Ch 4 连续型随机变量

回顾前一次课

分布函数：$F(x) = P(X \le x)$

- 单调性: 若$x_1 < x_2$, 则$F(x_1) \le F(x_2)$
- 规范性: $F(x) \in [0,1]$且$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
- 右连续性: $F(x+0) = F(x)$

连续随机变量、概率密度函数：$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- 非负性：$f(x) \ge 0$
- 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

连续随机变量分布函数$F(x)$与$f(x)$的连续、可导关系

连续型随机变量$P(X = x) = 0$

期望$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$及其性质

期望的另一种计算公式

对非负随机变量X, 有

$$E[X]=\int_0^{+\infty}P(X>\ t)dt$$

对非负随机变量$g(X)$, 有

$$E[X]=\int_0^{+\infty}P(g(X)>\ t)dt$$

方差

设连续随机变量X的概率密度函数为$f(x)$,称

$$\mathrm{Var}(X)=E\big(X-E(X)\big)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(t-E(X)\big)^2 f(t)dt$$

为**随机变量X的方差**

等价定义为

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 f(t)dt-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt\right)^2$$

对常数a,b和随机变量X, 有$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}\,(X)$

Ch 4.2 常用连续型随机变量

均匀分布

随机变量X落入区间$[a,b]$内任何一个点的概率相等

若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

称$\boldsymbol{X}$**服从区间**$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$**上的均匀分布, 记**$\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{U}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

