数字信号处理
作业一

方盛俊 201300035

2022 年 11 月 21 日

作业提交注意事项

(1) 本次作业提交截止时间为 **2022/11/27 23:59:59**，截止时间后不再接收作业，本次作业记零分；

(2) 作业提交方式：使用此 LaTex 模板书写解答，只需提交编译生成的 pdf 文件，将 pdf 文件以 ftp 方式上传，账号为 dsp2022，密码为 12345asd!@。请远程连接 www.lamda.nju.edu.cn，提交到/D:/courses/DSP2022/HW/HW1 路径下。

(3) 文件命名方式：学号-姓名-作业号-v 版本号, 例 MG1900000-张三-1-v1；如果需要更改已提交的解答，请在截止时间之前提交新版本的解答，并将版本号加一；

(4) 未按照要求提交作业，或 pdf 命名方式不正确，将会被扣除部分作业分数。

1 [20pts] 信号的周期性

判断下列信号的周期性，并回答**是**、**否**或**无法判断**。如果是周期信号，请给出其最小正周期。

(1) $x(t) = \sin^2 t + \cos \pi t$

(2) $x(t) = (\sin 2t + \cos t)^2$

(3) $x(t) = \dfrac{\cos 2t + 1 + \sin t + \sin 2t + \sin 3t}{\cos t}$

(4) $x(t) = \sin et + \cos \pi t$

(5) $x(n) = \sin 2kn + \cos 3kn$, k 为某一正实数。

- (1)

  $x(t) = \sin^2 t + \cos \pi t = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2t + \cos \pi t$

  其中 $\cos 2t$ 周期为 $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$, $\cos \pi t$ 的周期为 $T_2 = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

  由于 $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\pi}{2}$ 为无理数, 因此 $x(t)$ 不是周期信号.

- (2)

  $$\begin{aligned} x(t) &= (\sin 2t + \cos t)^2 \\ &= \sin^2 2t + 2\sin 2t \cos t + \cos^2 t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t + (\sin(2t+t) + \sin(2t-t)) + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\cos 4t + \sin 3t + \frac{1}{2}\cos 2t + \sin t + 1 \end{aligned}$$

  由于 $\cos 4t, \sin 3t, \cos 2t, \sin t$ 的周期分别为 $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, 2\pi$.

  它们两两间的周期之比为有理数, 因此 $x(t)$ 为周期信号, 周期为它们的最小公倍数 2π.

- (3)

  $$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos 2t + 1 + \sin t + \sin 2t + \sin 3t}{\cos t} \\ &= \frac{2\cos^2 t + \sin t + 2\sin t \cos t + 3\sin t - 4\sin^3 t}{\cos t} \\ &= \frac{2\cos^2 t + 4\sin t + 2\sin t \cos t - 4\sin t(1 - \cos^2 t)}{\cos t} \\ &= \frac{2\cos^2 t + 2\sin t \cos t + 4\sin t \cos^2 t}{\cos t} \\ &= \frac{2\cos^2 t + 2\sin t \cos t + 2\sin 2t \cos t}{\cos t} \\ &= 2\cos t + 2\sin t + 2\sin 2t \end{aligned}$$

  其中 $\cos t, \sin t, \sin 2t$ 的周期分别为 $2\pi, 2\pi, \pi$.

它们两两间的周期之比为有理数, 因此 $x(t)$ 为周期信号, 周期为它们的最小公倍数 2π.

- (4)

  $x(t)=\sin et+\cos \pi t$

  其中 $\sin et, \cos \pi t$ 的周期分别为 $\frac{2\pi}{e}, 2$.

  由于 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{e}$ 不清楚是有理数还是无理数, 因此无法判定 $x(n)$ 的周期性.

- (5)

  $x(n)=\sin 2kn+\cos 3kn$

  若令 $\sin 2k(n+N)=\sin 2kn$

  则我们可知 $2kN=2\pi m_1$

  即 $2kN$ 是 2π 的整数倍, 且周期为 $N=\frac{\pi m_1}{k}$

  若令 $\cos 3k(n+N)=\cos 3kn$

  则我们可知 $3kN=2\pi m_2$

  即 $3kN$ 是 2π 的整数倍, 且周期为 $N=\frac{2\pi m_2}{3k}$

  如果同时有 $2kN=2\pi m_1$ 与 $3kN=2\pi m_2$

  则我们两式相减有 $kN=2\pi(m_2-m_1)$, 即 kN 是 2π 的整数倍,

  且 kN 是 2π 的整数倍也可以推出 $2kN$ 和 $3kN$ 是 2π 的整数倍.

