习题

P.157 19.(3);20.(3),(4);22.;23.;26.;

思考

$$\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&-1&-1\\-1&-1&0&-1\\1&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&-1\\0&-1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 向量组的一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$,其中$\alpha_2=\alpha_1-\alpha_3$

1.

$\because 4-r(A)=2$

$\therefore$ 方程组的导出组的基础解系所含解个数为2,分别设为$\gamma_1-\gamma_2,\gamma_1-\gamma_3$

$\therefore$ 该方程的一般解为$\gamma=\gamma_1+k_1(\gamma_1-\gamma_2)+k_2(\gamma_1-\gamma_3)$

$\therefore$ 即$\gamma=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}6\\-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$

2.

(1)

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1&-3\\1&-1&0&1\\4&-4&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&-1&-4\\0&0&-1&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(A)=2<4$,方程组有无穷组解,基础解系有$4-2=2$个向量

$\therefore$ 取x_2和x_4为未知变量

$\therefore x_1 = x_2 - x_4, x_3 = -4x_4$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得到一个基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 方程组的所有解为$\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_1 - x_2 + x_4 = 1, x_3 + 4x_4 = 3$

$\therefore$ 方程组的一个特解$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 方程组的导出组与第(1)问相同

$\therefore$ 方程通解$\lambda = \lambda_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$

P157

19.(3)

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \end{bmatrix}$$

当$b = 0$时, 易知无解, 舍去

当$b \neq 0$时,

$$\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&b&0&1\\0&1-ab&1-a&4-3a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&\frac{1}{b}\\0&0&1-a&4-3a+b-\frac{1}{b}\end{bmatrix}$$

若$a=1,$

则需$4-3a+b-\dfrac{1}{b}=1+b-\dfrac{1}{b}\neq 0$

即$b^2+b-1\neq 0,b\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

此时$x_1+x_3=2,x_2=\dfrac{1}{b}$

若$a\neq 1,$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&\frac{1}{b}\\0&0&1-a&4-3a+b-\frac{1}{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&2-\frac{4b-3ab+b^2-1}{b-ab}\\0&1&0&\frac{1}{b}\\0&0&1&\frac{4b-3ab+b^2-1}{b-ab}\end{bmatrix}$$

$\therefore x_1=2-\dfrac{4b-3ab+b^2-1}{b-ab},x_2=\dfrac{1}{b},x_3=\dfrac{4b-3ab+b^2-1}{b-ab}$

20.

(3)

$$\begin{bmatrix}1&-2&1&1&-1\\2&1&-1&-1&-1\\1&7&-5&-5&5\\3&-1&-2&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&3&-2&-2&2\\0&5&-5&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&0&1&1&-7\\0&0&2&-1&-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&0&1&1&-7\\0&0&2&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&0&1&1&-7\\0&0&0&3&-13\end{bmatrix}$$

$\therefore r=4<5,$方程组有无限组解,基础解系有1个向量

$\therefore$取x_5为自由变量,令$x_5=1,$得到基础解系$\eta_0=\begin{pmatrix}2\\4\\\frac{8}{3}\\\frac{13}{3}\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 方程组的所有解$\eta = k\eta_0$

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore r = 3 < 5$, 方程组有无限组解, 基础解系有2个向量

取x_3和x_5为自由变量, 令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得到基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 方程组的所有解为$\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$

22.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3-a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 5-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 当$a = 0, b = 2$时有解

$\therefore$ 此时$r = 2$, 导出组的基础解系有$5 - 2 = 3$个向量

$\therefore$ 方程组的一个解$\lambda_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 设x_3, x_4, x_5为自由变量, $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 导出组基础解系的三个向量为$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 方程的所有解为$\lambda=\lambda_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$

23.

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&\sum_{i=1}^{5}a_i\end{bmatrix}=$$

$\therefore$ 要使方程组有解,则$\sum_{i=1}^{5}a_i=0$

$\therefore r=4,$导出组的基础解系有1个向量

$\therefore$ 令$x_5=0,$则方程组的一个特解为$\lambda_0=\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4\\a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{pmatrix}$

$\therefore$ 令$x_5=1,$则导出组基础解系的一个解为$\eta_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 方程组的一般解为$\lambda=\lambda_0+k\eta_0$

26.

$\because \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是线性方程组的解

$\therefore \eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1,\cdots,\eta_t-\eta_1$是导出组的基础解系的解

$\therefore \eta_1 + u_2(\eta_2 - \eta_1) + u_3(\eta_3 - \eta_1) + \cdots + u_t(\eta_t - \eta_1)$也是方程组的解

$$\because \sum_{i=1}^{t} u_t = 1$$

$\therefore \sum_{i=1}^{t} u_i \eta_i$也是一个解