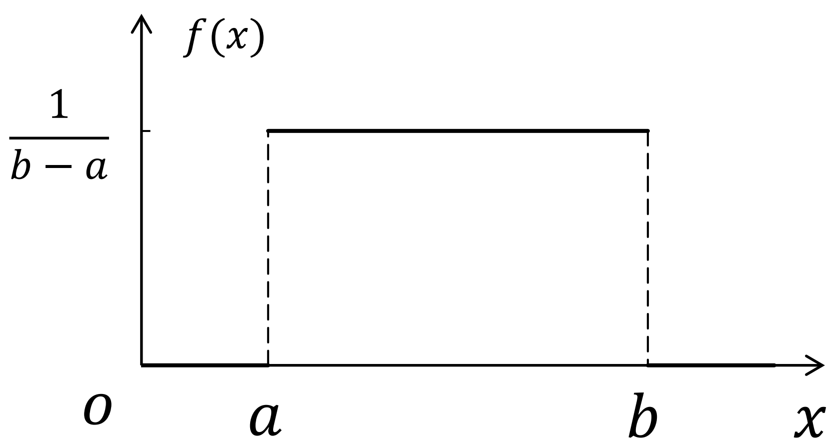
验证$f(x)$构成一个分布

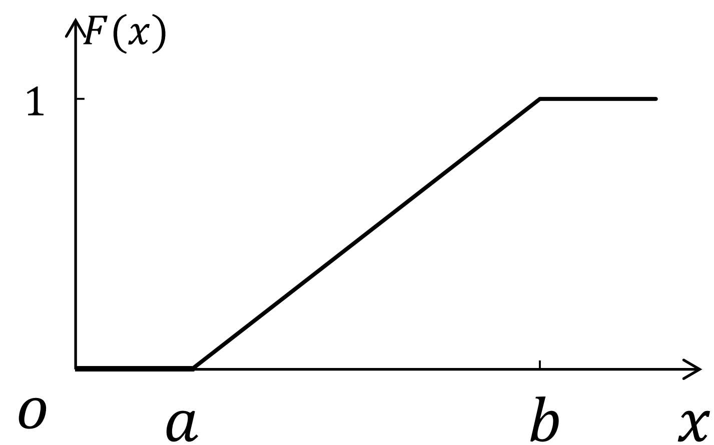
均匀分布

几何解释： 若$X \sim \mathrm{U}(a,b)$，则X落入$[a,b]$ 内任一子区间的概率与区间的长度成正比, 与该区间的位置无关

$X \sim U(a,b)$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$





均匀分布的期望与方差

若$X \sim U(a,b)$，则

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

例题

设随机变量$\xi \sim U(-3,6)$，试求方程$4x^2 + 4\xi x + \xi + 2 = 0$有实根的概率

已知随机变量$X \sim U(0,1)$，对任意$\lambda > 0$求$E[\lambda^{\max(X,1-X)}]$

指数分布

给定常数$\lambda > 0$, 若随机变量X的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

称X服从参数为λ的指数分布, 记 $X \sim e(\lambda)$

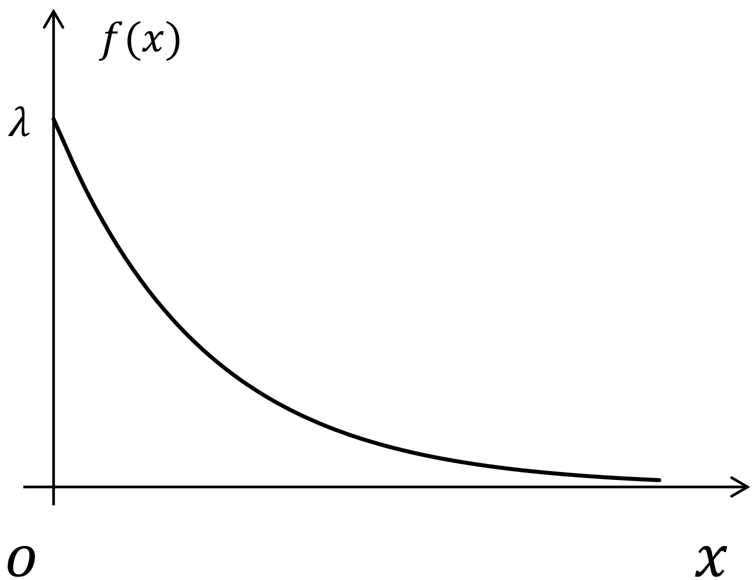
指数分布一般用于时间等待等问题

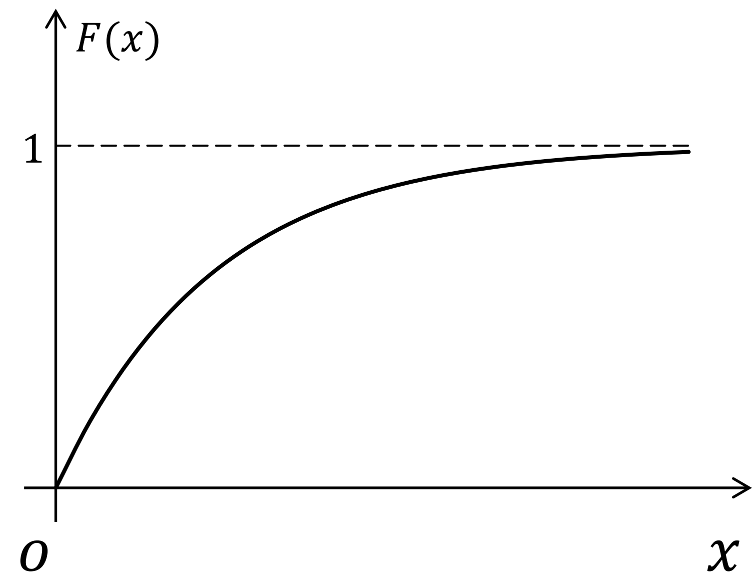
检验指数分布函数构成一个分布

指数分布的分布函数

分布函数：当$x \le 0$时有$F(x)=0$，当$x>0$时有

$$F(x)=\int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}dt = 1-e^{-\lambda x}$$





指数分布的期望与方差

若随机变量$X \sim e(\lambda)$, 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

指数分布的无记忆性

若随机变量$X \sim e(\lambda)$, 则对任意$s > 0, t > 0$, 有

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

指数分布是唯一具有无记忆性的连续型随机变量

例题

打一次公用电话所用时间$X \sim e(1/10)$, 若某人刚好在前面使用公用电话, 则你需等待$10 \sim 20$分钟的概率

正态分布 (Normal distribution/Gaussian distribution)

给定$u \in (-\infty, +\infty)$和$\sigma > 0$, 随机变量X的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

