P268. 1. 2.

1.

已知 $M \subseteq N$, 即 $\forall x, x \in M \to x \in N \equiv T \Leftrightarrow \neg x \in M \vee x \in N \equiv T$

$$\begin{aligned}\therefore M &= \{x|x \in M\} \\ &= \{x|x \in M \wedge (\neg x \in M \vee x \in N)\} \\ &= \{x|x \in M \wedge \neg x \in M \vee x \in M \wedge x \in N\} \\ &= \{x|x \in M \wedge x \in N\} \\ &= M \cap N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore N &= \{x|x \in N\} \\ &= \{x|x \in N \vee \neg(\neg x \in M \vee x \in N)\} \\ &= \{x|x \in N \vee (x \in M \wedge \neg x \in N)\} \\ &= \{x|(x \in N \vee x \in M) \wedge (x \in N \vee \neg x \in N)\} \\ &= \{x|x \in M \vee x \in N\} \\ &= M \cup N\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\therefore M \cap (N \cup L) &= \{x|x \in M \wedge (x \in N \vee x \in L)\} \\ &= \{x|x \in M \wedge x \in N \vee x \in M \wedge x \in L\} \\ &= (M \cap N) \cup (M \cap L)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore M \cup (N \cap L) &= \{x|x \in M \vee (x \in N \wedge x \in L)\} \\ &= \{x|(x \in M \vee x \in N) \wedge (x \in M \vee x \in L)\} \\ &= (M \cup N) \cap (M \cup L)\end{aligned}$$

3.

(1)

$\because$ 次数等于 n 的实系数多项式中不包含零多项式, 即无零元素

$\therefore$ 不构成实数域上的线性空间

(3)

n 级实对称矩阵:

对任意两个实对称矩阵 A, B, 满足 $A' = A, B' = B$

对任意实数域上的数 k, 易知 $(kA)' = kA' = kA$, 即数乘后仍然是实对称矩阵.

又因为 $(A+B)' = A' + B' = A + B$, 即数乘后仍然是实对称矩阵.

$\because$ 易知加法和数量乘法其他的法则对矩阵都成立.

$\therefore$ 全体 n 级实对称矩阵对矩阵加法和数量乘法构成实数域上的线性空间.

n 级实反称矩阵:

对任意两个实反称矩阵 A, B, 满足 $A' = -A, B' = -B$

对任意实数域上的数 k, 易知 $(kA)' = kA' = -kA$, 即数乘后仍然是实反称矩阵.

又因为 $(A+B)' = A' + B' = -A - B = -(A+B)$, 即数乘后仍然是实反称矩阵.

$\because$ 易知加法和数量乘法其他的法则对矩阵都自然成立.

$\therefore$ 全体 n 级实反称矩阵对矩阵加法和数量乘法构成实数域上的线性空间.

n 级实上三角矩阵:

对任意两个实上三角矩阵 A, B

对任意实数域上的数 k, 易知 kA 仍是实上三角矩阵, 即数乘后仍然是上三角矩阵.

又因为 $A + B$ 是实上三角矩阵, 即数乘后仍然是实上三角矩阵.

$\because$ 易知加法和数量乘法其他的法则对矩阵都自然成立.

$\therefore$ 全体 n 级实上三角矩阵对矩阵加法和数量乘法构成实数域上的线性空间.

(4)

不妨假设不平行的向量为 $\boldsymbol{a} = (2, 0)$

我们有 $\boldsymbol{b} = (1, 1), \boldsymbol{c} = (1, -1)$

那么 $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (2, 0) \parallel \boldsymbol{a}$

即 $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ 不存在于这个向量集合里, 加法不成立

$\therefore$ 不构成线性空间

(5)

对加法交换律:

$$\begin{aligned}&(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)\\=&(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\\=&(a_2+a_1,b_2+b_1+a_2a_1)\\=&(a_2,b_2)\oplus(a_1,b_1)\end{aligned}$$

加法交换律成立.

对加法结合律:

$$\begin{aligned}&((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))\oplus(a_3,b_3)\\=&(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\oplus(a_3,b_3)\\=&(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\\=&(a_1,b_1)\oplus(a_2+a_3,b_2+b_3+a_2a_3)\\=&(a_2,b_2)\oplus(a_1,b_1)\end{aligned}$$

加法结合律成立.

对零元:

$(a_1,b_1)\oplus(0,0)=(a_1,b_1)$

$\therefore (0,0)$ 二元数列是零元.

对负元:

$(a_1,b_1)\oplus(-a_1,a_1^2-b_1)=(a_1-a_1,a_1^2-b_1+b_1-a_1^2)=(0,0)$

$\therefore (-a_1,a_1^2-b_1)$ 是二元数列 (a_1,b_1) 的负元.

对数乘:

$1\circ(a_1,b_1)=(a_1,b_1+0\cdot a_1^2)=(a_1,b_1)$

$$\begin{aligned}&k(l\circ(a_1,b_1))\\=&k\circ(la_1,lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2)\\=&(kla_1,k(lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2)+\frac{k(k-1)}{2}(la_1)^2)\\=&(kla_1,klb_1+\frac{kl(kl-1)}{2}a_1^2)\\=&kl\circ(a_1,b_1)\end{aligned}$$

成立.

对数乘和加法:

$$
\begin{aligned}
&\quad (k+l)\circ(a_1,b_1)\\
&=((k+l)a_1,(k+l)b_1+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a_1^2)\\
&=(ka_1+la_1,kb_1+lb_1+\frac{k(k-1)}{2}a^2+\frac{l(l-1)}{2}a^2+kla_1^2)\\
&=k(a_1,b_1)\oplus l(a_1,b_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad k\circ((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))\\
&=k\circ(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\\
&=(k(a_1+a_2),k(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2)\\
&=(ka_1+ka_2,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2+kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2+k^2a_1a_2)\\
&=(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2)\oplus(ka_2,kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2)\\
&=k\circ(a_1,b_1)\oplus k\circ(a_2,b_2)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 构成线性空间

(6)

对于 $\alpha=(1,0)$

$\because 1\circ\alpha=(0,0)\neq(1,0)$

$\therefore$ 不构成线性空间

(7)

对于 $\alpha=(1,0)$

$\because (1+1)\circ\alpha=(1,0)\neq\alpha+\alpha=(2,0)$

$\therefore$ 不构成线性空间