

# 第六章：控制系统的稳定性

2022年11月4日

# 内容安排

6.1

稳定性的基本概念

6.2

线性系统稳定的充分必要条件

6.3

劳斯-赫尔维茨稳定性判据

6.4

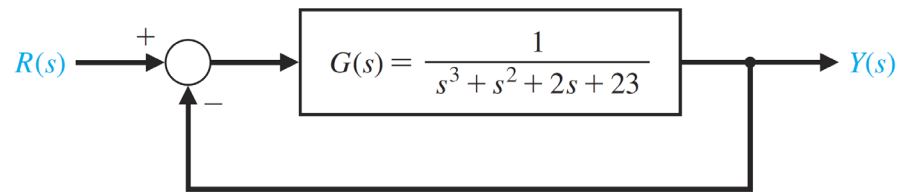
劳斯-赫尔维茨稳定性判据的应用

6.5

**MATLAB在稳定性分析中的应用**

# 验证基于劳斯判定表的结果

考虑右图所示的闭环控制系统，其闭环传递函数为：



$$T(s) = Y(s)/R(s) = 1/(s^3 + s^2 + 2s + 24)$$

特征方程为：  $q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0$

$s^3$	1	2	
$s^2$	1	24	
$s^1$	-22	0	
$s^0$	24	0	

1st sign change

2nd sign change

劳斯判定表

```
>>numg=[1]; deng=[1 1 2 23]; sysg=tf(numg,deng);  
>>sys=feedback(sysg,[1]);  
>>pole(sys)
```

ans =

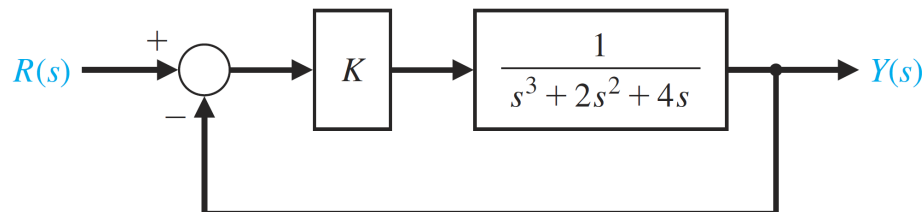
```
-3.0000  
1.0000 + 2.6458i  
1.0000 - 2.6458i
```

Unstable poles

利用函数 **pole** 求解得到系统的闭环极点

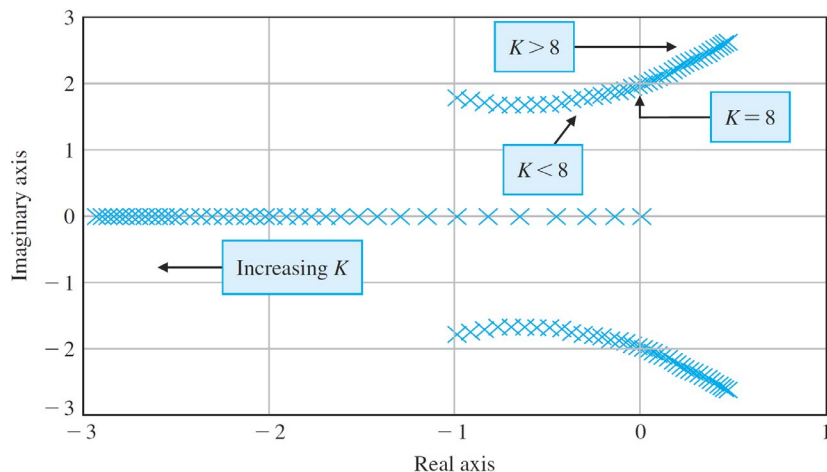
如果特征方程中包含一个可变参数，那么可利用劳斯-赫尔维茨稳定性判据，确定使系统保持稳定的参数取值范围

