Ch 8.4 正态总体抽样分布定理

回顾前一次课

- Γ-分布、性质、独立可加性
- 标准正态分布的平方Γ(1/2,1/2)
- Dirichlet分布、性质

统计三大分布

- 自由度为n的χ^2分布：$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$
- χ^2分布性质、独立可加性
- t分布$T = X/\sqrt{Y/n}$、性质

分布可加性

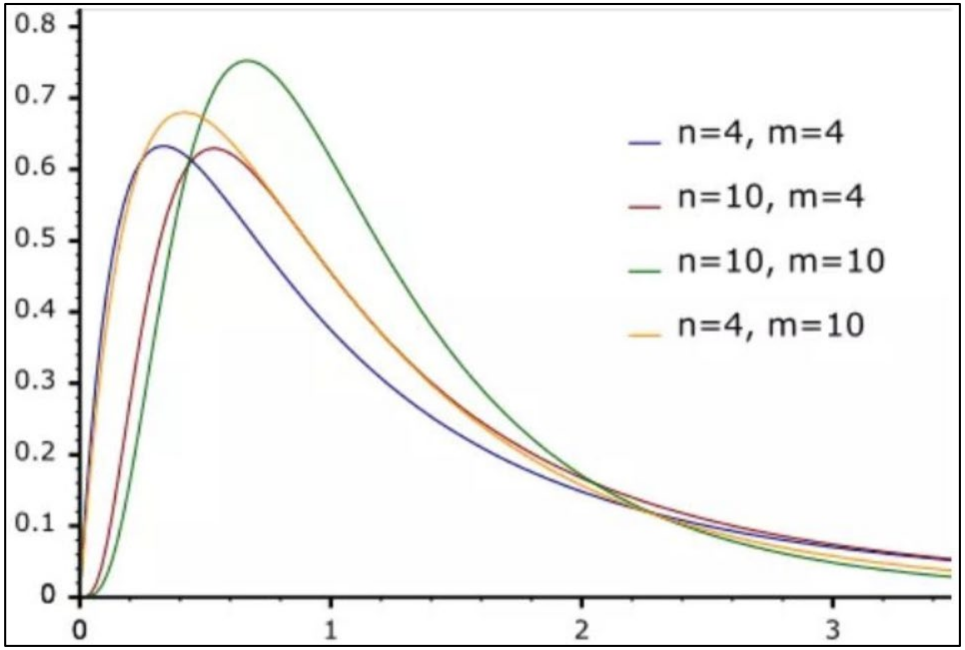
- 如果$X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和$Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$，且$X$与$Y$独立，那么$X \pm Y \sim \mathrm{N}(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$;
- 如果$X \sim B(n_1, p)$和$Y \sim B(n_2, p)$,且X与Y独立，那么$X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$;
- 如果$X \sim P(\lambda_1)$和$Y \sim P(\lambda_2)$,且X与Y独立，那么$X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$;
- 如果$X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ 和$Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且$X$与$Y$独立, 那么$X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$
- 如果$X \sim \chi^2(m)$和$Y \sim \chi^2(n)$,且X与Y独立，那么$X + Y \sim \chi^2(m + n)$.

F分布

随机变量$X \sim \chi^2(m)$和$Y \sim \chi^2(n)$相互独立, 称随机变量

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

服从自由度为(m,n) 的F-分布, 记$F \sim F(m,n)$.



F分布的性质

随机变量$F \sim F(m,n)$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{mx}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

定理：若随机变量$F \sim F(m,n)$, 则$1/F = F(n,m)$.

例题

1. 独立同分布随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$满足$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$，求$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)^2/\sigma_i^2$的分布

2. $X_1, X_2, \cdots, X_9$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$是来自总体$N(0,9)$两样本，求$(X_1 + X_2 + \cdots + X_9)/\sqrt{Y_1^2 + Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}$的分布.

3. 设$X_1, X_2, \dots, X_{2n}$来自总体$N(0, \sigma_2^2)$的样本，求$(X_1^2 + X_3^2 + \cdots + X_{2n-1}^2)/(X_2^2 + X_4^2 + \cdots + X_{2n}^2)$的分布.

