数字信号处理
作业四

方盛俊 201300035

2022 年 12 月 12 日

作业提交注意事项

(1) 本次作业提交截止时间为 **2022/12/18 23:59:59**，截止时间后不再接收作业，本次作业记零分；

(2) 作业提交方式：使用此 LaTeX 模板书写解答，只需提交编译生成的 pdf 文件，将 pdf 文件以 sftp 方式上传，账号为 dsp2022，密码为 12345asd!@。请远程连接 sftp://www.lamda.nju.edu.cn，提交到 /D:/courses/DSP2022/HW/HW4 路径下。

(3) 文件命名方式：学号-姓名-作业号-v 版本号, 例 MG1900000-张三-4-v1；如果需要更改已提交的解答，请在截止时间之前提交新版本的解答，并将版本号加一；

(4) 未按照要求提交作业，或 pdf 命名方式不正确，将会被扣除部分作业分数。

1 [60pts] 拉普拉斯变换

1. 计算下列函数的拉普拉斯变换.

   (1) $te^{-(t-2)}u(t-1)$

   (2) $e^{-at}f\left(\frac{t}{a}\right)$, 已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

   (3) $t^2\cos(2t)$

   (4) $t^n u(t)$

   (5) $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & 0 < t < \frac{T}{2},\ T = \frac{2\pi}{\omega} \\ 0 & t \text{ 为其他值} \end{cases}$

2. 求 $\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}$ 的拉普拉斯反变换.

- 1.

  (1)

  对于 $x(t) = te^{-(t-2)}u(t-1)$

  求拉普拉斯变换有

  $$\begin{aligned} X(s) &= \int_{0^-}^{\infty} te^{-(t-2)}u(t-1)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \int_{1^-}^{\infty} te^{-(t-2)}e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^2}{(s+1)^2}\int_{1^-}^{\infty}(s+1)te^{-(s+1)t}\mathrm{d}(s+1)t \\ &= \frac{(-(s+1)t-1)e^{-(s+1)t+2}}{(s+1)^2}\Big|_{1^-}^{\infty} \\ &= \frac{(s+2)e^{-s+1}}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

  收敛域为 $\sigma > -1$.

  (2)

  对于 $x(t) = e^{-at}f(\dfrac{t}{a})$, 已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 设 $f(t)$ 收敛域为 $\sigma > \sigma_0$.

  由展缩特性有 $\mathcal{L}[f(\dfrac{t}{a})] = aF(as)$, 收敛域变为 $\sigma > \dfrac{\sigma_0}{a}$.

  由指数加权和有 $X(s) = \mathcal{L}[e^{-at}f(\dfrac{t}{a})] = aF(a(s+a)) = aF(as+a^2)$,

  收敛域为 $\sigma > \dfrac{\sigma_0}{a} - a$.

  (3)

  由于 $\mathcal{L}[\cos 2t] = \dfrac{s}{s^2+2^2} = \dfrac{s}{s^2+4}$,

  由线性加权特性可得

$$\mathcal{L}[t^2\cos(2t)] = \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{L}[\cos 2t]}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(\frac{s}{s^2+4}) = \frac{2s(s^2-12)}{(s^2+4)^3}$$

收敛域为 $\sigma > 0$.

(4)

由于 $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$,

由线性加权特性可得

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = (-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}(\frac{1}{s}) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

收敛域为 $\sigma > 0$.

(5)

对于 $x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & 0 < t < \frac{T}{2}, T = \frac{2\pi}{\omega} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

求拉普拉斯变换有

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0^-}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0^-}^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2j(s-j\omega)}\int_{0^-}^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-(s-j\omega)t}\mathrm{d}(s-j\omega)t \\
&\quad - \frac{1}{2j(s+j\omega)}\int_{0^-}^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-(s+j\omega)t}\mathrm{d}(s+j\omega)t \\
&= \frac{-e^{-(s-j\omega)t}}{2j(s-j\omega)}|_{0^-}^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{-e^{-(s+j\omega)t}}{2j(s+j\omega)}|_{0^-}^{\frac{\pi}{\omega}} \\
&= (\frac{-e^{-(s-j\omega)\frac{\pi}{\omega}}}{2j(s-j\omega)} - \frac{-1}{2j(s-j\omega)}) - (\frac{-e^{-(s+j\omega)\frac{\pi}{\omega}}}{2j(s+j\omega)} - \frac{-1}{2j(s+j\omega)}) \\
&= \frac{\omega(e^{\frac{\pi s}{\omega}}+1)e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{\omega^2+s^2}
\end{aligned}$$

收敛域为 $\sigma > -\infty$.