考虑右图所示的闭环控制系统，其闭环传递函数为：



$$T(s) = Y(s)/R(s) = K/(s^3 + 2s^2 + 4s + 4)$$

特征方程为：  $q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0$

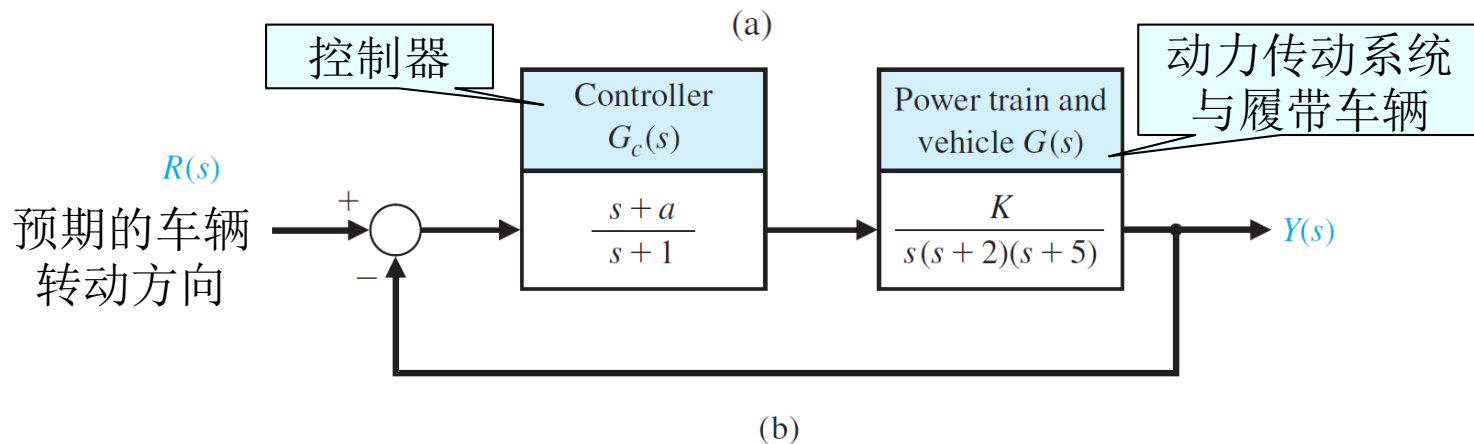
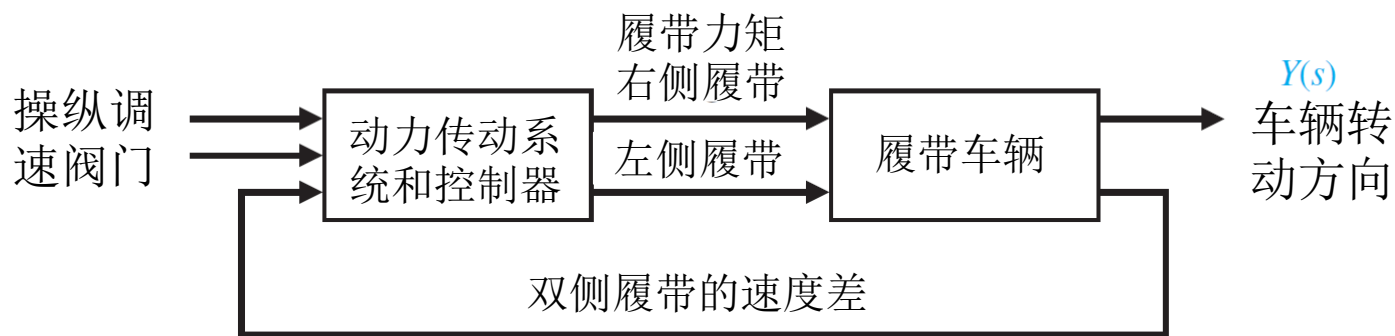


```
% This script computes the roots of the characteristic
% equation q(s) = s^3 + 2 s^2 + 4 s + K for 0<K<20
%
K=[0:0.5:20];
for i=1:length(K)
    q=[1 2 4 K(i)];
    p(:,i)=roots(q);
end
plot(real(p),imag(p),'x'), grid
xlabel('Real axis'), ylabel('Imaginary axis')
```

Loop for roots as a function of K

当  $0 \leq K \leq 20$  时，方程  $q(s) = s^3 + s^2 + 4s + K = 0$  的根的运动轨迹

**例6.10** 履带车辆的转向控制系统涉及两个参数的选择问题。图(a)给出了双侧履带车辆转向控制系统的结构图，对应的框图模型如图(b)所示。两侧的履带以不同的速度运行，从而实现车辆的转向。本例的设计目标是参数 $K$ 和 $a$ 选择合适的取值，使系统稳定，并使系统对斜坡输入的稳态误差小于输入信号斜率的24%。



