概率统计第三次作业

201300035 方盛俊

2.1

若事件 A, B 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则我们称 A 与 B 相互独立, 这说明独立性与概率相关, 反映的是事件的概率属性; 而当 $AB = \emptyset$ 时, 我们称 A 与 B 互不相容, 这说明互斥性与事件运算关系相关, 与事件的概率无关. 所以说独立和互斥反映的是事件的不同性质, 没有必然联系.

而独立和互斥之间有一条定律, 已知 $P(A)P(B) > 0$, 则有: 若 A, B 互斥, 则 A, B 不独立; 若 A, B 独立, 则 A, B 不互斥.

2.2

$\because A, B, C$ 独立

$\therefore P(ABC) = P(A)P(B)P(C), P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C)$

$\because P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = P(B) + P(C) - P(B)P(C)$

$\therefore P(A \cap (B \cup C)) = P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC) = P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) = P(A)[P(B) + P(C) - P(B)P(C)] = P(A)P(B \cup C)$

$\therefore A$ 与 $B \cup C$ 独立

22.

记他第一次及格的事件为 A, 第二次及格的事件为 B, 获取资格的事件为 C

(1)

$$P(C) = P(A) + P(\overline{A}B) = p + (1-p) \cdot \frac{p}{2} = \frac{p\,(3-p)}{2}$$

(2)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} = \frac{p \cdot p}{p \cdot p + (1-p) \cdot \frac{p}{2}} = \frac{2p}{p+1}$$

27.

(1)

$$P(AB|A) = \frac{P(AB)P(A|AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB|A \cup B) = \frac{P(AB)P(A \cup B|AB)}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$$

$\because P(B) \geqslant P(AB)$

$\therefore P(A) \leqslant P(A) + P(B) - P(AB)$

$\therefore \dfrac{P(AB)}{P(A)} \geqslant \dfrac{P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$

$\therefore P(AB|A) \geqslant P(AB|A \cup B)$

(2)

$\because P(A|B) = 1$

$\therefore P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 0$

$\therefore P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B)P(\overline{A}|B)}{P(\overline{A})} = 0$

$\therefore P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - P(B|\overline{A}) = 1$

(3)

$$P(A) = P(AC) + P(A\overline{C}) = P(C)P(A|C) + P(\overline{C})P(A|\overline{C})$$

$$P(B) = P(BC) + P(B\overline{C}) = P(C)P(B|C) + P(\overline{C})P(B|\overline{C})$$

$\because P(A|C) \geqslant P(B|C), P(A|\overline{C}) \geqslant P(B|\overline{C})$

$\therefore P(C)P(A|C) \geqslant P(C)P(B|C), P(\overline{C})P(A|\overline{C}) \geqslant P(\overline{C})P(B|\overline{C})$

$\therefore P(C)P(A|C) + P(\overline{C})P(A|\overline{C}) \geqslant P(C)P(B|C) + P(\overline{C})P(B|\overline{C})$

$\therefore P(A) \geqslant P(B)$

28.

分别记两种花籽发芽的事件为 A, B.

(1)

$P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$

(2)

$P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}}) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - (1-0.8)(1-0.9) = 0.98$

(3)

$P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0.8 \times (1 - 0.9) + 0.9 \times (1 - 0.8) = 0.26$

30.

(1)

(i) A 为抛骰子抛出 6; B 为抛骰子抛出奇数.

(ii) A 为抛骰子抛出 6; B 为抛骰子抛出 1 到 6 的任何一个数.

(iii) A 为抛骰子抛出 6; B 为抛骰子抛出偶数.

(2)

(i)

$\because P(C \cap AB) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 且 $P(C)P(AB) = P(A)P(B)P(C)$

$\therefore P(C \cap AB) = P(C)P(AB)$

即 C 与 AB 相互独立.

