习题1.5：（A）3，5，9（2、3、4、5），10（3、5），12（3），13（2、3），14，（B）2，3

(A)

3.

(1) 错误, 对于分子分母上的加减法无穷小量替换不一定成立.

(2) 正确, 当$x \to 0$, $x^2 \sin \frac{1}{x} \to 0$, 可以进行无穷小量替换.

5.

$\because \alpha(x) \sim \beta(x)$

$\therefore \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$

$\therefore \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$

$\because \lim \frac{o(\beta(x))}{\beta(x)} = 0$

$\therefore \lim \frac{o(\beta(x))}{\alpha(x)} = \lim \frac{o(\beta(x))}{\beta(x)} \cdot \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$

$\therefore \lim \frac{\beta(x) + o(\beta(x))}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \lim \frac{o(\beta(x))}{\alpha(x)} = 1$

$\therefore \alpha = \beta(x) + o(\beta(x))$

9.

(2)

函数在$(-\infty, 0)$连续, 在$(0, +\infty)$连续.

函数在$x = 0$有一个第I类间断点中的跳跃间断点.

(3)

函数在$(0,1)$连续, 在$(1,+\infty)$连续.

函数在$x=1$有一个第II类间断点中的无穷间断点.

(4)

函数在$(-\infty,0)$连续, 在$(0,+\infty)$连续.

函数在$x=0$有一个第I类间断点中的可去间断点.

(5)

函数在$(-\infty,-1)$连续, 在$(-1,0)$连续, 在$(0,1)$连续, 在$(2k-1,2k+1), k\in\mathbb{N}^+$连续.

函数在$x=-1$有一个第II类间断点中的震荡间断点.
函数在$x=0$有一个第I类间断点中的跳跃间断点.
函数在$x=1$有一个第I类间断点中的可去间断点.
函数在$x=2k+1, k\in\mathbb{N}^+$有一个第II类间断点中的无穷间断点.

10.

(3)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}(\cot x-\frac{e^{2x}}{\sin x}) &= \lim_{x\to0}(\frac{\cos x-e^{2x}}{\sin x}) \\
&= \lim_{x\to0}(\frac{1-e^{2x}}{x}) \\
&= \lim_{x\to0}(\frac{-2x}{x}) \\
&= -2
\end{aligned}
$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{\sin x}{\cos x}}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\\ &= e\end{aligned}$$

12.(3)

$\because f(x)$在$x=0$处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin ax}{ax}=a=f(0)=2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{bx}\ln(1-3x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{bx}\ln(1-3x)\\ &= \lim_{x\to 0}(\frac{-3x}{bx})\\ &= \frac{-3}{b}\\ &= 2\end{aligned}$$

$\therefore a=2, b=-\dfrac{3}{2}$

13.

(2)

令$f(x)=x^5-3x-1$

$\because y=x^5$和$y=x$是幂函数且在$\mathbb{R}$上连续

$\therefore$ 他们的和组成的函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续

$\because f(1)=-3, f(2)=32-6-1=23, f(1)\cdot f(2)<0$

$\therefore$ 由零点定理得, $f(x)$在$[1,2]$上至少有一个零点, 且$x=1, x=2$不是零点

$\therefore f(x)$在$(1,2)$上至少有一个零点

$\because (1,2)\subset(1.2.7)$

$\therefore x^5-3x-1=0$在$(1,2.7)$上至少有一个根

(3)

假设$f(x) \in C[a,b]$是正数和负数函数值均有且不为零

$\therefore$ 必然能找出$c,d \in [a,b]$,使得$f(c)$与$f(d)$异号.

$\therefore f(c) \cdot f(d) < 0$在$[c,d]$上成立

$\because f(x)$在$[c,d]$上连续

$\therefore$ 由零点定理可得$\exists x_0 \in [c,d]$使得$f(x_0) = 0$

$\therefore$ 与题设$f(x)$的在$[a,b]$上函数值均不为零矛盾

$\therefore f(x)$在$[a,b]$上恒正或恒负

14.

令$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$\therefore f(x) = x^{n-1}(a_n x + a^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{n-1}})$

当$a_n > 0$时,

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists M > 1,$当$x > M$时,使得

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{n-1}(a_n x + a^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{n-1}}) \\
&> a_n x + a^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{n-1}} \\
&\geq a_n x - |a^{n-1}| - |\frac{a_{n-2}}{x}| - \cdots - |\frac{a_0}{x^{n-1}}| \\
&> a_n x - |a^{n-1}| - |a_{n-2}| - \cdots - |a_0| \\
&> \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore$ 取$M = \max\{1, \frac{\varepsilon + |a^{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|}{a_n}\}$

$\therefore$ 取$b \in (M, +\infty)$,则有$b > 0$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists m < -1,$当$x < m$时,使得

$$
\begin{aligned}
-f(x) &= -x^{n-1}(a_n x + a^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{n-1}}) \\
&> -(a_n x + a^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{n-1}}) \\
&\geq -(a_n x - |a^{n-1}| - |\frac{a_{n-2}}{x}| - \cdots - |\frac{a_0}{x^{n-1}}|) \\
&> -(a_n x - |a^{n-1}| - |a_{n-2}| - \cdots - |a_0|) \\
&> \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 取$m = \min\{-1, \dfrac{-\varepsilon + |a^{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|}{a_n}\}$

$\therefore$ 取$b \in (-\infty, m)$,则有$a < 0$

$\therefore f(a) \cdot f(b) < 0$

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续,存在上下确界$\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$和$\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$\therefore$ 取$C = 0, \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) > C > \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$\therefore$ 根据介值定理知$\exists\xi \in [a,b], f(\xi) = C = 0$

同理可得当$a_n < 0$时,可找到$a > 0, b < 0$使得$\exists\xi$有$f(\xi) = 0$

$\therefore a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$至少有一个实根

(B)

2.

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,假设该极限为$A$

$\therefore \forall\varepsilon > 0, \exists M$,当$x > M$时,$|f(x) - A| < \varepsilon$

$\therefore A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

$\therefore f(x)$在$(M, +\infty)$上有界

$\because f(x) \in C[a, +\infty)$

$\therefore f(x) \in C[a, b]$

$\therefore$ 由闭区间上连续函数的有界性可知,$f(x)$在$[a,b]$上有界

$\therefore f(x)$在$[a,+\infty)$上有界

3.

若$x \to a^+, f(x) \to \infty$,不妨设$f(x) \to +\infty$

则$\forall M > 0, \exists \delta > 0$,当$x \in (a, a+\delta)$时, $f(x) > M$

$\therefore$ 取$c \in (a, a+\delta)$,则我们有$f(c) > 0$

若$x \to a^+, f(x) \to A$

$\because \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$和$\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$存在,不妨设$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) > 0$

$\therefore$ 由极限的保号性可知$\exists \delta > 0$,当$x \in (a, a+\delta)$时, $f(x) > 0$

$\therefore$ 取$c \in (a, a+\delta)$,则我们有$f(c) > 0$

$\therefore$ 同理我们可以找到d,使得$f(d) < 0$,且$c < d$

$\therefore f(c) \cdot f(d) < 0, [c, d] \subset (a, b)$

$\therefore f(x)$在$[c, d]$上至少存在一点ξ,使$f(\xi) = 0$

$\therefore f(x)$在(a, b)上至少存在一点ξ,使$f(\xi) = 0$