概率统计第十四次作业

201300035 方盛俊

2.

(1)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{c}^{+\infty} x \cdot \theta c^\theta x^{-(\theta+1)} \mathrm{d}x = \theta c^\theta \int_{c}^{+\infty} x^{-\theta} \mathrm{d}x = \frac{c\theta}{\theta - 1}$$

令样本矩等于总体矩 $\bar{X} = E[X]$ 可得

则 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X} - c}$, 矩估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{x}}{\bar{x} - c}$

其中 $\bar{X} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i, \bar{x} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$

(2)

$$E[X] = \int_{0}^{1} x \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta} - 1} \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} + 1}$$

则 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \left(\dfrac{\bar{X}}{\bar{X} - 1}\right)^2$, 矩估计值为 $\hat{\theta} = \left(\dfrac{\bar{x}}{\bar{x} - 1}\right)^2$

(3)

$$E[X] = \sum_{x=1}^{m} x \cdot \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} = mp$$

则 p 的矩估计量为 $\hat{p} = \dfrac{\bar{X}}{m}$, 矩估计值为 $\hat{p} = \dfrac{\bar{x}}{m}$

3.

(1)

似然函数对数为 $\ln L=\ln\prod_{i=1}^{n}\theta c^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}=n\ln\theta+\theta n\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

对 θ 求导令其等于零 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

可得最大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln c}$

进而最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-\ln c}$

(2)

似然函数对数为 $\ln L=\ln\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=n\ln\sqrt{\theta}+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

对 $\sqrt{\theta}$ 求导令其等于零 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sqrt{\theta}}\ln L=\frac{n}{\sqrt{\theta}}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

可得最大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$

进而最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$

(3)

似然函数对数为 $\ln L=\ln\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}+\ln p\sum_{i=1}^{n}x_i+\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)$

对 p 求导令其等于零 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{1-p}(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0$

可得最大似然估计值 $\hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{nm}=\frac{\bar{x}}{m}$

进而最大似然估计量 $\hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{nm}=\frac{\bar{X}}{m}$

4.

(1)

因为 $E[X] = 1 \cdot \theta^2 + 2 \cdot 2\theta(1-\theta) + 3 \cdot (1-\theta)^2 = 3 - 2\theta$

令 $\bar{X} = \frac{1}{3}(1+2+1) = \frac{4}{3} = E[X] = 3 - 2\theta$

可得 θ 的矩估计值为 $\theta = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

最大似然函数对数为 $\ln L = \ln \theta^2 + \ln 2\theta(1-\theta) + \ln \theta^2 = 5\ln\theta + \ln(1-\theta) + \ln 2$

对 θ 求导等于零 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln L = \frac{5}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$

可得最大似然估计值 $\hat{\theta} = \frac{5}{6}$

(2)

似然函数的对数为 $\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} (\frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}) = \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$

对 λ 求导令其等于零 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln L = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0$

则 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$

因为 $E[X] = \lambda$, 因此矩估计量也为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$

(3)

似然函数的对数为 $\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} \binom{x_i - 1}{r-1} p^r (1-p)^{x_i - r} = \sum_{i=1}^{n} \ln \binom{x_i - 1}{r-1} + nr\ln p + (\sum_{i=1}^{n} (x_i - r)) \ln(1-p)$

对 p 求导令其等于零 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \ln L = \frac{nr}{p} + \frac{nr - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$

则 p 的最大似然估计值为 $\hat{p} = \frac{r}{\bar{x}}$

8.

(1)

似然函数的对数为 $\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

对 θ 求导等于零得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln L = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$

因此 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$

因为 $U = e^{-\frac{1}{\theta}}$ 是单调反函数,

则 U 的最大似然估计值为 $\hat{U} = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}}$

(2)

μ 的最大似然估计值为 $\bar{x}$

而 $\theta = P(X > 2) = 1 - P(X - \mu \leqslant 2 - \mu) = 1 - \Phi(2 - \mu)$ 是一个单调函数

因此 θ 最大似然估计值为 $\hat{\theta} = 1 - \Phi(2 - \bar{x})$

(3)

似然函数对数为 $\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{m-x_i} = \sum_{i=1}^{n} \ln \binom{m}{x_i} + \ln \theta \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(1-\theta) \sum_{i=1}^{n} (m - x_i)$

对 θ 求导令其等于零 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln L = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{1-\theta}(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i) = 0$

可得 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{nm} = \frac{\bar{x}}{m}$

因为 $\theta = \frac{1}{3}(1 + \beta)$ 则 $\beta = 3\theta - 1$

可得 β 的最大似然估计值 $\hat{\beta} = \frac{3\bar{x}}{m} - 1$

9.

(1)

由题目可知 $E[S_1^2]=E[S_2^2]=\sigma^2$, 则有

$$\begin{aligned}E[S_w^2]&=E[\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}]\\&=\frac{(n_1-1)E[S_1^2]+(n_2-1)E[S_2^2]}{n_1+n_2-2}\\&=\sigma^2\end{aligned}$$

因此 S_w^2 是 σ^2 的无偏估计量.