(ii)

$\because A, B, C$ 独立

$\therefore P(ABC) = P(A)P(B)P(C), P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C)$

$\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$\therefore P(C \cap (A \cup B)) = P(CA \cup CB) = P(CA) + P(CB) - P(CAB) = P(C)P(A) + P(C)P(B) - P(C)P(A)P(B) = P(C)[P(A) + P(B) - P(A)P(B)] = P(C)P(A \cup B)$

$\therefore C$ 与 $A \cup B$ 独立

(3)

$\because 0 \leqslant P(AB) \leqslant P(A) = 0$

$\therefore P(AB) = 0$

$\therefore P(AB) = P(A)P(B) = 0$

即 A 与 B 相互独立

(4)

$P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A|B) = P(A|\overline{B})$:

当 $P(\overline{B}) \neq 0$ 且 $P(B) \neq 0$ 时,

$\because P(AB) = P(A)P(B), P(AB) = P(A|B)P(B)$

$\therefore P(A) = P(A|B)$

$\because P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}), [P(B) + P(\overline{B})]P(A|B) = P(A|B)$

$\therefore P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) = [P(B) + P(\overline{B})]P(A|B)$

$\therefore P(\overline{B})P(A|\overline{B}) = P(\overline{B})P(A|B)$

$\therefore P(A|\overline{B}) = P(A|B)$

当 $P(\overline{B})=0$ 即 $P(B)=1$ 时, $P(A|\overline{B})$ 没有意义.

当 $P(\overline{B})=1$ 即 $P(B)=0$ 时, $P(A|B)$ 没有意义.

$P(A|B)=P(A|\overline{B}) \Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$:

$\therefore P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=[P(B)+P(\overline{B})]P(A|B)=P(A|B)$

$\therefore P(A)P(B)=P(A|B)P(B)=P(AB)$

31.

(1)

可能对.

当 $A=\emptyset$ 或 $B=\emptyset$ 时, $AB=\emptyset$ 且 $P(AB)=P(A)P(B)=0$, 此时原命题正确.

当 $P(A)P(B)>0$ 时, 若 A 与 B 互不相容, 则它们不相互独立, 此时原命题错误.

(2)

可能对.

当 $A=\emptyset$ 或 $B=\emptyset$ 时, $AB=\emptyset$ 且 $P(AB)=P(A)P(B)=0$, 此时原命题正确.

当 $P(A)P(B)>0$ 时, 若 A 与 B 互相独立, 则它们不互不相容, 此时原命题错误.

(3)

必然错.

假设该命题是对的. 则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1.2>1$ 产生矛盾.

因此必然错.

(4)

可能对.

我们构造事件 A, B 使得 $P(AB)=0.36$, 例如两次有放回地, 从一个装有十个球, 其中六个球是红球的盒子中, 抽出红球的事件, 即有 $P(AB)=P(A)P(B)$, 此时原命题正确.

我们令事件 A 完全等同于事件 B, 则满足了 $P(A)=P(B)=0.6$, 但 $P(AB)=0.6\neq P(A)P(B)=0.36$, 此时原命题错误.

32.

$P(A)=1-(1-0.005)^{140}=50.4\%$

概率为 50.4%.

33.

事件 AB: 取得的是 1 号或 2 号球, 且取得的是 1 号或 3 号球, 即取得的是 1 号球.

事件 AC: 取得的是 1 号或 2 号球, 且取得的是 1 号或 4 号球, 即取得的是 1 号球.

事件 BC: 取得的是 1 号或 3 号球, 且取得的是 1 号或 4 号球, 即取得的是 1 号球.

事件 BC: 取得的是 1 号或 2 号球, 且取得的是 1 号或 3 号球, 且取得的是 1 号或 4 号球, 即取得的是 1 号球.

$\because P(ABC)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}, P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{2}$

$\therefore P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}, P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4}, P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{4}$

但是 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$

即事件 A, B, C 两两独立, 但 A, B, C 不是互相独立的.

37.

(1)

$P(A)=\frac{3}{7}+(1-\frac{3}{7})\times\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

(2)

$$P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{9}=\frac{16}{63}$$

(3)

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{16}{63}\times 1}{\frac{5}{9}}=\frac{16}{35}$$

39.

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.8\times(1-0.02)^3+0.15\times(1-0.1)^3+0.05\times(1-0.9)^3=0.7529536+0.10935+0.00005=0.8623536$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.7529536}{0.8623536}=0.87313788682508$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.10935}{0.8623536}=0.126804132318807$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.00005}{0.8623536}=0.0000579808561128521$$