第五次作业

5.2

设小圆球速度为 v_1, 球壳速度为 v_2

对小圆球和球壳水平动量守恒得:

$\therefore mv_1 + mv_2 = 0$

对时间求积分得:

$\therefore x_1 + x_2 = 0$

$\because$ 静止时小圆球位于球壳底部, 两者相对位移为 R

$\therefore x_2 = \frac{1}{2}R$

$\therefore$ 球壳移动了 $\frac{1}{2}R$

5.3

设落在桌面上的链条质量为 m'

$\therefore$ 当前接触桌面的链接的原始高度 $h = \dfrac{m'}{m}L$

$$\because \frac{1}{2}\Delta mv^2 = \Delta mgh$$

$$\Delta m = \frac{v\Delta t}{L}m$$

$$F\Delta t = \Delta m(v-0)$$

$$\therefore F = \frac{mv^2}{L} = \frac{2mgh}{L} = 2m'g$$

桌面对链条的力由支持力和反冲力组成

$\therefore N = m'g + F = 3m'g$

桌面作用于链条上的力为 $3m'g$

5.11

(a)

设 m_1 撞前速度为 v_0, 沿 x 轴正方向, 撞后速度为 $\boldsymbol{v}_1$, m_2 撞后速度为 $\boldsymbol{v}_2$

由动量守恒:

$\because m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = 0$

$\quad m_1 v_0 = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$

由能量守恒:

$\because \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{1y}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2y}^2$

将前两个式子带入后一个式子得

$\therefore 0 = (m_1 + m_2)(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + (m_1 - m_2) v_0^2 - 2 m_1 v_0 v_{1x}$

$\therefore \cos^2 \theta_1 = \frac{v_{1x}^2}{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \frac{m_1 + m_2}{(m_2 - m_1)(\frac{v_0}{v_{1x}})^2 + 2 m_1 (\frac{v_0}{v_{1x}})}$

分母可以看作一个以 $\frac{v_0}{v_{1x}}$ 的二次函数, 对称轴为 $\frac{v_0}{v_{1x}} = \frac{m_1}{m_1 - m_2}$

当 $m_1 > m_2$ 时,

$\frac{m_1}{m_1 - m_2} > 0$, 此时带入可取得最大散射角 θ_m

$\therefore \cos^2 \theta_m = \frac{m_1 + m_2}{(m_2 - m_1)(\frac{m_1}{m_1 - m_2})^2 + \frac{2 m_1^2}{m_1 - m_2}} = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$

$\therefore \cos^2 \theta_m \in [0, 1]$

$\because v_{1x} > 0$

$\therefore 0 \le \theta_m \le \frac{\pi}{2}$

(b)

当 $m_1 = m_2$ 时,

由动量守恒得:

$m_1 \boldsymbol{v}_0 = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2$

由能量守恒得:

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_0^2=\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2$$

一式去掉质量两边平方得

$$\boldsymbol{v}_0^2=\boldsymbol{v}_1^2+\boldsymbol{v}_2^2+2v_1v_2\cos\theta$$

减去去质量二式得

$$2v_1v_2\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=0$$

$$\therefore\theta=\theta_1+\theta_2=\tfrac{\pi}{2}$$

(c)

当 $m_1<m_2$ 时,

由 (a) 可知 $\cos^2\theta\in[0,1]$

当粒子正碰时,

解得 $v_{1x}=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0<0, v_{1y}=0$

散射角 θ_1 为最大值 π.

当粒子 m_1 近似于与粒子 m_2 插肩而过时, 可以看作没有发生碰撞,

散射角 θ_1 为最小值 0.

因为这个过程是连续且动态的,

所以 θ_1 可以取到 0 到 π 之间的所有值.

5.12

(a)

对于动量变化:

$$\Delta p=\rho a_2(v_2\Delta t)v_2-\rho a_1(v_1\Delta t)v_1=\rho a_2v_2\Delta t(v_2-v_1)$$

对于冲量:

$$I=p_1a_1\Delta t-p_2a_2\Delta t+p_1(a_2-a_1)\Delta t=(p_1-p_2)a_2\Delta t$$

由动量定理可知, $\Delta p = I$

因此可得

$p_2 - p_1 = \rho v_2(v_1 - v_2)$

(b)

伯努利方程为 $p + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = C$, 其中 C 为常量.

本题中为水平管道, 高度 z 不变.

即有

$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z = C$

$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z = C$

两式相减并移项得

$p_2 - p_1 = \dfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$

(c)

压强的损失:

$\Delta p = \dfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) - \rho v_2(v_1 - v_2) = \dfrac{1}{2}\rho(v_1 - v_2)^2$

可以类比于非弹性碰撞.

5.13

(a)

设大气压为 p_0

对 D 点到 C 点由伯努利公式可得

$\because p_0 + \rho g(d + h_2) = p_0 + \dfrac{1}{2}\rho v_c^2$

$\therefore v_c = \sqrt{2g(d + h_2)}$

(b)

对 B 点到 C 点由伯努利公式可得

$$p_B + \rho g(d + h_1 + h_2) + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_c^2$$

又因为管道内液体流速相同, 我们有

$$v_B = v_C$$

$$\therefore p_B = p_0 - \rho g(d + h_1 + h_2)$$

(c)

由 (b) 可知

$$h_1 = \frac{p_0 - p_B}{\rho g} - d - h_2$$

当 $p_B = 0$ 时取到最大值

$$h_{1max} = \frac{p_0}{\rho g} - d - h_2$$

6.5

对质心沿着 x 轴的运动:

$$\because x = L\cos\theta$$

$$\therefore \dot{x} = -L\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{x} = -L(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta})$$

$$\therefore N_1 = m\ddot{x} = -mL(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta})$$

以木板与地面的接触点为旋转轴的转动参考系, 有扭矩方程:

$$N_1 \cdot 2L\sin\theta - mgL\cos\theta = (\int_0^{2L} \rho^2 \frac{m}{2L}\mathrm{d}\rho)\ddot{\theta} = \frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta}$$

同时令 $N_1 = 0$ 可得

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ddot{\theta}^2 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{mgL\cos\theta}{\frac{4}{3}mL} = \frac{3g}{4L}\sin\theta$$

由能量守恒可得:

$$mgL\sin\theta_0 = mgL\sin\theta + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}[\frac{1}{12}m(2L)^2]\dot{\theta}^2$$

联解上述公式, 解得

$$\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_0$$

所以可知木板高度为原来的 $\frac{2}{3}$ 时, 与顶端脱离.