转向控制反馈系统的特征方程为

$$1 + G_c G(s) = 0$$



$$1 + \frac{K(s + a)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 5)} = 0$$

整理后，可以得到

$$s(s + 1)(s + 2)(s + 5) + K(s + a) = 0$$

展开后，有

$$s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + Ka = 0$$

为了确定参数 $K$ 和 $a$ 的取值范围，以使系统保持稳定，构建劳斯判定表如下：

$s^4$	1	17	$Ka$
$s^3$	8	$K + 10$	0
$s^2$	$b_3$	$Ka$	
$s^1$	$c_3$		
$s^0$	$Ka$		

其中，

$$b_3 = \frac{126 - K}{8}$$

$$c_3 = \frac{b_3(K + 10) - 8Ka}{b_3}$$

由劳斯-赫尔维茨稳定性判据可知，首列元素必须全部为同号，因此 $ka$ 、 $b_3$ 和 $c_3$ 都应为正数，故有

$$K < 126$$

$$Ka > 0$$

$$(K + 10)(126 - K) - 64Ka > 0$$

由于增益  $K > 0$ ，因此可将  $K$  和  $a$  的取值范围初步限定为  $0 < K < 126$  和  $a > 0$

利用 **Matlab**，针对  $K$  的不同取值，分别计算能够保证系统稳定的  $a$  的取值

履带车辆转向控制系统中的  $a - K$  稳定域

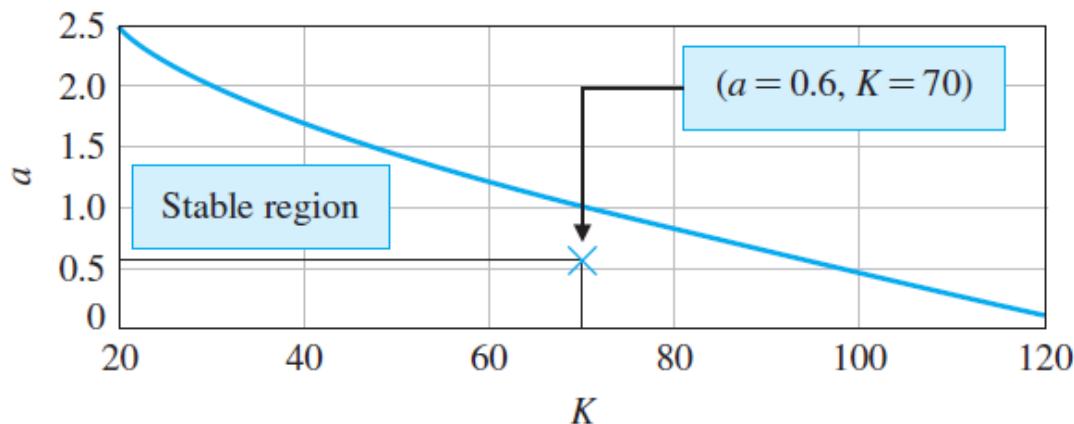
```
% The a-K stability region for the two track vehicle
% control problem
%
a=[0.1:0.01:3.0]; K=[20:1:120];
x=0*K; y=0*K;
n=length(K); m=length(a);
for i=1:n
    for j=1:m
        q=[1, 8, 17, K(i)+10, K(i)*a(j)];
        p=roots(q);
        if max(real(p)) > 0, x(i)=K(i); y(i)=a(j-1); break; end
    end
end
plot(x,y), grid, xlabel('K'), ylabel('a')
```

Range of  $a$  and  $K$ .

Initialize plot vectors as zero vectors of appropriate lengths.

Characteristic polynomial.

For a given value of  $K$ , determine first value of  $a$  for instability.





