

第七章：根轨迹法

2022年11月18日

内容安排

7.1

根轨迹的基本概念

7.2

根轨迹绘制的基本方法

7.3

基于根轨迹的控制系统分析

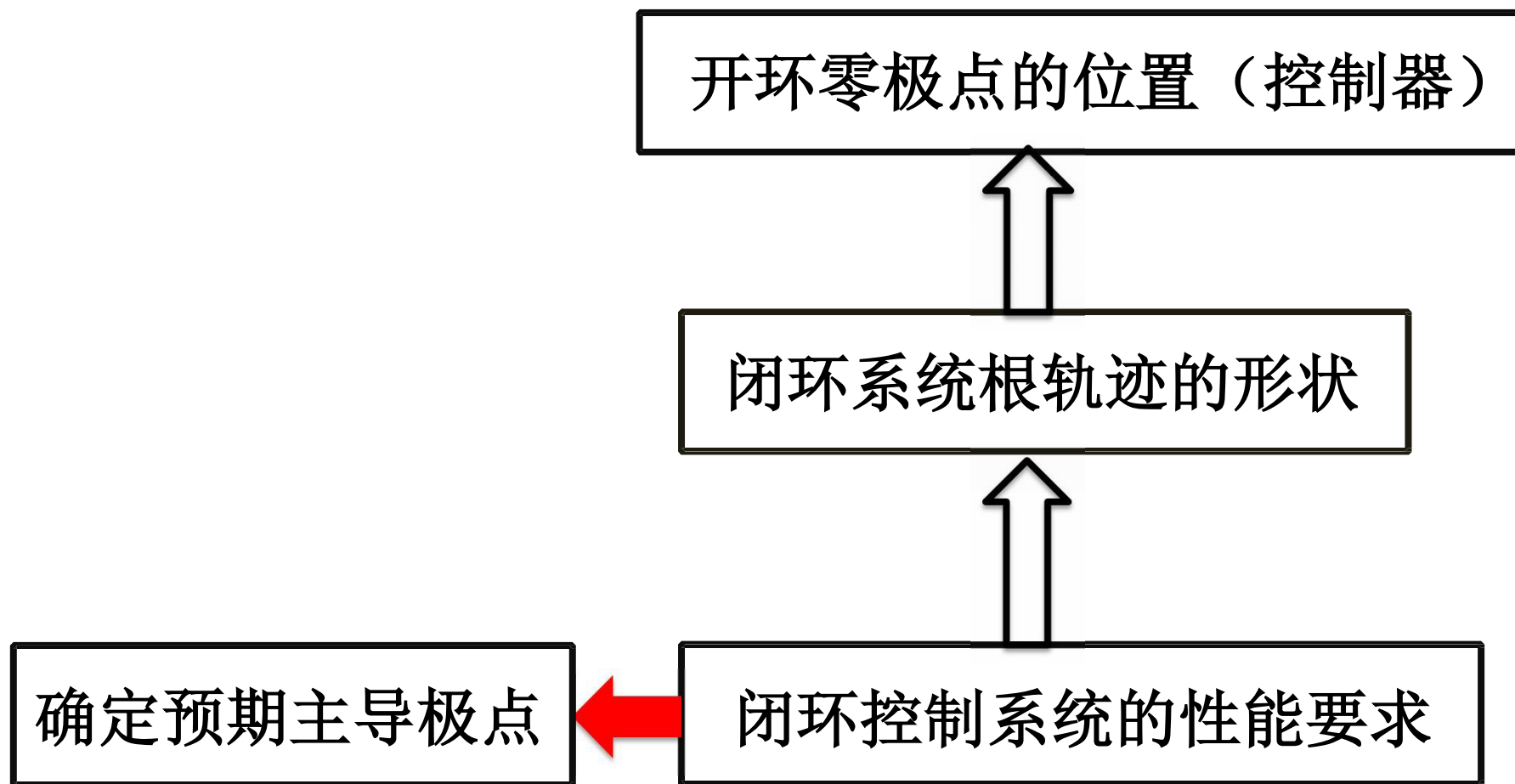
7.4

基于根轨迹的控制系统设计

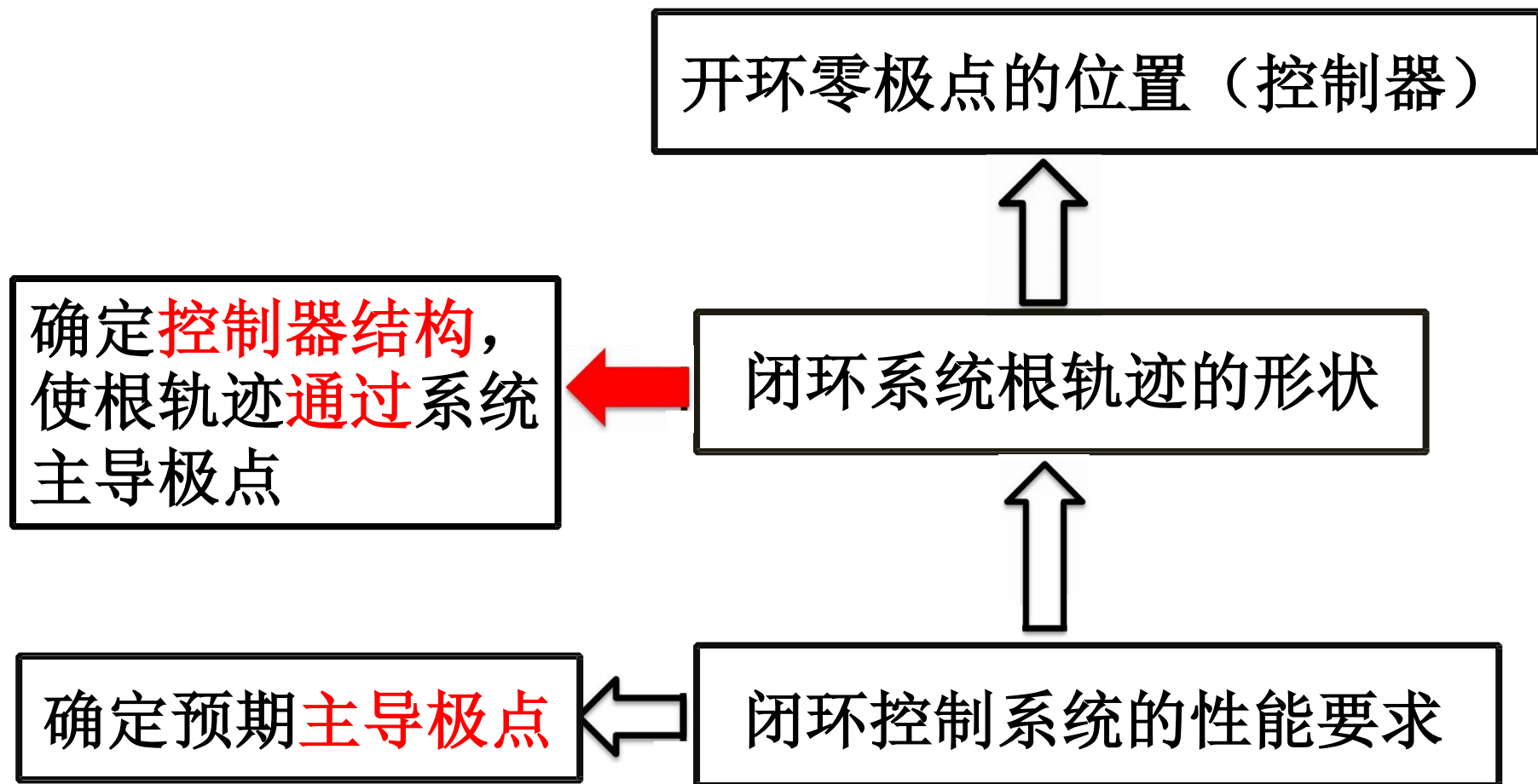
7.5

MATLAB在根轨迹中的应用

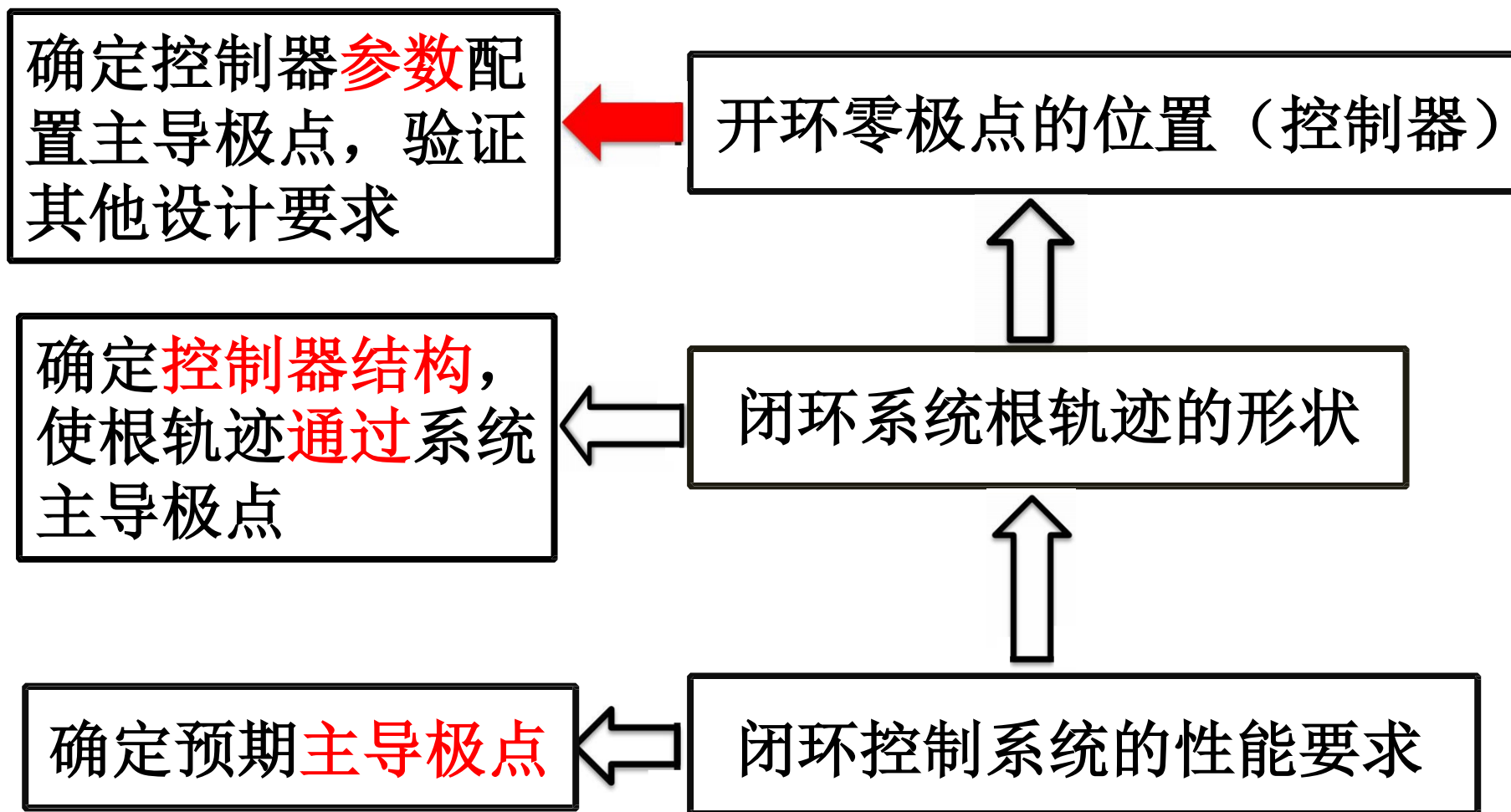
根轨迹控制器设计的基本思想



控制器根轨迹设计的基本思想

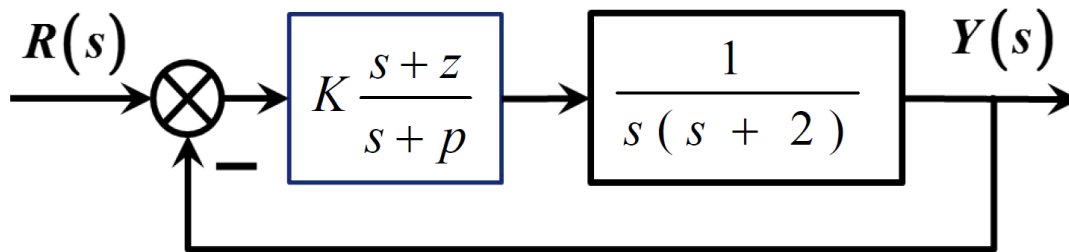


控制器根轨迹设计的基本思想



例7.1：设计**积分型控制器**，希望闭环系统满足：

- 1) 超调量不大于5%；
- 2) 斜坡响应的稳态误差小于5%。



积分型控制器

1、比例积分控制器： $G_c(s) = K_p + K_i / s$

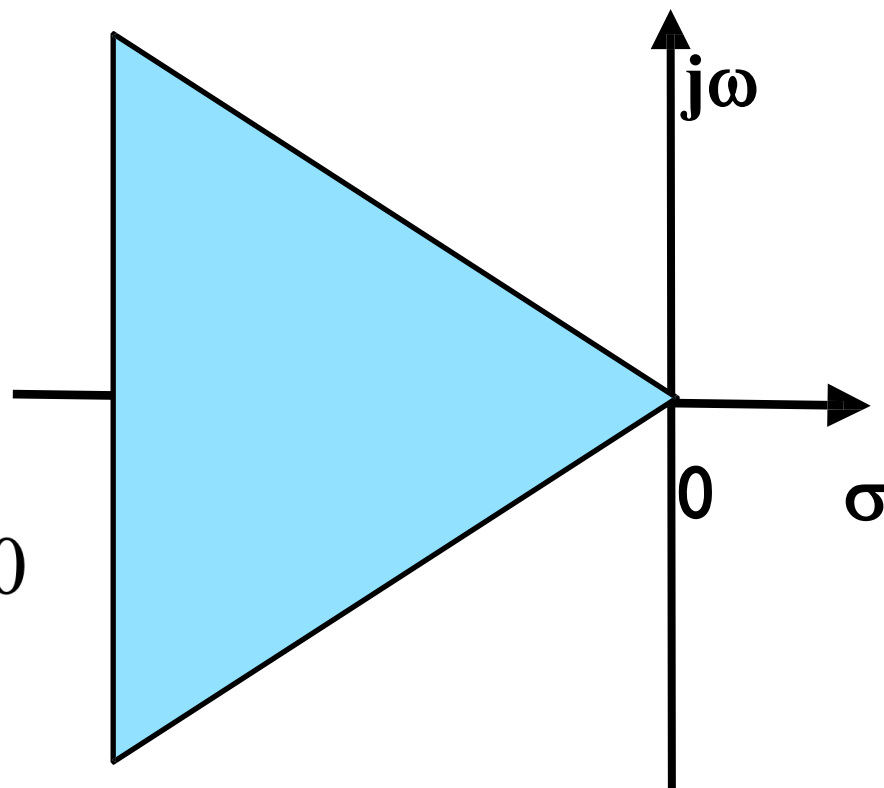
提高了系统型次

2、**滞后校正网** $G_c(s) = \frac{s + z}{s + p}, p \leq z$

解：1) 性能指标的要求及主导极点可行域

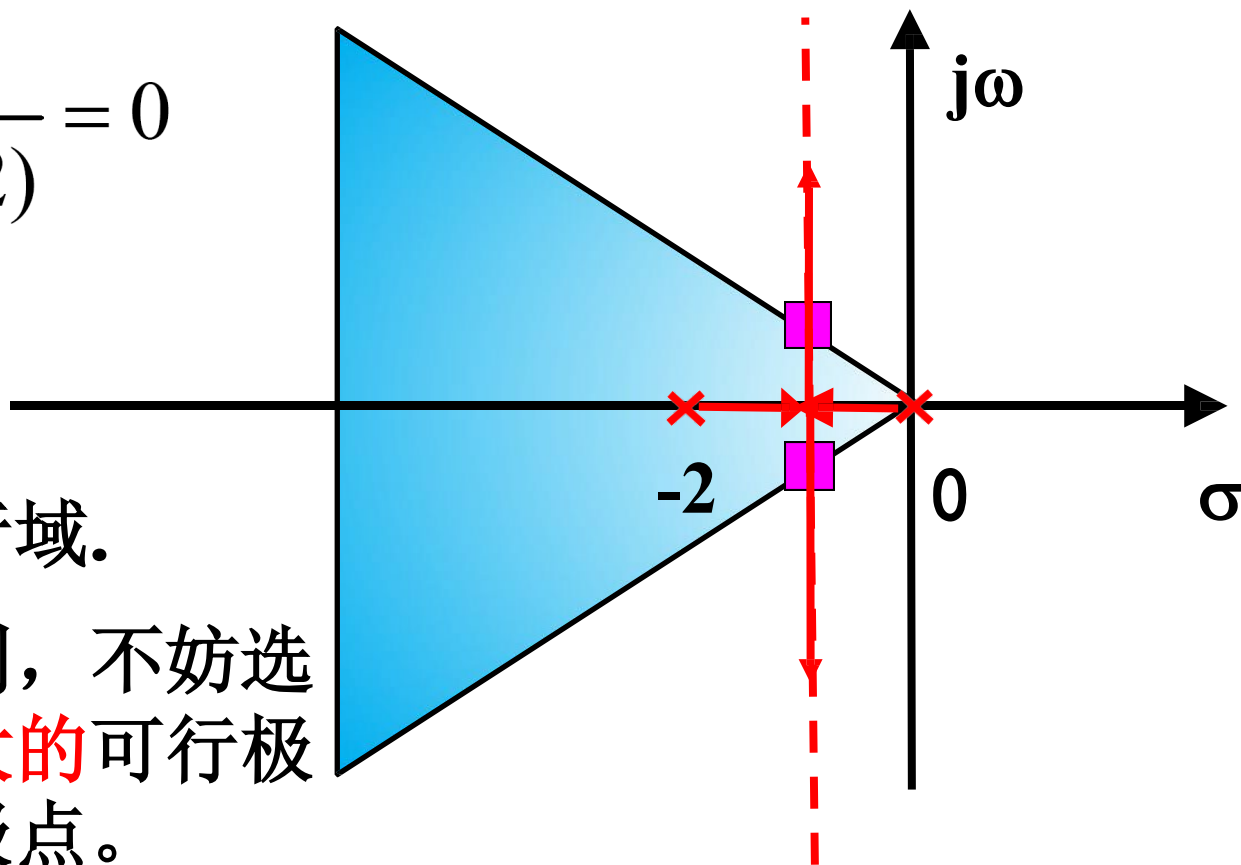
$$P.O. \leq 5\% \Rightarrow \zeta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e_{ss} \leq 5\% \Rightarrow K_v = \frac{K}{2} \geq 20$$



2) 未校正系统根轨迹方程为:

$$1 + K \frac{1}{s(s+2)} = 0$$



根轨迹**经过**可行域。

按照可接受原则，不妨选取匹配增益**最大的**可行极点为预期主导极点。

$$S_{d1,2} = -1 \pm j$$

3) 确定匹配增益，验证是否达到精度要求

幅值条件：

$$\left| KG(s)H(s) \right| = \frac{K |s + z_1| \cdots |s + z_m|}{|s + p_1| \cdots |s + p_n|} = 1$$

