向量

$$A \cdot B = ||A|| \cdot ||B|| \cos \theta$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

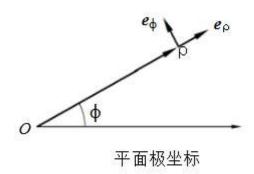
$$(A \times B) \cdot C = (C \times A) \cdot B = (B \times C) \cdot A$$

$$oldsymbol{F}, oldsymbol{v}, oldsymbol{v} = oldsymbol{\omega} imes oldsymbol{r}, oldsymbol{\omega} = oldsymbol{r} imes oldsymbol{F}$$

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[oldsymbol{u}(t)\cdotoldsymbol{v}(t)] = rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}oldsymbol{u}(t)\cdotoldsymbol{v}(t) + oldsymbol{u}(t)\cdotrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}oldsymbol{v}(t)$$

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[oldsymbol{u}(t) imesoldsymbol{v}(t)] = rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}oldsymbol{u}(t) imesoldsymbol{v}(t) + oldsymbol{u}(t) imesrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}oldsymbol{v}(t)$$

极坐标



任意矢量 $A = A_{\rho} \boldsymbol{e}_{\rho} + A_{\phi} \boldsymbol{e}_{\phi}$

位置矢量 $\boldsymbol{\rho}=\rho\boldsymbol{e}_{\rho}$, 分量和端点坐标分别为 $(\rho,0),(\rho,\phi)$, 并不一致

假设有 $\rho = \rho(t), \phi = \phi(t)$

对单位向量的定义如下,分别为径向和横向,本质是对直角坐标做了一个旋转变换

$$egin{aligned} dots oldsymbol{e}_{
ho} &= \cos\phi i + \sin\phi j \ oldsymbol{e}_{\phi} &= -\sin\phi i + \cos\phi j \end{aligned}$$

$$egin{aligned} \therefore rac{\mathrm{d}oldsymbol{e}_{
ho}}{\mathrm{d}t} &= (-\sin\phi i + \cos\phi j)\dot{\phi} = \dot{\phi}oldsymbol{e}_{\phi} \ rac{\mathrm{d}oldsymbol{e}_{
ho}}{\mathrm{d}t} &= (-\cos\phi i - \sin\phi j)\dot{\phi} = -\dot{\phi}oldsymbol{e}_{
ho} \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \boldsymbol{e}_{\rho}) = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_{\rho} + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_{\phi} \quad (常常代表速度)$$
$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^{2})\boldsymbol{e}_{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_{\phi} \quad (常常代表加速度)$$

应用于圆周运动,得

$$egin{aligned} \dot{
ho} &=
ho \dot{oldsymbol{arphi}} oldsymbol{e}_{arphi} \ \ddot{
ho} &= - \dot{oldsymbol{arphi}}^2
ho oldsymbol{e}_{
ho} +
ho \ddot{oldsymbol{arphi}} oldsymbol{e}_{arphi} \end{aligned}$$

角速度大小 $\omega = \dot{\varphi}$

角速度方向使 $e_{\rho}, e_{\varphi}, \omega$ 三者满足右手螺旋关系, 即沿旋转轴方向

那么就有圆周运动速度 $\dot{oldsymbol{
ho}}=oldsymbol{\omega} imesoldsymbol{
ho}$,且方向为 $oldsymbol{e}_{arphi}$ 方向

极矢量叉乘为轴矢量, 轴矢量叉乘也为轴矢量, 极矢量叉乘轴矢量为极矢量.

简谐运动

在弹性力作用下的运动方程为: $m\ddot{x}=-kx$ 即 $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$

则
$$\dot{ heta}^2=\omega_0^2=rac{k}{m}, \dot{ heta}=\omega_0=\sqrt{rac{k}{m}}$$

若在恒定外力 F 下运动,则运动方程可以写为 $m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} (x - \frac{F}{k}) = -k(x - \frac{F}{x})$

即平衡位置发生了改变, 振动特性却没有改变, 仍有 $\dot{ heta}=\omega_0=\sqrt{rac{k}{m}}$

$$\left\{egin{aligned} heta &= heta_0 \cos \omega t \ \dot{ heta} &= -\omega heta_0 \sin \omega t \end{aligned}
ight.$$

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$egin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \ &= A[\cos(\omega_1 t + arphi) + \cos(\omega_2 t + arphi)] \ &= 2A|\cosrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t|\cos(rac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + arphi) \end{aligned}$$

假设该音叉和标准音叉分别为 $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + arphi), x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + arphi)$

所以两只音叉合并为

$$egin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A[\cos(\omega_1 t + arphi) + \cos(\omega_2 t + arphi)] \ &= 2A|\cosrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t|\cos(rac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + arphi) \end{aligned}$$

拍的周期为
$$T=rac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$$

拍频为 $f=|f_1-f_2|$

伯努利方程

伯努利方程为 $p+rac{1}{2}
ho v^2+
ho gz=C$, 其中 C 为常量.

可以用于求流体力学里的压强. 同时可以解释伯努利现象.

