数学分析第十一次作业

201300035 方盛俊

习题 7.3: (A) 4(3, 6, 9), 6(2, 6, 7), 8(4), 9(3, 6), 10(4), (B) 1.

4.

(3)

收敛半径 $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n + \sqrt{n}} \cdot \frac{n + 1 + \sqrt{n+1}}{(-1)^n} \right| = 1$

则收敛区间为 $(-1, 1)$

当 $x = -1$ 时,

$\frac{(-1)^{n-1}}{n + \sqrt{n}} \cdot (-1)^n = -\frac{1}{n + \sqrt{n}}$

且由阶估法与 $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \left(-\frac{1}{n + \sqrt{n}} \right) = -1$ 可知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n + \sqrt{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 敛散性相同, 是发散的.

当 $x = 1$ 时,

$\frac{(-1)^{n-1}}{n + \sqrt{n}}$ 是交叉数列, 且 $\frac{1}{n + \sqrt{n}}$ 是单调递减的

由莱布尼茨判别法可知 $\frac{(-1)^{n-1}}{n + \sqrt{n}}$ 收敛.

所以收敛域为 $(-1, 1]$

(6)

令 $t = 2x + 1$, 则原级数转化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} t^n$

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\dfrac{n+1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1+(-\frac{2}{3})^n}{3-2\cdot(-\frac{2}{3})^n}\right|=\dfrac{1}{3}$

则对于 t 的收敛区间为 $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$

对于 x 的收敛区间为 $(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$

当 $t=-\dfrac{1}{3}$, 即 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{3^n+(-2)^n}{n}=(-1)^n\cdot\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

若 n 为偶数, 令 $b_{2k}=(-1)^{2k-1}\cdot\dfrac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{2k-1}}{2k-1}+(-1)^{2k}\cdot\dfrac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{2k}}{2k}=$
$-\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}}{2k-1}+\dfrac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}}{2k}<\dfrac{\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}}{2k-1}$

可以看出后者求和的级数是收敛的, 则前者也是收敛的

若 n 为奇数, 在收敛的偶数级数的基础上添加一项, 不会改变敛散性

所以此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 收敛.

当 $t=\dfrac{1}{3}$, 即 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{3^n+(-2)^n}{n}=\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

由阶估法与 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}=1$ 可知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 敛散性相同, 均为发散.

(9)

令 $t=x^2$, 则原级数转化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}t^n$

收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(1+\frac{1}{n})^n\right|=e$

所以对于 t 来说收敛区间为 $(-e,e)$

对于 x 来说收敛区间为 $(-\sqrt{e},\sqrt{e})$

当 $x=\pm\sqrt{e}$ 即 $t=e$ 时,

令 $a_n=\frac{n!e^n}{n^n}$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!e^n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$

$\therefore a_n$ 是递增的, $a_n\geqslant a_1=e$, 说明 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 不趋向于 0

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$ 发散.

所以收敛域为 $(-\sqrt{e},\sqrt{e})$

6.

(2)

$\because \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\begin{aligned}\therefore \sin^2 x&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots-(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}\\&=\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

其中 $x\in(-\infty,+\infty)$

(6)

$\therefore \frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{x}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$

$$\because \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n=1-2x+2^2x^2-\cdots+(-1)^n2^nx^n+\cdots, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$$\therefore \frac{x}{1+x-2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-2)^n}{3}x^n, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

(7)

$$\therefore \ln(1-3x+2x^2)=\ln(1-2x)+\ln(1-x)$$

$$\because \ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots, x\in[-1,1)$$

$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^nx^n}{n}=-2x-\frac{2^2x^2}{2}-\cdots-\frac{2^nx^n}{n}-\cdots, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$$\therefore \ln(1-3x+2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1+2^n}{n}x^n, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

8. (4)

令 $t=x-5$, 则原式转化为

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{t+5}{t^2+5t+6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t+3}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+3}\right)=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{t}{2}+1}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{t}{3}+1}$$

$$\because \frac{1}{\frac{t}{2}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^nt^n, t\in(-2,2)$$

$$\frac{1}{\frac{t}{3}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^nt^n, t\in(-3,3)$$

$$\therefore \frac{t+5}{t^2+5t+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]t^n, t\in(-2,2)$$

$$\therefore \frac{x}{x^2-5x+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right](x-5)^n, x\in(3,7)$$

9.

(3)

收敛半径 $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1$

当 $x=-1$ 时,

$\dfrac{1}{n(n+1)}$ 递减趋于 0, 由莱布尼茨判别法可知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

当 $x=-1$ 时,

$\because \lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\dfrac{1}{n(n+1)} = 1$, 由阶估法可知

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

则收敛域为 $[-1,1]$, 收敛范围为 $(-1,1)$

当 $x=0$ 时, 和函数 $S(x)=0$.

当 $x=1$ 时, 和函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} 1-\dfrac{1}{2}+\cdots-\dfrac{1}{n+1}=1.$

当 $x\neq 0$ 时,

我们令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^n = S(x) = \dfrac{1}{x}g(x)$, 即 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$

$$\therefore g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

$$\therefore g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

$$\therefore g'(x)=g'(x)-g'(0)=\int_0^x g''(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\int_{1-x}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=-\ln(1-x)$$

$$\therefore g(x)=g(x)-g(0)=\int_0^x g'(x)\mathrm{d}x=\int_1^{1-x}\ln t\mathrm{d}t=x-(x-1)\ln(1-x)$$

$$\therefore S(x)=\frac{1}{x}g(x)=1-\frac{x-1}{x}\ln(1-x), x\in(-1,1)$$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x-1}{x}\ln(1-x), & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$$

(6)

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n}=2$

则收敛区间为 $(-2,2)$

当 $x=-2$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n}$ 交错级数, 由莱布尼茨判别法可知收敛.

当 $x=2$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散.

当 $x=0$ 时, 级数的和函数等于 $\dfrac{1}{2}$.

当 $x\neq 0$ 时,

我们令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}=S(x)=\dfrac{1}{x}g(x)$, 即 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

$\therefore g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2-x}$

$\therefore g(x)=g(x)-g(0)=\int_0^x g'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\dfrac{1}{2-x}\mathrm{d}x=-\ln(2-x)+\ln 2=-\ln(1-\dfrac{x}{2})$

$\therefore S(x)=\dfrac{1}{x}g(x)=-\dfrac{1}{x}\ln(1-\dfrac{x}{2})$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-\dfrac{x}{2}), & x\in(-2,0)\cup(0,2)\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

10. (4)

设幂函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n+1}$

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$

则收敛区间为 $(-1,1)$

令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n+1}=S(x)=x^2g(x)$, 即 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$

$\therefore G(x)=\int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

$\therefore \int_0^x G(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\dfrac{x^2}{1-x}$

$\therefore G(x)=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'=\dfrac{x\,(2-x)}{(x-1)^2}$

$\therefore g(x)=G'(x)=-\dfrac{2}{x^3-3x^2+3x-1}$

$\therefore S(x)=x^2g(x)=-\dfrac{2x^2}{x^3-3x^2+3x-1}$

$\therefore S(\frac{1}{2})=4$

$\therefore$ 常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n+1}}$ 的和为 4.

(B) 1.

$\therefore |a_nx^n|=|a_n||x^n|\leqslant|a_n|R^n$, 使用 M 判别法.

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-R$ 处, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-R)^n$ 绝对收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(-R)^n|$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|R^n$ 收敛

由 M 判别法与 $|a_nx^n|\leqslant|a_n|R^n$ 可知

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-R, R]$ 上一致收敛.