数字信号处理
作业三

方盛俊 201300035

2022 年 12 月 5 日

作业提交注意事项

(1) 本次作业提交截止时间为 **2022/12/07 23:59:59**，截止时间后不再接收作业，本次作业记零分；

(2) 作业提交方式：使用此 LaTeX 模板书写解答，只需提交编译生成的 pdf 文件，将 pdf 文件以 sftp 方式上传，账号为 dsp2022，密码为 12345asd!@。请远程连接 sftp://www.lamda.nju.edu.cn，提交到 /D:/courses/DSP2022/HW/HW3 路径下。

(3) 文件命名方式：学号-姓名-作业号-v 版本号, 例 MG1900000-张三-3-v1；如果需要更改已提交的解答，请在截止时间之前提交新版本的解答，并将版本号加一；

(4) 未按照要求提交作业，或 pdf 命名方式不正确，将会被扣除部分作业分数。

1 [30pts] 信号的抽样

1. 有一理想抽样系统, 抽样频率为 $\Omega_s = 6\pi$, 抽样后经理想低通滤波器 $H_a(j\Omega)$ 还原, 其中

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\Omega| < 3\pi \\ 0, & |\Omega| \geqslant 3\pi \end{cases}$$

现有两个输入 $x_{a_1}(t) = \cos 2\pi t$, $x_{a_2}(t) = \cos 5\pi t$. 问输出信号 $y_{a_1}(t), y_{a_2}(t)$ 有无失真? 为什么?

2. 已知实信号 $x(t)$ 的奈奎斯特频率为 ω_0, 试计算对下列各信号抽样不混叠的最小抽样频率.

(1) $x(t) + x(t - t_0)$

(2) $x'(t)$

(3) $x^2(t)$

(4) $x(t)\cos\omega_0 t$

- 1.

(1)

由于 $x_{a_1} = \cos 2\pi t$ 的傅里叶变换为 $X_{a_1} = \pi\delta(\Omega - 2\pi) + \pi\delta(\Omega + 2\pi)$

即有 $x_{a_1} = \cos 2\pi t$ 的最高频率为 $\Omega_m = 2\pi$

由 $\Omega_s = 6\pi > 2\Omega_m = 4\pi$ 与采样定理可知没有发生混叠, 选用适当的低通滤波器可以恢复.

因此抽样后傅里叶变换为 $\dfrac{\Omega_s}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} X_{a_1}(j(\Omega - n\Omega_s)) = 3\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} X_{a_1}(j(\Omega - n\Omega_s))$

经过低通滤波器 $H_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\Omega| < 3\pi \\ 0, & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$

可得 $Y_{a_1}(j\Omega) = \dfrac{3}{2}X_{a_1}(j\Omega)$, 在相位谱上没有发生失真, 但是在幅度谱上发生了失真, 因此 $y_{a_1}(t)$ 部分失真.

(2)

由于 $x_{a_2} = \cos 2\pi t$ 的傅里叶变换为 $X_{a_2} = \pi\delta(\Omega - 5\pi) + \pi\delta(\Omega + 5\pi)$

即有 $x_{a_2} = \cos 5\pi t$ 的最高频率为 $\Omega_m = 5\pi$

由 $\Omega_s = 6\pi < 2\Omega_m = 10\pi$ 与采样定理可知发生了混叠, 因此 $y_{a_2}(t)$ 失真.

- 2.

(1)

由线性特性和时移特性可得

$\mathcal{F}[x(t)+x(t-t_0)] = X(j\omega) + X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

因此可以看出最小抽样频率依然为 ω_0.

(2)

由时域微分特性可得

$\mathcal{F}[x'(t)] = j\omega X(j\omega)$

因此可以看出最小抽样频率依然为 ω_0.

(3)

由频域卷积特性可得

$\mathcal{F}[x^2(t)] = \dfrac{1}{2\pi}[X(j\omega) * X(j\omega)] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)X(j(\omega-\Omega))\mathrm{d}\Omega$

当 $-\omega_0 \le \omega \le \omega_0$ 时, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)X(j(\omega-\Omega))\mathrm{d}\Omega$ 存在不为零的可能性.

