

- 当 $z \leq 0$ 时有 $f_Z(z) = 0$;
- 当 $0 \leq z \leq 1$ 时有 $f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e^z - 1) = 1 - e^{-z}$;
- 当 $z \geq 1$ 时有 $f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e^1 - 1) = (e - 1)e^{-z}$.

5.4.3 随机变量的乘/除法分布

定理 5.14 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx,$$

随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx.$$

证明 这里给出随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度详细证明, 同理给出 $Z = XY$ 的概率密度. 首先考虑分布函数

$$\begin{aligned} F_{Y/X}(z) &= P(Y/X \leq z) = \iint_{y/x \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{x < 0, y \geq zx} f(x, y) dx dy + \iint_{x > 0, y \leq zx} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{+\infty} f(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{xz} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

变量替换 $t = y/x$ 有

$$\begin{aligned} F_{Y/X}(z) &= \int_{-\infty}^0 dx \int_z^{-\infty} x f(x, tx) dt + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z x f(x, tx) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z (-x) f(x, tx) dt dx + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^z x f(x, tx) dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z |x| f(x, tx) dt dx = \int_{-\infty}^z dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, tx) dx \end{aligned}$$

求导可得概率密度函数.

5.4.4 随机变量的联合分布函数

已知随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 设 (X, Y) 的函数

$$U = u(X, Y) \quad V = v(X, Y)$$

如何求 (U, V) 的联合分布, 有如下结论:

定理 5.15 若 $U = u(X, Y)$ 和 $V = v(X, Y)$ 有连续偏导, 且存在反函数

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v),$$

则 (U, V) 的联合密度为

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(x(u, v), y(u, v))|J|$$

其中 J 为变换的雅可比行列式, 即

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1}.$$

上述结论可推广到一般的 n 维随机变量.

5.5 多维随机变量的数学特征

5.5.1 多维随机变量的期望

定理 5.16 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布列为 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的期望为

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij};$$

设二维连续随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的期望为

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy.$$

例 5.15 设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 相互独立, 求 $E[\max(X, Y)]$.

解 根据独立性定义可得随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

于是得到

$$\begin{aligned} E[\max(X, Y)] &= \int \int_{D_1} x f(x, y) dx dy + \int \int_{D_2} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} x f(x, y) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} y f(x, y) dy \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} x f(x, y) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

例 5.16 在长度为 1 米的线段上任取两点 X, Y , 求 $E[\min(X, Y)], E[|X - Y|]$.

定理 5.17 对任意随机变量 X, Y 和常数 a, b , 有

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y];$$

对独立随机变量 X 和 Y , 以及任意函数 h, g , 有

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad \text{和} \quad E[h(X)g(Y)] = E[h(X)]E[g(Y)];$$

对任意随机变量 X 和 Y , 有 Cauchy-Schwartz 不等式

$$E[XY] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}.$$

证明 设随机变量 X, Y 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则

$$\begin{aligned} E[aX + bY] &= \int \int (ax + by)f(x, y)dxdy \\ &= a \int \int xf(x, y)dxdy + b \int \int yf(x, y)dxdy = aE(X) + bE(Y). \end{aligned}$$

若随机变量 X 与 Y 独立, 则有

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int \int xyf(x, y)dxdy = \int \int xf_X(x)yf_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

对任意随机变量 X 与 Y , 以及对任意 $t \in \mathbb{R}$ 有 $E[(X + tY)^2] \geq 0$ 成立, 即任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$t^2 E[Y^2] + E[X^2] + 2tE[XY] \geq 0.$$

因此有 $\Delta = 4[E(XY)]^2 - 4E[X^2]E[Y^2] \leq 0$, 即 $E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.

5.5.2 协方差

定理 5.18 对任意随机变量 X 与 Y 有

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

特别地, 当 X 与 Y 独立时有

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

证明 令 $Z = X + Y$, 有

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= E[(Z - EZ)^2] = E[(X - EX + Y - EY)^2] \\ &= E(X - EX)^2 + E(Y - EY)^2 + 2E[(X - EX)(Y - EY)] \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E[(X - EX)(Y - EY)]. \end{aligned}$$

若 X 与 Y 独立, 则 $2E[(X - EX)(Y - EY)] = 0$, 所以 $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

定义 5.12 定义随机变量 X 和 Y 的协方差为

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

根据协方差定义和定理 5.18 有

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \quad \text{和} \quad \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

下面研究协方差的性质.