正态分布的抽样分布定理一

定理： 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, 则有

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n) \qquad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

正态分布的抽样分布定理二

定理： 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本,其样本均值和修正样本方差分别为

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1\}}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

则**有$\bar{X}$和S^2相互独立**, 且

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

正态分布的抽样分布定理三

定理： 设$X_1, X_2, \cdots, X_m$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本,其样本均值和修正样本方差分别为

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1\}}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

则

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$$

正态分布的抽样分布定理四

定 理： 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分 别 来 自 总 体 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$和$N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$的两个独立样本，其修正样本方差分别为S_X^2和S_Y^2, 则

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1).$$

正态分布的抽样分布定理五

定理： 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别来自总体 $N(\mu_X, \sigma^2)$和$N(\mu_Y, \sigma^2)$的两个独立样本，令其样本均值分别$\bar{X}$和$\bar{Y}$, 修正样本方差分别为S_X^2和S_Y^2, 则

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2).$$

课堂练习

1. 若随机变量$X \sim t(n)$, 求$Y = X^2$的分布.
2. 设$X_1, X_2, \cdots, X_5$是来自总体$N(0,1)$的样本，令$Y = c_1(X_1 + X_3)^2 + c_2(X_2 + X_4 + X_5)^2$. 求常数$c_1, c_2$使$Y$服从$\chi^2$分布.
3. 设X_1, X_2是来自总体$N(0, \sigma^2)$的样本，求（$X_1 +$

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$是总体$N(\mu, 1/4)$ 的样本

i) 若$\mu = 0$, 求$P(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4)$;

ii) 若μ未知, 求$P\left(\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2 \geq 1\right)$.

设$X_1, X_2, \cdots, X_{25}$是总体$N(12, \sigma^2)$的样本

i) 若$\sigma = 2$, 求$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i/25 \geq 12.5\right)$;

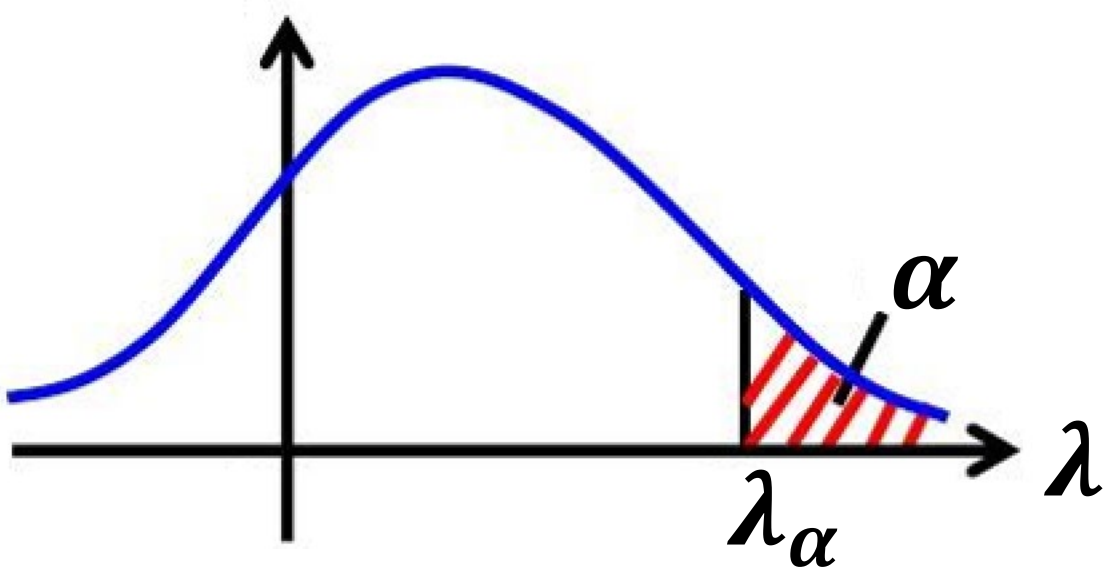
ii) 若σ未知但知道修正样本方差为$S^2 = 5.57$，求$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i/25 \geq 12.5\right)$.