因此最小抽样频率为 $2\omega_0$.

(4)

由频域卷积特性可得

$\mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t] = \dfrac{1}{2}[X(j(\omega+\omega_0)) + X(j(\omega-\omega_0))]$

因此最小抽样频率为 $3\omega_0$.

2 [10pts] DFS

求周期为 6 的序列 $x(n)=\{\cdots,14,12,10,8,6,10,\cdots\}$ 的傅里叶级数的系数.

- 由 $\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_N[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ 可得

$$\tilde{X}[k]=14\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 0\cdot k}+12\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot k}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot k}+8\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot k}$$
$$+6\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot k}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 5\cdot k}$$

即有

$$\begin{aligned}\tilde{X}[0]&=14\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 0\cdot 0}+12\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot 0}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 0}+8\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot 0}\\&\quad+6\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 0}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 5\cdot 0}\\&=60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}[1]&=14\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 0\cdot 1}+12\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot 1}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 1}+8\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot 1}\\&\quad+6\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 1}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 5\cdot 1}\\&=14+12(\cos\frac{\pi}{3}-j\sin\frac{\pi}{3})+10(\cos\frac{2\pi}{3}-j\sin\frac{2\pi}{3})+8\cos\pi\\&\quad+6(\cos\frac{4\pi}{3}-j\sin\frac{4\pi}{3})+10(\cos\frac{5\pi}{3}-j\sin\frac{5\pi}{3})\\&=9-j3\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}[2]&=14\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 0\cdot 2}+12\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot 2}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 2}+8\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot 2}\\&\quad+6\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 2}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 5\cdot 2}\\&=14+12(\cos\frac{2\pi}{3}-j\sin\frac{2\pi}{3})+10(\cos\frac{4\pi}{3}-j\sin\frac{4\pi}{3})+8\cos 2\pi\\&\quad+6(\cos\frac{8\pi}{3}-j\sin\frac{8\pi}{3})+10(\cos\frac{10\pi}{3}-j\sin\frac{10\pi}{3})\\&=3+j\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}[3]&=14\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 0\cdot 3}+12\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot 3}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 3}+8\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot 3}\\&\quad+6\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 3}+10\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 5\cdot 3}\\&=14+12(\cos\frac{3\pi}{3}-j\sin\frac{3\pi}{3})+10(\cos\frac{6\pi}{3}-j\sin\frac{6\pi}{3})+8\cos 3\pi\\&\quad+6(\cos\frac{12\pi}{3}-j\sin\frac{12\pi}{3})+10(\cos\frac{15\pi}{3}-j\sin\frac{15\pi}{3})\\&=0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}[4] &= 14 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 0\cdot 4} + 12 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot 4} + 10 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 4} + 8 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot 4} \\
&\quad + 6 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 4} + 10 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 5\cdot 4} \\
&= 14 + 12(\cos\frac{4\pi}{3} - j\sin\frac{4\pi}{3}) + 10(\cos\frac{8\pi}{3} - j\sin\frac{8\pi}{3}) + 8\cos 4\pi \\
&\quad + 6(\cos\frac{16\pi}{3} - j\sin\frac{16\pi}{3}) + 10(\cos\frac{20\pi}{3} - j\sin\frac{20\pi}{3}) \\
&= 3 - j\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}[5] &= 14 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 0\cdot 5} + 12 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot 5} + 10 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 5} + 8 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 3\cdot 5} \\
&\quad + 6 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 1} + 10 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 5\cdot 1} \\
&= 14 + 12(\cos\frac{5\pi}{3} - j\sin\frac{5\pi}{3}) + 10(\cos\frac{10\pi}{3} - j\sin\frac{10\pi}{3}) + 8\cos 5\pi \\
&\quad + 6(\cos\frac{20\pi}{3} - j\sin\frac{20\pi}{3}) + 10(\cos\frac{25\pi}{3} - j\sin\frac{25\pi}{3}) \\
&= 9 + j3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

3 [30pts] DTFT 及其逆变换

1. 对以下各序列, 试求其 DTFT.

