Optimization Methods **Fall 2021**

Homework 2

Instructor: Lijun Zhang *Name:* 方盛俊, *StudentId:* 201300035

Notice

- The submission email is: **zhangzhenyao@lamda.nju.edu.cn**.
- Please use the provided Latex file as a template.
- If you are not familiar with LaTeX, you can also use Word to generate a **PDF** file.

Problem 1: Convex functions

(a)

令 $g(x) = -\log x$, 求导可得 $g'(x) = -\dfrac{1}{x}, g''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$

所以 $g(x) = -\log x$ 是严格凸的.

而 $f_i(x) = -\log x_i = -\log A_i^T x = g(A_i^T x)$, 其中 A_i 第 i 分量为 1, 其他分量为 0, 可以看出 $f_i(x)$ 是凸函数的仿射映射函数, 也是严格凸函数.

因此 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ 为严格凸函数的和, 结果也是严格凸的.

(b)

$\Rightarrow$:

因为 f 是一个二阶可微的凸函数, 因此 $\forall x, y$ 有

$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$

$f(x) \geqslant f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)$

两式相加可得

$\nabla f(x)^T (x - y) \geqslant \nabla f(y)^T (x - y)$

最后有 $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geqslant 0$ 成立

$\Leftarrow$:

因为我们有 $(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T(x-y)\geqslant 0$

令 $g(t)=f(tx+(1-t)y)$, 则 $g'(t)=\nabla f(tx+(1-t)y)^T(x-y)$

即证 $g'(t)\geqslant g'(0)$, 即 $[\nabla f(tx+(1-t)y)^T-\nabla f(y)](x-y)\geqslant 0$

经过观察, 计算 $tx+(1-t)y-y=tx-ty=t(x-y)$, 那么我们只需将 $tx+(1-t)y$ 带入 x 的位置, 根据 $(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T(x-y)\geqslant 0$ 有

$(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T t(x-y)\geqslant 0$ 成立, 因为 $t\geqslant 0$, 可知 $g'(t)\geqslant g'(0)$

最后有 $f(x)=g(1)=g(0)+\int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t\geqslant g(0)+g'(0)=g(y)+\nabla f(y)(x-y)$

(c)

$$
\begin{aligned}
&g(\theta x_1+(1-\theta)x_2,\theta t_1+(1-\theta)t_2)\\
=&(\theta t_1+(1-\theta)t_2)f(\frac{\theta x_1+(1-\theta)x_2}{\theta t_1+(1-\theta)t_2})\\
=&(\theta t_1+(1-\theta)t_2)f(\frac{\theta t_1}{\theta t_1+(1-\theta)t_2}\cdot\frac{x_1}{t_1}+\frac{(1-\theta)t_2}{\theta t_1+(1-\theta)t_2}\cdot\frac{x_2}{t_2})\\
\leqslant&(\theta t_1+(1-\theta)t_2)(\frac{\theta t_1}{\theta t_1+(1-\theta)t_2}\cdot f(\frac{x_1}{t_1})+\frac{(1-\theta)t_2}{\theta t_1+(1-\theta)t_2}\cdot f(\frac{x_2}{t_2}))\\
=&\theta t_1 f(\frac{x_1}{t_1})+(1-\theta)t_2 f(\frac{x_2}{t_2})\\
=&\theta g(x_1,t_1)+(1-\theta)g(x_2,t_2)
\end{aligned}
$$

因此 g 也是凸函数.

Problem 2: Concave function

先证明不等式 $\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

令 $a_i=x_i^p,b_i=y_i^p$, 则 $x_i=a_i^{\frac{1}{p}},y_i=b_i^{\frac{1}{p}}$, 且 $x_i,y_i\geqslant 0$

原式两边乘 p 次方可转化为

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^{\frac{1}{p}}+b_i^{\frac{1}{p}})^p \geqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

用 $\frac{1}{p}$ - Norm 范数表示该不等式即为

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\begin{pmatrix}a_i\\b_i\end{pmatrix}\right\|_{\frac{1}{p}} \geqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}a_i\\b_i\end{pmatrix}\right\|_{\frac{1}{p}}$$

由范数的三角不等式 $\|x+y\|_{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_{\frac{1}{p}}+\|y\|_{\frac{1}{p}}$ 即可知该式成立.

因此我们带入 $\theta x+(1-\theta)y$ 即可知

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\theta x_i+(1-\theta)y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(\theta x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}((1-\theta)y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \theta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+(1-\theta)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

即 $f(\theta x+(1-\theta)y) \geqslant \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$ 成立.

因此 $f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 在 $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}_{++}$ 时是一个凹函数.

Problem 3: Convexity

(a)

首先对 $x \neq y$ 的情况进行分析.

