Ch 2-2 独立性

回顾前一次课

若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个划分, 对任意事件B有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

称之为 **全概率公式**

贝叶斯公式： 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个划分, 且事件B满足$P(B) > 0$. 对任意$1 \le i \le n$有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

两事件的独立性

在一般情况下, 由条件概率定义知

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \neq P(B)$$

即事件A发生对事件B的发生有影响. 然而在有些情况下事件A的发生对事件B可能没任何影响 —— 独立性

定义: 若事件A, B满足$P(AB) = P(A)P(B)$, 称事件***A*与*B*相互独立**

- 对事件A和B满足$P(A)P(B) > 0$, 有

$$P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

- 任何事件与不可能事件 (或必然事件) 相互独立

性质

若事件A与B相互独立, 则A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B, $\bar{A}$与$\bar{B}$都互相独立

如何判断独立性？

1、直接计算判断$P(AB) \overset{?}{=} P(A)P(B)$

2、根据实际问题判断事件的独立性

- 两人独立射击打靶且互不影响, 因此两人中靶的事件相互独立
- 从n件产品中随机抽取两件, 事件A_i表示第i件是合格品. 若有放回抽取则事件A_1与A_2相互独立; 若不放回则不独立
- 机器学习的经典假设是训练数据独立同分布采样

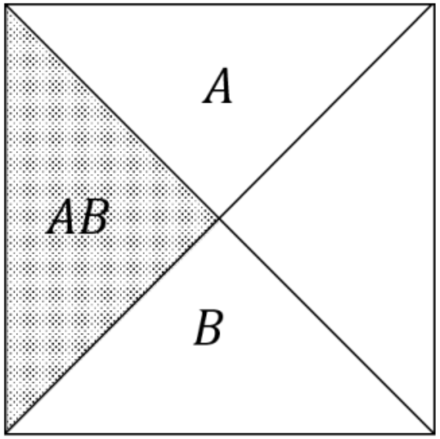
例：从一副扑克 (不含大王、小王) 中随机抽取一张扑克, 用事件A表示抽到10, 事件B表示抽到黑色的扑克. 事件A与B是否独立?

独立与互斥的关系

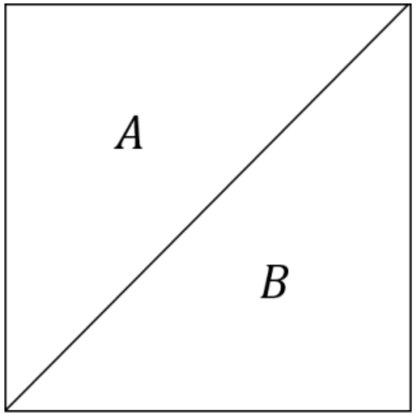
A与B相互独立： $P(AB) = P(A)P(B)$, 独立性与概率相关,
反映事件的概率属性

A与B互不相容：$AB = \emptyset$, 与事件运算关系相关, 与概率无关

独立与互斥反映事件不同的性质, 无必然联系



A与B独立, 但并不互斥



A与B互斥, 但并不独立

性质

事件A和B满足$P(A)P(B) > 0$, 若事件A和B独立则A和B不互斥;
若事件A和B互斥则A和B不独立.

若事件A和B互斥且$P(A)P(B) > 0$, 下面哪些说法正确?

a) $P(B|A) > 0$ b) $P(A|B) = 0$ c) A, B不独立 d) $P(A|B) = P(A)$

若事件A和B独立且$P(A)P(B) > 0$, 下面哪些说法正确?

a) $P(B|A) > 0$ b) $P(A|B) = P(A)$

c) $P(A|B) = 0$ d) $P(AB) = P(A)P(B)$

多事件的独立性

定义 若事件A, B, C满足$P(AB) = P(A)P(B)$, $P(AC) = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(B)P(C)$ 且 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$，则称**事件$\boldsymbol{A, B, C}$相互独立**

事件A, B, C相互独立　　　　事件A, B, C两两独立

定义若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中任意k个事件独立, 即对任意$k \in [n]$有

$$P\left(A_{i_1} \cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

其中$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq \mathrm{n}$, 则称 **事件$\boldsymbol{A_1, A_2, \cdots, A_n}$相互独立**

例题

三人独立破译一份密码, 每人单独能破译的概率分别为1/5, 1/3, 1/4, 问三人中至少有一人能破译密码的概率.