   (1) $x(n) = (0.6)^n[u(n) - u(n-15)]$

   (2) $x(n) = n(0.8)^n[u(n) - u(n-40)]$

2. $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2j, & 0 < \omega \leqslant \pi \\ -2j, & -\pi < \omega \leqslant 0 \end{cases}$, 求解其逆变换 $x(n)$

- 1.

  (1)

  $$\begin{aligned} \mathrm{DTFT}[x(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{14}(0.6)^n e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{14} e^{(\ln 0.6 - j\omega)n} = \frac{1 - e^{14(\ln 0.6 - j\omega)}}{1 - e^{\ln 0.6 - j\omega}} \end{aligned}$$

  (2)

  由于 $\sum_{n=0}^{N} na^n = \frac{a(-(N+1)a^N + Na^{N+1} + 1)}{(a-1)^2}, a \neq 1$ 我们有

  $$\begin{aligned} \mathrm{DTFT}[x(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{39} n(0.8)^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{39} ne^{(\ln 0.8 - j\omega)n} \\ &= \frac{e^{\ln 0.8 - j\omega}(-40e^{39(\ln 0.8 - j\omega)} + 39e^{40(\ln 0.8 - j\omega)} + 1)}{(e^{\ln 0.8 - j\omega} - 1)^2} \end{aligned}$$

- 2.

  $$\begin{aligned} x(n) &= \mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0} -2je^{j\omega n}\mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\pi} 2je^{j\omega n}\mathrm{d}\omega] \\ &= \frac{1}{2\pi}[-\frac{2}{n}(e^{j\omega n})|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{n}(e^{j\omega n})|_{0}^{\pi}] \\ &= \frac{1}{2\pi}[-\frac{2}{n}(1 - e^{j(-\pi)n}) + \frac{2}{n}(e^{j\pi n} - 1)] \\ &= \frac{1}{\pi n}(e^{j(-\pi n)} + e^{j\pi n} - 2) \end{aligned}$$

4 [30pts] DTFT 和 DFS

已知 $x(n) = \{2, 1, 4, 2, 3\}$

(1) 计算 $X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)]$ 及 $X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)]$.

(2) 将 $x(n)$ 的尾部补零, 得到 $x_0(n) = \{2, 1, 4, 2, 3, 0, 0, 0\}$. 计算 $X_0(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x_0(n)]$ 及 $X_0(k) = \mathrm{DFT}[x_0(n)]$.

(3) 将 (1), (2) 的结果加以比较, 得出相应的结论.

- (1)

  $X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = 2 + e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + 3e^{-j4\omega}$

  $X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = 2 + e^{-j\frac{2}{5}\pi k} + 4e^{-j\frac{4}{5}\pi k} + 2e^{-j\frac{6}{5}\pi k} + 3e^{-j\frac{8}{5}\pi k}$

- (2)

  $X_0(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x_0(n)] = 2 + e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + 3e^{-j4\omega}$

  $X_0(k) = \mathrm{DFT}[x_0(n)] = 2 + e^{-j\frac{\pi}{4}k} + 4e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 2e^{-j\frac{3}{4}\pi k} + 3e^{-j\pi k}$

- (3)

  $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$ 是与采样无关的连续函数, 补零不会改变 DTFT 的频率分量, 即此处的 $X(e^{j\omega}) = X_0(e^{j\omega})$.

  而 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 是其 DTFT $X(e^{j\omega})$ 在一个周期 $[0, 2\pi)$ 的等间距抽样, 我们有 $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, 补零会增大 N, 即采样更为密集了, 因此此处 $X(k) \neq X_0(k)$.