Optimization Methods | Fall 2021

Homework 1

Instructor: Lijun Zhang | *Name:* 方盛俊, *StudentId:* 201300035

Notice

- The submission email is: **zhangzhenyao@lamda.nju.edu.cn**.
- Please use the provided Latex file as a template.
- If you are not familiar with LaTeX, you can also use Word to generate a **PDF** file.

Problem 1: Inequalities

(a)

由内积的性质我们可知 $\|x\|\|y\| \geqslant x \cdot y$

$\because \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\therefore \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

(b)

$\because \epsilon\|x\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|y\|^2 \geqslant 2\sqrt{\epsilon\|x\|^2 \cdot \frac{1}{\epsilon}\|y\|^2} = 2\|x\|\|y\| \geqslant 2x \cdot y$

$\therefore 2x \cdot y \leqslant \epsilon\|x\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|y\|^2$

$\therefore \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leqslant (1+\epsilon)\|x\|^2 + (1+\frac{1}{\epsilon})\|y\|^2$

Problem 2: Convex sets

(a)

对于 P 内的任意两个点 x_1, x_2, 我们有 $Ax_1 \leqslant b$ 和 $Ax_2 \leqslant b$

$\therefore A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \leqslant \theta b + (1-\theta)b = b$

$\therefore \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in P$

$\therefore P$ 是一个凸集.

(b)

$\because S$ 是凸集.

$\therefore \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$

$\therefore \forall Ax_1, Ax_2 \in A(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \in A(S)$

因为由 $A(S) = \{Ax | x \in S\}$ 我们知道, Ax_1 和 Ax_2 可以是 $A(S)$ 里的任意一个元素, 我们用 y_1, y_2 将其代换.

$\therefore \forall y_1, y_2 \in A(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $\theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in S$

$\therefore A(S)$ 是凸集.

(c)

$\because S$ 是凸集.

$\therefore \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$

我们令 $x_1 = Ay_1, x_2 = Ay_2$ (对于存在 y_1, y_2 满足该条件的情况)

$\therefore \forall Ay_1, Ay_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $\theta Ay_1 + (1-\theta)Ay_2 = A(\theta y_1 + (1-\theta)y_2) \in S$

$\because A^{-1}(S) = \{x | Ax \in S\}$

$\therefore \forall y_1, y_2 \in A^{-1}(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $\theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in A^{-1}(S)$

Problem 3: Hyperplane

我们先将两个超平面改写成 $\{x | a^T(x - x_1) = 0\}$ 和 $\{x | a^T(x - x_2) = 0\}$

即我们有 $b = a^T x_1, c = a^T x_2$

由超平面的几何意义, 以及点乘的几何意义: $a \cdot b$ 的几何意义是 a 到 b 的投影长度乘以 b 的长度, 我们可知

距离 $d = \dfrac{||a^T(x_1 - x_2)||}{||a||} = \dfrac{|a^T x_1 - A^T x_2|}{||a||} = \dfrac{|b-c|}{||a||}$

Problem 4: Examples

(a)

$\because A \succeq 0$

$\therefore 0 \leqslant (x_1 - x_2)^T A(x_1 - x_2)$

$\therefore 0 \leqslant x_1^T A(x_1 - x_2) + x_2^T A(x_2 - x_1)$

$\therefore x_2^T Ax_1 + x_1^T Ax_2 \leqslant x_1^T Ax_1 + x_2^T Ax_2$

$\therefore \theta(1-\theta)x_2^T Ax_1 + \theta(1-\theta)x_1^T Ax_2 \leqslant \theta(1-\theta)x_1^T Ax_1 + \theta(1-\theta)x_2^T Ax_2$

$\therefore (\theta x_1 + (1-\theta)x_2)^T A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leqslant \theta x_1^T Ax_1 + (1-\theta)x_2^T Ax_2$

$\because \forall x_1, x_2 \in C, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $x_1^T Ax_1 + b^T x_1 + c \leqslant 0, x_2^T Ax_2 + b^T x_2 + c \leqslant 0$

$\therefore (\theta x_1 + (1-\theta)x_2)^T A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + b^T(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + c \leqslant \theta(x_1^T Ax_1 + b^T x_1 + c) + (1-\theta)(x_2^T Ax_2 + b^T x_2 + c) = \theta x_1^T Ax_1 + (1-\theta)x_2^T Ax_2 + b^T(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + c \leqslant 0$

$\therefore \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$

$\therefore C$ 是凸集

(b)

这个表述正确.

C 和该超平面的交集为 $\{x \in \mathbb{R}^n | x^T Ax + b^T x + c \leqslant 0 \text{ and } g^T x + h = 0\}$

$\because g^T x + h = 0$

$\therefore \lambda x^T gg^T x = \lambda h^2, \lambda hg^T x = -\lambda h^2$

$\therefore \lambda x^T gg^T x + \lambda hg^T x = \lambda h^2 - \lambda h^2 = 0$

$\therefore x^T Ax + b^T x + c = x^T Ax + b^T x + c + \lambda x^T gg^T x + \lambda hg^T x = x^T(A + \lambda gg^T)x + (b^T + \lambda hg^T)x + c$

即该交集可以表示为 $\{x \in \mathbb{R}^n | x^T(A + \lambda gg^T)x + (b^T + \lambda hg^T)x + c \leqslant 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n | g^T x + h = 0\}$

如果有 $A + \lambda gg^T \succeq 0$ 对于某些 $\lambda \in \mathbb{R}$, 由 (a) 的结论可知

$\{x \in \mathbb{R}^n | x^T(A + \lambda gg^T)x + (b^T + \lambda hg^T)x + c \leqslant 0\}$ 是凸集, 交上另一个凸集 $\{x \in \mathbb{R}^n | g^T x + h = 0\}$, 结果还是凸集.

所以该表述正确.

Problem 5: Generalized Inequalities

(a)

$\because K^* = \{y | x^T y \geqslant 0, \forall x \in K\} = \bigcap_{x \in K} \{y | x^T y \geqslant 0\}$

$\therefore K^*$ 是一系列以原点为共同交点的半空间的交集.

$\therefore K^*$ 是一个凸锥.

(b)

$\because K^* = \{y | x^T y \geqslant 0, \forall x \in K\}$

$\because K_1^* = \{y | x^T y \geqslant 0, \forall x \in K_1\}$

$\therefore$ 对于 $\forall x \in K_2$, 我们都有 $y \in K_2^* \Rightarrow x^T y \geqslant 0$

$\because K_1 \subseteq K_2$

$\therefore$ 对于 $\forall x \in K_1$, 我们都有 $y \in K_2^* \Rightarrow x^T y \geqslant 0$

$\because K_1^* = \{y | x^T y \geqslant 0, \forall x \in K_1\}$

$\therefore$ 对于上文出现过的 y 都有 $y \in K_1^*$

$\therefore K_1^* \subseteq K_2^*$