未校正系统的匹配增益及静态速度误差系数分别为：

$$K = |s_d| |s_d + 2| = 2$$

$$K_v = \frac{K}{2} = 1$$

远远**不能**满足精度要求！

4) 确定滞后校正网：网络零、极点

双重目的：1、保持根轨迹通过主导极点，
2、提高静态速度误差系数。

校正前、后，预期主导极点在根轨迹上的相角条件分别为：

$$-\angle(s_d + 2) - \angle s_d = -\pi$$

$$\angle(s_d + z) - \angle(s_d + p) - \angle(s_d + 2) - \angle s_d = -\pi$$

这要求

$$\angle(s_d + z) - \angle(s_d + p) = 0$$

双重目的：**1**、保持根轨迹基本不变，
2、提高静态速度误差系数。

校正后系统的静态速度误差系数变为：

$$K_v = \frac{K}{2} \bullet \frac{z}{p} = \frac{z}{p}$$

滞后校正网要同时做到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{p} &\geq 20 \\ \angle(s_d + z) - \angle(s_d + p) &= 0 \end{aligned} \right\} ?$$

将网络零极点配置在**远离**主导极点的**原点附近**，并达到需要的零极点比，可以实现双重目标。

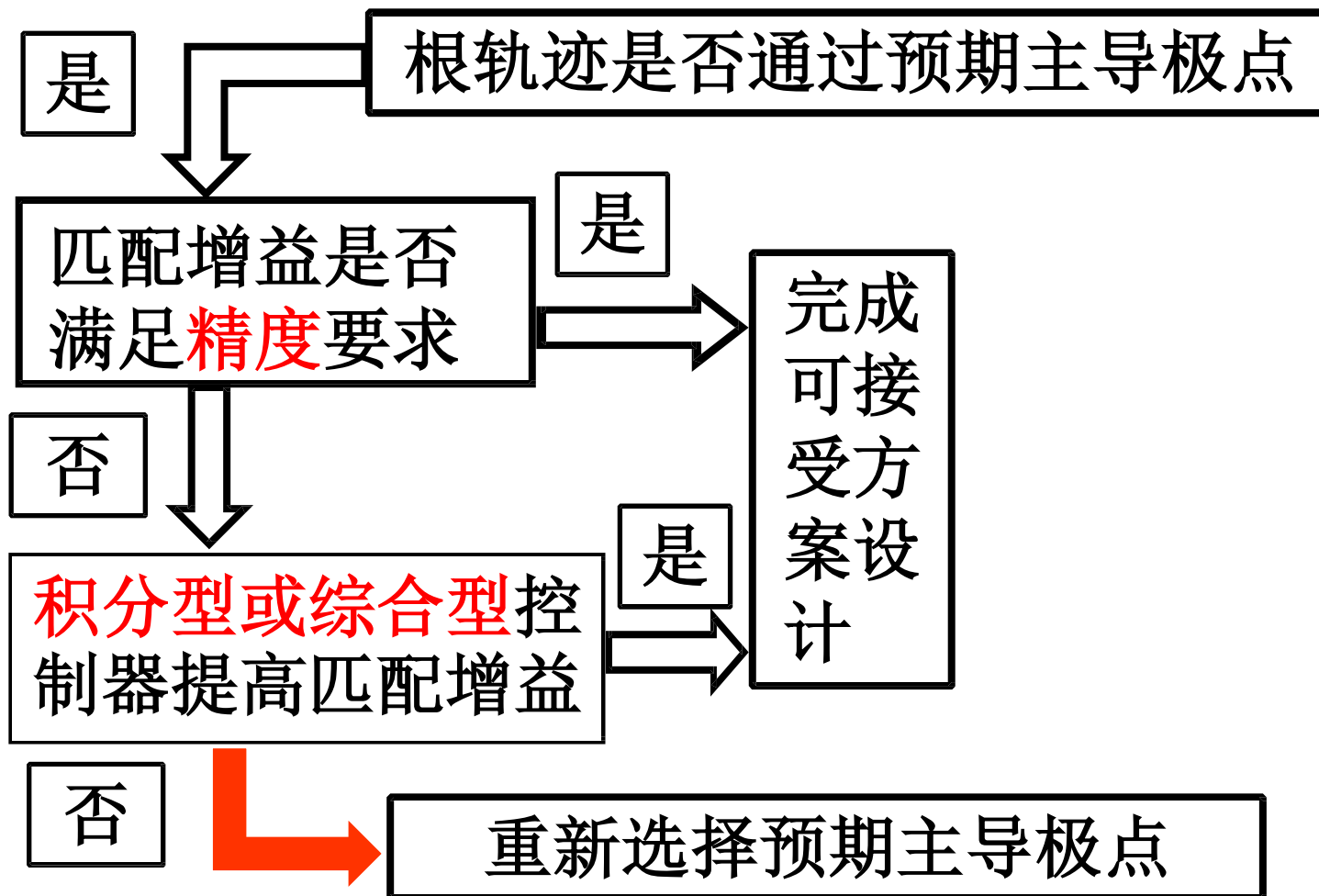
可以取

$$z = 0.1, p = 0.005$$

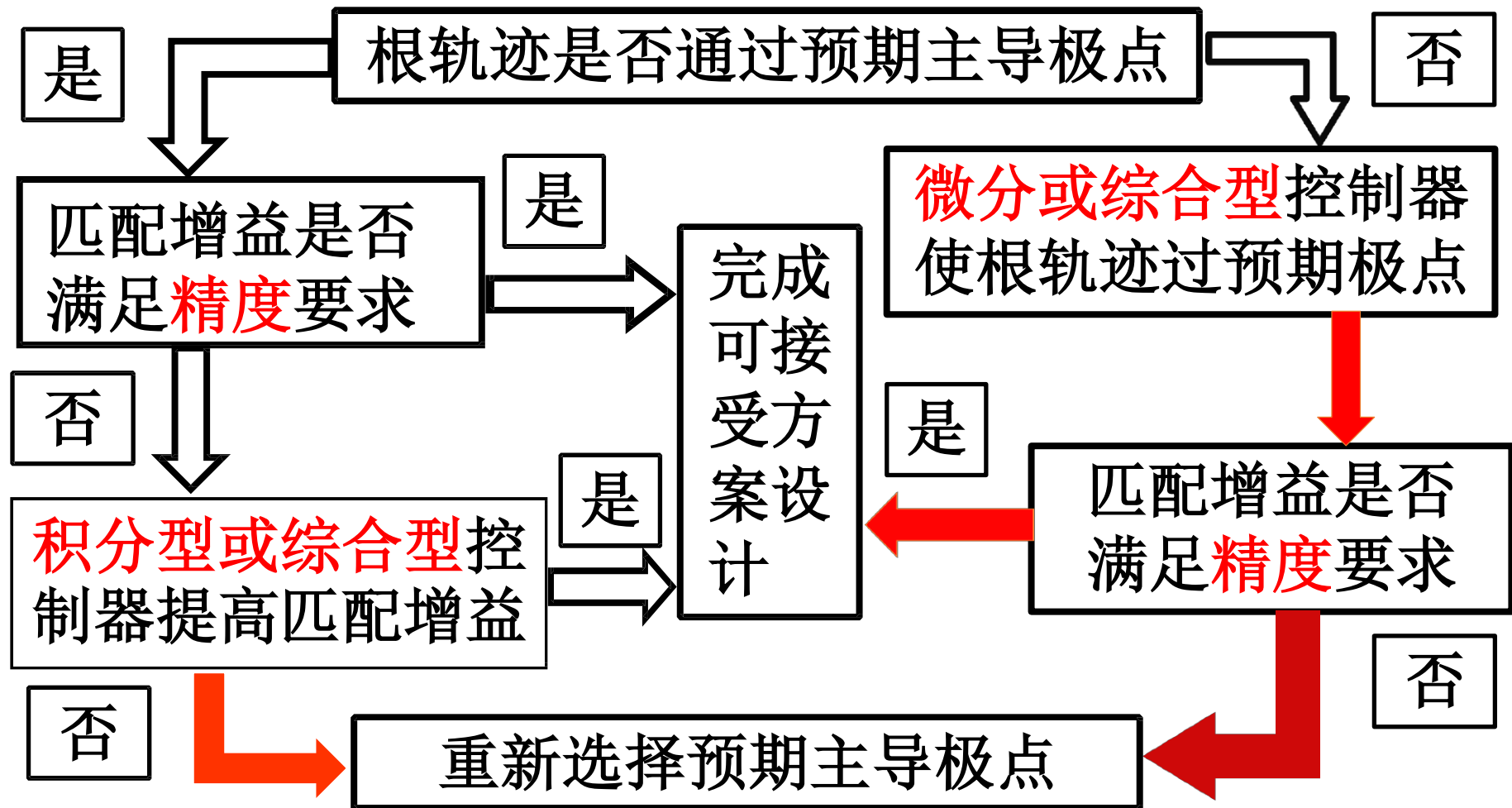
$$G_c(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.005}$$

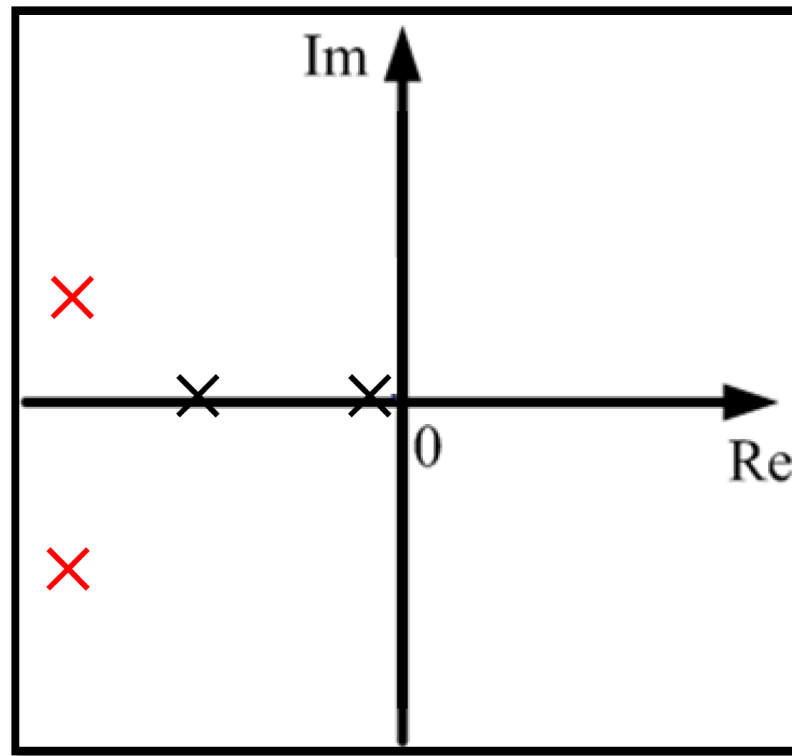
当根轨迹通过预期主导极点时，用积分型控制器，在不影响瞬态性能的同时，**的确**可以提高稳态精度。

控制器根轨迹设计的基本思路



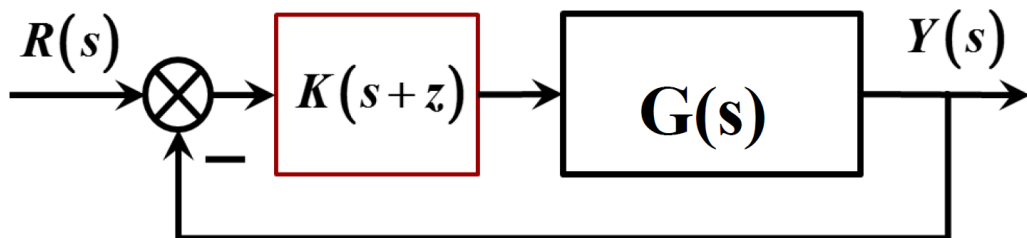
控制器根轨迹设计的基本思路



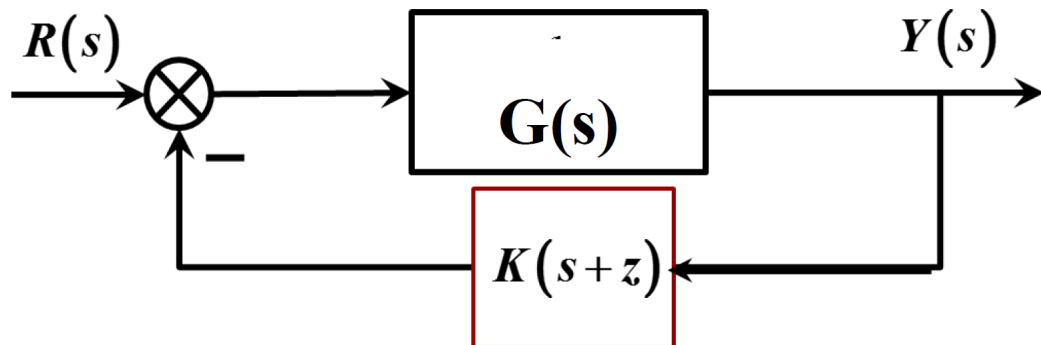


首要任务： 利用微分型或综合型控制器，
使根轨迹通过预期极点，改善瞬态性能

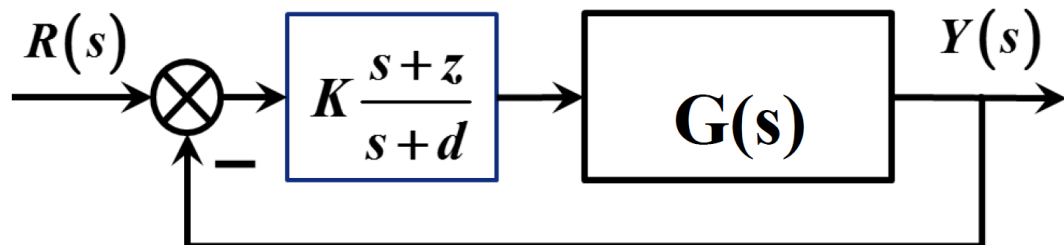
比例微分
控制器



速度反馈
控制器

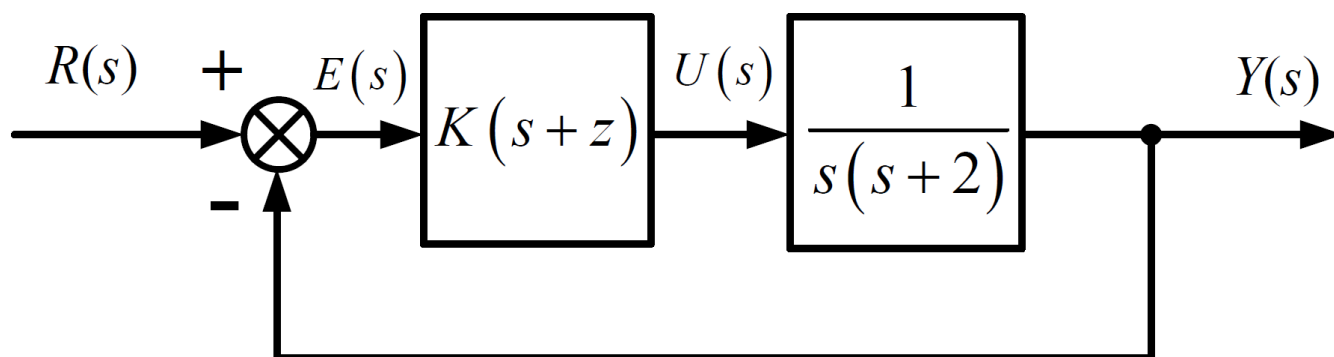


串联校正
控制器



例7.2：设计比例微分控制器，希望闭环系统满足：

- 1) 超调量不大于5%；
- 2) 调节时间不大于1秒 (2%)。
- 3) 斜坡响应的稳态误差小于5%。



比例微分控制器(PD)

$$G_c(s) = K_p + K_d s \quad u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t)$$

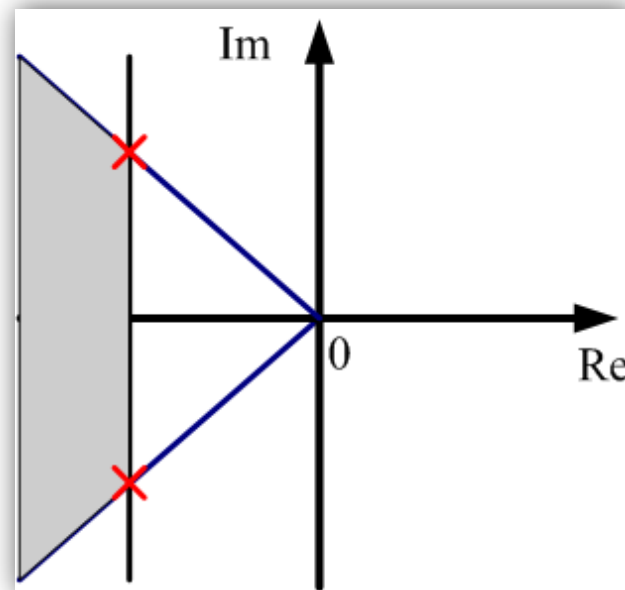
解：1) 性能指标的要求

$$P.O. \leq 5\% \Rightarrow \zeta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 1 \Rightarrow \zeta\omega_n \geq 4$$

$$e_{ss} \leq 5\% \Rightarrow K_v = \frac{K}{2} \geq 20$$

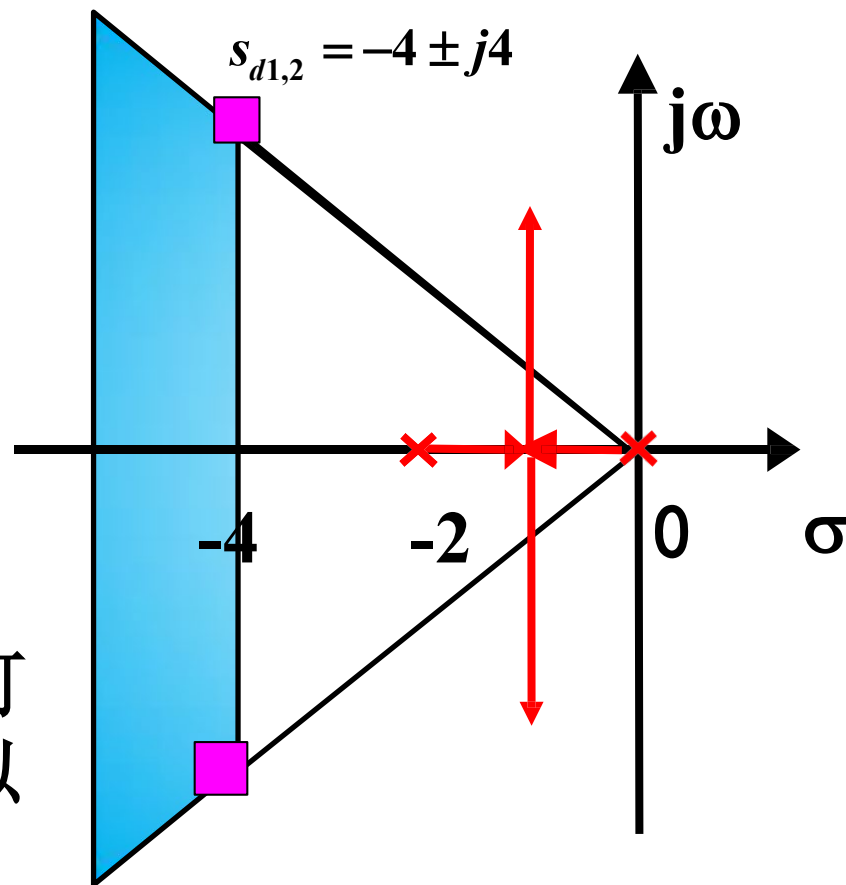
可行域与预期主导极点



2) 未校正系统根轨迹方程为:

$$1 + K \frac{1}{s(s+2)} = 0$$

未校正根轨迹不经过可行域。**比例微分控制器**可以使之通过预期主导极点。



按可接受原则，**尝试**确定预期主导极点为

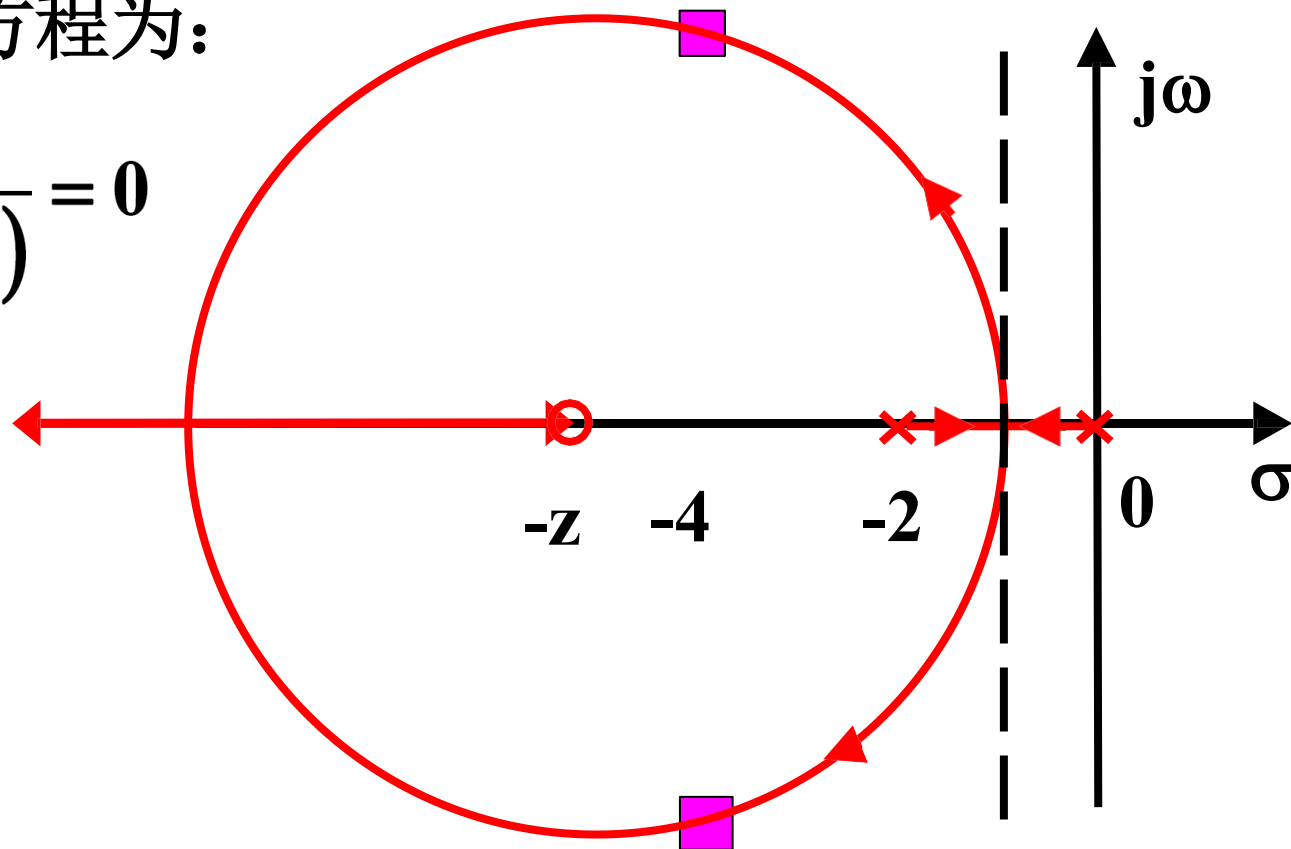
$$s_{d1,2} = -4 \pm j4$$

3) 确定新增开环零点（单一待定），使校正后的根轨迹通过主导极点。

$$s_{d1,2} = -4 \pm j4$$

新的根轨迹方程为：

$$1 + K \frac{s + z}{s(s + 2)} = 0$$

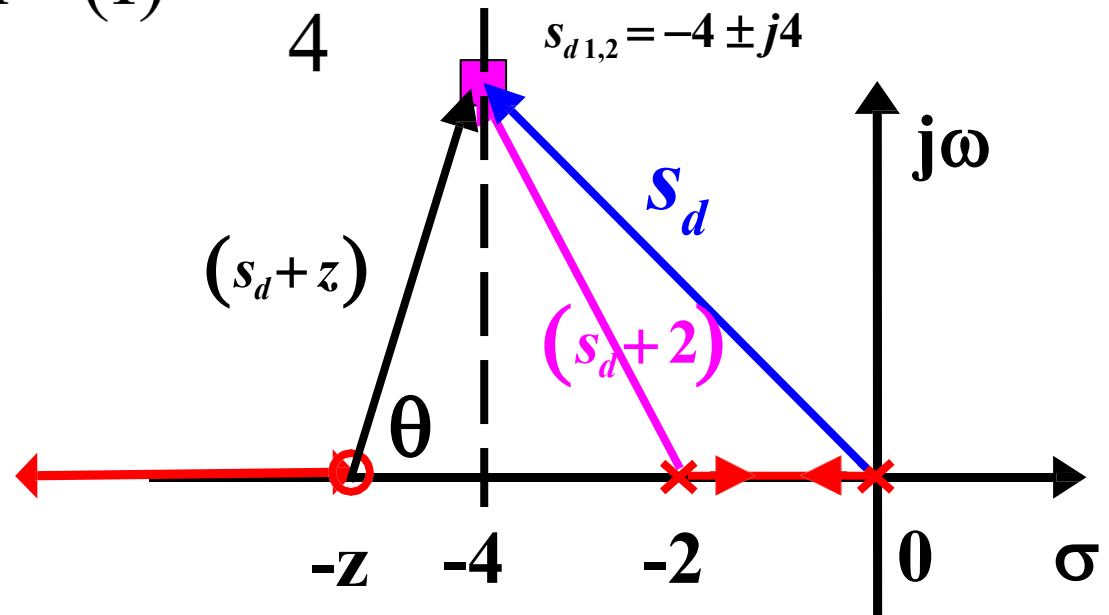


相角方程为：

$$\angle(s_d + z) - \angle(s_d + 2) - \angle s_d = \pi$$

$$\angle(s_d + z) = \theta \quad \angle(s_d + 2) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)$$

$$\angle s_d = \pi - \tan^{-1}(1) = \frac{3\pi}{4}$$



$$\theta - \left(\pi - \tan^{-1} 2 \right) - \frac{3}{4} \pi = -\pi$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3}{4} \pi - \tan^{-1} 2 \Rightarrow \tan \theta = \frac{-1 - 2}{1 + (-1)2} = 3$$

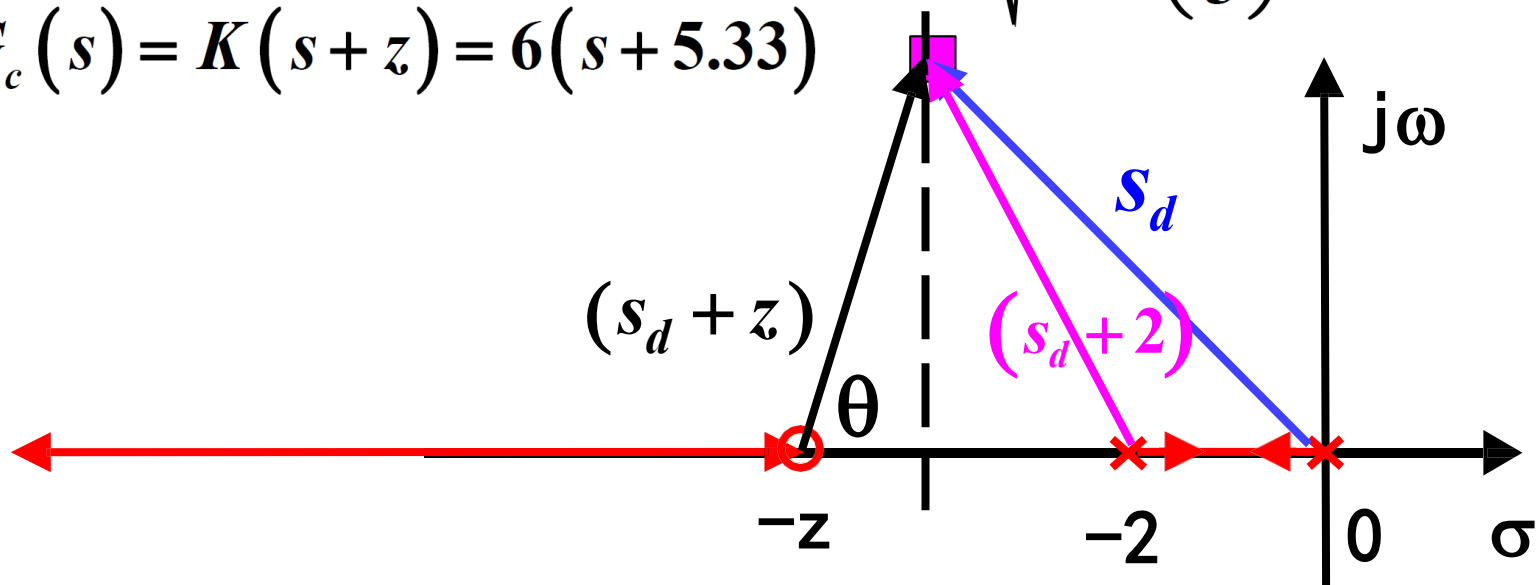
$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{z - 4} = 3 \Rightarrow z = 5.333$$

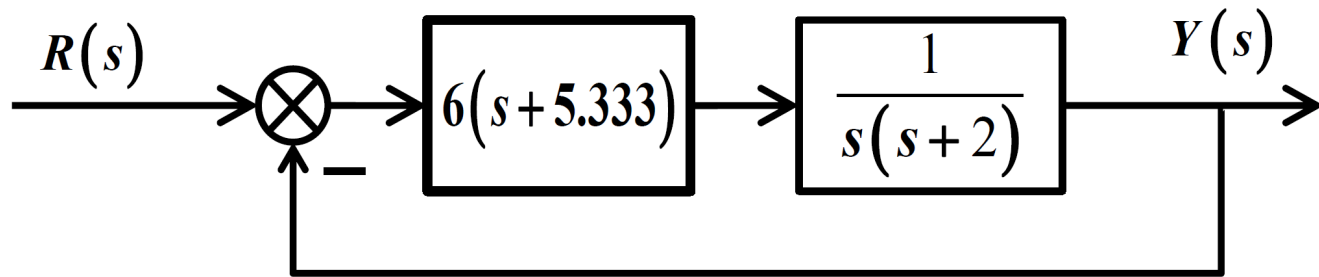
4) 确定增益系数 K ，将主导极点配置到期望位置。

幅值方程为：

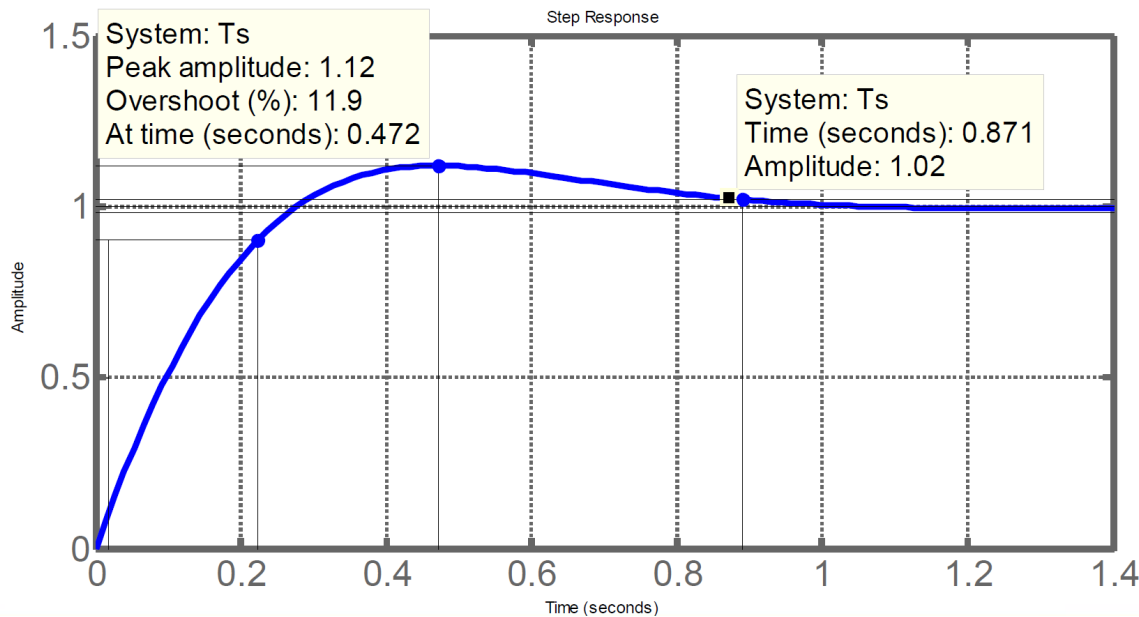
$$\left| K \frac{s+z}{s(s+2)} \right|_{s=s_d} = 1 \Rightarrow K = \frac{\sqrt{4^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + 2^2}}{\sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = 6$$

$$G_c(s) = K(s+z) = 6(s+5.33)$$



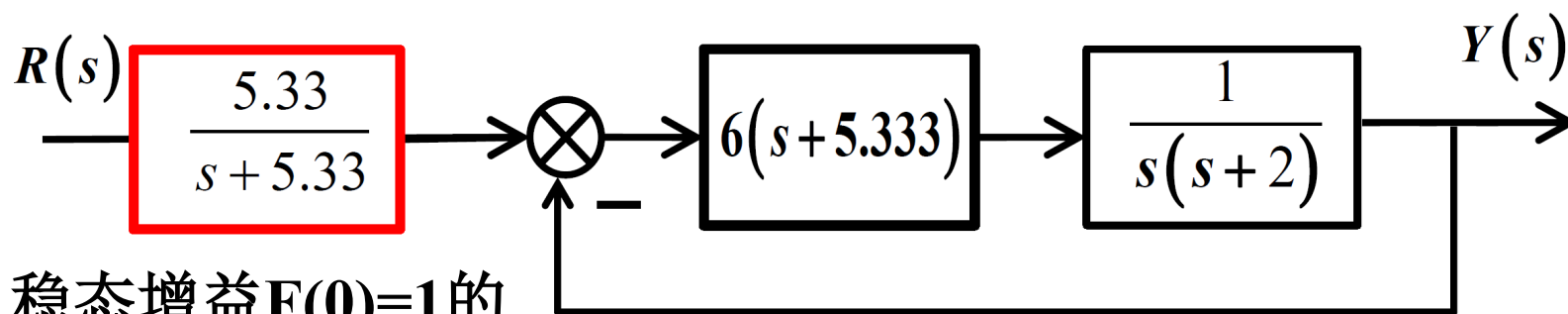


$$T(s) = \frac{6(s + 5.333)}{s^2 + 8s + 32} = \frac{6(s + 5.333)}{(s + 4 - 4j)(s + 4 + 4j)}$$



零点影响，
超调超标。

针对比例微分串联控制结构，在输入端增加一个稳态增益为1的前置滤波器，可以消除附加零点的不利影响。



稳态增益 $F(0)=1$ 的
前置滤波器

施加控制的效果为：

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad T(s) = \frac{32}{(s + 4 + 4j)(s + 4 - 4j)}$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad T(s) = \frac{32}{(s + 4 + 4j)(s + 4 - 4j)}$$

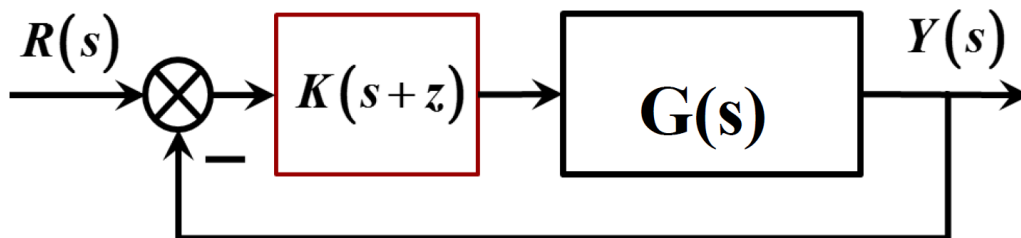
上述控制将瞬态性能不满足设计要求的二阶系统改造成了满足设计要求的二阶系统。

但此时的静态速度误差系数为：

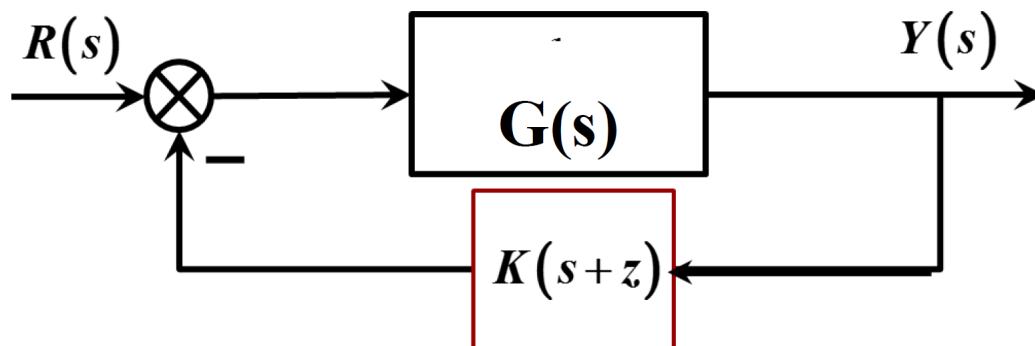
$$K_v = \frac{6 * 5.333}{2} = 16 \leq 20$$