旋转坐标系

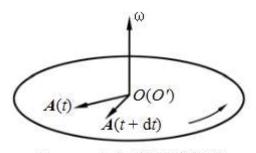


图 2.17 平面旋转坐标系

有相对桌面参考系 S 和匀速圆周运动参考系 S'

对于固定在 S' 上的一点:

$$\because \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} oldsymbol{A} = oldsymbol{\omega} imes oldsymbol{A}$$

$$: d\mathbf{A} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) dt$$

若 \boldsymbol{A} 相对 S' 运动, 增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}'$

那么我们有一般关系式

$$(rac{\mathrm{d}m{A}}{\mathrm{d}t})_S=(rac{\mathrm{d}m{A}}{\mathrm{d}t})_{S'}+m{\omega} imesm{A}$$

或写作符号, t 旁边的一撇只是用来说明参考系的选取

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{\omega} \times$$

将位置矢量带入得速度

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

再带入得加速度

$$egin{aligned} rac{\mathrm{d} \dot{m{r}}}{\mathrm{d} t} &= rac{\mathrm{d} \dot{m{r}}}{\mathrm{d} t'} + m{\omega} imes \dot{m{r}} \ &= rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t'} (rac{\mathrm{d} m{r}}{\mathrm{d} t'} + m{\omega} imes m{r}) + m{\omega} imes (rac{\mathrm{d} m{r}}{\mathrm{d} t'} + m{\omega} imes m{r}) \ &= rac{\mathrm{d}^2 m{r}}{\mathrm{d} t'^2} + 2m{\omega} imes rac{\mathrm{d} m{r}}{\mathrm{d} t} + m{\omega} imes (m{\omega} imes m{r}) \end{aligned}$$

可以看出,分为三项,第一项是 S' 中的加速度,第三项为向心加速度,而多出来的第二项,称为科里奥利加速度.

在地球上, 由于重力加速度是相对 S 而言的, 所以有

$$oldsymbol{g} = oldsymbol{g}_0 - 2oldsymbol{\omega} imes oldsymbol{v}' - oldsymbol{\omega} imes (oldsymbol{\omega} imes oldsymbol{r})$$

科里奥利加速度指向运动方向的右手边.

旋转坐标系中的各种量

在旋转坐标系中:

- 角速度 $\dot{\theta}$ 的地位等同于惯性系的速度;
- 角加速度 $\ddot{\theta}$ 的地位等同于惯性系的加速度;
- 转动惯量 $I=\int
 ho^2 \mathrm{d} m$ 的地位等同于惯性系的质量;
- 力矩 $F \times r$ 的地位等同于惯性系里的力;
- 角动量 L=r imes p=r imes mv=mr imes v 的地位等同于惯性系的动量;
- 转动动能 $E=rac{1}{2}I\dot{ heta}^2.$

角动量大小 L=|r imes p|=|r imes mv|=m|r imes v|=2mS'.

并且我们有角动量定理: 质点所受的合外力矩等于它的角动量对时间的变化率.

角动量守恒定律指出, 当合外力矩为零时, 角动量守恒, 物体与中心点的连线单位时间扫过的面积不变, 在天体运动中表现为开普勒第二定律.

类似牛顿第二定律:
$$m{F} imes m{r} = I\ddot{m{ heta}} = \int
ho \mathrm{d}m\ddot{m{ heta}}$$

圆环以直径为轴旋转时的转动惯量为

$$I=2\int_0^\pi rac{m}{2\pi R}(R\sin heta)^2\mathrm{d} heta=rac{1}{2}mR^2$$

圆球的转动惯量为:

$$I=\int \mathrm{d}m(r\sin heta)^2=\int rac{m}{rac{4}{3}\pi R^3}[2\pi(r\sin heta)r\mathrm{d}r\mathrm{d} heta](r\sin heta)^2=rac{2}{5}mR^2$$

木棍沿着中心的转动惯量为:

$$I = \int_{-rac{l}{2}}^{rac{l}{2}} rac{m}{l} \mathrm{d}x x^2 = rac{1}{12} m l^2$$

平行轴定理,可以实现两个不同的平行轴之间转动惯量的转换,其中 I_C 为经过质心的转轴的转动惯量,d 为两个轴之间的距离:

$$I = I_C + md^2$$

使用平行轴定理可知, 木棍沿着端点的轴的转动惯量为:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

两体系统

对于只有两质点之间相互作用的系统, 有运动方程:

$$m_1$$
 $\ddot{m{r}}_1 = -f(r)m{r}$, $m_2\ddot{m{r}}_2 = f(r)m{r}$, 其中 $m{r} = m{r}_1 - m{r}_2$

进而有
$$m_1 m{\ddot{r}}_1 + m_2 m{\ddot{r}}_2 = 0$$
 和 $m{\ddot{r}} = m{\ddot{r}}_1 - m{\ddot{r}}_2 = -\left(rac{1}{m_1} + rac{1}{m_2}
ight)f(r)m{r}$

定义约化质量
$$\mu=rac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$
, 质心 $m_C=m_1+m_2, m_Cm{r}_C=m_1m{r}_1+m_2m{r}_2$

