数学分析第十次作业

201300035 方盛俊

7.2 (A) 1. 3. 4. (2)(4) 6. (B) 3. 4.

7.2 (A)

1.

令 $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$.

联系:

对于 $x \in I, \{S_n(x)\}$ 收敛和一致收敛到 $S(x)$ 的分析定义均可以**形式化**地写为:

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

区别:

如果仅仅是收敛, 那么这个分析定义中的 N 可以看作是关于 ε, x 的函数 $N(\varepsilon, x)$,

而对于一致收敛, 这个分析定义中的 N 与 x 无关, 只能写为 $N(\varepsilon)$.

用 $\varepsilon - N$ 语言表述 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在集合 $D \subseteq \mathbb{R}$ 不收敛于和函数 $S(x)$:

$\forall x \in D, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N$, 当 $n > N$ 时, $|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - S(x)| \geqslant \varepsilon_0$

3.

(1)

令 $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 可记为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

当 $x \geqslant 0$ 时, $0 < \frac{1}{1+x} \leqslant 1$,

则 $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 单调递减

由莱布尼茨判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

当 $-1<x<0$ 时, $\frac{1}{1+x}>1$,

则 $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 在 n 足够大之后单调递增.

令 $q=\frac{1}{1+x},q>1$

令 $b_n=(-1)^{2n-1}a_{2n-1}+(-1)^{2n}a_{2n}=a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{q^{2n}}{2n}-\frac{q^{2n-1}}{2n-1}$

$\therefore \frac{q^{2n-1}(q-1)}{2n+1}=\frac{q^{2n}-q^{2n-1}}{2n+1}<b_n<\frac{q^{2n}-q^{2n-1}}{2n}=\frac{q^{2n-1}(q-1)}{2n}$

因为左边和右边均趋于正无穷, 由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\to+\infty$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 发散.

当 $x=-1$ 时, 原式无意义, 舍去.

当 $-2\leqslant x<-1$ 时, $\frac{1}{1+x}\leqslant -1,\frac{1}{-1-x}\geqslant 1$,

则 $\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n=\frac{(-1)^n\cdot(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{-1-x}\right)^n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{-1-x}\right)^n\geqslant\frac{1}{n}$

由比较判别法可知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 发散.

当 $x<-2$ 时, $-1<\frac{1}{1+x}<0,0<\frac{1}{-1-x}<1$,

则 $\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n=\frac{(-1)^n\cdot(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{-1-x}\right)^n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{-1-x}\right)^n$

由达朗贝尔判别法可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{-1-x}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{-1-x}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{-1-x}\right)=\frac{1}{-1-x}<1$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$

(2)

$\because \left|\frac{\sin nx}{2^n}\right|\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}$

由达朗贝尔判别法

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}<0$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛

由比较判别法可知

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 绝对收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $\mathbb{R}$

(3)

由达朗贝尔判别法可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}{x^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}\cdot\frac{x}{2^{n+1}}}{x^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{x}{2}$$

以下讨论基于 n 足够大的前提下, 而有限个小于零的项不影响最终敛散性.

当 $x>2$ 时, $\frac{x}{2}>1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n}$ 发散.

当 $x = 2$ **时,** $\frac{x}{2} > 1$

由阶估法可知

$\because \lim_{n\to\infty} n \cdot 2^n \sin \frac{2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot 2^n \cdot \frac{2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n}$ 发散.

当 $0 \leqslant x < 2$ **时,** $0 \leqslant \frac{x}{2} < 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n}$ 收敛.

当 $-2 < x < 0$ **时,** $-1 < \frac{x}{2} < 0$

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| x^n \sin \frac{x}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \sin \frac{-x}{2^n}, 0 < -x < 2$

由上文的 $0 \leqslant x < 2$ 的情况可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n}$ 绝对收敛, 则其收敛.

当 $x \leqslant -2$ **时,** $\frac{x}{2} \leqslant -1$

$\lim_{n\to\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty} x^n \cdot \frac{x}{2^n} \neq 0$

由收敛级数的项必定趋向于 0 可知

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n}$ 发散.

$\therefore$ 收敛域为 $(-2, 2)$

(4)

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$

我们可以转化为 $\int_1^{+\infty} x e^{-kx} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

当 $x=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

当 $x\neq 0$ 时,

由达朗贝尔判别法可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot e^{-x}=e^{-x}$$

当 $x>0$ 时, $e^{-x}<1$, 即有 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 收敛.

当 $x<0$ 时, $e^{-x}>1$, 即有 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 发散.

$\therefore$ 收敛域为 $(0,+\infty)$

4.

(2)

$\because \left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|=\frac{1}{\frac{1}{|x|}+n^4|x|}\leqslant\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 一致收敛.

(4)

$\because |\sqrt{n}\cdot 2^{-nx}|=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{(2^x)^n}\leqslant\sqrt{n}\cdot\frac{1}{(2^\delta)^n}=\sqrt{n}\cdot 2^{-\delta n}$

由达朗贝尔判别法可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot 2^{-\delta(n+1)}}{\sqrt{n}\cdot 2^{-\delta n}}=\frac{1}{2^\delta}<1$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot 2^{-\delta n}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot 2^{-nx}$ 一致收敛.

6.

$\because \left|\frac{\sin nx}{n^4}\right| \leqslant \frac{1}{n^4}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 一致收敛

$\therefore f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$

$\because \left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛

$\therefore f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

7.2 (B)

3.

对于 (a, b) 上任意一点 $x = x_0$, 由题目可知,

在开区间 (a, b) 的一个闭子空间 $[x_0, \frac{a+b}{2}]$ 或 $[\frac{a+b}{2}, x_0]$ 上, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛

$\because x_0 \in [\frac{a+b}{2}, x_0]$ 或 $x_0 \in [x_0, \frac{a+b}{2}]$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 $x = x_0$ 处一致收敛, 也是收敛的

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 内处处收敛.

4.

(1)

由 Cauchy 根值法可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right|=|x|$$

当 $-1<x<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 绝对收敛, 则收敛.

当 $x\geqslant 1$ 时, $\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\neq 0$, 则发散.

当 $x\leqslant -1$ 时, $x+\frac{1}{n}\leqslant 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(-x-\frac{1}{n}\right)^n$

令 n 为偶数, $\left(-x-\frac{1}{n}\right)^n\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{e}\neq 0$, 则发散.

$\therefore$ 该级数的收敛区域为 $(-1,1)$

(2)

易知对 $x=0$ 的情况成立,

要证对 $\forall[a,b]\subset(-1,1)$ 均一致收敛,

可证对 $\forall[-a,a]\subset(-1,1)$ 均一致收敛, 其中 $0<a<1$

取 $a<r<1$, 对 $\forall x\in[-a,a]$

有 $\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|<\left(r+\frac{1}{n}\right)^n$

由 (1) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(r+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛, 由 M 判别法可知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 是一致收敛的.

$\therefore$ 该级数在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

(3)

令 $S_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{n}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$, 级数收敛于 $S(x)$

对 $\forall x_0\in(-1,1)$, 均 $\exists r$ 使得 $x_0\in[-r,r]\subset(-1,1)$

由内闭一致收敛可知, 对于 $x_0\in[-r,r]$ 有 $S_n(x)\rightrightarrows S(x)$

则由一致收敛的函数级数的连续性可知

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x_0) = S(x)$, 即在 $x = x_0$ 这一点连续

因为对于任意 $x_0 \in (-1, 1)$ 均连续

$\therefore$ 该级数的和函数在 $(-1, 1)$ 内连续.