因为 ψ 是一个严格凸函数, 根据定义有 $\psi(\theta x+(1-\theta)y) < \theta\psi(x)+(1-\theta)\psi(y)$

我们考虑过 x, y 两点的函数 $g(t)=\psi(ty+(1-t)x), t \in [0,1]$

我们求导可得 $g'(t)=\nabla\psi(ty+(1-t)x)^T(y-x)$

因为 ψ 是严格凸函数, 因此 g 也是严格凸函数, 我们有 $g(0) > g(1)+g'(1)\cdot(0-1)$

即 $\psi(x) > \psi(y)-\nabla\psi(y)^T(y-x)=\psi(y)+\nabla\psi(y)^T(x-y)$

即有 $\Delta_\psi(x,y)=\psi(x)-\psi(y)-\langle\nabla\psi(y), x-y\rangle > 0$

对于 $x=y$ 的情况, 带入即可知

$\Delta_\psi(x,y)=\psi(x)-\psi(x)-\langle\nabla\psi(y),x-x\rangle=0$

综上我们有 $\psi(x,y)\geqslant 0,\forall x,y\in\Omega$ 且当且仅当 $x=y$ 时取到等号.

(b)

要证 $L(y)+\Delta_\psi(y,x_0)\geqslant L(x^*)+\Delta_\psi(x^*,x_0)+\Delta_\psi(y,x^*)$

即证 $L(y)+\psi(y)-\psi(x_0)-\nabla\psi(x_0)^T(y-x_0)\geqslant L(x^*)+\psi(x^*)-\psi(x_0)-\nabla\psi(x_0)^T(x^*-x_0)+\psi(y)-\psi(x^*)-\nabla\psi(x^*)^T(y-x^*)$

即证 $L(y)\geqslant L(x^*)+[\nabla\psi(x_0)-\nabla\psi(x^*)]^T(y-x^*)$

由 $L(y)$ 是凸函数可知 $L(y)\geqslant L(x^*)+\nabla L(x^*)^T(y-x^*)$

令 $f(x)=L(x)+\Delta_\psi(x,x_0)=L(x)+\psi(x)-\psi(x_0)-\nabla\psi(x_0)^T(x-x_0)$, 因为其是数个凸函数相加, 结果仍然是凸函数

求梯度得 $\nabla f(x)=\nabla L(x)+\nabla\psi(x)-\nabla\psi(x_0)$, 因为在 $x=x^*$ 处取得最小值, 因此有 $\nabla f(x^*)=\nabla L(x^*)+\nabla\psi(x^*)-\nabla\psi(x_0)=0$

因此 $\nabla L(x^*)=\nabla\psi(x_0)-\nabla\psi(x^*)$, 带入 $L(y)\geqslant L(x^*)+\nabla L(x^*)^T(y-x^*)$

可知 $L(y)\geqslant L(x^*)+[\nabla\psi(x_0)-\nabla\psi(x^*)]^T(y-x^*)$ 成立

因此原式成立.

Problem 4: Projection

(a)

因为 $\Pi_X(x)$ 是在凸集 X 上离 x 最近的点, 因此与 $x-\Pi_X(x)$ 垂直的, 过点 $\Pi_X(x)$ 的超平面 S_x 是 X 的一个支撑超平面, 同理 S_y 也是 X 的一个支撑超平面.

过 $\Pi_X(x),\Pi_X(y),x$ 三点作一个二维平面 P, 将 $y-\Pi_X(y)$ 直线投影至 P 上得 $y'-\Pi_X(y)$, 其中的 $x-y'$ 与 $\Pi_X(x)-\Pi_X(y)$ 平行. 并且 P 分别与 S_x,S_y 形成了两条切线 l_x,l_y, P 与 X 的交集形成了一个新的二维凸集 X'.

通过这种方式, 根据点乘的几何意义即可将问题转化为 $||\Pi_X(x)-\Pi_X(y)||_2^2\leqslant[\Pi_X(x)-\Pi_X(y)]^T(x-y')$

对于 $x,y',\Pi_X(x),\Pi_X(y)$ 在同一条直线上时易知成立.

对于不在同一条直线上的情况, 设 $\Pi_X(x)$ 和 $\Pi_X(y)$ 的中点为 O, 且以 $O-\Pi_X(y)$ 为横坐标轴正方向建立坐标系, 且凸集 X' 位于横坐标轴下方, x, y' 位于横坐标轴上方. 接下来证明位于 O 左侧的过 $\Pi_X(x)$ 的切线 l_x 斜率大于等于零, l_y 斜率小于等于零.

使用反证法, 假设 l_x 斜率小于零, 即 l_x 向右下方倾斜, 那么 O 就会处于 l_x 的下方, 再根据支撑超平面的性质可知, O 点不在凸集 X 上, 这与 $O=\dfrac{\Pi_X(x)+\Pi_X(y)}{2}$ 位于凸集 X 上矛盾. 因此假设不成立, l_x 斜率大于等于零, 同理 l_y 斜率小于等于零.

然后观察图像, 我们可知 $\Pi_X(x)-\Pi_X(y), x-y'$ 同向, 并且 $\Pi_X(x)-\Pi_X(y), x-y'$, l_x, l_y 形成了一个梯形, 因此我们有 $\|\Pi_X(x)-\Pi_X(y)\|_2 \leqslant \|x-y\|_2$

可知 $\|\Pi_X(x)-\Pi_X(y)\|_2^2 \leqslant [\Pi_X(x)-\Pi_X(y)]^T(x-y') = \|\Pi_X(x)-\Pi_X(y)\|_2\|x-y\|_2$ 成立.