设计方案未能满足稳态精度要求，按照试错方法，需要在可行域内尝试另外的主导极点。

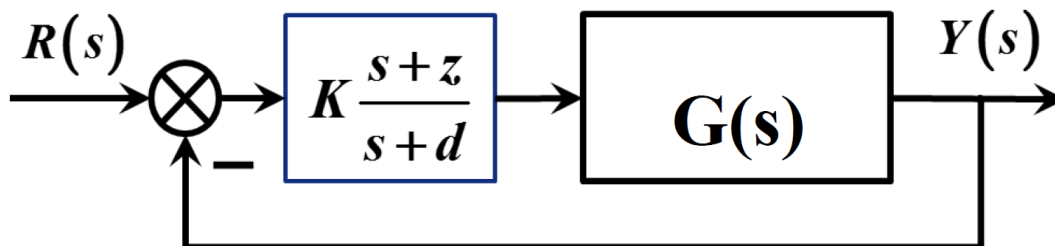
比例微分 控制器



速度反馈 控制器

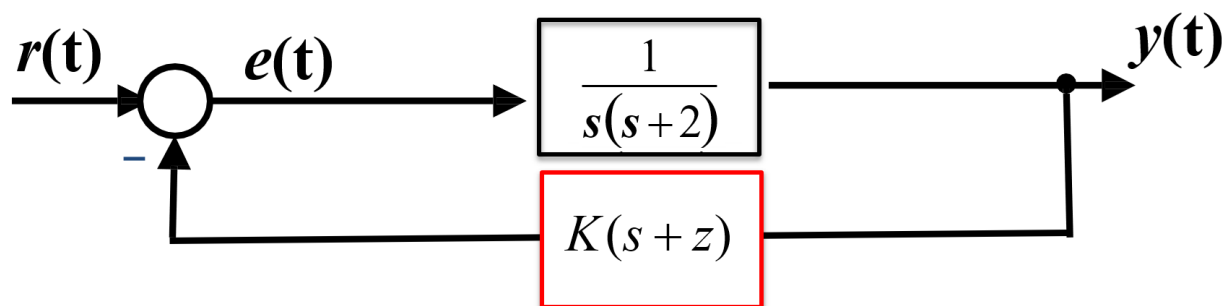


串联校正 控制器



例7.3：设计**速度反馈控制器**，希望闭环系统满足：

- 1) 超调量不大于5%；
- 2) **调节时间不大于1秒 (2%)。**
- 3) 斜坡响应的稳态误差小于5%。



该控制结构与例7.2有完全相同的开环传递函数，有相同的根轨迹，它们可以**共享**控制器主体，实现极点配置的目的。

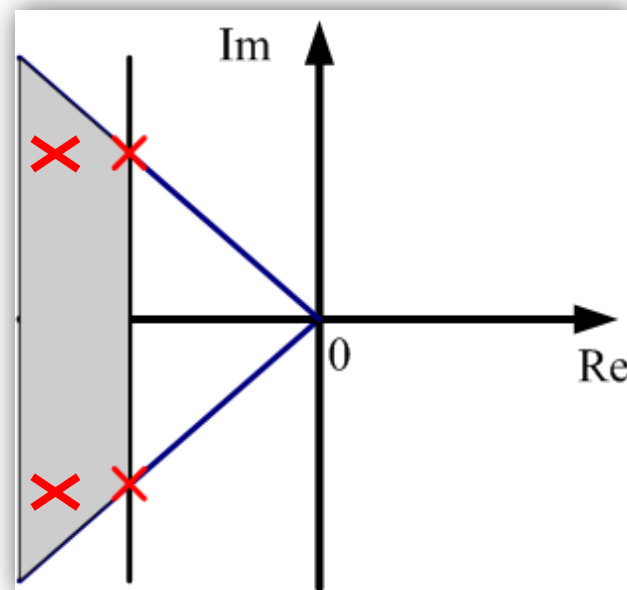
用本例来尝试可行域内的**另一组预期极点**。

解：1) 性能指标的要求

$$P.O. \leq 5\% \Rightarrow \zeta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 1 \Rightarrow \zeta\omega_n \geq 4$$

$$e_{ss} \leq 5\% \Rightarrow K_v = \frac{K}{2} \geq 20$$



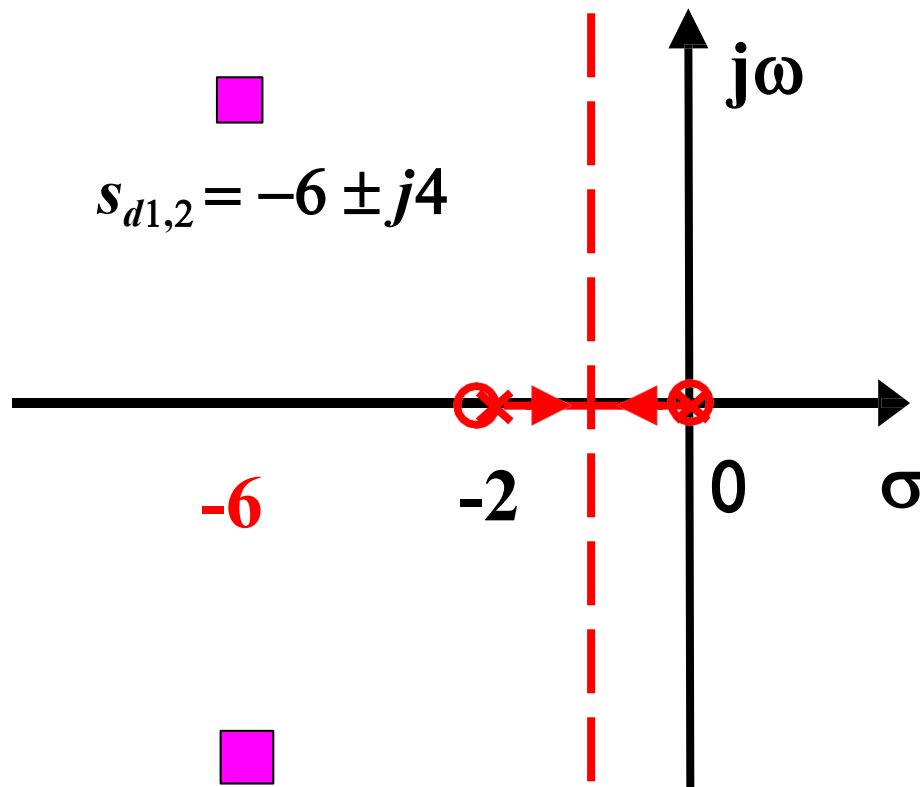
按可接受原则，**尝试**另一组预期主导极点为

$$s_{d1,2} = -6 \pm j4$$

2) 未校正系统根轨迹方程为:

$$1 + K \frac{1}{s(s+2)} = 0$$

$$s_{d1,2} = -6 \pm j4$$

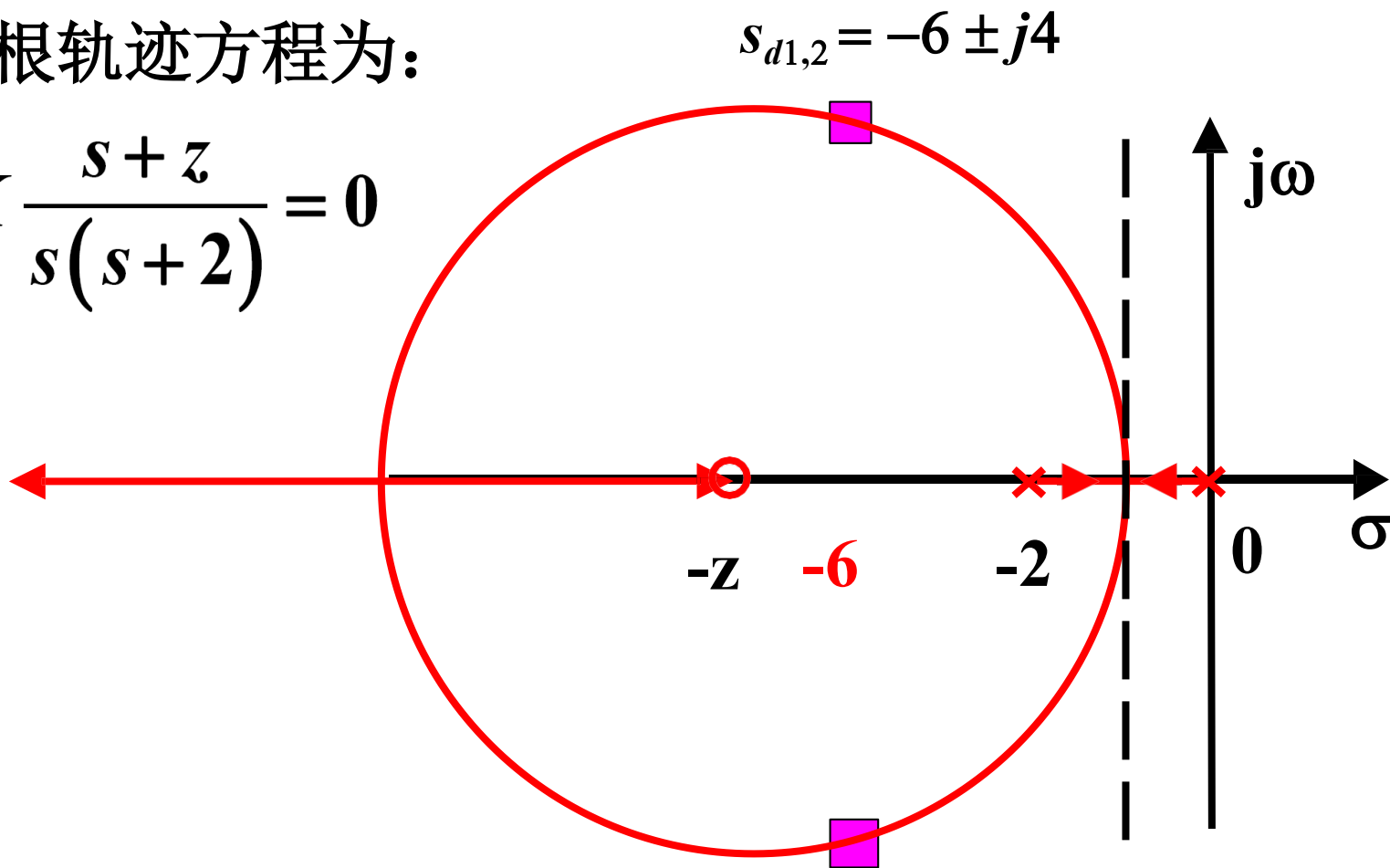


根轨迹不经过预期主导极点。采用**比例微分控制器**校正，可以使之通过预期主导极点。

3) 确定新增开环零点, 使校正后的根轨迹通过主导极点。

新的根轨迹方程为:

$$1 + K \frac{s + z}{s(s + 2)} = 0$$



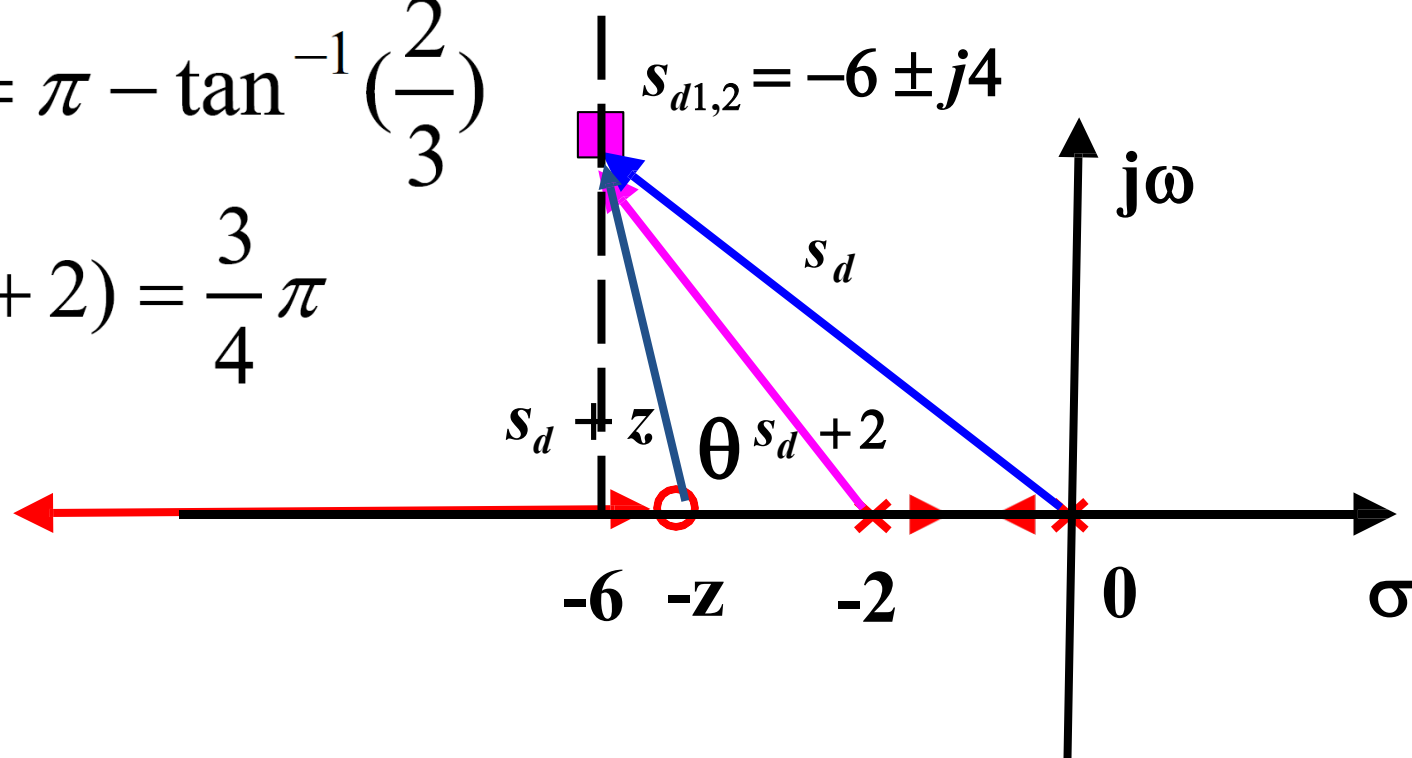
相角方程为：

$$\angle(s_d + z) - \angle(s_d + 2) - \angle s_d = \pi$$

$$\angle(s_d + z) = \theta$$

$$\angle s_d = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\angle(s_d + 2) = \frac{3}{4}\pi$$



$$\theta - (\pi - \tan^{-1}(\frac{2}{3})) - \frac{3}{4}\pi = -\pi$$

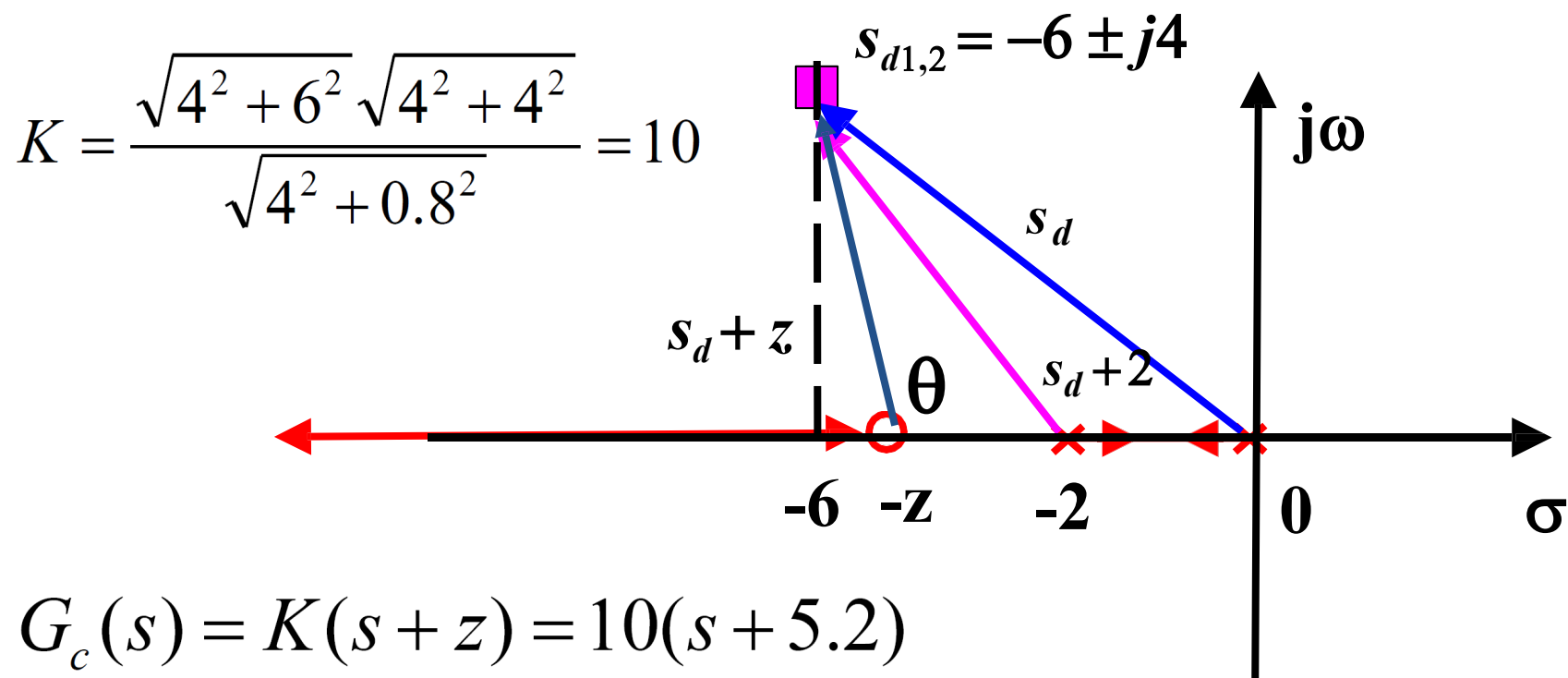
$$\Rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi - \tan^{-1}(\frac{2}{3})$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{-1 - \frac{2}{3}}{1 + (-1)\frac{2}{3}} = -5 = \frac{4}{z - 6}$$