  若未知 k 为多少, 则无法判定 $x(n)$ 的周期性.

  若存在正整数 N 使得其满足 kN 是 2π 的整数倍, 则有 $x(n)$ 为周期信号, 且周期为 $N=\frac{2\pi m}{k}$, 其中 m 是使得 $kN=2\pi m$ 成立的最小正整数.

  若不存在正整数 N 使得其满足 kN 是 2π 的整数倍, 则 $x(n)$ 不是周期信号.

2 [22pts] 连续信号的性质与变换

已知信号

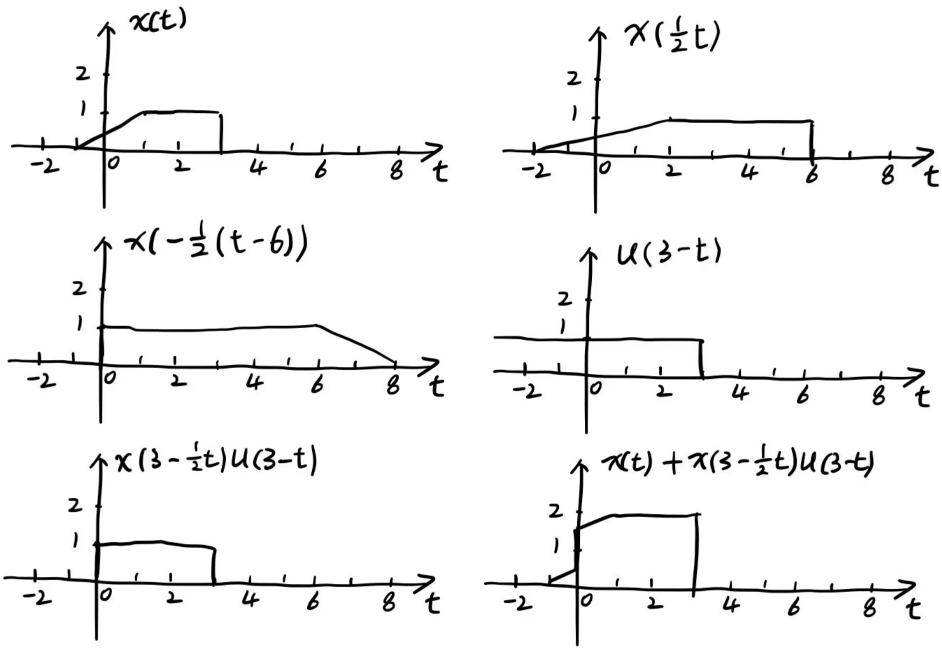
$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(t+1), & t\in[-1,1]\\ 1, & t\in[1,3]\\ 0, & other\end{cases}$$

(1) 求 $x(t)+x(3-\dfrac{1}{2}t)u(3-t)$ 的表达式和图像。

(2) 求 $x'(t)-x''(t)$ 的表达式和图像。（冲激偶函数用 $\delta'(t)$ 表示，其图像为原点向 y 轴正负半轴分别延伸的箭头）

(3) 设 $h(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left[x(t+4n)+x(t-4n)\right]$, $h(t)$ 是否为能量信号或功率信号？请说明理由。

- (1)



最后的图像为右下角所示, 表达式为:

$$x(t)+x(3-\frac{1}{2}t)u(3-t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t+1), & t\in[-1,0]\\ \frac{1}{2}(t+3), & t\in[0,1]\\ 2, & t\in[1,3]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- (2)

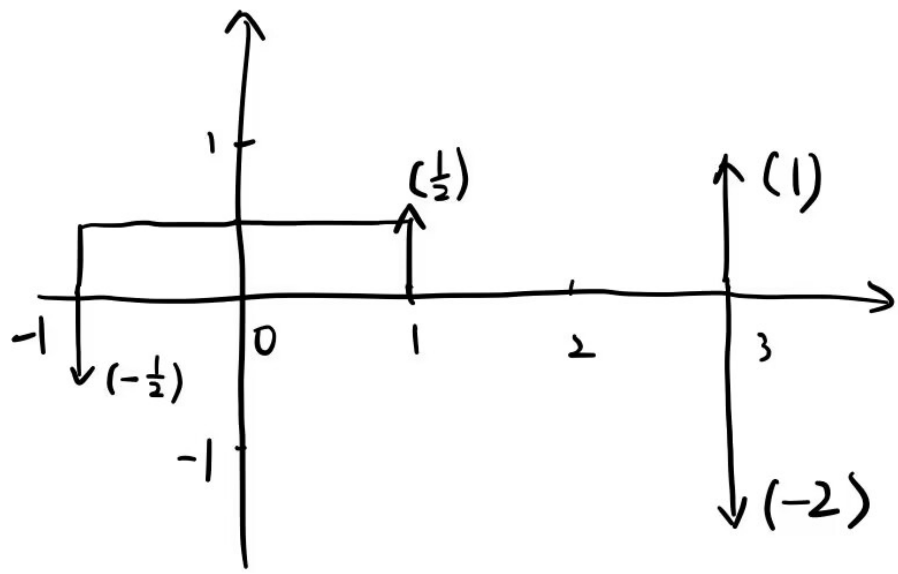
$x'(t) = -\delta(t-3) + y(t)$, 其中 $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [-1,1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$x''(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) - \frac{1}{2}\delta(t-1) - \delta'(t-3)$