系统对斜坡输入信号  $r(t) = At, t > 0$  的稳态误差为

$$e_{ss} = A/K_v$$

其中,  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c G = Ka/10$

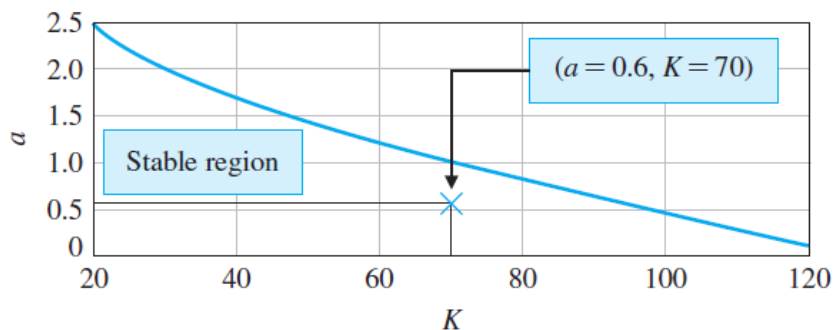
于是, 系统的稳态误差为  $e_{ss} = \frac{10A}{Ka}$

稳态误差的设计要求为  $e_{ss} < 0.24A$ , 因此有

$$\frac{10A}{aK} < 0.24A$$

$$aK > 41.67$$

取  $K = 70$  和  $a = 0.6$  就满足了设计要求

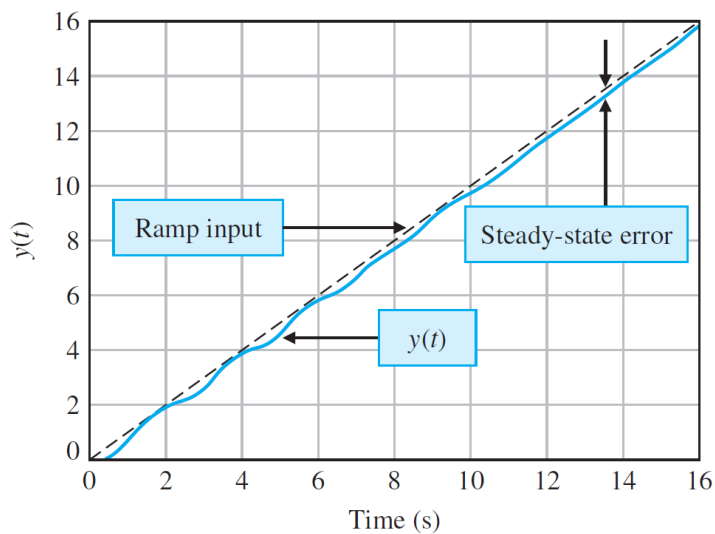


闭环传递函数为

$$T(s) = \frac{70s + 42}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 80s + 42}$$

系统的闭环极点

$$\begin{aligned} s &= -7.0767 & s &= -0.1726 + 3.1995i \\ s &= -0.5781 & s &= -0.1726 - 3.1995i \end{aligned}$$



% Two-track vehicle turning control ramp response

% with  $a=0.6$  and  $K=70$ .

%

$t=[0:0.01:16]; u=t;$

$u = \text{unit ramp input}$

$\text{numgc}=[1 \ 0.6]; \text{dengc}=[1 \ 1]; \text{sysgc}=\text{tf}(\text{numgc},\text{dengc});$

$\text{numg}=[70]; \text{deng}=[1 \ 7 \ 10 \ 0]; \text{sysg}=\text{tf}(\text{numg},\text{deng});$