$$\Rightarrow z = 5.2$$

4) 确定增益系数 K ，将主导极点配置到期望位置。

幅值方程为： $\left| K \frac{s+z}{s(s+2)} \right|_{s=s_d} = 1$



在可行域内尝试另一组主导极点

$$s_{d1,2} = -6 \pm j4$$

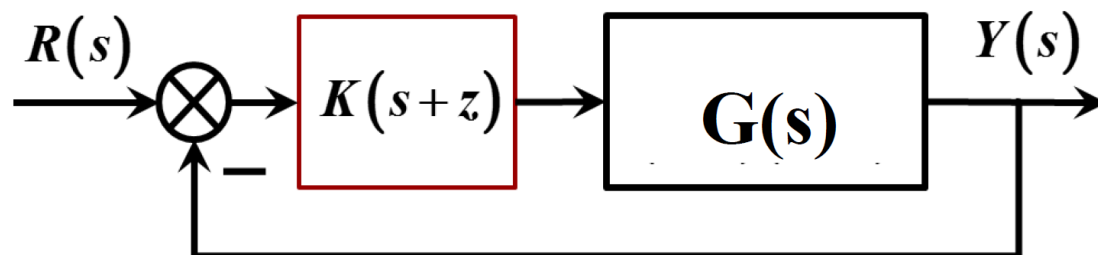
之后，不仅系统实现了预期极点配置，与此同时，速度误差系数为：

$$K_v = \frac{10 * 5.2}{2} = 26 \geq 20$$

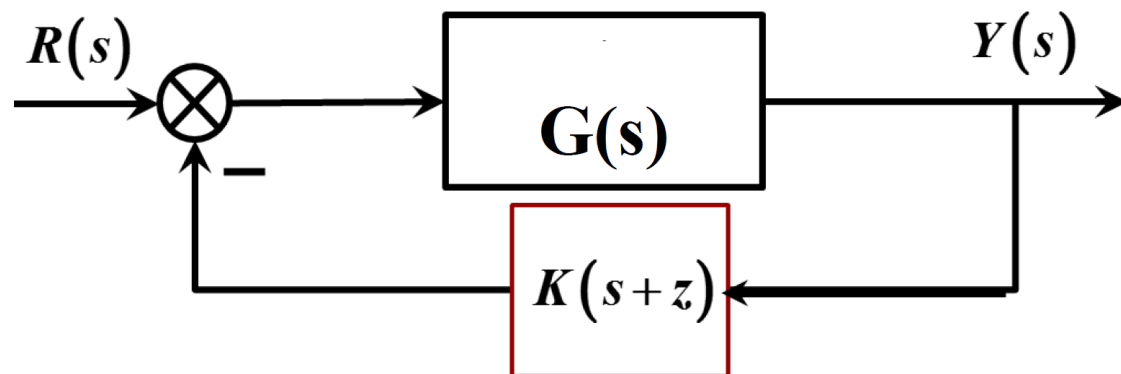
设计方案同时满足了稳态精度要求，可望成为可接受方案。

$$G_c(s) = K(s + z) = 10(s + 5.2)$$

比例微分
串联控制



速度反馈
控制

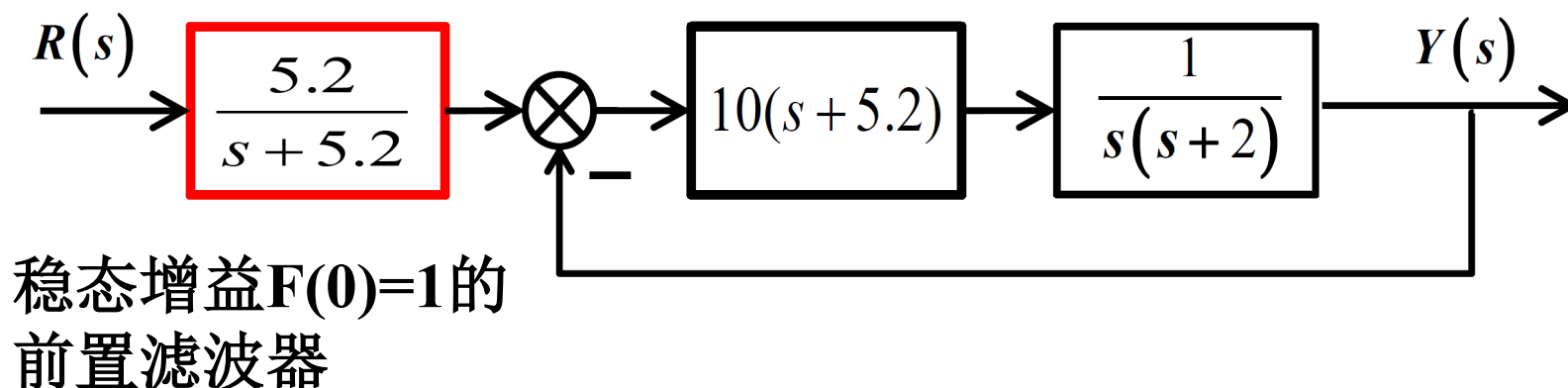


两者共享可接受控制器

$$G_c(s) = K(s + z) = 10(s + 5.2)$$

后期修正：串联校正引入了一个闭环零点，影响瞬态性能；速度反馈引入了功率损耗，影响稳态输出。

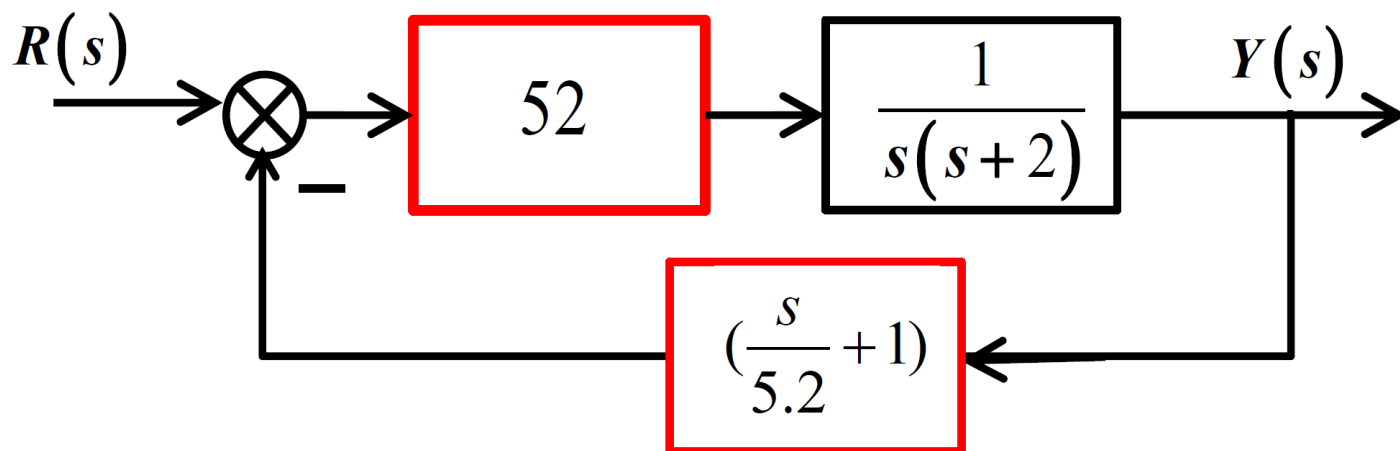
针对比例微分串联控制结构，在输入端增加一个稳态增益为1的前置滤波器。



施加控制的效果为（二阶易掌控！）：

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad T(s) = \frac{52}{(s + 6 + 4j)(s + 6 - 4j)}$$

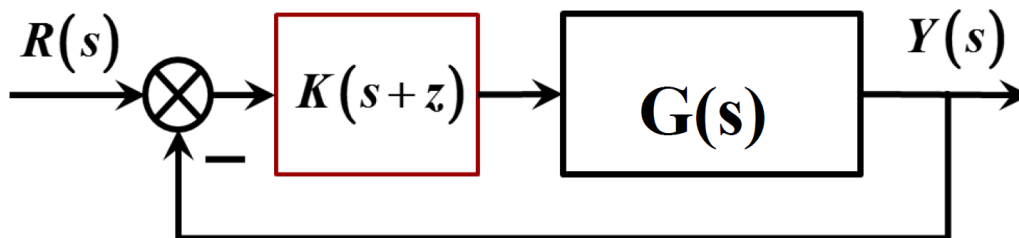
针对速度反馈控制结构，将**比例控制设置**在前向通路，可以避免反馈带来的功率损耗，使得两者等效。



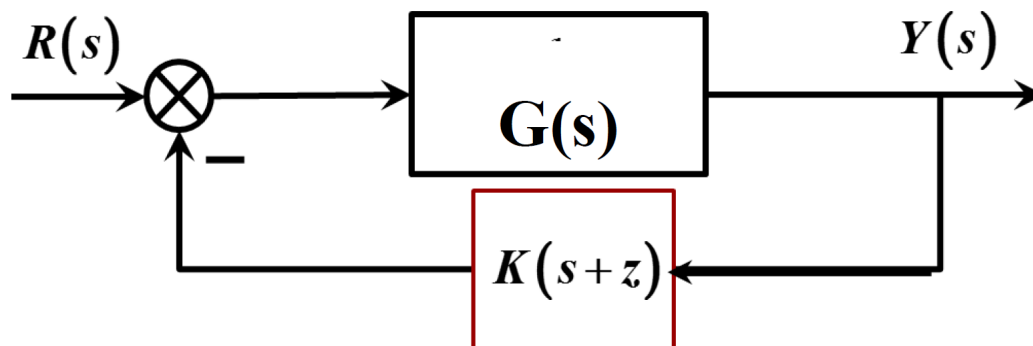
施加控制的效果完全等效，同样为：

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad T(s) = \frac{52}{(s + 6 + 4j)(s + 6 - 4j)}$$

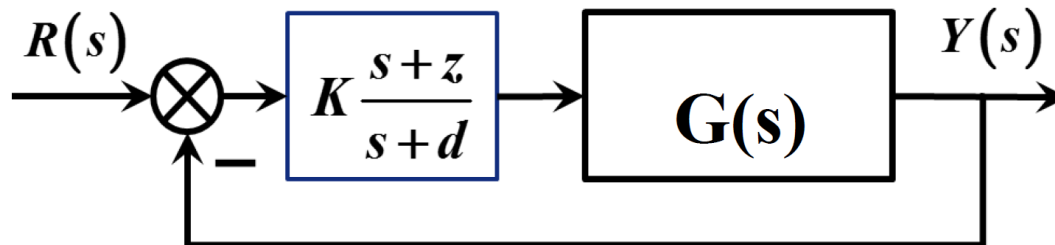
比例微分 控制器



速度反馈 控制器

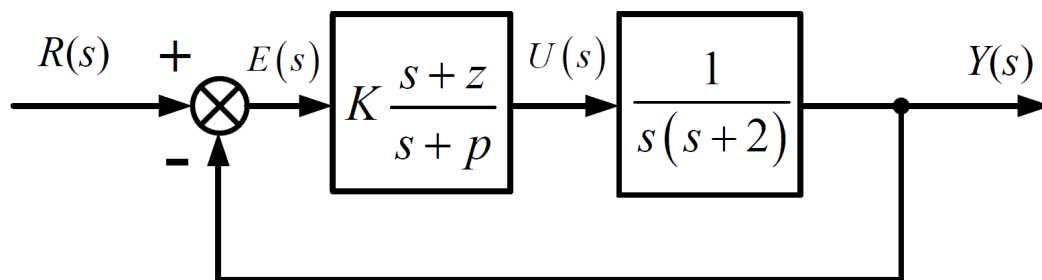


串联校正 控制器



例7.4：设计校正网络，希望闭环系统满足：

- 1) 超调量不大于5%；
- 2) 调节时间不大于1秒 (2%)；
- 3) 斜坡响应的稳态误差小于5%。



本例全面尝试采用综合型控制器--校正网络。

1、超前校正网（微分） $G_c(s) = \frac{s+z}{s+p}, p \geq z$

2、滞后校正网（积分） $G_c(s) = \frac{s+z}{s+p}, p \leq z$

校正网络有2个待定参数，**期待**有更大的调节裕度和应用范围。

瞬态性能设计要求严酷：超前校正网；

精度设计要求严酷：滞后校正网；

通常情况下：滞后或超前校正网均可接受。

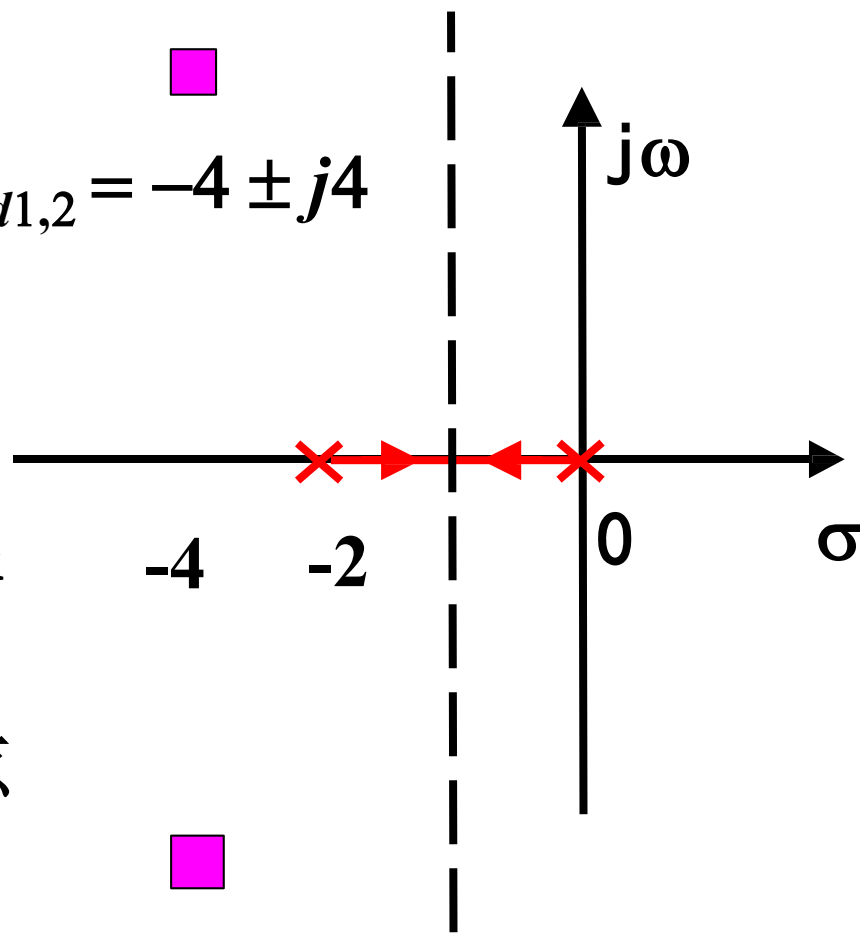
解：第一步：在可行域内**再次**选取主导极点：

$$s_{d1,2} = -4 \pm j4$$

第二步：校正后的根轨迹方程为：

$$1 + K \frac{s+z}{s+p} \frac{1}{s(s+2)} = 0$$

$$s_{d1,2} = -4 \pm j4$$



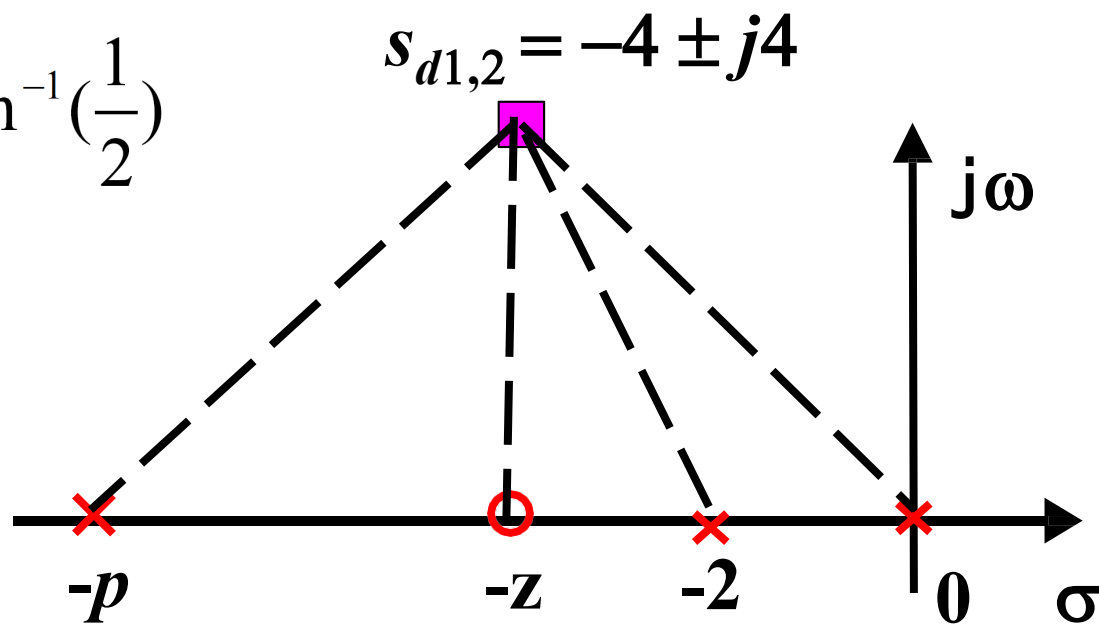
需要完成大幅度改变根轨迹形状的任务。

讨论配置网络零、极点的一般情况。

第三步：相角方程各项为：

$$\angle(s_d + 2) = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\angle s_d = \frac{3\pi}{4}$$



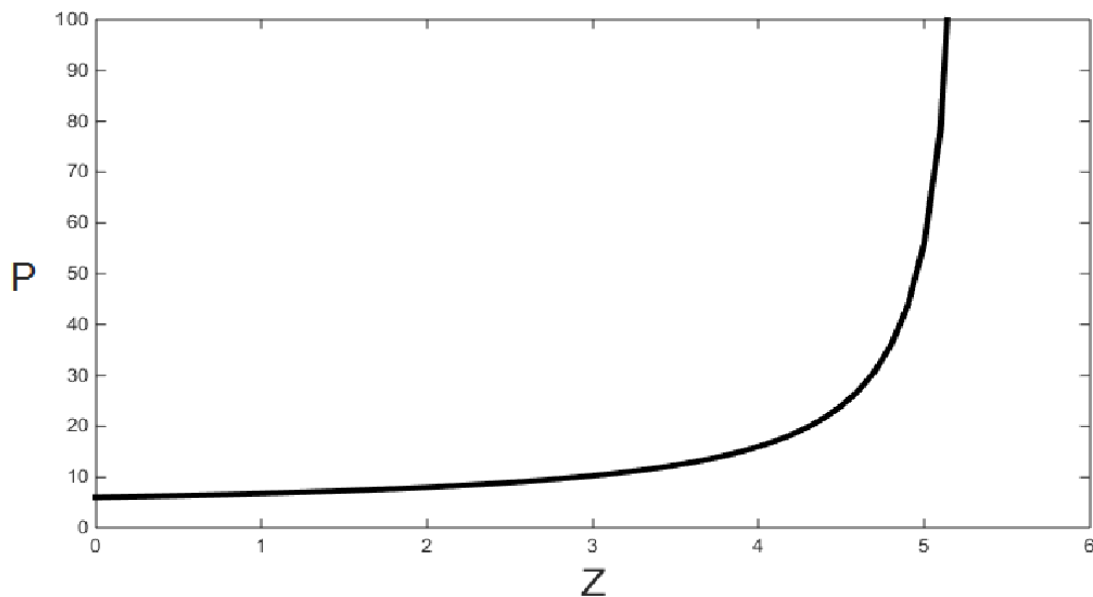
$$\angle(s_d + p) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{p-4}\right) \quad \angle(s_d + z) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{z-4}\right)$$

$$\angle(s_d + z) - \angle(s_d + p) - \angle s_d - \angle(s_d + 2) = -\pi$$

第四步：网络零、极点配置及其讨论

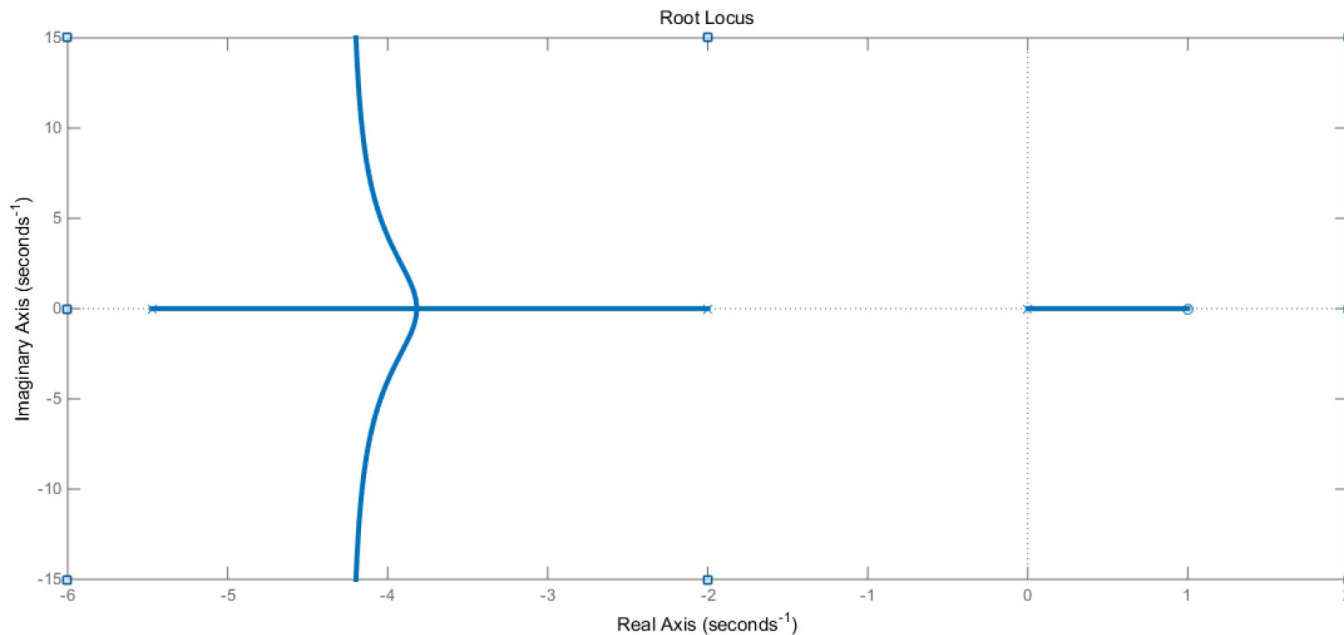
相角条件导出：
$$p = \frac{32 + 4z}{16 - 3z} + 4$$

