Ch 5.5 多维随机变量的数字特征

回顾前一次课

若已知 X和Y的联合分布，计算$Z=g(X,Y)$的期望$E[Z]$

期望的性质$E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$

独立: $E[XY]=E[X]E[Y]$非独立: $E[XY]\leq\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$

随机变量X和Y的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

协方差的性质：$\mathrm{Cov}(X,c)=0$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$$

相关系数

对任意随机变量X与Y有

$$\left(\mathbf{Cov}(X,Y)\right)^2 \leq \mathbf{Var}(X)\mathbf{Var}(Y)$$

等号成立的充要条件是$Y = aX + b$，即X与Y之间存在线性关系

随机变量X和Y的方差$\mathrm{Var}(X)$,$\mathrm{Var}(Y)$存在且不为0，称

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

为**X与Y的相关系数**，简记ρ

相关系数

对方差不为零的随机变量X和Y, 下述条件相互等价:

- $\rho_{XY} = 0$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

若相关系数$|\rho_{XY}| = 0$，则随机变量***X*和*Y*不相关**

X和Y不相关 X和Y独立

若X和Y不相关，仅**表示*X*和*Y*无线性关系**，**还可能存在其它关系**

二维正态分布的相关系数

定理： 对二维正态分布

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

有 $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\rho\sigma_1\sigma_2}$, 参数$\rho$为$X$与$Y$的相关系数

对正态分布（仅限于正太分布）

$$\boldsymbol{X}\text{与}\boldsymbol{Y}\text{独立} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}\text{与}\boldsymbol{Y}\text{不相关}$$

例题

随机变量(X, Y)联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x+y) & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求$\mathrm{Cov}(X, Y)$,$\mathrm{Var}(X+Y)$.

例题

设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$和$Y \sim N(\mu,\sigma^2)$相互独立，求$Z_1 = \alpha X + \beta Y$和$Z_2 = \alpha X - \beta Y$的相关系数$(\alpha,\beta \neq 0)$

练习题

随机变量$X \sim N(-1,2)$和$Y \sim N(1,8)$，且相关系数$\rho_{XY} = -1/2$, 求$\mathrm{Var}(X+Y)$.

随机向量的数学期望与协方差矩阵

随机向量$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^\top$的期望为

$$E(\boldsymbol{X}) = \left(E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)\right)^\top$$

随机向量$\boldsymbol{X}$的协方差矩阵为

$$Cov(X) = \Sigma = \begin{pmatrix} Cov(X_1, X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & \cdots & Cov(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

协方差矩阵的性质

定理：随机变量X的协方差矩阵是对称半正定的矩阵

定理：设多维正态分布$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，则有

$$\boldsymbol{\mu} = E[\boldsymbol{X}] = (E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n])^\top$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)\right]_{n\times n}$$

多维正态分布的性质

多维随机向量$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^\top \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 有

- 每个变量X_i的边缘分布是正态分布
- **$\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \cdots, \boldsymbol{X_n}$相互独立的充要条件是$\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \cdots, \boldsymbol{X_n}$相互不相关（仅限于正态分布）**
- $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$等价于$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$是正态分布 (对任意非全为0常数$a_1, a_2, \ldots, a_n$)

Ch 5.6 条件分布与条件期望

条件分布

前面学过随机事件的条件概率，即在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率

$$P(A|B) = P(AB)/P(B)$$

可推广到随机变量：给定随机变量Y取值条件下求随机变量X的概率分布，即条件分布.

离散型随机变量的条件分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的分布列为$\{p_{ij}\}$，若Y的边缘分布$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$，称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

在$Y=y_j$条件下随机变量X的**条件分布列**.

类似定义在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布列

- 非负性: $P(X=x_i|Y=y_j)\ge 0$
- 规范性: $\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i|Y=y_j)=1$

例题

一个选手随机进行射击训练，击中目标的概率为p，射击进行到击中两次目标为止，用X表示首次击中目标所进行的射击次数，用Y表示第二次射中目标所进行的射击次数，求X和Y的联合分布和条件分布.