Pr[Z \geq z] dz
 \end{aligned}$$

计算随机变量 X 的期望:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x dx + \int_3^5 \frac{3}{8} x dx = \frac{25}{8}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \Pr[X \geq x] dx \\
 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx + \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right) dx \\
 &\quad + \int_3^5 \left(1 - \frac{3x}{8} + \frac{7}{8}\right) dx + \int_5^\infty (1 - 1) dx \\
 &= \frac{7}{8} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{25}{8}
 \end{aligned}$$

计算随机变量 Y 的期望:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y] &= \int_0^\infty y f_Y(y) dy = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \frac{3}{8y^2} \cdot y dy + \int_1^\infty \frac{1}{4y^2} \cdot y dy = -\frac{3 \ln(3)}{8} + \\
 &\quad \frac{3 \ln(5)}{8} + \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{15}{8} + \frac{3}{8y}\right) dy + \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(1 - \frac{3}{4}\right) dy + \int_1^{\infty} \frac{1}{4y} dy \\ &= -\frac{3 \ln(3)}{8} - \frac{7}{60} + \frac{3 \ln(5)}{8} + \frac{1}{6} + \infty\end{aligned}$$

均为不收敛.

二. (40 points) 评估方法

教材 2.2.3 节描述了自助法 (bootstrapping), 下面考虑将自助法用于对统计量估计这一场景, 并对自助法做进一步分析. 考虑 m 个从分布 $p(x)$ 中独立同分布抽取的 (互不相等的) 观测值 x_1, x_2, \dots, x_m , $p(x)$ 的均值为 μ , 方差为 σ^2 . 通过 m 个样本, 可使用如下方式估计分布的均值

$$\bar{x}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad (7)$$

和方差

$$\bar{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_m)^2 \quad (8)$$

设 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ 为通过自助法采样得到的结果, 且

$$\bar{x}_m^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^*, \quad (9)$$

1. 请证明 $\mathbb{E}[\bar{x}_m] = \mu$ 且 $\mathbb{E}[\bar{\sigma}_m^2] = \sigma^2$;
2. 计算 $\text{var}[\bar{x}_m]$;
3. 计算 $\mathbb{E}[\bar{x}_m^* | x_1, \dots, x_m]$ 和 $\text{var}[\bar{x}_m^* | x_1, \dots, x_m]$;
4. 计算 $\mathbb{E}[\bar{x}_m^*]$ 和 $\text{var}[\bar{x}_m^*]$;
5. 针对上述证明分析自助法和交叉验证法的不同.

解:

1. 对于期望有

$$\mathbb{E}[\bar{x}_m] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i\right] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[x_i] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu = \mu \quad (10)$$

对于第二个式子有

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\bar{\sigma}_m^2] &= \frac{1}{m-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_m)^2\right] \\
 &= \frac{1}{m-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m x_i^2 - 2\bar{x}_m \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m \bar{x}_m^2\right] \\
 &= \frac{1}{m-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m x_i^2 - m\bar{x}_m^2\right] \\
 &= \frac{1}{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[x_i^2] - m\mathbb{E}[\bar{x}_m^2]\right) \\
 &= \frac{1}{m-1} \left(\sum_{i=1}^m (\mathbb{E}[x_i^2] - \mathbb{E}[x_i]^2) - m(\mathbb{E}[\bar{x}_m^2] - \mathbb{E}[\bar{x}_m]^2)\right) \\
 &= \frac{1}{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \text{Var}[x_i] - m \text{Var}[\bar{x}_m]\right) \\
 &= \frac{1}{m-1} \left(m \cdot \sigma^2 - m \cdot \left(\frac{1}{m^2} \cdot m\sigma^2\right)\right) \\
 &= \sigma^2
 \end{aligned} \tag{11}$$

2. 计算方差得

$$\text{Var}[\bar{x}_m] = \frac{1}{m^2} \cdot m\sigma^2 = \frac{1}{m}\sigma^2 \tag{12}$$