1、当 $0 \leq z < \frac{16}{3}$ 时，可以得到需要的超前校正网络，使得根轨迹通过预期极点。



2、当 $z \geq \frac{16}{3}$ 时，无法在实轴上配置网络极点。

3、当 $z < 0$ 时，根轨迹虽然通过预期极点，但得到的是闭环不稳定系统。



1、当 $0 \leq z < \frac{16}{3}$ 时，可以得到需要的超前校正网络，通过预期极点的根轨迹有多种变化。

按照网络零、极点与原有开环极点

$$p_1 = 0, p_2 = -2$$

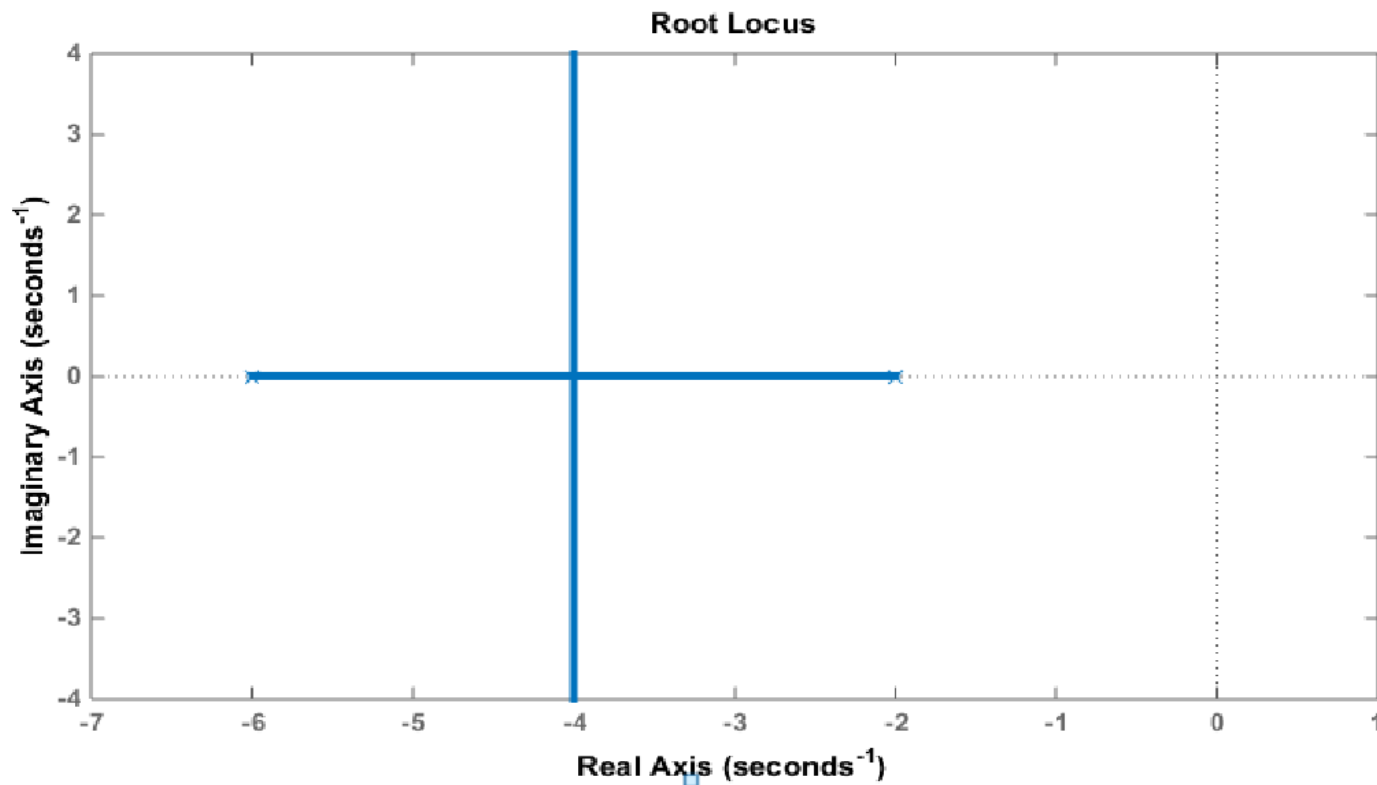
的位置关系，来探究校正后根轨迹的典型形状。

$$1 + K \frac{(s + z)}{(s + p)s(s + 2)} = 0$$

$$z = 0, z = 1.5, z = 2, z = 2.5, z = 4.8$$

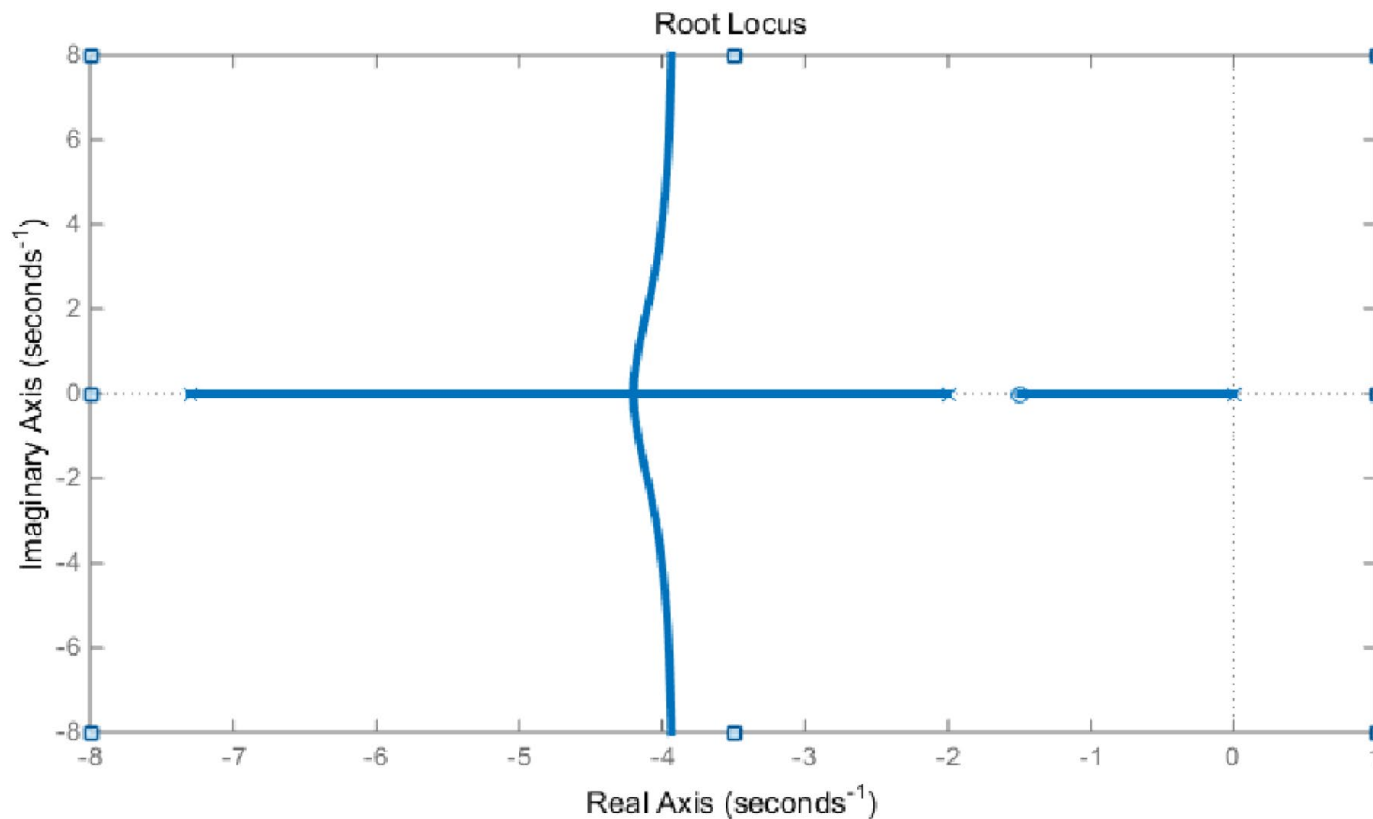
1.1 当 $z = 0$, $p = 6$ 时的根轨迹

$$1 + K \frac{1}{(s + 6)(s + 2)} = 0$$



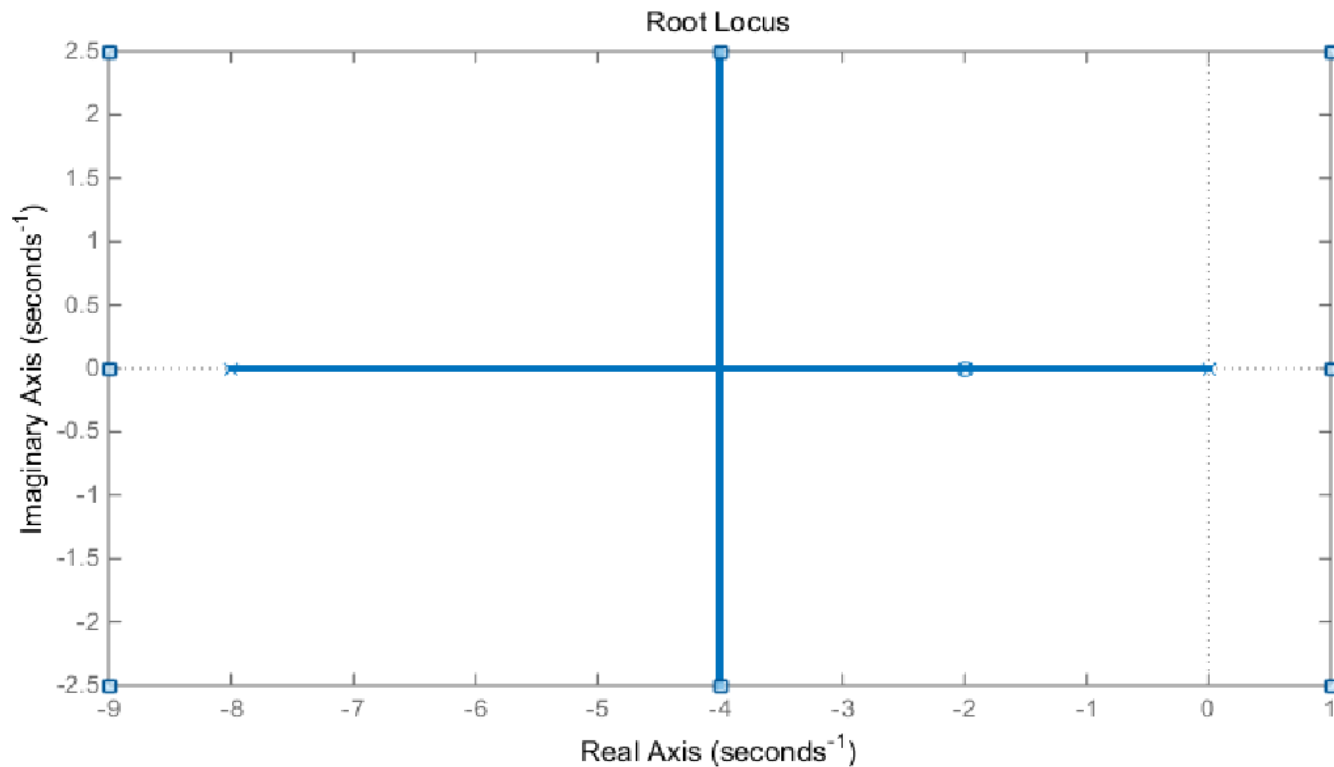
1.2 当 $z = 1.5$, $p = 7.3$ 时的根轨迹

$$1 + K \frac{(s + 1.5)}{(s + 7.3)s(s + 2)} = 0$$



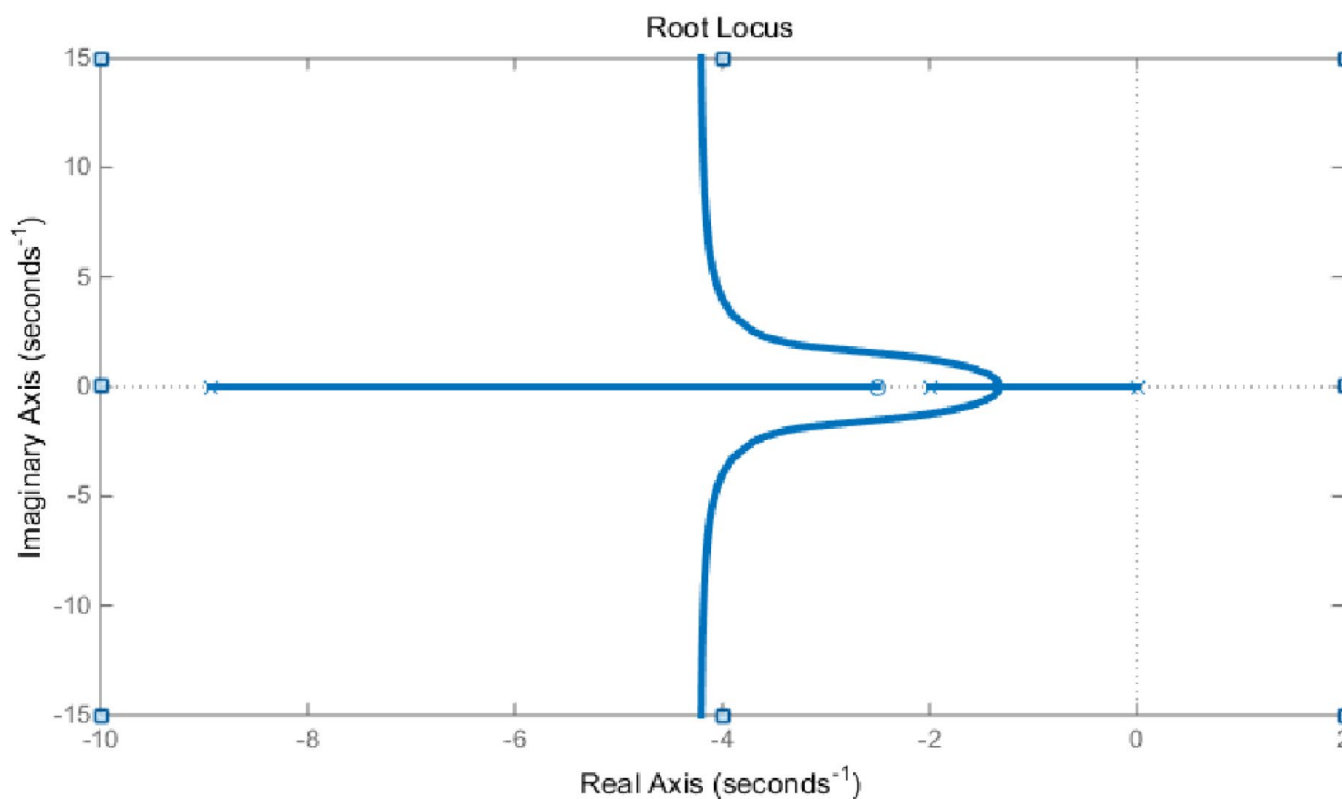
1.3 当 $z = 2$, $p = 8$ 时的根轨迹

$$1 + K \frac{1}{(s + 8)s} = 0$$



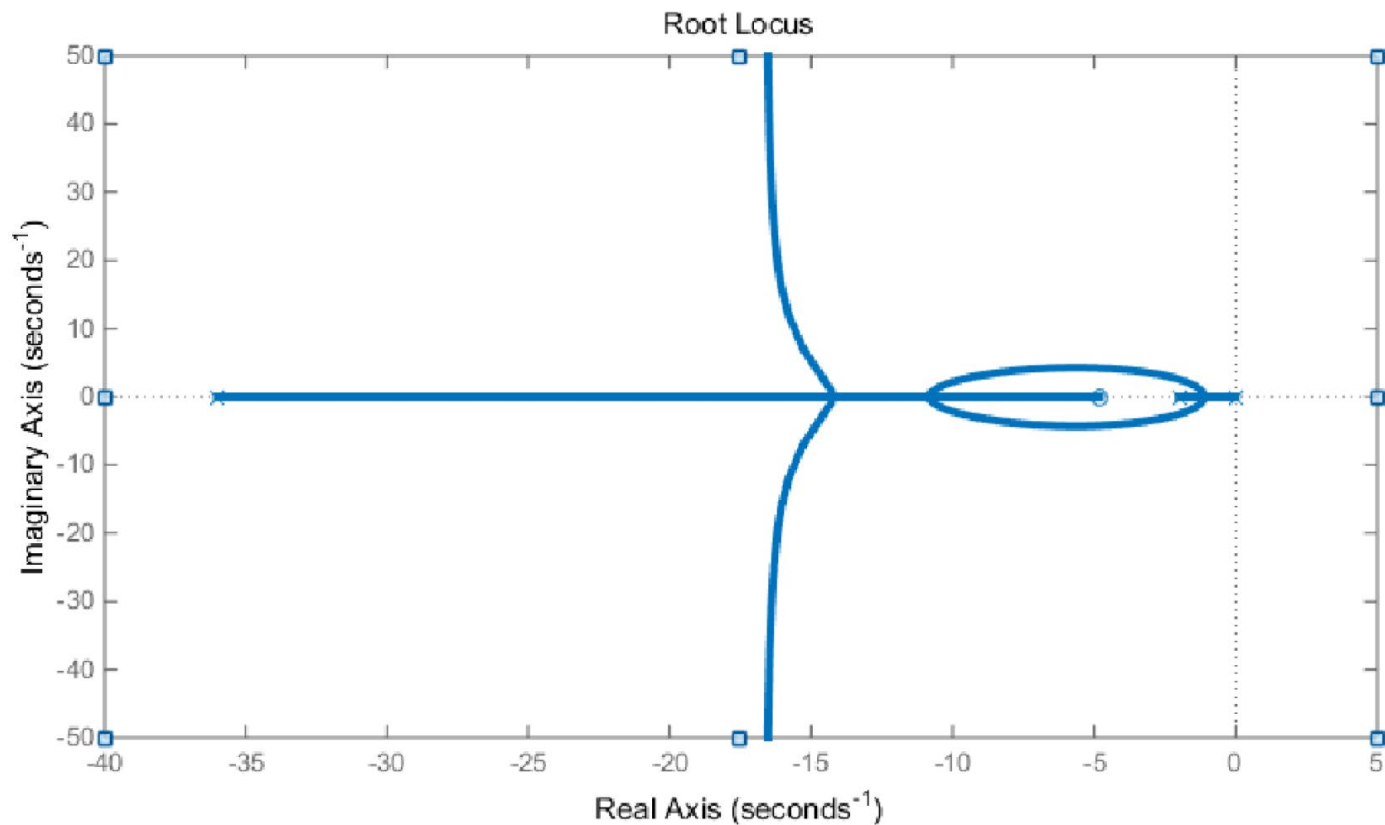
1.4 当 $z = 2.5$, $p = 8.9$ 时的根轨迹

$$1 + K \frac{(s + 2.5)}{(s + 8.9)s(s + 2)} = 0$$



1.5 当 $z = 4.8$, $p = 36$ 时的根轨迹

$$1 + K \frac{(s + 4.8)}{(s + 36)s(s + 2)} = 0$$



当 $0 \leq z < \frac{16}{3}$ 时得到的超前校正网络，都可以完成**第一项**任务，即：

按需改变根轨迹形状，通过预期极点。

