Solution for Problem Set 9

201300035 方盛俊

Problem 1

(a)

BFS 的过程为:

$q \rightarrow s \rightarrow w \rightarrow v$

$r \rightarrow u \rightarrow y$

$t \rightarrow x \rightarrow z$

其中各个点的距离和父节点分别为

$\{q.d = 0, q.p = \text{NIL}\}, \{s.d = 1, s.p = q\}, \{w.d = 2, w.p = s\}, \{v.d = 3, v.p = w\}$

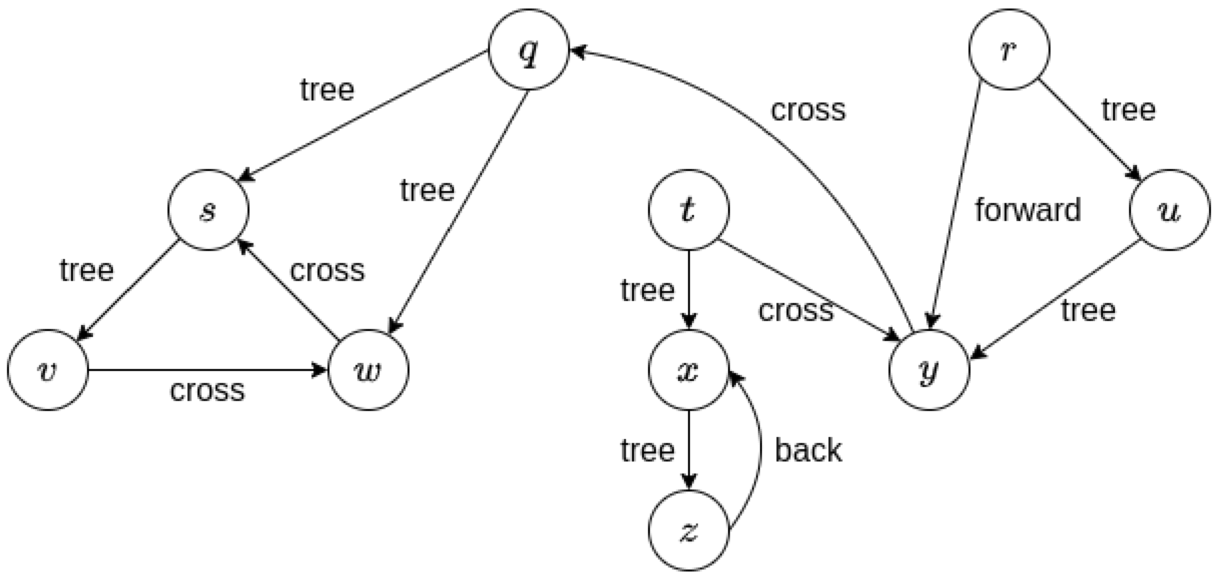
$\{r.d = 0, r.p = \text{NIL}\}, \{u.d = 1, u.p = r\}, \{y.d = 2, y.p = u\}$

$\{t.d = 0, t.p = \text{NIL}\}, \{x.d = 1, x.p = t\}, \{z.d = 2, z.p = x\}$

(b)

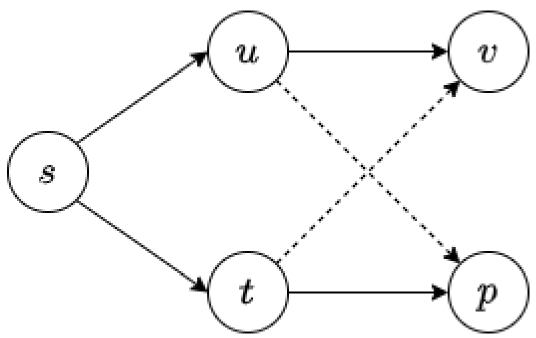
	q	s	v	w	r	u	y	t	x	z
发现时间	1	2	3	6	9	10	11	15	16	17
完成时间	8	5	4	7	14	13	12	20	19	18

各个边的分类为



Problem 2

(a)



如图, 该树 (实线) 不可能通过 BFS 构造出来.

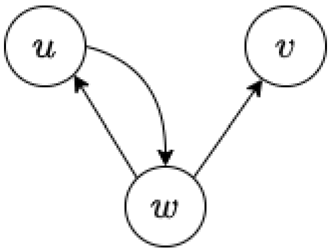
因为在发现了 u 和 t 之后, 通过 BFS 构造, v, p 要么都和 u 相连, 要么都和 t 相连, 不可能出现 v, p 分别连接 u, t 的情况.

(b)

i \ j	WHITE	GRAY	BLACK
WHITE	Tree / Back / Forward / Cross	Back / Cross	Cross
GRAY	Tree / Forward	Tree / Forward / Back	Tree / Forward/ Cross

i \ j	WHITE	GRAY	BLACK
BLACK	Null	Back	Tree / Forward / Back / Cross

(c)



如图, 存在 $u \to w \to v$ 的路径, 满足题意.

我们从 w 开始执行 DFS, 并且首先探索 $w \to u$, 然后因为 u 不能重新探索 w, 因此终止了, 再接着探寻 $w \to v$. 按照这个顺序我们知道:

$$w.d = 1, w.f = 6; u.d = 2, u.f = 3; v.d = 4, v.f = 5$$

可以看出, 这个例子中 $v.d > u.f$, 可以作为一个反例.

