Ch 1-4 组合计数

回顾前一次课

- 古典概型：试验结果只有有限种可能、每种结果发生的可能性相同
  - 计数原理、排列组合
  - 各种例题：产品抽样、生日驳论、抽签、matching、超几何
- 几何概型：样本空间无限可测、基本事件等可能性
  - 概率计算就是长度、面积、体积的计算
  - 例题：规划公交车发车时间、三角形、见面问题

统计模拟法

统计模拟法：通过计算机模拟仿真近似计算几何概型的概率

先构造概率模型, 再进行计算机模拟试验, 用统计的方法计算其估计值近似概率.

例 两银行经理约定中午12:00 - 13:00到某地会面, 两人到达时间随机, 先到者等另一人15分钟后离开, 求两人见面的概率.

$n_A \leftarrow 0$

For $i = 1 : N$

  $x \leftarrow \text{Random}(0, 60)$

  $y \leftarrow \text{Random}(0, 60)$

  If $|x - y| \leqslant 15$ then

    $n_A \leftarrow n_A + 1$

  Endif

Endfor

Return n_A / N

十二重计数

概率的计算往往与组合计数密切相关，且组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用

十二重计数 [The twelvefold way, G.-C. Rota(1932-1999)]

问题简述：将n只球放入m个箱子，有多少种不同的放法

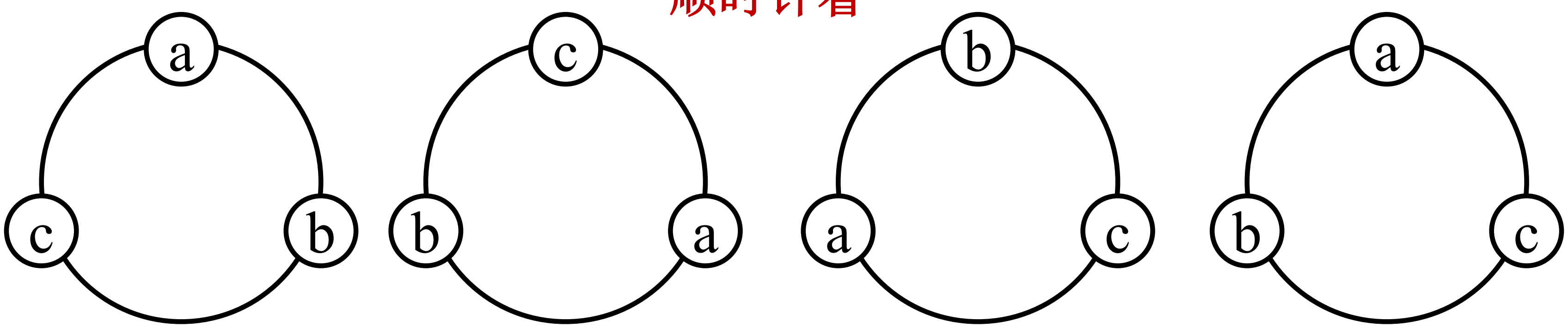
n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	?	?	?
相同	不同	?	?	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

环排列

排列：n个不同的元素中无放回取出r个元素进行排列, 有$(n)_r$种不同的排法，若$r = n$ 称全排列, 有$n!$种不同的排法

环排列：n个不同的元素中无放回地取出r个元素排成一个圆环

顺时针看



- 每一个环排列对应于r种不同的直线排列
- 不同的环排列的直线排列互不相同

环排列

定义：从n个不同的元素中无放回地取出r个元素排成一个圆环，有$(n)_r/r$种不同的排法，称为 **环排列数**

特别地，n个不同元素的环排列数为$(n-1)!$.

例：将n对夫妻安排在一张圆桌，任何夫妻两人需安排在一起，有多少种不同的安排方法.

多重组合

组合：n个不同的元素中无放回地取出r个元素, 有$\binom{\mathrm{n}}{r}$ 种

多重组合: 将n个不同的元素分成k组, 组内元素无顺序关系, 每组分别有$r_1, r_2, \cdots, r_k$个元素, 即$n = r_1 + \cdots + r_k$, 则有

$$\binom{\mathrm{n}}{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \binom{\mathrm{n}}{r_1}\binom{\mathrm{n} - r_1}{r_2}\binom{\mathrm{n} - r_1 - r_2}{r_3}\cdots\binom{r_k}{r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots r_k!}$$

种不同的分组方法, 称$\boldsymbol{\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}}$为 多重组合数

组合数本质上也属于多重组合数

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k} \binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

多重排列

多重集：集合中的元素可以重复, 且重复的元素之间不可分辨

例如，多重集 A={1,1,1,2,2,2,3,3,4}

多重集A有k类不同的元素, 每类元素的个数分别为$r_1, r_2, \cdots r_k$, 即$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$. 将多重集$A$中的所有元素排列成一排

- 从n个位置中选取出r_1个位置放第一类元素,
- 再从剩下的从$n - r_1$个位置中选取出r_2个位置放第二类元素
- …
- 最后r_k个位置放第k类元素

因此该多重集A有

$$\binom{\mathrm{n}}{r_1, r_2, \cdots, r_k}$$

种不同的排列方法, 即多重组合数

十二重计数

问题简述：将n只球放入m个箱子, 有多少种不同的放法

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同			?
相同	不同	?		?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

整数的有序分解

问题：考虑将n只完全相同不可分辨的球放入m个不同的箱子

转化：第一个箱子有x_1个球，第二个箱子有x_2个球，…，第m个箱子有x_m个球, 其中$x_1, x_2, \cdots, x_m$为非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

n只相同的球放入m个不同的箱子等价于方程非负的整数解

定理：方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解的个数为

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

将10只完全相同的球放入3个不同的箱子，有多少种不同的放法

整数的有序分解

推论：方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的正整数解的个数为

$$\binom{\mathrm{n}-1}{m-1}$$

练习：方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m\le n$ 非负整数解、正整数解的个数

例题

在多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?

十二重计数

问题简述：将n只球放入m个箱子, 有多少种不同的放法

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同		$\binom{m}{n}$	
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

第二类Stirling数

问题：考虑将$\boldsymbol{n}$只不同的球放入$\boldsymbol{m}$个完全相同不可分辨的箱子

定义：将n个不同的元素分成m个非空的子集,不同的划分数称为 **第二类 Stirling 数**, 记为 $\boldsymbol{S(n,m)}$

例：集合{1,2,3}不同的划分数

第二类Stirling数

记$S(0,0) = 1, S(n,1) = 1, S(n,n) = 1$

当 $m > n \geq 1$时有$S(n,m) = 0$

定理: 对 $n \geq 1$, $m \geq 1$ 有

$$S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1)$$