校正后的根轨迹有多种变化，要避免极端配置，如，

$$z = 0, \quad p = 6$$

$$z = \frac{16}{3}, \quad p = \infty$$

通常将网络零点配置在预期极点下方，即

$$z = 4, \quad p = 16$$

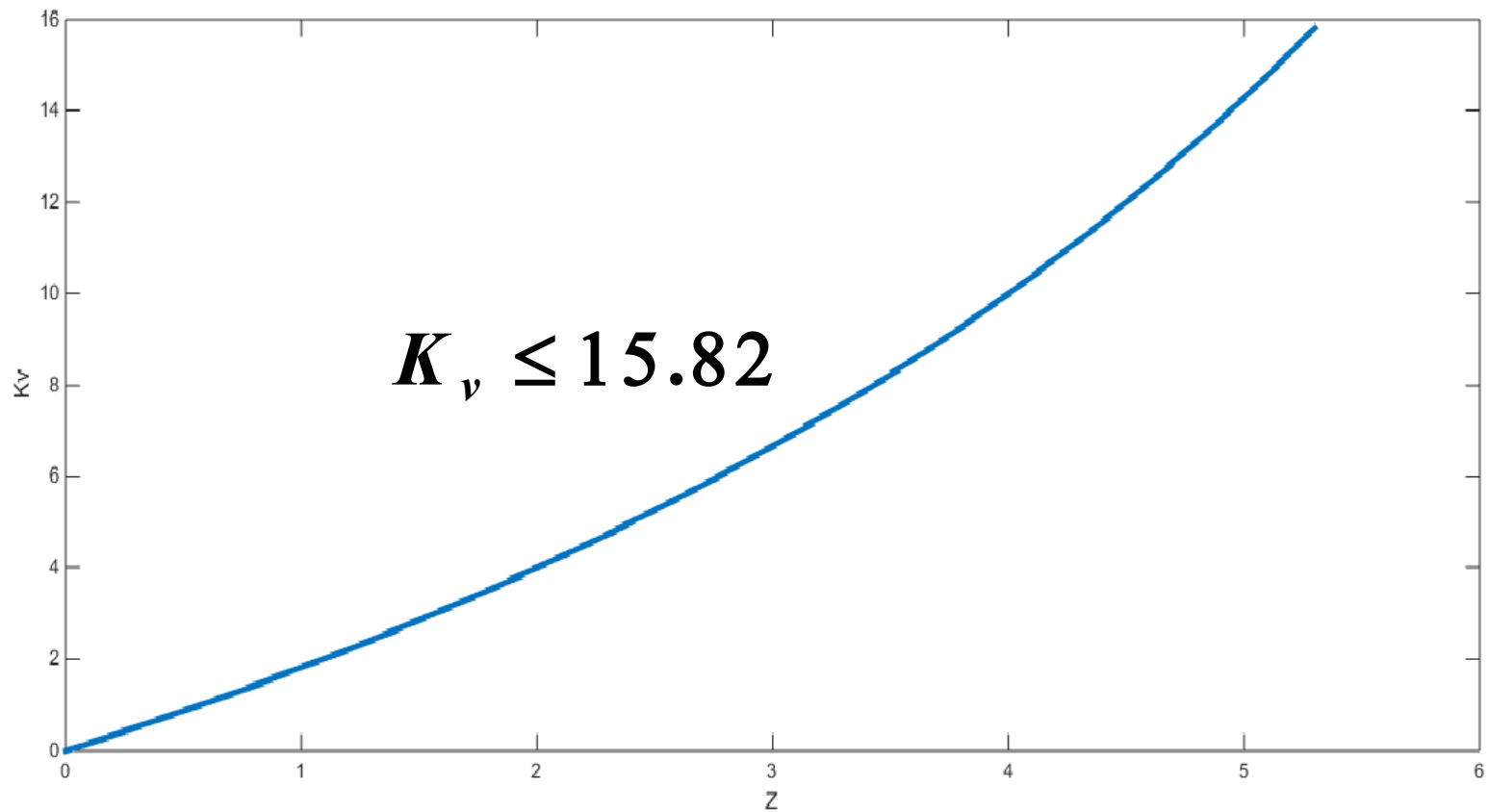
第五步：匹配增益及静态速度误差系数

幅值条件：

$$K = \frac{|s(s+2)(s+p)|}{|s+z|}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{z}{p} \cdot \frac{K}{2}$$



仍然没有可接受的校正网络！

试错！预期主导极点改为：

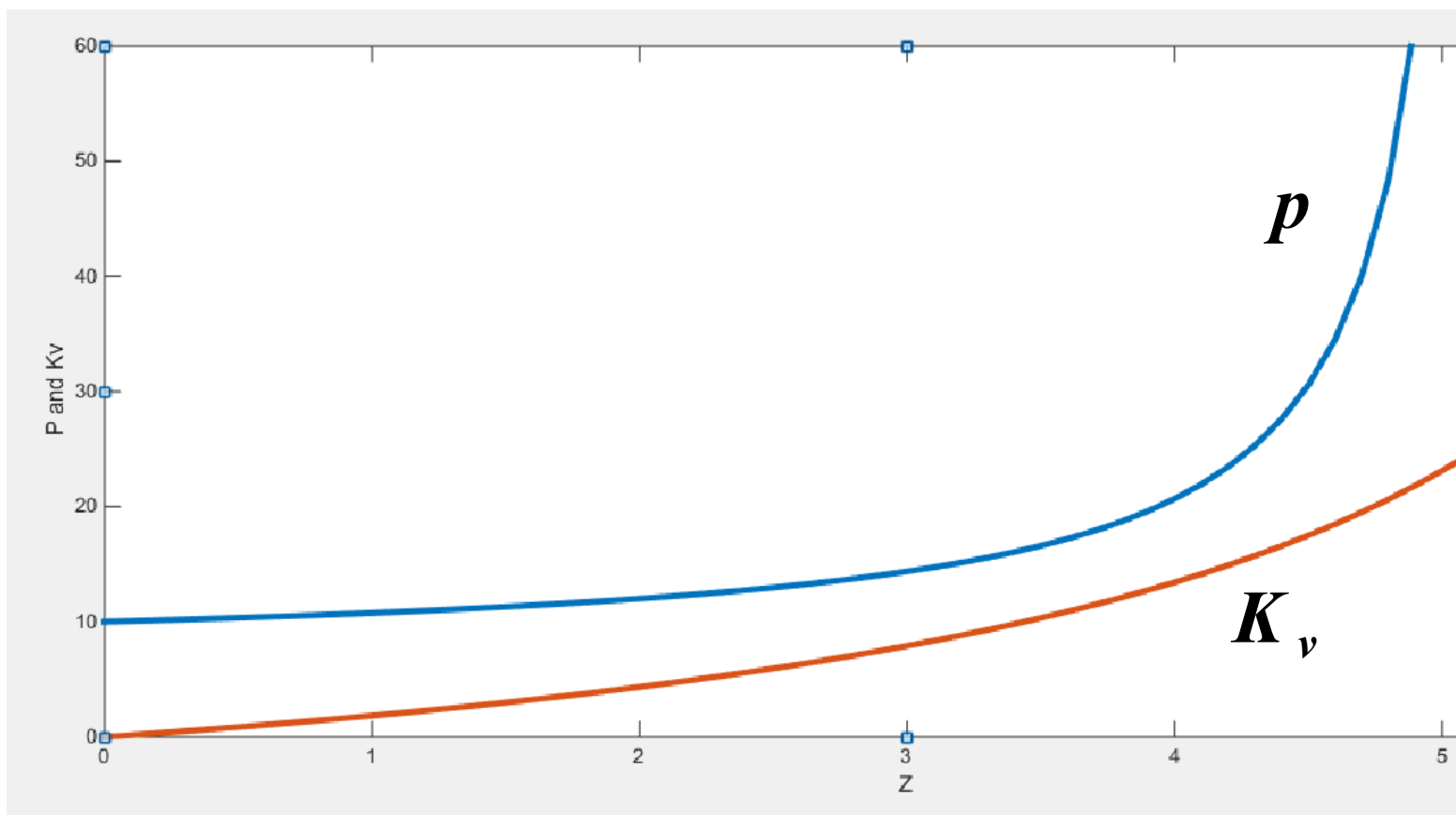
$$s_{d1,2} = -6 \pm j4$$

重复上述过程，得到了可接受方案：

$$G_c = 416 \frac{s + 4.8}{s + 48.4}$$

虽然增益系数偏大，但理论上既通过了预期极点，同时又满足了精度要求：

$$K_v = 20.6$$



预期极点改为 $s_{d1,2} = -6 \pm j4$ 后的参数设计值。

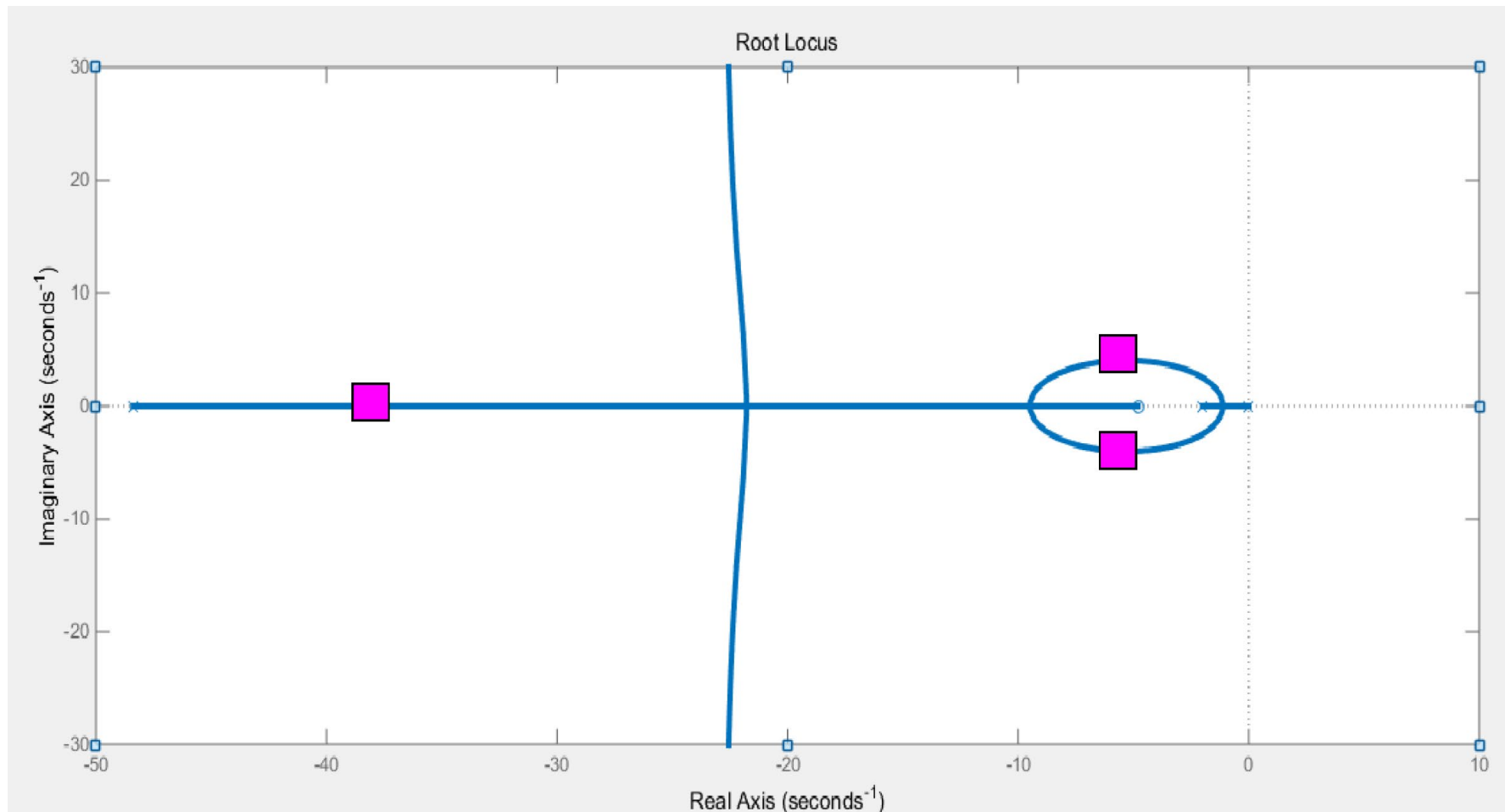
第六步：确定第三个极点

$$\begin{aligned} & s(s+2)(s+48.4) + 416(s+4.8) \\ &= (s+6+j4)(s+6-j4)(s-s_3) \end{aligned}$$

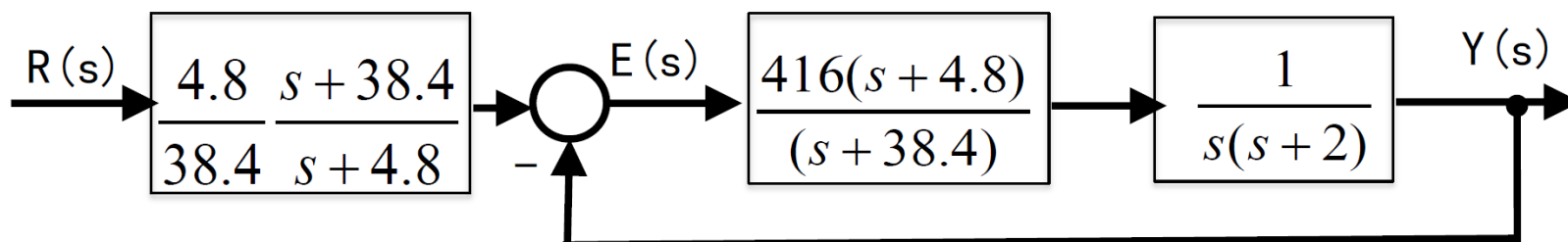
$$s_3 = -38.4$$

第七步：确定闭环传递函数为：

$$T(s) = \frac{416(s+4.8)}{(s+6+j4)(s+6-j4)(s+38.4)}$$



第八步：用前置滤波器 $F(0)=1$ 完善系统（主导特性已经很强）

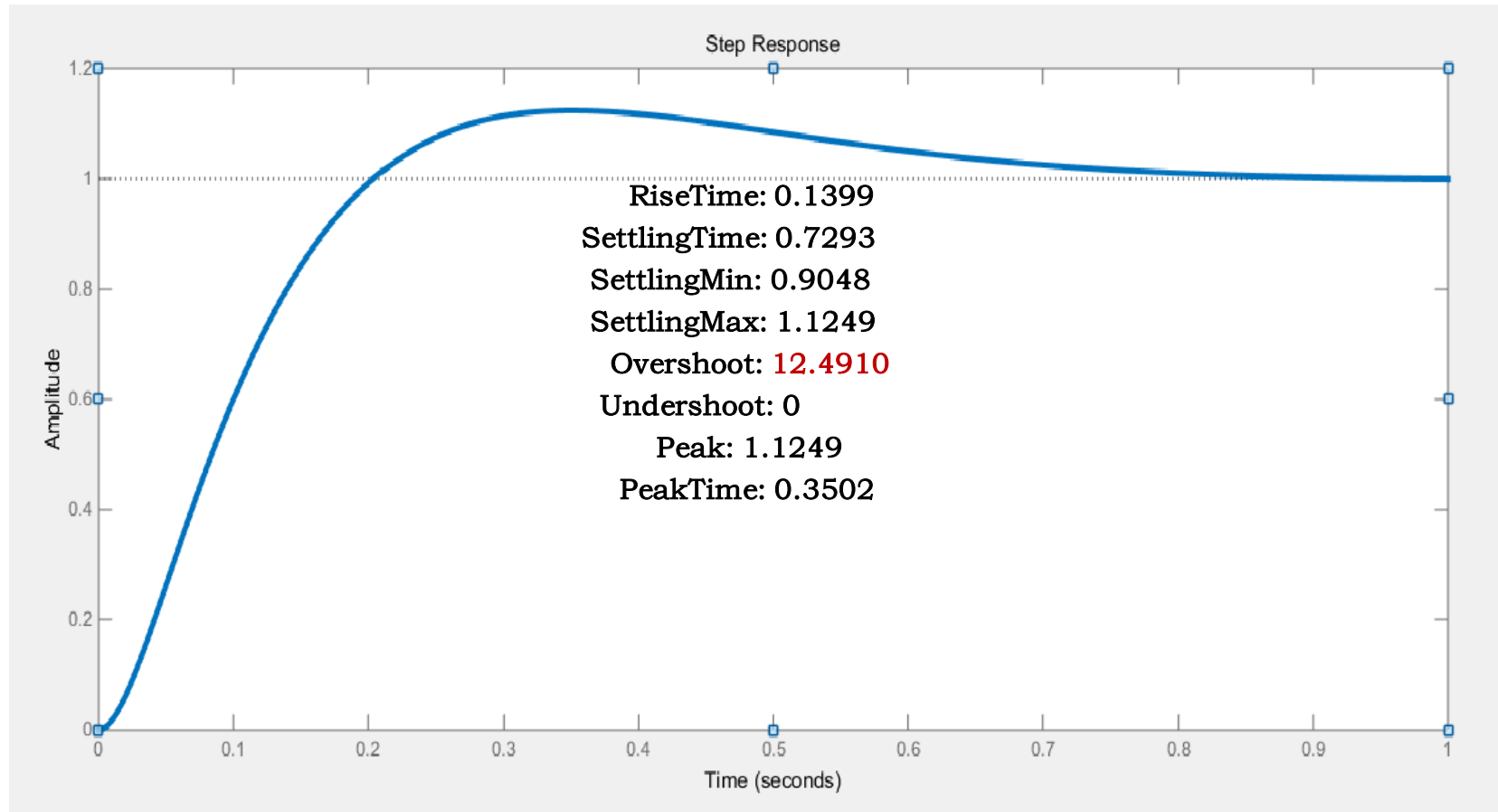


施加控制的效果为：

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad T(s) = \frac{416}{(s + 6 + j4)(s + 6 - j4)}$$