- 2.

进行部分分式展开:

$$X(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6} = \frac{4s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3}$$

其中

$$k_1 = (s+2)X(s)|_{s=-2} = \frac{4s+5}{s+3}|_{s=-2} = -3$$

$$k_2 = (s+3)X(s)|_{s=-3} = \frac{4s+5}{s+2}|_{s=-3} = 7$$

即有 $X(s) = -\frac{3}{s+2} + \frac{7}{s+3}$

进行拉普拉斯反变换可得

$x(t) = -3e^{-2t}u(t) + 7e^{-3t}u(t)$

2 [40pts] 拉普拉斯变换的应用

已知一连续时间 LTI 系统的零状态响应

$$y(t) = \left(1 + 0.6e^{-20t} - 1.6e^{-10t}\right) x(t)$$

已知 $x(t) = u(t)$, 由 s 域求解:

(1) 该系统的系统函数 $H(s)$ 并画出零极点分布图;

(2) 写出描述系统的微分方程和系统, 并求 $h(t)$;

(3) 判断系统是否因果稳定.

- (1)

  由 $x(t) = u(t)$ 可知

  零状态响应和激励信号的拉普拉斯变换分别为

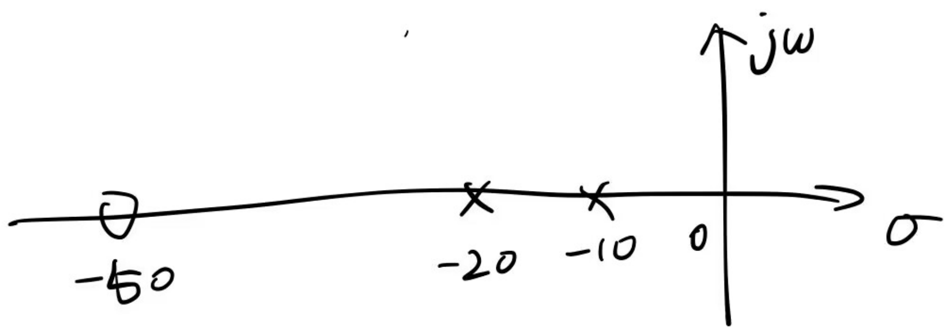
  $Y_{zs}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.6}{s+10} + \frac{0.6}{s+20} = \frac{4(s+50)}{s(s+10)(s+20)}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$

  $X(s) = \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$

  因此有系统函数

  $H(s) = \frac{Y_{sz}(s)}{X(s)} = \frac{4(s+50)}{(s+10)(s+20)} = \frac{4s+200}{s^2+30s+200}, \quad \mathrm{Re}(s) > -10$

  对应的零极点分布图为



- (2)

  由系统函数

  $H(s) = \frac{Y_{sz}(s)}{X(s)} = \frac{4(s+50)}{(s+10)(s+20)} = \frac{4s+200}{s^2+30s+200}, \quad \mathrm{Re}(s) > -10$

  可得

  $(s^2 + 30s + 200)Y_{zs}(s) = (4s + 200)X(s)$

两边进行拉普拉斯反变换, 可得描述系统的微分方程为

$y''(t) + 30y'(t) + 200y(t) = 4x'(t) + 200x(t)$

将系统函数进行部分分式展开有

$H(s) = \dfrac{Y_{sz}(s)}{X(s)} = \dfrac{4(s+50)}{(s+10)(s+20)} = \dfrac{k_1}{s+10} + \dfrac{k_2}{s+20}$

其中

$k_1 = (s+10)H(s)|_{s=-10} = \dfrac{4(s+50)}{s+20}|_{s=-10} = 16$

$k_2 = (s+20)H(s)|_{s=-20} = \dfrac{4(s+50)}{s+10}|_{s=-20} = -12$

因此我们有

$H(s) = \dfrac{Y_{sz}(s)}{X(s)} = \dfrac{4(s+50)}{(s+10)(s+20)} = \dfrac{16}{s+10} - \dfrac{12}{s+20}$

再进行拉普拉斯反变换, 可得系统冲击响应为

$h(t) = (16e^{-10t} - 12e^{-20t})u(t)$

- (3)

  系统冲击响应 $h(t) = (16e^{-10t} - 12e^{-20t})u(t)$,

  满足 $h(t) = 0, t < 0$, 因此系统为因果系统.

  由 (1) 中零极点分布图可以看出, 系统的极点位于 s 左半平面, 因此系统稳定.