(2)

$$E[\frac{\sum_{i=1}^n a_iX_i}{\sum_{i=1}^n a_i}]=\frac{\sum_{i=1}^n a_iE[X_i]}{\sum_{i=1}^n a_i}=\frac{\sum_{i=1}^n a_i\mu}{\sum_{i=1}^n a_i}=\mu$$

因此其是 μ 的无偏估计量.

10.

(1)

$$\begin{aligned}E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]&=c\sum_{i=1}^{n-1}(D[X_{i+1}-X_i]-(E[X_{i+1}-X_i])^2)\\&=c\sum_{i=1}^{n-1}(D[X_{i+1}]+D[X_i])\\&=2(n-1)c\sigma^2\end{aligned}$$

要使得 $E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=\sigma^2$

因此要 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$

(2)

要使 $E[\bar{X}^2-cS^2]=E[\bar{X}^2]-cE[S^2]=(\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2)-c\sigma^2=\mu^2$

则 $c=\dfrac{1}{n}$

11.

(1)

似然函数对数为 $\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}} = -n \ln \theta + \frac{1-\theta}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

则求导等于零可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln L = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$

则最大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

(2)

因为 $E[-\ln X] = \int_0^1 (-\ln x) \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \mathrm{d}x = -x^{\frac{1}{\theta}} \ln x|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x} x^{\frac{1}{\theta}} \mathrm{d}x = \theta$

因此 $E[\hat{\theta}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[-\ln X_i] = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta$

因此 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

12.

对于均值为 θ 的指数分布有 $E[X] = \theta, D[X] = \theta^2$, 因此

$E[T_1] = \frac{1}{6}(E[X_1] + E[X_2]) + \frac{1}{3}(E[X_3] + E[X_4]) = \frac{\theta}{3} + \frac{2\theta}{3} = \theta$

$E[T_2] = \frac{1}{5}(E[X_1] + 2E[X_2] + 3E[X_3] + 4E[X_4]) = 2\theta$

$E[T_3] = \frac{1}{4}(E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4]) = \theta$

因此 T_1, T_3 均为 θ 的无偏估计, 但 T_2 不是.

又因为 $D[T_1] = D[\frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4)] = \frac{1}{36} D[X_1] + \frac{1}{36} D[X_2] + \frac{1}{9} D[X_3] + \frac{1}{9} D[X_4] = \frac{5}{18} \theta^2$

而 $D[T_3] = \frac{1}{16}(D[X_1] + D[X_2] + D[X_3] + D[X_4]) = \frac{1}{4} \theta^2$

因此 T_3 比 T_1 有效.

13.

(1)

因为有 $D[\hat{\theta}] > 0$

所以有 $E[\hat{\theta}^2] = D[\hat{\theta}] + (E[\theta])^2 = D[\hat{\theta}] + \theta^2 > \theta^2$

所以 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计.

(2)

因为似然函数 $L(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0 < x_1, \cdots, x_n \leqslant \theta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

可以看出, $L(\theta)$ 随着 θ 的递增而递减, 所以 θ 取最小值时有 $L(\theta)$ 最大,

因此 $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

因为总体 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

因此 $\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为 $F_{\hat{\theta}}(z) = [F(z)]^n = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (\dfrac{z}{\theta})^n, & 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

进而可知 $\hat{\theta}$ 的概率密度为 $f_{\hat{\theta}}(z) = \begin{cases} \dfrac{n}{\theta}(\dfrac{z}{\theta})^{n-1}, & 0 \leqslant z \leqslant \theta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

于是 $E[\hat{\theta}] = \displaystyle\int_0^\theta z \cdot \frac{n}{\theta}(\frac{z}{\theta})^{n-1} \mathrm{d}z = \frac{n\theta}{n+1} \neq \theta$

因此 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计.

14.

由 $E[\bar{X}_1]=E[\bar{X}_2]=\mu$ 且 $a+b=1$ 可知

$E[Y]=E[a\bar{X}_1+b\bar{X}_2]=aE[\bar{X}_1]+bE[\bar{X}_2]=a\mu+b\mu=\mu$

所以 $Y=a\bar{X}_1+b\bar{X}_2$ 均是 μ 的无偏估计.

因为 $D[\bar{X}_1]=\dfrac{\sigma^2}{n_1},D[\bar{X}_2]=\dfrac{\sigma^2}{n_2}$

所以有 $D[Y]=a^2D[\bar{X}_1]+b^2D[\bar{X}_2]=(\dfrac{a^2}{n_1^2}+\dfrac{b^2}{n_2^2})\sigma^2\geqslant\sigma^2\cdot 2\sqrt{\dfrac{a^2}{n_1^2}\cdot\dfrac{b^2}{n_2^2}}=\dfrac{2ab\sigma^2}{n_1n_2}$

当且仅当 $\dfrac{a^2}{n_1^2}=\dfrac{b^2}{n_2^2}$ 时等号成立.

则 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2},b=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 时, $D[Y]$ 达到最小值 $\dfrac{2ab\sigma^2}{n_1n_2}=\dfrac{2\sigma^2}{(n_1+n_2)^2}$