第二周习题

1.

假设直线段 P_0P_1 与 S 的边界无交点, 即只有内点和外点

对于线段 P_0P_1 上每一个内点 $\boldsymbol{a}$ 均存在 $\delta > 0$ 使得开球 $U(\boldsymbol{a}, \delta) \subset S$

同理对于线段 P_0P_1 上每一个外点 $\boldsymbol{b}$ 均存在 $\delta > 0$ 使得开球 $U(\boldsymbol{b}, \delta) \cap S = \emptyset$

我们便可以构造出开集族 $\{U(\boldsymbol{x}, \delta)\}_{\boldsymbol{x} \in P_0P_1}$, 对线段 P_0P_1 形成了开覆盖

$\because P_0P_1$ 是一个闭集

$\therefore$ 可以找出有限个 $U(\boldsymbol{x}, \delta)$ 将 P_0P_1 覆盖

从 P_0 开始, 开集 $U(\boldsymbol{P_0}, \delta)$ 里的点全都为 S 的内点

$\therefore$ 与 $U(\boldsymbol{P_0}, \delta)$ 相接的开集 O_1 满足 $U(\boldsymbol{P_0}, \delta) \cap O_1 \neq \emptyset$, 因此有 O_1 里的点全为 S 的内点

$\therefore$ 沿着这条开集链条可推得, 对于任意 $\boldsymbol{x} \in P_1P_2$ 均有 $U(\boldsymbol{x}, \delta)$ 里的点均为 S 的内点

这个结论与 P_1 是外点, $U(\boldsymbol{P_1}, \delta) \cap S = \emptyset$ 矛盾

$\therefore$ 线段 P_0P_1 与 S 的边界 ∂S 至少有一个交点

2.

原式可写为 $f(a+b, \dfrac{b}{a}) = a^2 - b^2$

令 $x = a + b, y = \dfrac{b}{a}$

解得 $a = \dfrac{x}{y+1}, b = x - \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{xy}{y+1}$

$\therefore f(x, y) = \dfrac{x^2(1-y^2)}{(y+1)^2}$

3.

(1)

$\because x^2+y^2-2xy \geq 0 \Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (x^2+y^2 \neq 0)$

对于 $x \to +\infty, y \to +\infty$

$0 < (\frac{xy}{x^2+y^2})^x \leq \frac{1}{2^x}$

$\because \frac{1}{2^x} \to 0$

由夹逼定理可知

$\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}(\frac{xy}{x^2+y^2})^x = 0$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty,y\to a}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}} &= \lim_{x\to+\infty,y\to a} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})\cdot\frac{x}{x+y}} \\ &= \exp(\lim_{x\to+\infty,y\to a} x\ln(1+\frac{1}{x})\cdot\lim_{x\to+\infty,y\to a}\frac{x}{x+y}) \\ &= \exp(\lim_{x\to+\infty,y\to a} x\cdot\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty,y\to a}\frac{x}{x+y}) \\ &= e^{1\times 1} \\ &= e\end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}(x^2+y^2)^{e^{-(x+y)}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}\exp(e^{-(x+y)}\ln(x^2+y^2))$$
$$=\exp(\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}\frac{\ln(x^2+y^2)}{e^{x+y}})$$
$$=e^0$$
$$=1$$

(4)

$$\because \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+y+1}+1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x+y+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 和 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ 的极限要么同时存在, 要么同时不存在

令 $y=x$ 可得 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+x} = 0$

令 $y=x^2-x$ 可得 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2}{x+x^2-x} = -1$

可知 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ 极限不存在

因此 $\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 极限不存在

(5)

$\because \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x^y = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x^y = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

两种累次极限的结果不一致

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y$ 的极限不存在

4.

不妨假设 $f(x,y)$ 对 x 单调递增且连续

对于任意一点 (x_0,y_0)

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$, s.t. $|x-x_0|\le\delta_1$ 时

$$f(x_0-\delta_1,y)\le f(x,y)\le f(x_0+\delta_1,y)$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}<f(x,y_0)-f(x_0,y_0)<\frac{\varepsilon}{2}$$

因为对 y 也单调且连续

$\exists\delta_2>0$, s.t. $|y-y_0|\le\delta_2$ 时

$$-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_0,y_0) &\le f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0,y_0) \\
&< f(x_0+\delta_1,y_0)+\frac{\varepsilon}{2}-f(x_0,y_0) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_0,y_0) &\ge f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0,y_0) \\
&> f(x_0-\delta_1,y_0)-\frac{\varepsilon}{2}-f(x_0,y_0) \\
&> -\varepsilon
\end{aligned}
$$

$\therefore |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$

$\therefore f(x,y)$ 是二元连续函数

5.

对于任意一点 $(x_0,y_0)\in\Omega$

$\because f(x,y)$ 对 x 连续

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$, s.t. $|x-x_0|\le\delta_0$ 时

$$
|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}
$$

又由题目可知

$$
|f(x,y)-f(x,y_0)|\le L|y-y_0|
$$

令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2L}$, s.t. $\forall(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)$ 时

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &\le |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\
&< L\cdot\frac{\varepsilon}{2L}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\therefore f(x,y)$ 在 Ω 上连续