因此有

$x'(t) - x''(t) = y(t) - \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1) - \delta(t-3) + \delta'(t-3)$

图像为:



- (3)

由于 $x(t)$ 只在 $t \in [-1,3]$ 处有正值, 其他情况下 $x(t) = 0$, 因此有 $x(t), x(t+4n), x(t-4n), n = 1, 2, \cdots, \infty$ 互不冲突, 即任取 $t \in (-\infty, \infty)$ 都仅有其中一个函数值非零.

展开 $h(t)$ 即可得

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}[x(t+4n) + x(t-4n)] \\ &= 2x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}[x(t+4n) + x(t-4n)] \\ &= \begin{cases} t+1, & t \in [-1,1] \\ 2, & t \in [1,3] \\ \frac{1}{2^{n+1}}[(t \mp 4n) + 1], & t \in [-1 \pm 4n, 1 \pm 4n], n = 1, 2, \cdots, \infty \\ \frac{1}{2^n}, & t \in [1 \pm 4n, 3 \pm 4n], n = 1, 2, \cdots, \infty \end{cases} \end{aligned}$$

能量:

$$
\begin{aligned}
W &= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|h(t)|^2\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1}(t+1)^2\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}2^2\mathrm{d}t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1+4n}^{1+4n}(\frac{1}{2^{n+1}}[(t-4n)+1])^2\mathrm{d}t \\
&\quad + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1+4n}^{3+4n}(\frac{1}{2^n})^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{8}{3}+8+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}(\frac{t+1}{2^{n+1}})^2\mathrm{d}t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1}^{3}(\frac{1}{2^n})^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{8}{3}+8+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}\cdot\frac{8}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot 2 \\
&= \frac{8}{3}+8+\frac{4}{9}+\frac{4}{3} \\
&= \frac{112}{9}
\end{aligned}
$$

功率: $P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}W=0$

因此可知 $h(t)$ 是能量信号.

3 [28pts] 卷积的计算

计算下列各小题的结果：

(1) 设

$$x(t)=\begin{cases}2t+1, & t\in[-1,1]\\ 3, & t\in[1,3]\\ 0, & other\end{cases}$$

试求 $x(t)*x(t)$ 的结果。

(2) 求 $y(t)=[2e^{-2(t-1)}u(t-2)]*[3e^{-3(t+1)}u(t-1)]$ 的表达式。

(3) 设 $x(n)=\{1,1,4,5,1,4\}$, $y(n)=\{1,9,1,9,8,1\}$, 求 $x(n)*y(n)$.

(4) 设

$$x(n)=\begin{cases}n, & n=1,2,...k\\ 0, & other\end{cases}$$

试求 $x(n)*x(n)$ 的结果。

- (1)

  当 $t<-2$ 时, 有 $x(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=0$

  当 $-2\le t<0$ 时,

  $$\begin{aligned}x(t)*x(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-1}^{t+1}(2\tau+1)(2(t-\tau)+1)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-1}^{t+1}(-4\tau^2+4t\tau+2t+1)\mathrm{d}\tau\\&=(-\frac{4}{3}\tau^3+2t\tau^2+(2t+1)\tau)|_{-1}^{t+1}\\&=(-\frac{4}{3}(t+1)^3+2t(t+1)^2+(2t+1)(t+1))\\&\quad-(-\frac{4}{3}(-1)^3+2t(-1)^2+(2t+1)(-1))\\&=\frac{2t^3}{3}+2t^2+t-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

  当 $0\le t<2$ 时,

$$
\begin{aligned}
x(t)*x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-1}^{t-1}(2\tau+1)\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{1}(2\tau+1)(2(t-\tau)+1)\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \int_{1}^{t+1}(2(t-\tau)+1)\mathrm{d}\tau \\
&= (\tau^2+\tau)|_{-1}^{t-1} + (-\frac{4}{3}\tau^3 + 2t\tau^2 + (2t+1)\tau)|_{t-1}^{1} \\
&\quad + (-\tau^2 + (2t+1)\tau)|_{1}^{t+1} \\
&= t(t-1) + (-\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 7t - \frac{2}{3}) + t(t-1) \\
&= -\frac{2t^3}{3} + 5t - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