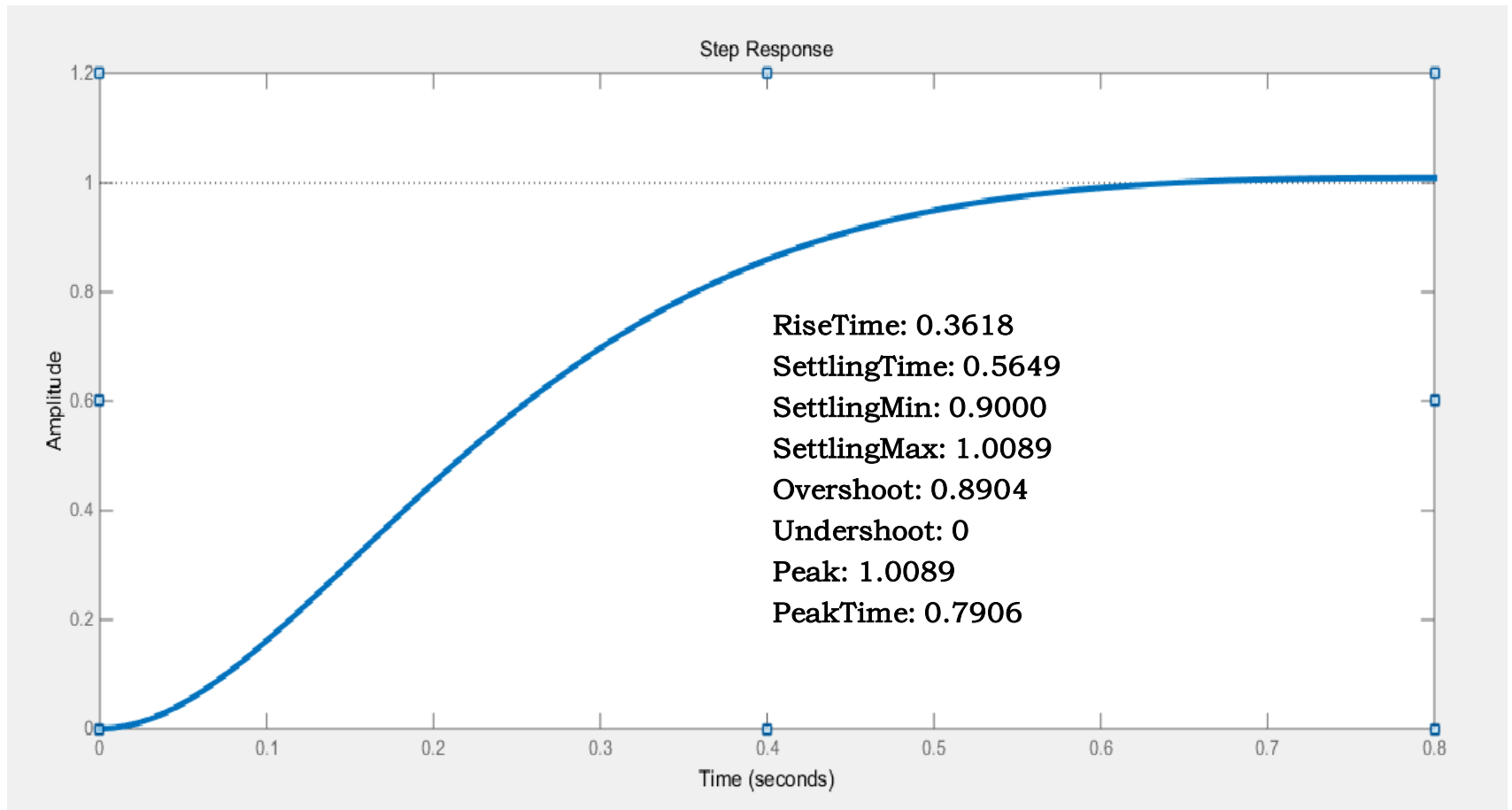
第九步：仿真验证设计方案

1、前置校正之前的阶跃响应—超调不可接受



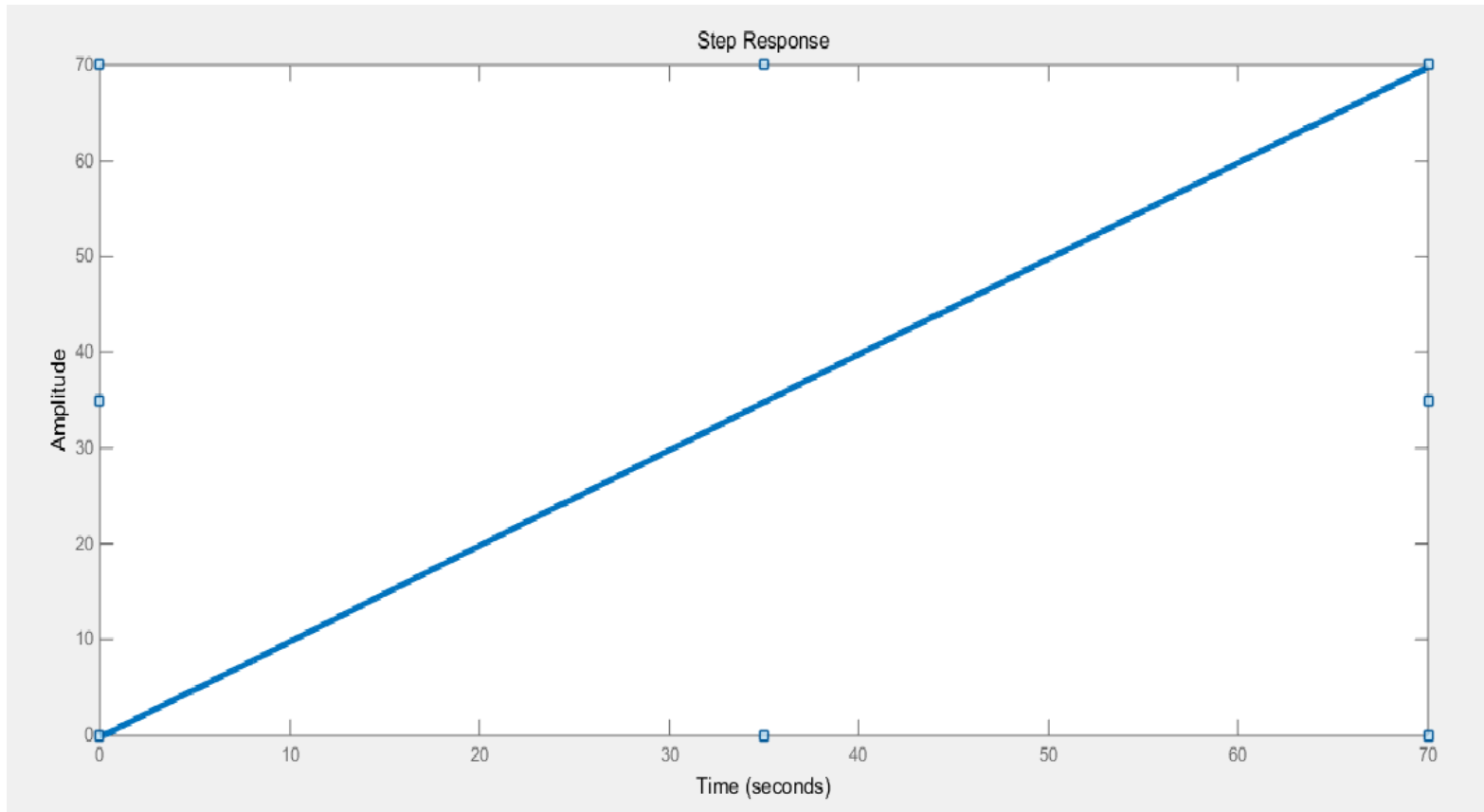
第九步：仿真验证设计方案

2、前置校正之后的阶跃响应—完全可接受



第九步：仿真验证设计方案

3、前置校正之后的斜坡响应——完全可接受



作业7-11

P7.1 当 K 在 0 到 $+\infty$ 之间变化时, 绘制图 P7.1 所示闭环系统的根轨迹, 其中开环传递函数分别为

$$(a) G_c(s)G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+8)}$$

$$(b) G_c(s)G(s) = \frac{K}{(s^2+2s+2)(s+2)}$$

$$(c) G_c(s)G(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+2)(s+10)}$$

$$(d) G_c(s)G(s) = \frac{K(s^2+4s+8)}{s^2(s+1)}$$

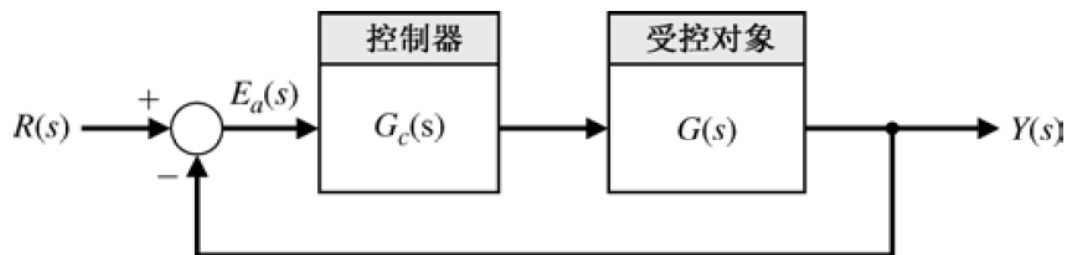


图 P7.1 某反馈控制系统

作业7-12

P7.3 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)}$$

试求：

- (a) 实轴上的分离点及与该点对应的增益 K 。
- (b) 位于虚轴上的特征根及对应的增益 K 。
- (c) $K=6$ 时的闭环特征根。
- (d) 绘制系统根轨迹。

作业7-13

DP7.7 如图 DP7.7(a)所示, 移动机器人大多采用视觉系统作为测量设备^[36]。在图 DP7.33(b)所示的控制系统中, 受控对象 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(0.5s + 1)}$$

控制器 $G_c(s)$ 选用 PI 控制器

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

首先要求闭环系统阶跃响应的稳态误差为零。试为上述 PI 控制器选择合适的参数, 使得:

- (a) 阶跃响应的超调量 P. O. $\leq 5\%$;
- (b) 按 2% 准则的调节时间 $T_s \leq 6$ s;
- (c) 系统的速度误差常数 $K_v > 0.9$;
- (d) 阶跃响应的峰值时间 T_p 最小。

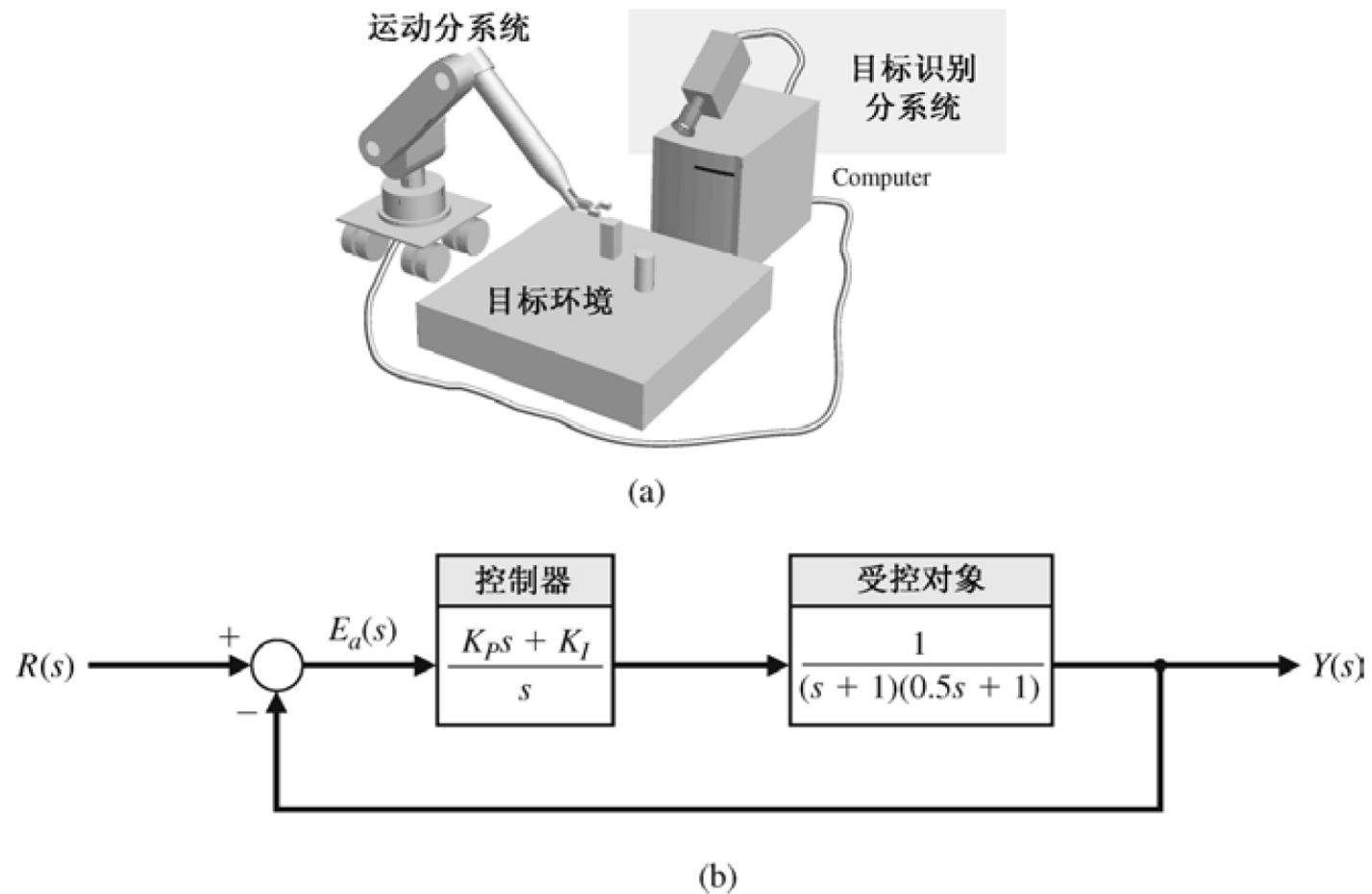


图 DP7.7 (a) 机器人和视觉系统; (b) 反馈控制系统

作业7-14

DP7.9 由肘关节驱动的机械臂如图 DP7.9(a)所示。驱动器的控制系统如图 DP7.9(b)所示。当 $K \geq 0$ 时，绘制系统的根轨迹，并选择合适的 $G_p(s)$ ，使系统阶跃响应的稳态误差为零。采用所选定的 $G_p(s)$ ，当 $K = 1, 1.5$ 和 2.85 时，分别绘制系统的阶跃响应曲线 $y(t)$ ，并记录系统的上升时间、调节时间（按 2% 准则）和超调量。最后，为 $k(1 \leq k \leq 2.85)$ 选择合适的取值，使系统的上升时间尽可能短，且超调量小于 6%。

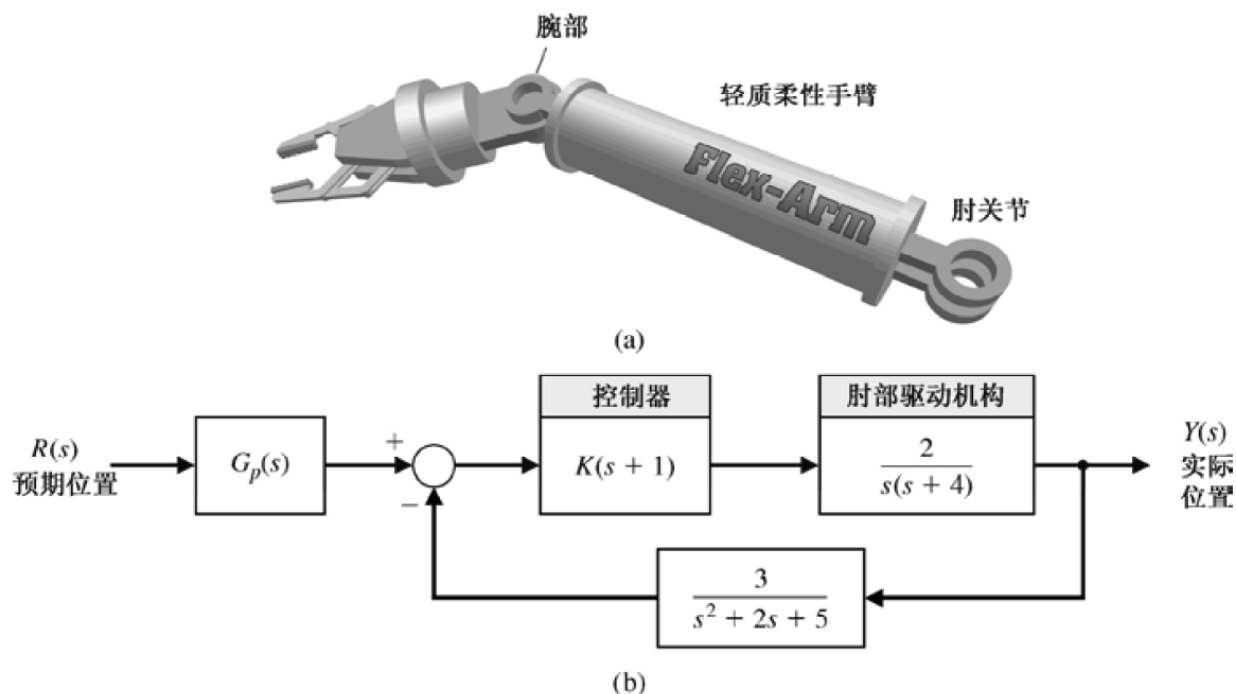


图 DP7.9 (a) 由肘关节驱动的机械臂；(b) 控制系统框图模型

作业7-15

DP7.14 考虑图 DP7.14 所示的反馈系统，其中的受控对象为临界稳定系统。控制器采用比例微分(PD)控制器：

$$G_c(s) = K_P + K_D s$$

- (a) 确定系统的闭环特征方程。
- (b) 令 $\tau = K_P/K_D$ ，将特征方程改写为

$$\Delta(s) = 1 + K_D \frac{n(s)}{d(s)}$$

- (c) 当 $\tau = 6$, $0 \leq K_D < +\infty$ 时，绘制系统的根轨迹。
- (d) 当 $0 < \tau < \sqrt{10}$ 时， τ 对根轨迹有何影响？
- (e) 试设计一个 PD 控制器，使系统满足这些指标要求：(1) 超调量 P.O. $< 5\%$ ，(2) 调节时间 $T_s < 1$ s。

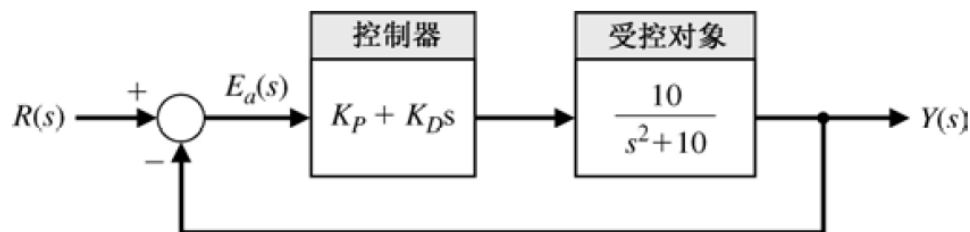


图 DP7.14 采用 PD 控制器对临界稳定系统实施控制