3. 对于任意一个自助法得到的样本 x_i^* 有

$$\mathbb{E}[x_i^* | x_1, \dots, x_m] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i = \bar{x}_m \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[x_i^*|x_1, \dots, x_m] &= \mathbb{E}[(x_i^* - \mathbb{E}[x_i^*|x_1, \dots, x_m])^2|x_1, \dots, x_m] \\
 &= \mathbb{E}[(x_i^* - \bar{x}_m)^2|x_1, \dots, x_m] \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_m)^2 \\
 &= \frac{m-1}{m} \bar{\sigma}_m^2
 \end{aligned} \tag{14}$$

因此

$$\mathbb{E}[\bar{x}_m^*|x_1, \dots, x_m] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[x_i^*|x_1, \dots, x_m] = \bar{x}_m \tag{15}$$

$$\text{Var}[\bar{x}_m^*|x_1, \dots, x_m] = \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{i=1}^m \text{Var}[x_i^*|x_1, \dots, x_m] = \frac{m-1}{m^2} \bar{\sigma}_m^2 \tag{16}$$

4. 对于任意一个自助法得到的样本 x_i^* 有期望

$$\mathbb{E}[x_i^*] = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \mathbb{E}[x_i] = \mu \tag{17}$$

和方差

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[x_i^*] &= \mathbb{E}[x_i^{*2}] - \mathbb{E}[x_i^*]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \mathbb{E}[x_i^2] - \mu^2 \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mathbb{E}[x_i^2] - \mathbb{E}[x_i]^2) \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Var}[x_i] \\
 &= \sigma^2
 \end{aligned} \tag{18}$$

因此

$$\mathbb{E}[\bar{x}_m^*] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[x_i^*] = \mu \quad (19)$$

$$\text{Var}[\bar{x}_m^*] = \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{i=1}^m \text{Var}[x_i^*] = \frac{1}{m} \sigma^2 \quad (20)$$

5. 交叉验证法, 特别是其中的留一法, 同一个样例不会被抽取多次, 和实际上用 D 训练出的模型较为相似, 所以在大数据集上相对准确, 但是计算开销较大.

自助法, 虽然期望和方差仍然维持与原数据集相同, 但是会重复抽取相同的样本, 改变了初始数据集的分布, 会引入估计偏差, 一般用于数据集较小的时候.

三. (30 points) 性能度量

教材 2.3 节介绍了机器学习中常用的性能度量. 假设数据集包含 8 个样例, 其对应的真实标记和学习器的输出值 (从大到小排列) 如表 3 所示. 该任务是一个二分类任务, 标记 1 和 0 表示真实标记为正例或负例. 学习器的输出值代表学习器认为该样例是正例的概率.

Table 1: 样例表

样例	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
标记	1	1	0	1	0	1	0	0
分类器输出值	0.81	0.74	0.62	0.55	0.44	0.35	0.25	0.21

1. 计算 P-R 曲线每一个端点的坐标并绘图;
2. 计算 ROC 曲线每一个端点的坐标并绘图, 计算 AUC;

解:

1. 计算得

Table 2: P-R 曲线									
点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	1.0	1.0	1.0	0.67	0.75	0.6	0.67	0.57	0.5
R	0.0	0.25	0.5	0.5	0.75	0.75	1.0	1.0	1.0