分位数(点)

对给定$\alpha \in (0,1)$ 和随机变量X, 称满足

$$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$$

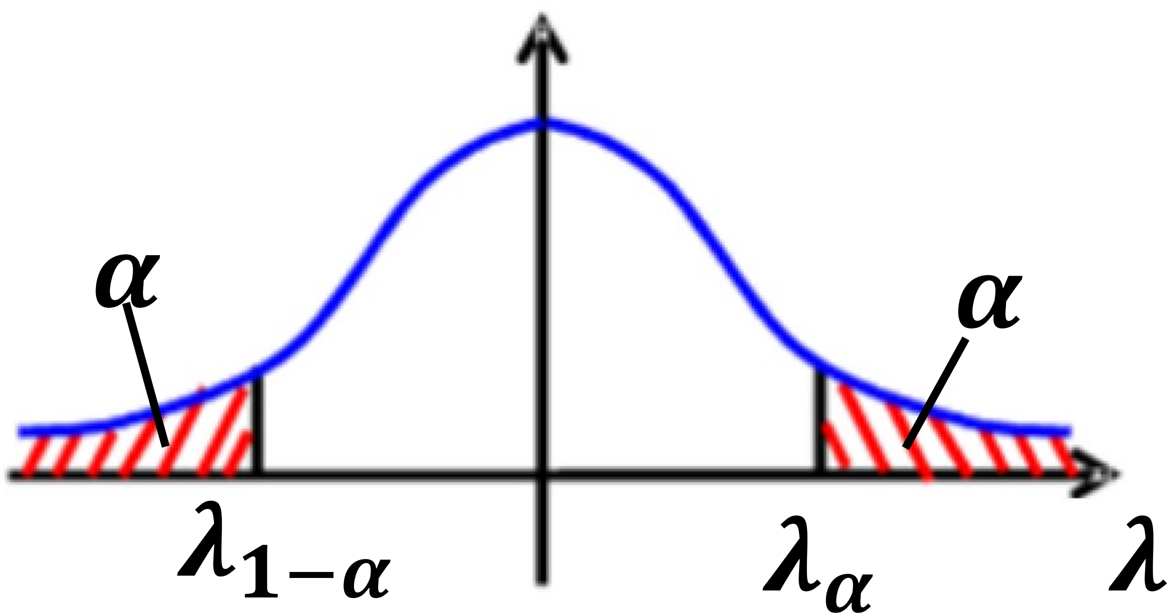
的实数λ_α为上侧α分位数(点)