称X服从参数为μ, σ^2的正态分布, 记$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

特别地, 若$\mu = 0$和$\sigma = 1$, 称$N(0,1)$为标准正态分布, 其密度函数为

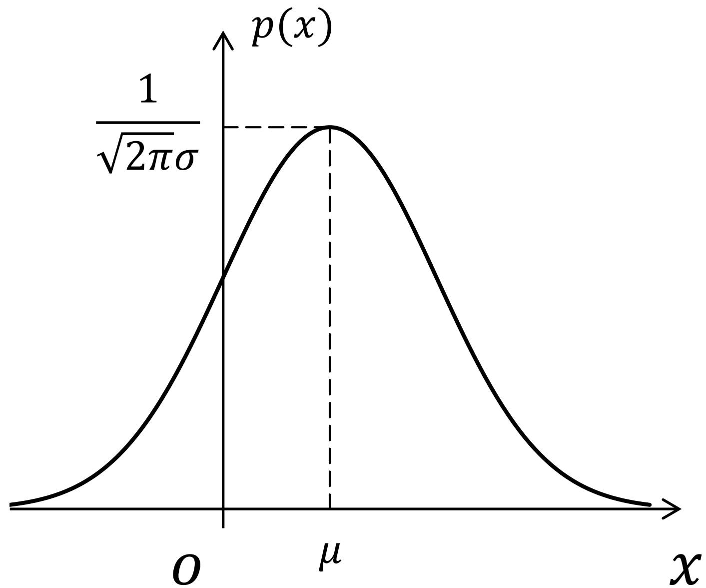
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

验证$f(x)$构成一个分布

正态分布的图像

关于直线$x=\mu$对称, 即$f(\mu-x)=f(\mu+x)$

当$x=\mu$时取最大值$f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$



正态分布的图像

概率密度函数的二阶导数

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left((x-\mu)^2 - \sigma^2\right)$$

可得其拐点为$x = \mu \pm \sigma$

根据

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

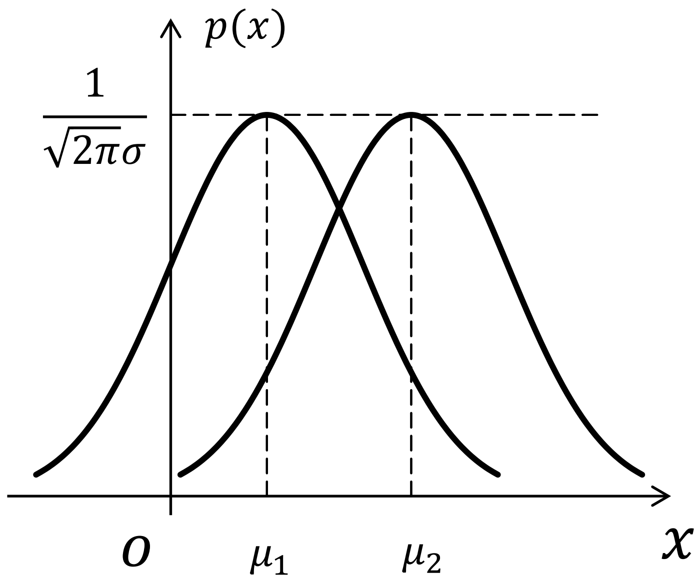
可得渐近线为$y = 0$

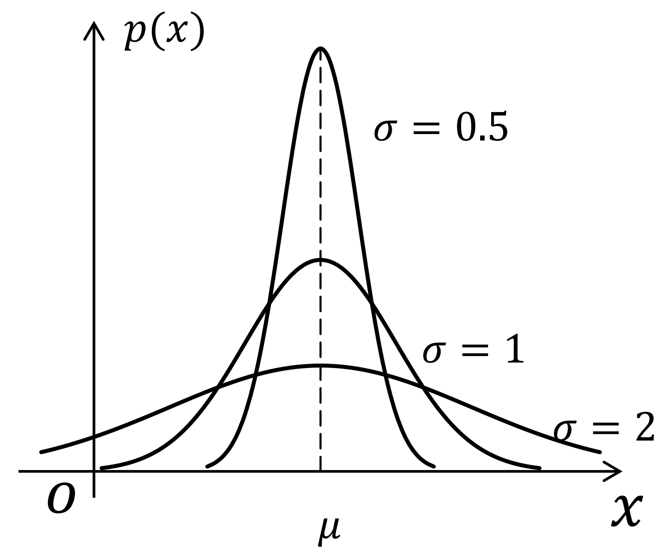
正态分布的图像

当σ固定时改变μ, $f(x)$沿x轴左右平行移动, 不改变形状

当μ固定改变σ的值, 根据$f(x)$最大值$f(\mu) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma$知:

- 当σ越小, 图形越陡, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ 落入μ附近概率越大
- 反之σ越大, 图形越平坦, X落入μ附近的概率越小





标准正态分布与一般分布的相互转换

若$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

若$X \sim N(0,1)$, 则

$$Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$$

正态分布的期望和方差

若$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$\mathrm{E}(X) = \mu \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

若$X \sim N(0,1)$, 则

$$\mathrm{E}(X) = 0 \qquad \mathrm{Var}(X) = 1$$