综上可知, $\|\Pi_X(x)-\Pi_X(y)\|_2^2 \leqslant \langle \Pi_X(x)-\Pi_X(y), x-y\rangle$ 成立.

(b)

由 (a) 有 $\|\Pi_X(x)-\Pi_X(y)\|_2^2 \leqslant \langle \Pi_X(x)-\Pi_X(y), x-y\rangle$

而由点乘的几何意义我们可知 $\langle \Pi_X(x)-\Pi_X(y), x-y\rangle = \|\Pi_X(x)-\Pi_X(y)\|_2 \cdot \|x-y\|_2 \cdot \cos\theta$

因此我们有 $\|\Pi_X(x)-\Pi_X(y)\|_2 \leqslant \|x-y\|_2 \cdot \cos\theta \leqslant \|x-y\|_2$

Problem 5:

(a)

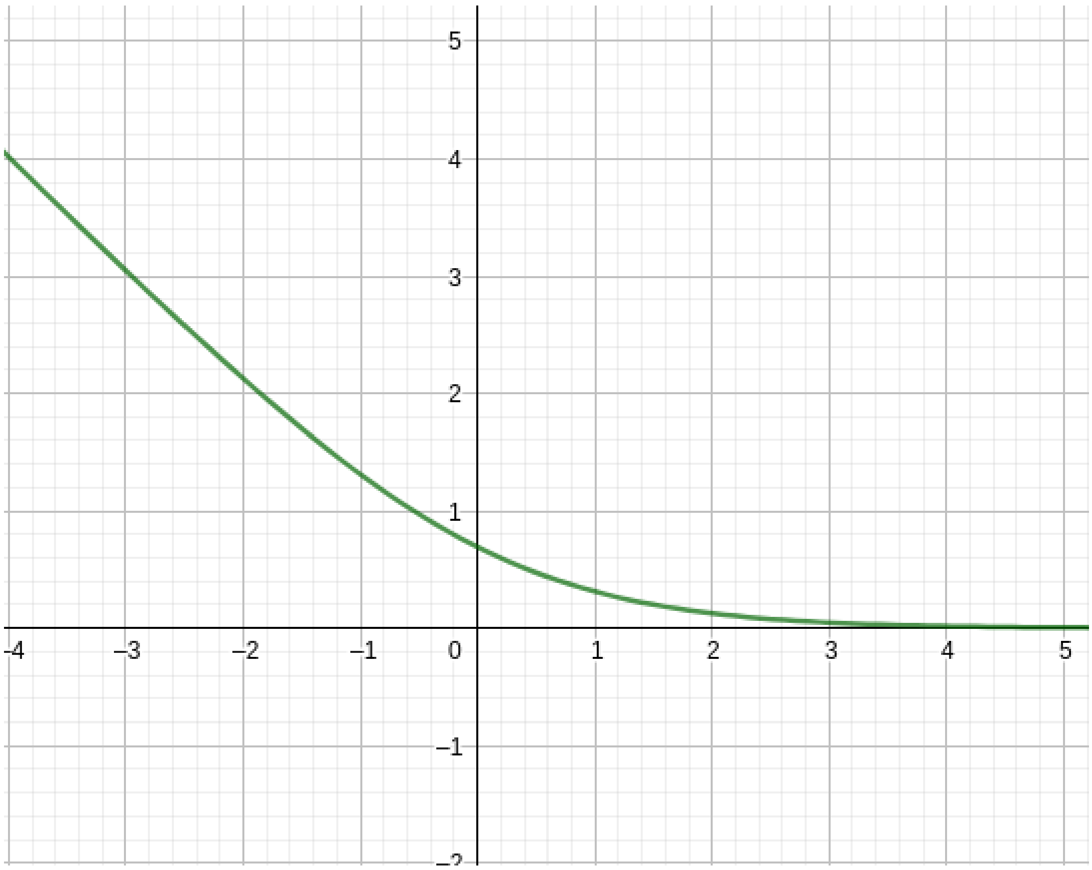
$$f^*(y) = \sup_{x\in \mathrm{dom} f} (yx - \max\{0, 1-x\})$$

显然, $f^*(y)$ 的定义域为 $[-1,0]$, 均为在 $x=1$ 处取得最大值, 即

$$f^*(y) = y - \max\{0, 1-1\} = y$$

(b)

$f(x) = \ln(1+e^{-x})$ 的图像如图所示



因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{-x}=1, \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$

所以 $y=-x$ 和 $y=0$ 是 $f(x)=\ln(1+e^{-x})$ 的两条渐近线.

因此 $f^*(y)$ 的定义域为 $(-1,0)$, $(yx-\ln(1+e^{-x}))'=y+\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

即 $y+(y+1)e^{-x}=0\Rightarrow x=-\ln\dfrac{-y}{y+1}$ 时有最大值

$$f^*(y)=y\cdot(-\ln\frac{-y}{y+1})-\ln(1+\frac{-y}{y+1})=(y+1)\ln(y+1)-y\ln(-y)$$