小概率原理

若n个事件$A_1,\cdots,A_n$相互独立, 其发生的概率分别为$p_1,\cdots,p_n$, 则事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一事件发生的概率为

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1\cdots\bar{A}_n)=1-(1-p_1)\cdots(1-p_n)$$

事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一事件不发生的概率为

$$P(\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cdots\cup\bar{A}_n)=1-P(A_1A_2\cdots A_n)\ =\ 1-p_1p_2\cdots p_n$$

若每个事件的概率p_i都非常小, 但n非常大, 则n个相互独立的事件中 至少有一事件发生 或 至少有一事件不发生 的概率都很大

小概率原理

若事件A在一次试验中发生的概率非常小, 但经过多次独立地重复试验, 事件A的发生是必然的, 称之为 **小概率原理**

若独立事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$发生的概率$P(A_i) = p$, 则n个事件中恰有k个事件发生的概率为

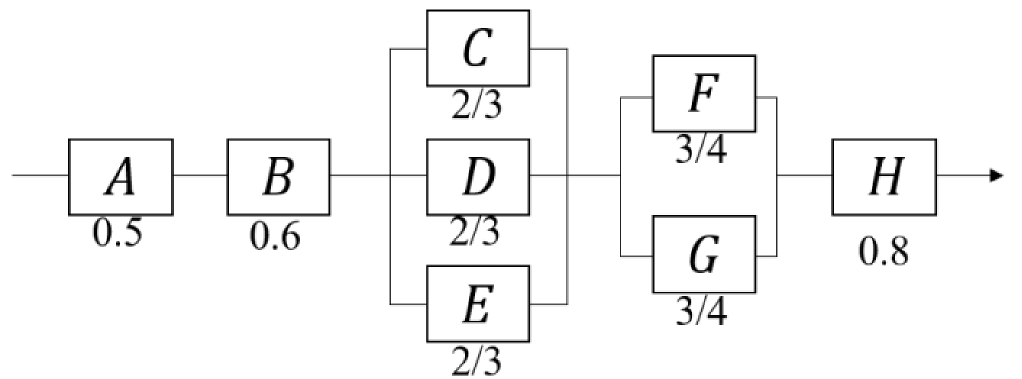
$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

例题

冷战时期美国的导弹精度99%, 苏联的导弹精度60%, 但苏联的导弹数量特别多, 导弹的数量能否弥补精度的不足?

例题

一串电路如下图所示：A,B,C,D,E,F,G 是电路元件, 电路元件各自下方的数字表示正常工作的概率．若各电路元件之间相互独立．求电路正常工作的概率.



案例分析：验证大矩阵乘法是否相等

给定矩阵$A, B, C \in \{0,1\}^{n\times n}$ $(n \geq 10000000)$, 验证$AB = C$?

独立随机产生一个向量$r \in \{0,1\}^n$, 判断

$$A(Br) = Cr?$$

计算$A(Br)$ 和Cr的复杂度均为$O(n^2)$. 若$A(Br) \neq Cr$则直接有$AB \neq C$; 若$A(Br) = Cr$并不能得出$AB = C$.

将上述过程独立进行K次, 可以证明以较大的概率有$AB = C$成立, 该过程被称为Freivalds算法

Freivalds算法

- -

Freivalds 算法

- -

Input: A, B, C

Output: Yes/No

- -

For $i = 1 : K$

    Select a random vector $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ with $P(r_j = 0) = P(r_j = 1) = 1/2$ $(j \in [n])$

    Compute $p = A \times (Br) - Cr$

    If $p \neq 0$ then

        Return 'No'.

    EndIf

EndFor

Return 'Yes'.

- -

Freivalds算法分析

该算法的计算复杂度为O(Kn^2), 若K比较小则显著降低了计算复杂度.

若返回No, 则必然有AB\neq C
若返回Yes, 然而并不一定有AB=C成立, 下面研究成立的概率.

设$D = AB - C \neq 0$, 则D中必存在一些元素不为0, 不妨令$d_{11} \neq 0$.
对任意一轮循环, 不妨设随机向量$r = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$, 根据返回Yes可知$Dr = 0$, 进一步可得向量$Dr$的第一个元素等于0, 即

$$\sum_{j=1}^{n} d_{1j} r_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = -\frac{1}{d_{11}} \sum_{j=2}^{n} d_{1j} r_j$$

Freivalds算法分析

$$\sum_{j=1}^{n} d_{1j} r_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = -\frac{1}{d_{11}} \sum_{j=2}^{n} d_{1j} r_j$$

无论$r_2, \dots, r_n$取何值, 等式$\sum_{j=1}^{n} d_{1j} r_j = 0$是否成立由$r_1$的值决定.

根据$P(r_1 = 0) = P(r_1 = 1) = 1/2$可知$\sum_{j=1}^{n} d_{1j} r_j = 0$成立的概率不超过1/2

在K轮独立循环中, 等式$\sum_{j=1}^{n} d_{1j} r_j = 0$成立的概率不超过 $\frac{1}{2^K}$

取$K = \log_2 n$, 则算法Freivalds计算复杂度为$O(n^2 \log n)$, 若算法返回No, 则$AB \neq C$; 若返回Yes, 则有

$$P(AB = C) > 1 - 1/n$$

即至少以$1 - 1/n$的概率有$AB = C$成立