Ch 4 连续型随机变量

回顾前一次课

- 0/1分布：X $\sim Ber(p)$，$E(X)=p$ $\quad Var(X)=p(1-p)$
- 二项分布：$X\sim B(n,p)$，$E(X)=np$ $\quad Var(X)=np(1-p)$
- 几何分布：$X\sim G(p)$，$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{p}$ $\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$

  - 无记忆性：$P(X>m+n\,|\,X>m)=P(X>n)$

- 负二项分布： X服从参数为r和p的负二项分布

$$\mathrm{E}(X)=\frac{r}{p} \qquad \text{和} \qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

- 泊松分布：$X\sim P(\lambda)$, $E(X)=\lambda$ $\quad \mathrm{Var}\,(X)=\lambda$

  - 泊松定理：$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

分布函数

给定任意随机变量X和实数x, 函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

称为随机变量X的**分布函数**, 分布函数的本质是概率

对任意实数$x_1 < x_2$, 有

$$F(x_2) - F(x_1) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$$

分布函数的性质

单调性: 若$x_1 < x_2$, 则$F(x_1) \leq F(x_2)$

规范性: $F(x) \in [0,1]$且$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

右连续性: $F(x + 0) = F(x)$

任何分布函数满足上述三性质

满足上述三性质的函数必是某随机变量的分布函数

分布函数可由上述三性质完全刻画

例题

随机变量X的分布列为$P(X=-1)=P(X=3)=1/4$和$P(X=2)=1/2$, 求X的分布函数

例题

在[0,1]区间随机抛一个点，用X表示落点的坐标，假设X落入[0,1]区间内任一子区间的概率与区间长度成正比，求X的分布函数

例题

随机变量X的分布函数

$$F(x) = A + B \cdot arctan(x) \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

求$P(X \leq 1)$

概率密度函数

设随机变量X的分布函数为$F(x)$，如果存在可积函数$f(x)$，使得对任意实数x有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

成立，则称X为连续型随机变量，函数$f(x)$为随机变量X的**概率密度函数**，简称**概率密度**

概率密度函数$f(x)$满足

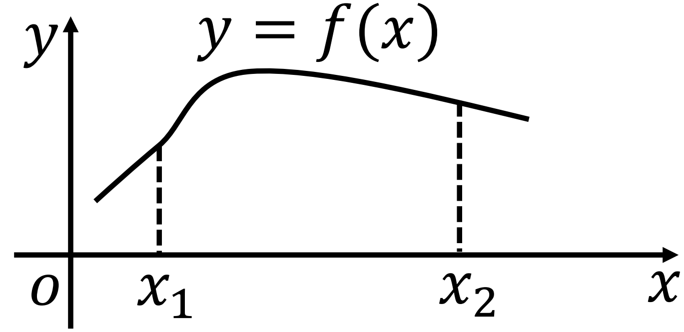
- 非负性：$f(x) \geq 0$
- 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

$\Longleftrightarrow$ **概率密度**

概率密度函数的几何解释

对任意$x_1 \le x_2$, 有

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$



概率密度的几何解释:

X落入区间$(x_1, x_2]$的概率等于x轴，$x = x_1$，$x = x_2$和$y = f(x)$所围成的曲边梯形的面积

定理

定理 对连续随机变量X，其分布函数$F(x)$在整个实数域上连续；若$f(x)$在x点连续，则$F(x)$在x点可导，且$F'(x)=f(x)$

定理 对连续型随机变量X和常数x, 有$P(X=x)=0$

$$P(a\le X\le b)=P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)$$

概率密度函数不是概率：$\boldsymbol{P(X=x)=0\neq f(x)}$

概率与密度函数关系

若$f(x)$在点x连续, 根据连续性有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x-\Delta x\le X\le x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x f(\xi)}{\Delta x}=\ 2f(x)$$

其中$\xi\in(x-\Delta x, x+\Delta x)$, 由此可得

$$P(x-\Delta x\le X\le x+\Delta x)\approx 2f(x)\Delta x$$

概率密度$f(x)$越大, 则X在x附近取值的概率越大

例题

设连续随机变量X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases} c(4x-\ 2x^2) & 0<x<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求概率$P(X>1)$

例题

设连续随机变量X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leq 1 \\ a-x & 1<x\leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求分布函数F(x)

例题

已知一个靶半径为2米的圆盘，击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比．假设射击都能击中靶，用X表示击中点与圆心的距离，求X的概率密度函数

连续函数的期望

设连续随机变量X的概率密度函数为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$绝对收敛，称为**随机变量$X$的期望**，记为$E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

性质：对任意任意常数a, b和连续随机变量X, 有

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

连续函数期望的性质

性质： 对常数$c_1, \dots, c_n$和连续函数$g_1(x), \dots, g_n(x)$, 有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E\big(g_i(X)\big)$$

性质: 设随机变量X的密度函数为$f(x)$且$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$绝对可积, 则

$$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$$

Jensen不等式

对连续随机变量X和凸函数$f(x)$有

$$f\big(E(X)\big) \le E\big(f(X)\big)$$

对连续随机变量X和凹函数$f(x)$有

$$f\big(E(X)\big) \ge E\big(f(X)\big)$$

例题

设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} cx & x\in[0,1] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求$E(X^m)$ (m为正整数)

期望的另一种计算公式

对非负随机变量X, 有

$$E[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t)dt$$