Ch 1-4 组合计数

回顾前一次课

- 排列、环排列
- 组合、多重组合、多重集排列
- 整数的有序分解

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

第二类Stirling数

问题：考虑将$\boldsymbol{n}$只不同的球放入$\boldsymbol{m}$个完全相同不可分辨的箱子

定义：将n个不同的元素分成m个非空的子集,不同的划分数称为 **第二类 Stirling 数**, 记为 $\boldsymbol{S(n,m)}$

记$S(0,0) = 1, S(n, 1) = 1, S(n, n) = 1$

当 $m > n \geq 1$时有$S(n, m) = 0$

第二类 Stirling 数

定理: 对 $n \geq 1, m \geq 1$ 有

$$S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1)$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k = x^n$$

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

十二重计数

问题简述：将n只球放入m个箱子, 有多少种不同的放法

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同			
相同	相同	?	?	?

整数的无序分拆

问题： 考虑将n只相同的球放入m个相同的箱子

组合学表述： 将正整数n划分成m个无序的正整数之和

定义： 将正整数n划分成m个无序的正整数之和，不同的划分数记为 $\boldsymbol{p(n,m)}$

例：考虑7的各种无序划分

$m=1$	7	$p(7,1)=1$
$m=2$	$6+1,\ 5+2,\ 4+3$	$p(7,2)=3$
$m=3$	$5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$	$p(7,3)=4$
$m=4$	$4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$	$p(7,4)=3$
$m=5$	$3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$	$p(7,5)=2$
$m=6$	$2+1+1+1+1+1$	$p(7,6)=1$
$m=7$	$1+1+1+1+1+1+1$	$p(7,7)=1$

整数的无序分拆

问题：将正整数n划分成m个无序的正整数之和

问题转化：将正整数n划分成m个无序的正整数之和，等价于

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \text{s.t.} \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 1$$

记$p(0,0) = 1, p(n,1) = 1, p(n,n) = 1$

当 $m > n \geq 1$时有$p(n,m) = 0$

递推关系

定理: 对 $n \geq 1, m \geq 1$ 有

$$p(n,m) = p(n-1,m-1) + p(n-m,m)$$

$$p(n,m) = \sum_{i=1}^{m} p(n-m,i)$$

整数的无序分拆

性质：对正整数$n \geq 1$和$m \geq 1$，有

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1} \leqslant p(n,m) \leqslant \frac{1}{m!}\binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}$$

给定$m \geq 1$，当n非常大或趋于无穷的极限中有

$$p(n,m) \approx \frac{n^{m-1}}{m!(m-1)!}.$$

十二重计数

问题简述：将n只球放入m个箱子, 有多少种不同的放法

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!\,S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同			

十二重计数

问题简述：将n只球放入m个箱子, 有多少种不同的放法

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!\,S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases}1 & n\le m\\0 & n>m\end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases}1 & n\le m\\0 & n>m\end{cases}$	$p(n,m)$

Ch 2 条件概率与独立性

条件概率

前面所讨论的概率均是在整个样本空间上进行, 无任何额外因素或条件. 现考虑**在一定条件下某一随机事件发生的概率**.

例 随意掷一枚骰子, 用事件B表示观察到3点, $P(B) = 1/6$.

用事件A表示观察到奇数点, $A = \{1,3,5\}$, $P(A) = 1/2$.

现考虑事件A发生的情况下事件B发生的概率, 记为$P(B|A)$. 根据A= {1,3,5} 且每种情况等可能发生, 由此可得

$$P(B|A) = 1/3 > P(B)$$

用事件C表示观察到2点, 可知$P(C) = 1/6$, 在事件A发生的情况下事件C发生的概率$P(C|A) = 0 < P(C)$

一个随机事件发生的概率可能随着条件的改变而改变

条件概率形式化定义

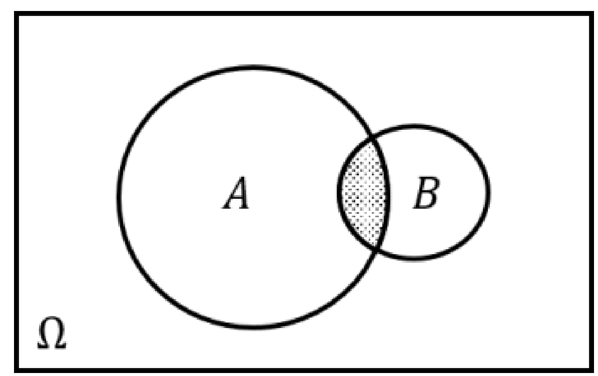
定义：设A和B为同一样本空间下的随机事件, 且$P(A) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生的条件下事件B发生的概率, 简称 **条件概率**

任何事件的概率可看作必然事件的条件概率$P(A) = P(A)/P(\Omega)$

考虑事件A发生的条件下考虑事件B发生的概率, 可将A看作新的样本空间, 即缩减的样本空间



条件概率是概率

对任何给定的事件A满足$P(A) > 0$, 其条件概率:

非负性: 对任意事件B有$P(B|A) \geq 0$;

规范性: 对样本空间Ω有$P(\Omega|A) = 1$;

可列可加性: 若$B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$是可列无穷个互不相容的事件, 即$B_iB_j = \emptyset \ (i \neq j)$, 有

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots |A) = P(B_1|A) + \cdots + P(B_n|A) + \cdots$$

条件概率是一种概率

条件概率的性质

容斥原理：对随机事件A, B_1和B_2且满足$P(A) > 0$, 有

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$

对随机事件A和B且满足$P(A) > 0$, 有$P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$

例

例： 盒子中有4只不同的产品, 其中3只一等品, 1只二等品. 从盒子中不放回随机取两次产品. 用A表示第一次拿到一等品的事件, B表示第二次取到一等品的事件, 求条件概率$P(B|A)$.

乘法公式

对随机事件A和B且满足$P(A) > 0$, 根据条件概率的定义可

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

性质： 对随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$且满足$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$, 有

$$\begin{aligned} &P(A_1A_2\cdots A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \end{aligned}$$

例

例： 假设一批灯泡有100只, 其中有次品10只, 其余为正品. 不放回抽取地每次抽取一只, 求第三次才是正品的概率

例

设n把钥匙中只有一把能打开门. 不放回随机取出一把开门, 求第k次打开门的概率.

匹配问题

假设有n对夫妻参加活动, 被随机分成n组, 每组一男一女, 求n对夫妻恰好两两被分到一组的概率.

例

第一个箱子里有n个不同的白球, 第二个箱子里有有m个不同的红球, 从第一个箱子任意取走一球, 再从第二个箱子里任意取走一球放入第一个箱子, 依次进行, 直至第一、第二个箱子都为空, 求第一个箱子最后一次取走的球是白球的概率.