对称分布的分位数

随机变量X的概率密度函数关于y轴对称, 则有

$$\lambda_\alpha = -\lambda_{1-\alpha}$$

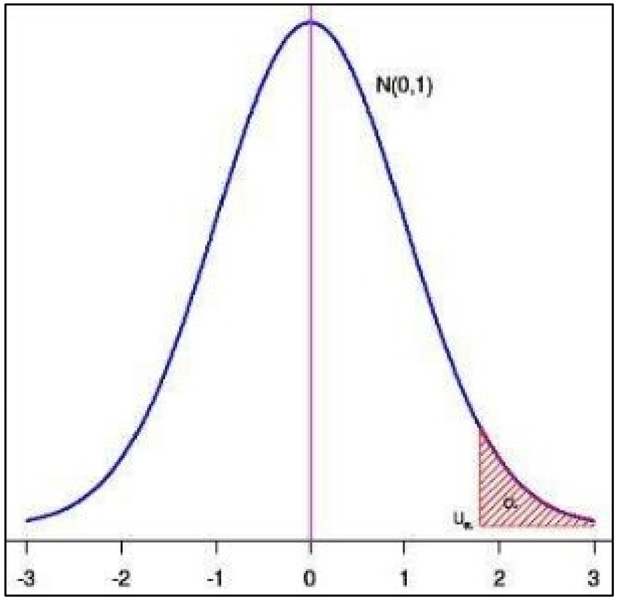


正态分布的分位数

对正态分布$X \sim N(0,1)$, 给定$\alpha \in (0,1)$, 满足

$$P(X > \mu_\alpha) = \int_{\mu_\alpha}^{\infty} f(x)dx = \alpha$$

的点 **μ_α称为正态分布上侧α分位点**



性质：

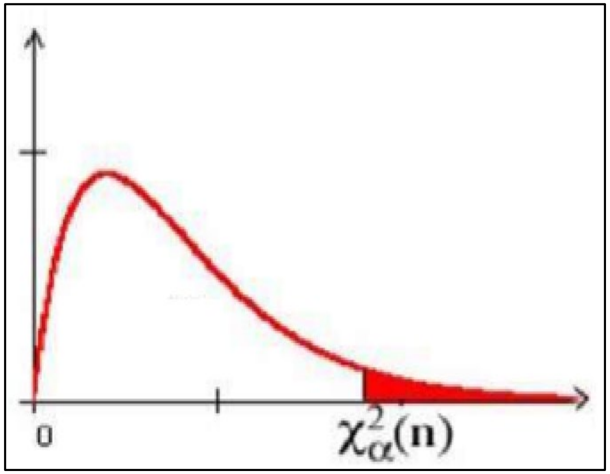
- $\alpha = 1 - \Phi(\mu_\alpha)$
- $\mu_{1-\alpha} = -\mu_\alpha$

χ^2分布的分位数

对χ^2分布$X \sim \chi^2(n)$, 给定$\alpha \in (0,1)$, 满足

$$P\left(X \geq \chi_\alpha^2(n)\right) = \alpha$$

的点$\boldsymbol{\chi_\alpha^2(n)}$**称为**$\boldsymbol{\chi^2(n)}$**分布上侧**$\boldsymbol{\alpha}$**分位点**



当$n \to \infty$时有

$$\chi_\alpha^2(n) \approx \left(\mu_\alpha + \sqrt{2n-1}\right)^2/2$$

其中μ_α表示正态分布上侧α分位点

$t-$分布的分位数

对t-分布$X \sim t(n)$, 给定$\alpha \in (0,1)$, 满足

$$P\big(X > t_\alpha(n)\big) = \alpha$$

的点$\boldsymbol{t_\alpha(n)}$**称为**$\boldsymbol{t(n)}$**-分布上侧**$\boldsymbol{\alpha}$**分位点**

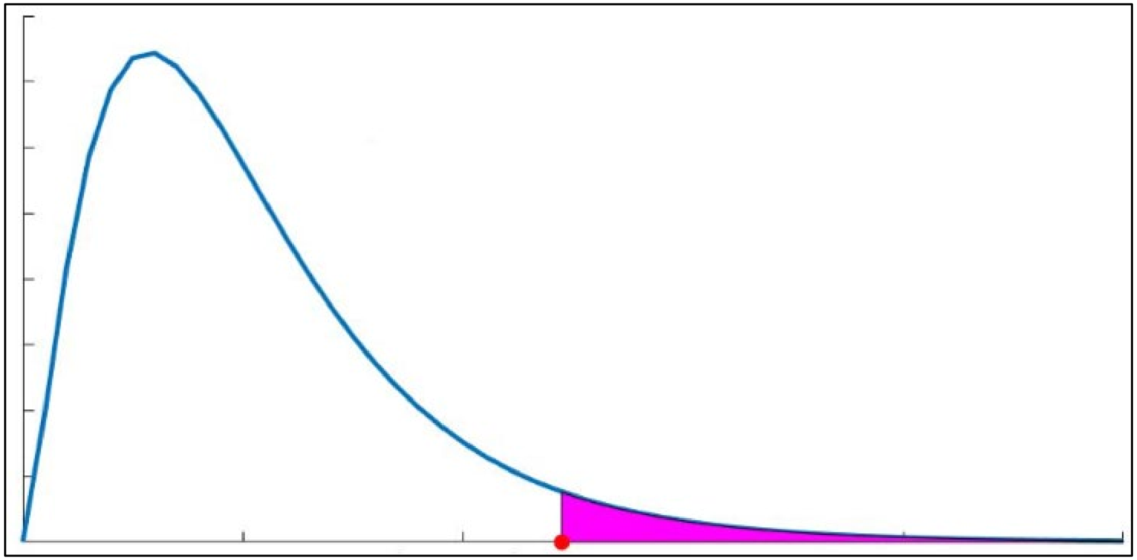
由对称性可知$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

F−分布的分位数

对F-分布$X \sim F(m,n)$, 给定$\alpha \in (0,1)$, 满足

$$P[X > F_\alpha(m,n)] = \alpha$$

的点$\boldsymbol{F_\alpha(m,n)}$**称为**$\boldsymbol{F(m,n)}$ **分布上侧**$\boldsymbol{\alpha}$**分位点**



$F-$分布的分位数

定理：对F-分布的分位点有

$$F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}.$$