则我们可以将运动方程写作 $\ddot{\boldsymbol{r}}_C=0, \mu \ddot{\boldsymbol{r}}=-f(r)\boldsymbol{r}$

解方程组, 就可以很容易地讨论两个质点的运动:

$$oldsymbol{r}_1 = rac{m_2}{m_1+m_2}oldsymbol{r} + oldsymbol{r}_C, oldsymbol{r}_2 = rac{m_1}{m_1+m_2}oldsymbol{r} + oldsymbol{r}_C$$

波动方程

柔软绳上的横波

只需要记住:

$$rac{\partial^2 u}{\partial x^2} - rac{1}{v^2}rac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, v = \sqrt{rac{F_T}{
ho}}$$

u 为质点的位移, x 为质点的位置, t 为时间, v 为波传播的速度, F_T 为绳子的张力, ρ 为绳子的密度.

橡皮泥中的纵波

杨氏模量 $Y=rac{L}{S}\left(rac{\partial F_T}{\partial L}
ight)$, L,S 分别为橡皮泥的长度和横截面积.

运动方程为

$$\rho_0 \mathrm{d}x S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathrm{d}x$$

或

$$rac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x-rac{1}{c^2}rac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$
,其中 $c=\sqrt{rac{Y}{
ho_0}}$

声音波速

$$F_T o -pS$$

$$Y = rac{L}{S} \left(rac{\partial F_T}{\partial L}
ight)
ightarrow -rac{L}{S} rac{\partial (pS)}{\partial L} = -V \left(rac{\partial p}{\partial V}
ight) \equiv B = rac{1}{\kappa_T}$$

其中B为体积弹性模量, κ_T 为等温压缩率

那么
$$p=p_0+\Delta p, \Delta p=-Brac{\Delta V}{V}$$

那么声波波速为
$$v=\sqrt{rac{B}{
ho_0}}$$

驻波

驻波也可以看作是两频率相等方向相反行波的叠加,振动最弱点称为波节或节点而振动最强为波腹或反节点.

洛伦茨变换

$$egin{cases} x' = \gamma(x-ut) \ y' = y \ z' = z \ t' = \gamma(t-rac{u}{c^2}x) \end{cases}$$

常微分方程

$$y' + P(x)y = 0$$
 对应的解是 $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y'+P(x)y=Q(x)$$
 对应的解是 $y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C
ight)$

综上所述,求二阶常系数线性齐次方程

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0$$

通解的步骤可归纳如下:

第一步,根据微分方程写出它的特征方程 $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$;

第二步,求解特征方程得两个特征根 λ_1 与 λ_2 ;

第三步,根据特征根的不同情况参照下表写出微分方程的通解:

特征根 λ1,λ2	二阶常系数齐次方程的通解
两个不同实根 λ_1, λ_2	$x = C_1 e^{\lambda,i} + C_2 e^{\lambda,i}$
两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2$	$x = e^{\lambda,t} (C_1 t + C_2)$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$x = e^{at} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$

自由落体

物体下落过程中受到空气的阻力 $F_d=-kv$, 其中 v 是物体的速度, k 为与速度无关的常量.

终极速度

对下落稳定时:

$$\boldsymbol{F}_d + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v} = 0$$

$$\therefore oldsymbol{v} = rac{moldsymbol{g}}{b}$$

速度对时间

对下落过程:

$$oldsymbol{F}_d + moldsymbol{g} = moldsymbol{g} - koldsymbol{v} = moldsymbol{a}$$

取竖直向下为正方向:

$$mg - kv = ma = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}t}{m} = \frac{\mathrm{d}v}{mq - kv}$$

$$\therefore \int \frac{\mathrm{d}t}{m} = \int \frac{\mathrm{d}v}{mq - kv}$$

$$\therefore \frac{t}{m} + C = -\frac{1}{k} \int \frac{\mathrm{d}(mg - kv)}{mg - kv} = -\frac{1}{k} \ln(mg - kv)$$

当 t=0 时, v=0, 带入可得

$$\therefore C = -\frac{1}{k}\ln(mg)$$

$$\therefore \ln(mg - kv) = \ln(mg) - \frac{k}{m}t$$

$$\therefore mg - kv = e^{\ln(mg) - \frac{k}{m}t} = \frac{mg}{e^{\frac{k}{m}t}}$$

$$\therefore v = rac{mg}{k} - rac{mg}{ke^{rac{k}{m}t}}$$

加速度对时间

$$\therefore a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ge^{-\frac{k}{m}t}$$

下落距离对时间

$$\therefore x = \int v \mathrm{d}t = \frac{mgt}{k} + \frac{m^2g}{k^2} \int e^{-\frac{k}{m}t} \mathrm{d}(-\frac{k}{m}t) = \frac{mgt}{k} + \frac{m^2g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

当 t = 0 时, 带入 x = 0 得:

$$\therefore x = \frac{m^2g}{k^2}e^0 + C = 0$$

$$\therefore C = -\frac{m^2g}{k^2}$$

$$\therefore x = rac{mgt}{k} + rac{m^2g}{k^2}e^{-rac{k}{m}t} - rac{m^2g}{k^2}$$