Ch 2-1 条件概率

回顾前一次课

- 整数的有序分解
- 第二类stirling数
- 整数的无序分解

- 条件概率：$P(B|A) = P(AB)/P(A)$
- 乘法公式：$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!\,S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases}1 & n \le m\\ 0 & n > m\end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases}1 & n \le m\\ 0 & n > m\end{cases}$	$p(n,m)$

例

第一个箱子里有n个不同的白球, 第二个箱子里有m个不同的红球, 从第一个箱子任意取走一球，再从第二个箱子里任意取走一球放入第一个箱子，依次进行，直至第一、第二个箱子都为空，求第一个箱子最后一次取走的球是白球的概率

全概率公式

利用条件概率可以将一个复杂事件的概率计算问题进行简化

——**全概率公式** 是概率论中最基本的公式之一

其本质是对加法和乘法事件的综合运用

若随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$满足:

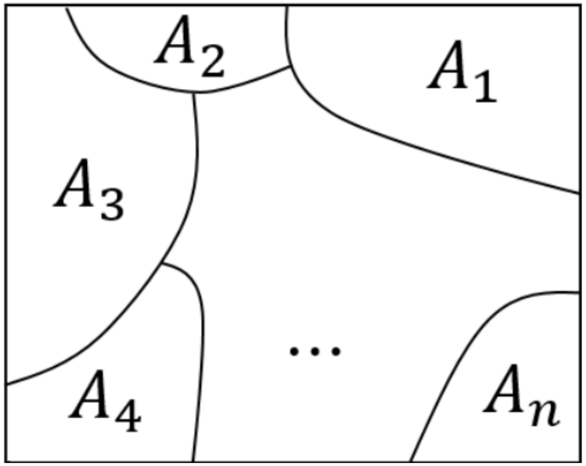
i) 任意两两事件是互不相容性的, 即

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

ii) 完备性 $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$

则称事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$为空间Ω的一个**划分**

样本空间Ω



- 当$n = 2$时有$A_1 = \overline{A_2}$, A_1与A_2互为对立事件
- 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间的一个划分, 则每次试验事件$A_1 \cdots A_n$有且仅有一个事件发生

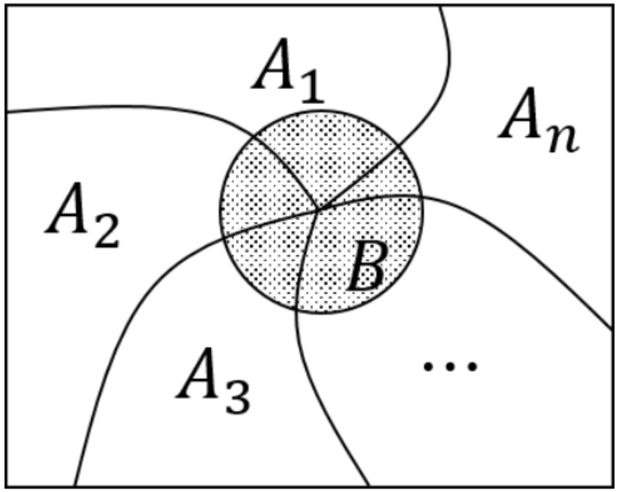
全概率公式

若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个划分, 对任意事件B有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

称之为 **全概率公式** (Law of total probability)

样本空间Ω



可以将事件B看作某一过程的结果, 将A_1, $A_2, \cdots, A_n$看作产生该结果的若干原因:

i) 每一种原因已知, 即$P(A)$ 已知

ii) 每一种原因对结果B的影响已知, 即$P(B|A_k)$ 已知

则$P(B)$可计算

例

同一种型号产品由三家工厂生产, 其生产的市场份额分别为30%, 50%, 20%, 三家工厂的次品率分别为2%, 1%, 1%. 求在这批产品中任取一件是次品的概率

例

随意抛n次硬币, 证明正面朝上的次数是偶数 (或奇数) 的概率为1/2

例

假设有n个箱子, 每个箱子里有30只白球和20只红球, 现从第一个箱子取出一个球放入第二个箱子, 第二个箱子取出一个球放入第三个箱子, 依次类推, 求从最后一个箱子取出一球是红球的概率.

贝叶斯公式

基于全概率公式介绍概率论中另一个重要的公式: 贝叶斯公式

其研究在一种结果已发生的情况下是何种原因导致该结果

贝叶斯公式： 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个划分, 且事件B满足$P(B) > 0$. 对任意$1 \leq i \leq n$有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

直觉解释: 将事件B看作结果, 将$A_1, A_2, \cdots, A_n$看作产生结果的若干种原因, 如果

i) 每一种原因发生的概率$P(A_i)$ 已知;

ii) 每一种原因A_i对结果B的影响已知, 即概率$P(B|A_i)$已知

则可求事件B由第i种原因引起的概率$P(A_i|B)$

贝叶斯公式

$P(A_i)$: 事件A_i的先验(prior)概率, 不考虑事件B的任何因素

$P(B)=\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)P\left(B\middle|A_j\right)$: 证据 (evidence) 的概率

$P(A_i|B)$: 事件A_i在事件B (证据) 发生的后验 (posterior) 概率

$P(B|A_i)$: 似然度 (likelihood)

贝叶斯公式

$$\text{后验概率} = \frac{\text{先验概率} \times \text{似然度}}{\text{证据概率}} = \text{常量} \times \text{似然度}$$

推论与例题

推论：对事件A和B且满足$P(B) > 0$, 有

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

例：设班级中勤奋程度高、中、低的同学各占三分之一，若勤奋程度高、中、低的同学分别考得好成绩的概率是90%, 70%, 50%, 求任意选一个同学考得好成绩的概率，以及任意选择一个考得好的同学是勤奋程度低的概率

例：三门问题

在电视节目中，参赛者看到三扇关闭的门，已知一门后面是汽车，其它两门后面是山羊，选中什么则获得什么．当参赛者选定一扇门未开启，此时节目主持人开启剩下有山羊的一扇门．问题：若参赛者允许重新选择，是否换一扇门?

例

犯人a, b, c均被判为死刑, 法官随机赦免其中一人, 看守知道谁被赦免但不会说. 犯人a问看守: b和c谁会被执行死刑? 看守的策略: i) 若赦免b, 则说c; ii) 若赦免c, 则说b; iii) 若赦免a, 则以1/2的概率说b或c. 看守回答a: 犯人b会被执行死刑. 犯人a兴奋不已, 因为自己生存的概率为1/2. 犯人a将此事告诉犯人c, c同样高兴, 因为他觉得自己的生存几率为2/3. 那么谁错了?