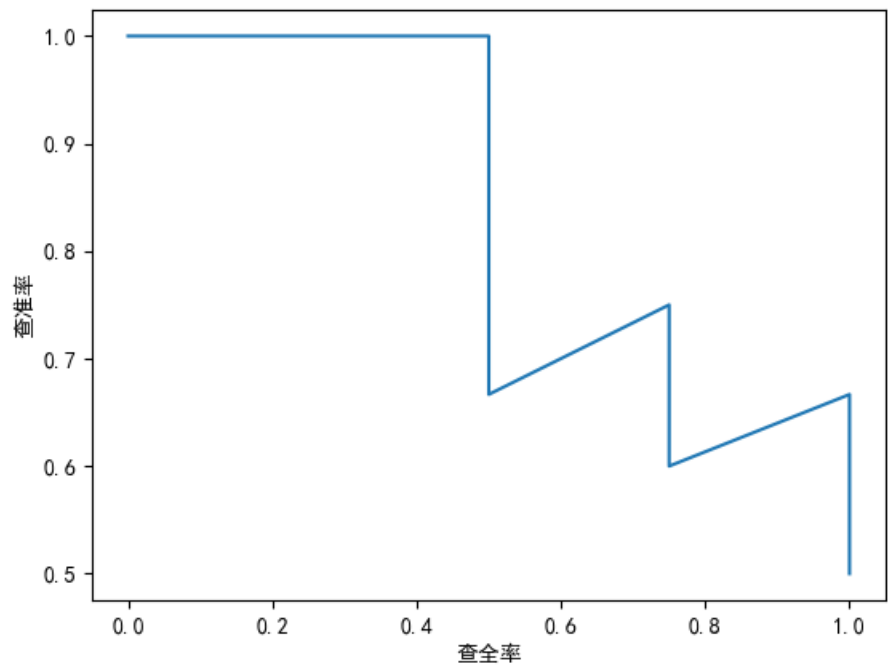


Figure 1: P-R 曲线

2. 计算得

Table 3: P-R 曲线									
点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
TPR	0.0	0.25	0.5	0.5	0.75	0.75	1.0	1.0	1.0
FPR	0.0	0.0	0.0	0.25	0.25	0.5	0.5	0.75	1.0

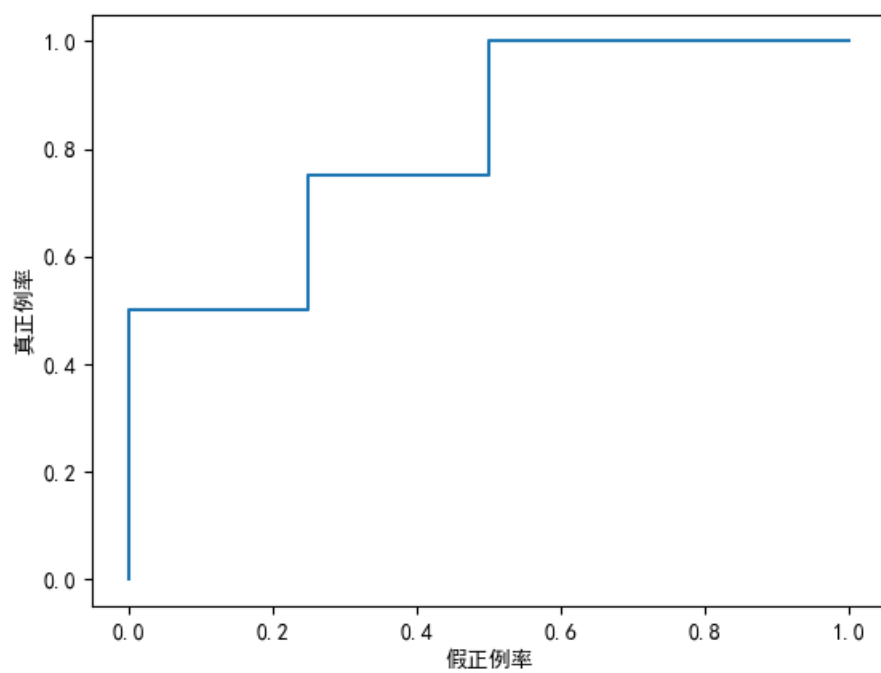


Figure 2: ROC 曲线

AUC 面积为 $S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_i + y_{i+1}) = 0.8125$