当 $2 \le t < 4$ 时,

$$
\begin{aligned}
x(t)*x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t-3}^{1}(2\tau+1)\mathrm{d}\tau + \int_{1}^{t-1} 1\mathrm{d}\tau + \int_{t-1}^{3}(2(t-\tau)+1)\mathrm{d}\tau \\
&= (\tau^2+\tau)|_{t-3}^{1} + \tau|_{1}^{t-1} + (-\tau^2 + (2t+1)\tau)|_{t-1}^{3} \\
&= -2t^2 + 11t - 10
\end{aligned}
$$

当 $4 \le t < 6$ 时,

$$
\begin{aligned}
x(t)*x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t-3}^{3} 1\mathrm{d}\tau \\
&= 6-t
\end{aligned}
$$

当 $t \ge 6$ 时, $x(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 0$

因此我们有

$$
x(t)*x(t) = \begin{cases}
0, & t < -2 \\
\frac{2t^3}{3} + 2t^2 + t - \frac{2}{3}, & 0 \le t < 2 \\
-2t^2 + 11t - 10, & 2 \le t < 4 \\
6-t, & 4 \le t < 6 \\
0, & t \ge 6
\end{cases}
$$

- (2)

  当 $t < 3$ 时, $y(t) = 0$

  当 $t \ge 3$ 时,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= [2e^{-2(t-1)}u(t-2)] * [3e^{-3(t+1)}u(t-1)] \\
&= \int_{2}^{t-1} [2e^{-2(\tau-1)}] \cdot [3e^{-3(t-\tau+1)}] \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{2}^{t-1} 6e^{\tau-3t-1} \mathrm{d}\tau \\
&= 6e^{\tau-3t-1}|_{2}^{t-1} \\
&= 6e^{-2t-2} - 6e^{1-3t}
\end{aligned}
$$

因此有

$$
y(t) = \begin{cases} 6e^{-2t-2} - 6e^{1-3t}, & t \geq 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases}
$$

- (3)

  当 $n=0$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 = 1$

  当 $n=1$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 9 + 1 \times 1 = 10$

  当 $n=2$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 1 \times 9 + 4 \times 1 = 14$

  当 $n=3$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 9 + 1 \times 1 + 4 \times 9 + 5 \times 1 = 51$

  当 $n=4$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 8 + 1 \times 9 + 4 \times 1 + 5 \times 9 + 1 \times 1 = 67$

  当 $n=5$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 1 \times 8 + 4 \times 9 + 5 \times 1 + 1 \times 9 + 4 \times 1 = 63$

  当 $n=6$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 4 \times 8 + 5 \times 9 + 1 \times 1 + 4 \times 9 = 115$

  当 $n=7$ 时, $x(n) * y(n) = 4 \times 1 + 5 \times 8 + 1 \times 9 + 4 \times 1 = 57$

  当 $n=8$ 时, $x(n) * y(n) = 5 \times 1 + 1 \times 8 + 4 \times 9 = 49$

  当 $n=9$ 时, $x(n) * y(n) = 1 \times 1 + 4 \times 8 = 33$

  当 $n=10$ 时, $x(n) * y(n) = 4 \times 1 = 4$

  因此有 $x(n) * y(n) = \{1, 10, 14, 51, 67, 63, 115, 57, 49, 33, 4\}$

- (4)

  $x(n)$ 也可以改写为

  $$
  x(n) = \begin{cases} n, & n = 0, 1, 2, \cdots, k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
  $$

  当 $0 \leq n \leq k$ 时,

  $$
  x(n) * x(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i)x(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i(n-i) = \frac{1}{6}n(n^2-1)
  $$

  当 $k+1 \leq n \leq 2k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
x(n) * x(n) &= \sum_{i=n-k}^{k} x(i)x(n-i) \\
&= \sum_{i=n-k}^{k} i(n-i) \\
&= n\sum_{i=n-k}^{k} i - \sum_{i=n-k}^{k} i^2 \\
&= n \cdot \frac{n(2k-n+1)}{2} - (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})|_{n-k-1}^{k} \\
&= -\frac{1}{6}(2k-n+1)(2k^2-2kn+2k-n^2-n)
\end{aligned}
$$

因此可得

$$
x(n) * x(n) = \begin{cases} \frac{1}{6}n(n^2-1), & 0 \leq n \leq k \\ -\frac{1}{6}(2k-n+1)(2k^2-2kn+2k-n^2-n), & k+1 \leq n \leq 2k+1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

此处的 $x(n) * x(n)$ 依然是从 0 开始的, 而非从 1 开始的.

