§3 维数 · 基与坐标

一、线性空间中向量之间的线性关系

二、线性空间的维数、基与坐标

引入

问题 I

如何把线性空间的全体元素表示出来？

这些元素之间的关系又如何呢？

即线性空间的构造如何？　　　（基的问题）

问题 II

线性空间是抽象的，如何使其元素与具体的东西

—数发生联系，使其能用比较具体的数学式子来表达？

怎样才能便于运算？　　　（坐标问题）

一、线性空间中向量之间的线性关系

1、有关定义：V 是数域 P 上的一个线性空间

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in V(r\geq 1)$，$k_1,k_2,\cdots,k_r \in P$，和式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$

称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的一个**线性组合**.

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta \in V$，若存在 $k_1,k_2,\cdots,k_r \in P$

使 $\beta = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$

则称向量 β 可经向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性表出**；

若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中每一向量皆可经向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，则称向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可经向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性表出**；

若两向量组可以互相线性表出，则称这两个向量组为**等价的**.

（3）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$，若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r\in P$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为**线性相关**的；

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 不是线性相关的，即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时才成立，

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为**线性无关**的.

2、有关结论

（1）单个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=0.$

单个向量 α 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha\neq 0$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中有一个向量可经其余向量线性表出.

（2）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且可被向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，则 $r \le s$ ；

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$为两线性无关的等价向量组，则 $r = s$.

（3）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，但向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则 β 可被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，且表法是唯一的.

二、线性空间的维数、基与坐标

1、无限维线性空间

若线性空间 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，则称 V 是**无限维线性空间**.

例1 所有实系数多项式所成的线性空间 $\mathbf{R}[x]$ 是无限维的. 因为，

对任意的正整数 n，都有 n 个线性无关的向量

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1}$$

2、有限维线性空间

（1）n 维线性空间：

若在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量，但是任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的，则称 V 是一个 n 维线性空间；常记作 $\dim V = n$.

注：零空间的维数定义为0.

$\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$

（2）基

在 n 维线性空间 V 中，n 个线性无关的向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，称为 V 的一组基；

（3）坐标

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为线性空间 V 的一组基，$\alpha\in V$，

若 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$， $a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$

则数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$， 就称为 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

下的**坐标**，记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

有时也形式地记作 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

注意:

向量 α 的坐标 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是被向量 α 和基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一确定的．即向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标唯一的.

但是，在不同基下 α 的坐标一般是不同的.

3、线性空间的基与维数的确定

定理： 若线性空间V中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$满足

i） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；

ii） $\forall\beta\in V$，β可经$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，

则V为n维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为V的一组基.

证明：$\because a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，$\therefore$V的维数至少为$n$.

任取V中$n+1$个向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$，由ii），向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$可用向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性表出.

若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$是线性无关的，则$n+1\leqslant n$，矛盾.

∴V中任意n＋1个向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$ 是线性相关的.

故，V是n 维的，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是V的一组基.

例2 3 维几何空间R^3＝ $\{(x,y,z)|x,y,z\in R\}$

$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 是R^3的一组基；

$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0)$也是$R^3$的一组基.

一般地，向量空间

$P^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in P,i=1,2,\cdots,n\}$ 为n维的，

$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$

就是 P^n 的一组基．称为P^n的**标准基**.

注意：

① n维线性空间 V 的基不是唯一的，V中任意 n个线性无关的向量都是V的一组基.

② 任意两组基向量是等价的.

例3（1）证明：线性空间$P[x]_n$是n 维的，且

1，x，x^2，…，x^{n-1} 为 $P[x]_n$ 的一组基.

（2）证明：1，$x-a$，$(x-a)^2$，…，$(x-a)^{n-1}$

也为$P[x]_n$的一组基.

证：（1）首先，1，x，x^2，…，x^{n-1}是线性无关的.

其次，$\forall f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in P[x]_n$

$f(x)$可经 1，x，x^2，…，x^{n-1}线性表出.

∴ 1，x，x^2，…，x^{n-1} 为$\mathbf{P}[x]_n$的一组基，

从而，$\mathbf{P}[x]_n$是n维的.

注： 此时，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

在基1，x，x^2，…，x^{n-1}下的坐标就是

$$(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$$

（2）1，$x-a$，$(x-a)^2$，…，$(x-a)^{n-1}$是线性无关的.

又对 $\forall f(x)\in P[x]_n$，按泰勒展开公式有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

即，$f(x)$可经1，$x-a$，$(x-a)^2$，…，$(x-a)^{n-1}$线性表出.

∴1，$x-a$，$(x-a)^2$，…，$(x-a)^{n-1}$为$P[x]_n$的一组基.

注： 此时，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

在基1，$x-a$，$(x-a)^2$，…，$(x-a)^{n-1}$下的坐标是

$$\left(f(a),f'(a),\cdots,\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)$$

例4 求全体复数的集合C看成复数域C上的线性空间的维数与一组基；

若把C看成是实数域R上的线性空间呢？

解：复数域C上的线性空间C是1维的，数1就是它的一组基；

而实数域R上的线性空间C为2维的，数1，i 就为它的一组基.

注： 任意数域P看成是它自身上的线性空间是一维的，数1就是它的一组基.

例5 在线性空间 P^4 中求向量 $\xi=(1,2,1,1)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标，其中

$$\varepsilon_1=(1,1,1,1),\ \ \varepsilon_2=(1,1,-1,-1),\ \ \varepsilon_3=(1,-1,1,-1),\ \ \varepsilon_4=(1,-1,-1,1)$$

解：设 $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4$，则有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$$

解之得, $x_1=\dfrac{5}{4},x_2=\dfrac{1}{4},x_3=-\dfrac{1}{4},x_4=-\dfrac{1}{4}$.

∴ξ在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $(\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4})$.