$\text{sysa}=\text{series}(\text{sysgc},\text{sysg});$

$\text{sys}=\text{feedback}(\text{sysa},[1]);$

$y=\text{lsim}(\text{sys},u,t);$

Linear simulation

$\text{plot}(t,y,t,u,'-'), \text{grid}$

$\text{xlabel}('Time (s)'), \text{ylabel}('y(t)')$

$a = 0.6$  and  $K = 70$

$K = 70$ 和 $a = 0.6$ 时，系统的斜坡响应

## 小结

稳定性是系统的固有属性。

充要条件：所有极点位于 $s$ 平面的左半平面。

劳斯-赫尔维茨稳定性判据可以判定系统稳定性。

劳斯-赫尔维茨稳定性判据也可以用于控制系统的初步参数设计。

性能分析  
与评价



性能调节与改进：  
调参数，调结构等等

控制工程的循环主题

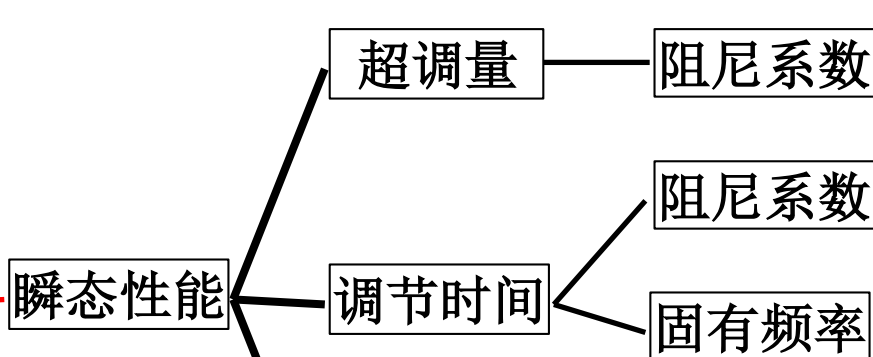
工程目标：性能可接受的控制系统

稳，快，准！

# 二阶系统性能



$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$



$$P.O. = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100\%$$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} (2\%)$$

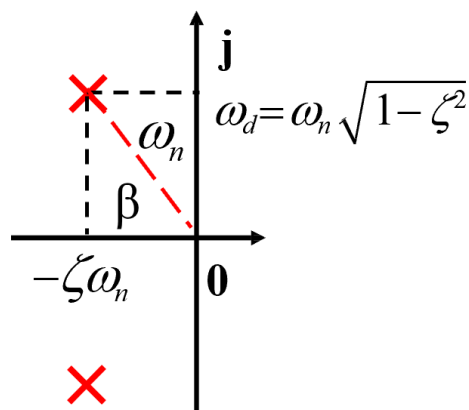
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$



# 极点位置与瞬态响应特性的关系

以欠阻尼二阶系统为例

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



$(\zeta, \omega_n)$



极点位置

性能要求

$$P.O. = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100\%$$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} (2\%)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\beta = \arccos \zeta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

单位阶跃的时域响应函数:  $y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$

集中体现!