4 [30pts] 系统微分方程的求解

求解以下微分方程：

(1) $y^{(2)}(t)+7y^{(1)}(t)+12y(t)=2\sin(2t)\ (t\geqslant 0)$, 边界条件 $y(0)=0, y^{(1)}(0)=1$.

(2) $y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{16}y(n-3)=x(n)-x(n-1)\ (n\geqslant 0)$，其中 $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, 边界条件 $y(0)=y(1)=0, y(2)=1$。

- (1)

  求齐次解, 特征方程为

  $\alpha^2+7\alpha+12=(\alpha+3)(\alpha+4)=0$

  齐次解为 $y_h(t)=A_1e^{-3t}+A_2e^{-4t}$

  求特解, 设特解形式为 $y_p(t)=B_1\cos(2t)+B_2\sin(2t)$

  带入可得

  $$\begin{aligned}&y_p^{(2)}(t)+7y_p^{(1)}(t)+12y_p(t)\\=&-4B_1\cos(2t)-4B_2\sin(2t)-14B_1\sin(2t)+14B_2\cos(2t)\\&+12B_1\cos(2t)+12B_2\sin(2t)\\=&(8B_1+14B_2)\cos(2t)+(-14B_1+8B_2)\sin(2t)\\=&2\sin(2t)\end{aligned}$$

  因此有 $\begin{cases}8B_1+14B_2=0\\-14B_1+8B_2=2\end{cases}$ 即有 $\begin{cases}B_1=-\frac{7}{65}\\B_2=\frac{4}{65}\end{cases}$

  因此我们有

  $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=A_1e^{-3t}+A_2e^{-4t}-\frac{7}{65}\cos(2t)+\frac{4}{65}\sin(2t)$

  根据初始条件有

  $$\begin{cases}y(0)=A_1+A_2-\dfrac{7}{65}=0\\y^{(1)}(0)=-3A_1-4A_2+\dfrac{8}{65}=1\end{cases}$$

  解得 $A_1=\frac{17}{13}, A_2=-\frac{6}{5}$

  因此有 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=\frac{17}{13}e^{-3t}+-\frac{6}{5}e^{-4t}-\frac{7}{65}\cos(2t)+\frac{4}{65}\sin(2t)$

- (2)

  求齐次解, 特征方程为 $\alpha^3-\frac{3}{4}\alpha^2+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}(4\alpha+1)(2\alpha-1)^2=0$

特征根为 $\alpha_1 = -\frac{1}{4}, \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$

齐次解为 $y_h(n) = A_1(-\frac{1}{4})^n + (A_2 + A_3 n)(\frac{1}{2})^n$

设特解为 $y_p(n) = C(\frac{1}{3})^n$

带入可得

$$\begin{aligned}
&y_p(n) - \frac{3}{4}y_p(n-1) + \frac{1}{16}y_p(n-3) \\
&= C(\frac{1}{3})^n - \frac{3}{4}C(\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{1}{16}C(\frac{1}{3})^{n-3} \\
&= \frac{7}{16}C(\frac{1}{3})^n \\
&= x(n) - x(n-1) \\
&= (\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{3})^{n-1} \\
&= -2 \cdot (\frac{1}{3})^n
\end{aligned}$$

因此可得 $C = -2 \times \frac{16}{7} = -\frac{32}{7}$

特解为: $y_p(n) = -\frac{32}{7} \cdot (\frac{1}{3})^n$

因此我们有

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = A_1(-\frac{1}{4})^n + (A_2 + A_3 n)(\frac{1}{2})^n - \frac{32}{7} \cdot (\frac{1}{3})^n$$

我们带入初始条件得

$$\begin{cases}
y(0) = A_1 + A_2 - \frac{32}{7} = 0 \\
y(1) = -\frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{2} - \frac{32}{21} = 0 \\
y(2) = \frac{A_1}{16} + \frac{A_2}{4} + \frac{A_3}{2} - \frac{32}{63} = 1
\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}
A_1 = \frac{1136}{567} \\
A_2 = \frac{208}{81} \\
A_3 = \frac{40}{27}
\end{cases}$$

因此有

$$y(n) = \frac{1136}{567}(-\frac{1}{4})^n + (\frac{208}{81} + \frac{40}{27}n)(\frac{1}{2})^n - \frac{32}{7} \cdot (\frac{1}{3})^n$$