Problem 3

Algorithm 1 DFS

```
function DFSAll(G)
    for each node u do
        u.color = WHITE
        u.parent = NIL
    end for
    i = 0
    for each node u do
        if u.color == WHITE then
            i = i + 1
            DFS(G, u, i)
        end if
    end for
end function
function DFS(G, s, cc)
    s.color = GRAY
    s.cc = cc
    for each edge (s, v) in E do
        if v.color == WHITE then
            v.parent = s
```

```
            DFS(G, u, cc)
        end if
    end for
    s.color = BLACK
end function
```

Problem 4

(a)

因为树是无回路连通图, 所以在使用 BFS 遍历时, 一定能遍历到树的所有边.

我们从任意一个顶点 s 开始进行 BFS, 就能给每一个顶点赋予一个距离值 $s.d$

按照顶点距离 $v.d$ 的奇偶来区分, 将距离为奇数的顶点分到 L 中, 距离为偶数的顶点分到 R 中.

我们可以看出, 对于任意一个 L 中的顶点 u, 与 u 相连的均为偶数顶点, 均在 R 中, 同理 R 中顶点相连的点也均在 L 中.

因此任何树都是一个二部图.

(b)

即证明无向图 G 是二部图当且仅当 G 没有奇数条边形成的环.

$\Rightarrow$:

我们给位于 L 的顶点涂上蓝色, 位于 R 的顶点涂上红色.

因为 G 是一个二部图, 通过这样给顶点涂鸦, 我们可以保证蓝色顶点不会与蓝色顶点相邻, 红色顶点不会与红色顶点相邻, 即同色顶点不会相邻.

使用反证法, 假设 G 中存在由奇数条边形成的环.

对于这样的环, 我们不断从中一次一次地拿走一对相邻的红蓝顶点, 不会改变剩下的环红蓝相邻的性质. 直到最后只剩下三条边形成的环, 只有三个顶点, 就必然会有两个同色顶点相邻, 产生矛盾.

因此二部图 G 没有奇数条边形成的环.

$\Leftarrow$:

基于 (a) 的思路, 我们依然选定一个顶点, 并进行 BFS, 生成一棵树, 并给予每个顶点一个距离值, 并且仍然是奇数顶点位于 L, 偶数顶点位于 R.

在这棵树的基础上, 我们将原来的图 G 中其他的边加上, 我们只需证明每一条额外的边均为距离相差 1 的奇数顶点和偶数顶点相邻.

对于任意一条额外边 (u, v),

首先我们有额外边距离差不会超过 1, 这是很显然的, 因为距离值大于等于 2 的话, BFS 会优先选择这条边.

接下来我们证明 u, v 距离差不会等于 0.

我们开始顶点 s 的距离值为 0, 它与距离值为 k 的顶点 u 存在一条路径, 易知这条路径上的边数为 k. 如果 u, v 同奇偶, 即 u 的距离值等于 v, 则加上这条额外边之后, 形成的环 $s - u - v - s$ 就有 $2k + 1$ 条边, 是奇数, 与题目中没有奇数条边的环产生矛盾.

因此 u, v 的距离差一定为 1, 即 u, v 一定不会同在 L 或同在 R.

即可证明没有奇数条边的环的无向图是二部图.

(c)

Algorithm 2 BFS

```
function BFS(G)
    for each node u do
        u.color = WHITE, u.dist = INF, u.class = NIL
    end for
    for each node u do
        if u.color == WHITE then
            u.color = GRAY, u.dist = 0, u.class = R
            Q.enqueue(u)
            while !Q.empty() do
                v = Q.dequeue()
                v.color = BLACK
                for each edge (v, w) in E do
                    if w.color == WHITE then
                        w.color = GRAY, w.dist = v.dist + 1
                        Q.enqueue(w)
                    else if w.color == BLACK and w.dist == v.dist then
                        return False
                    end if
                end for
            end while
        end if
    end for
    return True
end function
```

Problem 5

令 M 为这个 Number Maze.

Algorithm 3 BFS

```
function BFS(G)
    colors = a new n × n array
    distances = a new n × n array
    for each (i, j) in n × n do
        colors[i][j] = WHITE
    end for
    colors[1][1] = GRAY
    distances[1][1] = 0
    Q.enqueue((1,1))
    while !Q.empty() do
        (i, j) = Q.dequeue()
        colors[i][j] = BLACK
        distances[i][j] = distance of parent + 1
        v = M[i][j]
        if (i, j) == (n, n) then
            return distances[i][j]
        end if
        for each (x, y) in [(i, j + v), (i, j - v), (i + v, j), (i - v, j)] within board do
            if colors[x][y] == WHITE then
                colors[x][y] = GRAY
                Q.enqueue(w)
            end if
        end for
    end while
    Print("The maze has no solution.")
    return Null
end function
```

运行时间等于 BFS 搜索的时间, 即 $O(n^2+m)$, m 代表着边数, 易知一个节点最多与四条边相连, 并且只有 n^2 个节点, 所以我们认为 $m=O(n^2)$, 最后时间复杂度为 $O(n^2)$

Problem 6

Algorithm 4 BFS

```
function BFS(G)
    for each node u do
        u.color = WHITE, u.dist = INF
    end for
    u.color = GRAY, u.dist = 0
    Q.enqueue(u)
    while !Q.empty() do
        v = Q.dequeue()
        v.color = BLACK
        i = v.dist + 1
```

```
        COLOR = (i
        for each edge (v, w) in E do
            if w.color == WHITE and edge (v, w) == COLOR then
                w.color = GRAY, w.dist = v.dist + 1
                Q.enqueue(w)
            end if
        end for
    end while
end function
```

时间复杂度相当于 BFS, 即 $O(n+m)$, n 是顶点数, m 是边数.