# 作业6-1

E6.1 某系统的特征方程为  $s^3 + Ks^2 + (1 + K)s + 6 = 0$ ，试确定  $K$  的取值范围，以便保证该系统稳定。

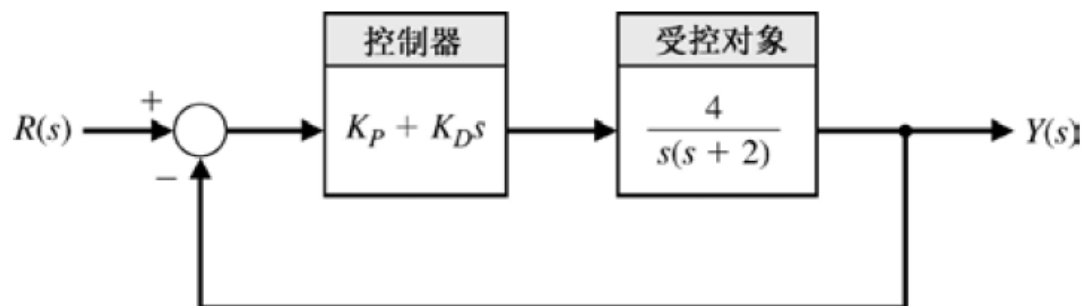
## 作业6-2

E6.3 某系统的特征方程为  $s^4 + 10s^3 + 32s^2 + 37s + 20 = 0$ ，试利用劳斯-赫尔维茨稳定性判据确定该系统是否稳定。



## 作业6-3

E6. 13 考虑图 E6. 13 所示的反馈系统，试确定参数  $K_P$  和  $K_D$  的取值范围，使得闭环系统稳定。



E6. 13 带有比例积分控制器  $G_c(s) = K_P + K_D s$  的闭环系统

## 作业6-4

E6. 25 考虑图 E6. 25 所示的闭环反馈系统，试确定参数  $K$  和  $p$  的取值范围，以便保证闭环系统稳定。

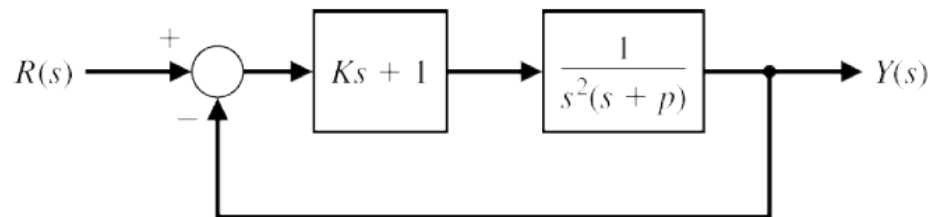


图 E6. 25 闭环系统，参数  $K$  和  $p$  可调

## 作业6-5

E6. 26 考虑图 E6. 26 所示的闭环系统，其中受控对象  $G(s)$  和控制器  $G_c(s)$  分别为

$$G(s) = \frac{10}{s - 10} , \quad G_c(s) = \frac{1}{2s + K}$$

- (a) 试求闭环系统的特征方程。  
(b) 试确定  $K$  的取值范围，以便保证闭环系统稳定。

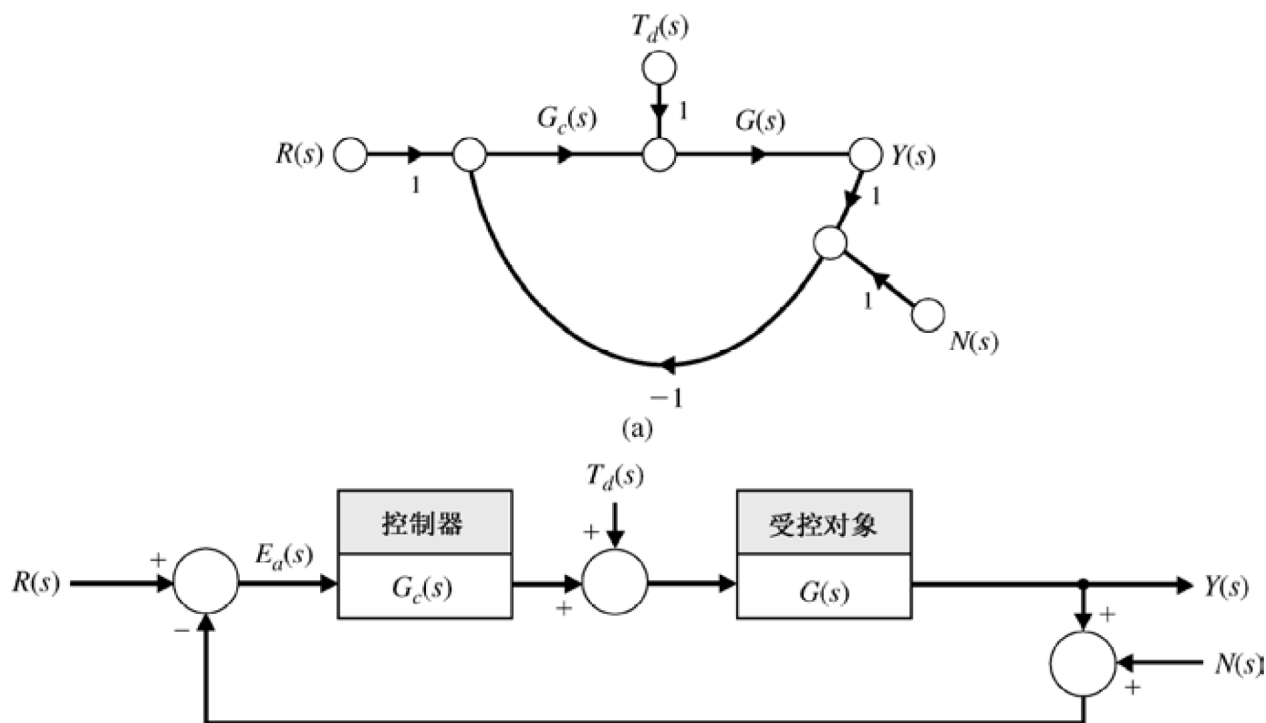


图 E6. 26 闭环反馈控制系统，参数  $K$  可调

# 编程作业6-1

CP6.4 某系统的闭环传递函数为

$$T(s) = \frac{1}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 2}$$

- (a) 利用劳斯-赫尔维茨稳定性判据, 判断系统是否稳定。如果不稳定, 则指出闭环系统在  $s$  右半平面上极点的个数。
- (b) 利用计算机辅助软件求解  $T(s)$  的极点, 并据此验证(a)的结果。
- (c) 绘制系统的单位阶跃响应曲线, 并讨论所得到的结果。