性质 5.1 对任意随机变量 X, Y 和常数 c , 有

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) \quad \text{和} \quad \text{Cov}(X, c) = 0.$$

性质 5.2 对任意常数 a 和 b , 随机变量 X 和 Y , 有

$$\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y) \quad \text{和} \quad \text{Cov}(X + a, Y + b) = \text{Cov}(X, Y).$$

证明 根据协方差的定义有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(aX, bY) &= E[(aX - E(aX))(bY - E(bY))] = abE[(X - E(X))(Y - E(Y))]; \\ \text{Cov}(X + a, Y + b) &= E[(X + a - E(X + a))(Y + b - E(Y + b))] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]. \end{aligned}$$

性质 5.3 对任意随机变量 X_1, X_2, Y , 有

$$\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 + X_2, Y) &= E[(X_1 + X_2 - E(X_1) - E(X_2))(Y - E(Y))] \\ &= E[(X_1 - E(X_1))(Y - E(Y))] + E[(X_2 - E(X_2))(Y - E(Y))] = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y). \end{aligned}$$

由此性质可进一步得到: 对随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_m , 有

$$Cov\left(\sum_i^n X_i, \sum_j^m Y_j\right) = \sum_i^n \sum_j^m Cov(X_i, Y_j),$$

以及进一步有

$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j).$$

性质 5.4 若随机变量 X 与 Y 独立, 则有 $Cov(X, Y) = 0$; 但反之不成立.

证明 若 X 与 Y 独立, 则

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[X - E(X)]E[Y - E(Y)] = 0.$$

反之不成立, 例如随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1
P_i	1/3	1/3	1/3

当 $X \neq 0$ 时随机变量 $Y = 0$, 否则 $Y = 1$, 根据联合分布列可知则 X 与 Y 不独立, 但此时有

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY] - E(X)E(Y) = 0.$$

性质 5.5 对任意随机变量 X 与 Y 有

$$(Cov(X, Y))^2 \leq Var(X)Var(Y)$$

等号成立的充要条件是 $Y = aX + b$ (即 X 与 Y 之间存在线性关系).

证明 由 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &\leq \sqrt{E[(X - E(X))^2]E[(Y - E(Y))^2]} = \sqrt{Var(X)Var(Y)}. \end{aligned}$$

下面证明等号成立的充要条件. 若 $Y = aX + b$, 则

$$Cov(X, Y) = Cov(X, aX + b) = aVar(X), \quad Var(Y) = a^2Var(X),$$

所以

$$\text{Cov}^2(X, Y) = a^2 \text{Var}^2(X) = \text{Var}(X) a^2 \text{Var}(X) = \text{Var}(X) \text{Var}(Y).$$

另一方面, 若 $(\text{Cov}(X, Y))^2 = \text{Var}(X) \text{Var}(Y)$ 则有

$$(E[(X - EX)(Y - EY)])^2 = E(X - EX)^2 E(Y - EY)^2,$$

设

$$\begin{aligned} f(t) &= E[t(X - EX) - (Y - EY)]^2 \\ &= t^2 E[X - E(X)]^2 - 2tE[(X - E(X))(Y - E(Y))] + E[Y - E(Y)]^2 \end{aligned}$$

根据一元二次方程的性质 $\Delta = 4(E[(X - EX)(Y - EY)])^2 - 4E(X - EX)^2 E(Y - EY)^2 = 0$ 可得方程 $f(t) = 0$ 恰有一重根 t_0 . 由此得到

$$f(t_0) = 0 \equiv E[(t_0(X - EX) - (Y - EY))^2]$$

根据 $(t_0(X - EX) - (Y - EY))^2 \geq 0$ 可得 $Y = t_0(X - E(X)) + E(Y) = aX + b$.

例 5.17 随机变量 X 与 Y 独立, 且 $\text{Var}(X) = 6$ 和 $\text{Var}(Y) = 3$, 求 $\text{Var}(2X \pm Y)$.

例 5.18 随机变量 $X \sim P(2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(-2, 4)$, 且 X 与 Y 独立, 则 $E[(X - Y)^2]$.

根据性质 5.5 可知

$$\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \leq 1.$$

等号成立的充要条件是 X 与 Y 存在线性相关. 上式一定程度上反应了随机变量 X 和 Y 的线性相关程度, 由此引入一个新概念: 相关系数.

定义 5.13 设 X 和 Y 为二维随机变量, 如果 $\text{Var}(X), \text{Var}(Y)$ 存在且不为 0, 则称

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数, 简记 ρ .

关于相关系数, 我们需要注意:

- 使用相关系数而不是 $\text{Cov}(X, Y)$, 主要是规范 $|\rho_{XY}| \leq 1$, 而 $\text{Cov}(X, Y)$ 受数值大小影响;
- 相关系数 $|\rho_{XY}| \leq 1$: 若 $\rho > 0$, X 与 Y 正相关; 若 $\rho < 0$, X 与 Y 负相关; $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为 X 与 Y 有线性关系 $Y = aX + b$. 本质上 ρ_{XY} 刻画了 X, Y 的线性相关程度, 又称为“线性相关系数”;