## 编程作业6-2

**CP6.5** 在飞机控制系统的设计和分析过程中，我们常用“虚拟(纸)飞行员”模型对飞行员进行建模。飞机和飞行员构成的回路如图 CP6.5 所示，其中变量 $\tau$ 表示飞行员的时延， $\tau=0.6$  意味着飞行员的反应较慢，而 $\tau=0.1$  则意味着飞行员的反应较快。飞行员模型的其他参数分别为  $K=1$ ， $\tau_1=2$  和  $\tau_2=0.5$ 。编写 m 脚本程序，分别针对反应较快和反应较慢的飞行员，计算闭环系统的极点，并讨论所得到的结果。另外，为了保证系统稳定，试分析飞行员的最大允许时延。

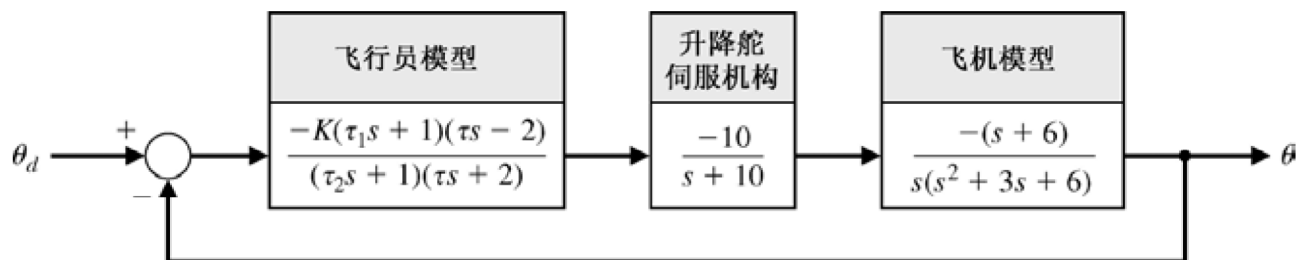


图 CP6.5 飞行员在回路中的飞机控制系统

# 编程作业6-3

CP6.6 考虑图 CP6.6 所示的反馈控制系统，

- (a) 编写 m 脚本程序，调用函数 `for`，当  $0 \leq K \leq 5$  时，计算闭环系统传递函数的极点，并绘制极点随  $K$  变化的运动轨迹。注意：采用“ $\times$ ”表示  $s$  平面上的极点。
- (b) 利用劳斯-赫尔维茨稳定性判据，确定  $K$  的取值范围，以便保证系统稳定。
- (c) 当  $K$  在(b)所得的取值范围中取最小值时，求系统特征方程的根。

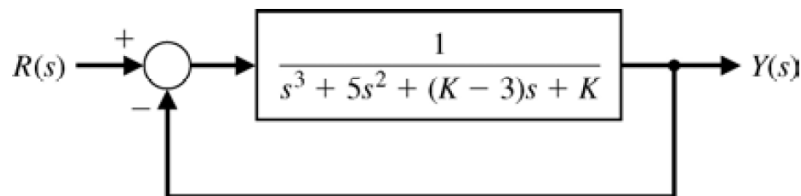


图 CP6.6 单环反馈控制系统，参数  $K$  可调

## 编程作业6-4

CP6.8 考虑图 CP6.8 所示的反馈系统，

- (a) 利用劳斯-赫尔维茨稳定性判据，确定  $K_1$  的取值范围，以便保证系统稳定。
- (b) 编写 m 脚本程序，当  $0 < K_1 < 30$  时，绘制闭环系统极点在  $s$  平面上的运动轨迹并讨论所得结果。

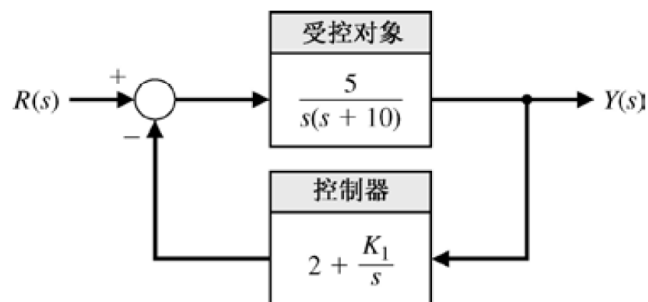


图 CP6.8 非单位反馈系统，参数  $K_1$  可调

交第一次编程作业（第2、5、6章）的截止时间为：

**2022年11月18日**

