Ch 3.3 常用的离散型随机变量

回顾前一次课

方差：$Var(X)=E\big(X-E(X)\big)^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

性质：$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}\,(X)$，$E\big(X-E(X)\big)^2\le E(X-a)^2$

对$X\in[a,b]$有 $Var(X)\le\ \big(b-E(X)\big)(E(X)-a)\le\ (b-a)^2/4$

- 离散均匀分布-古典概型
- 0/1分布：$\mathrm{X}\sim Ber(p)$，$E(X)=p\qquad Var(X)=p(1-p)$
- 二项分布：$X\sim B(n,p)$，$E(X)=np\qquad Var(X)=np(1-p)$

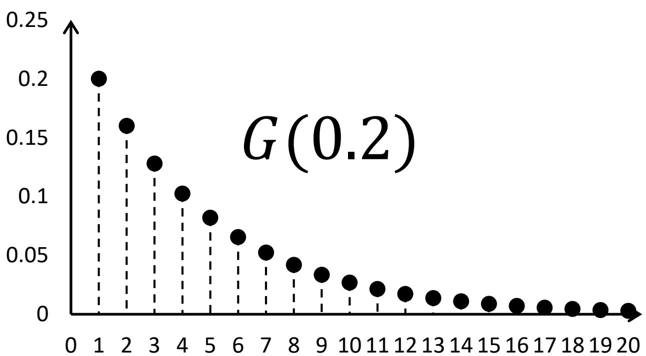
几何分布

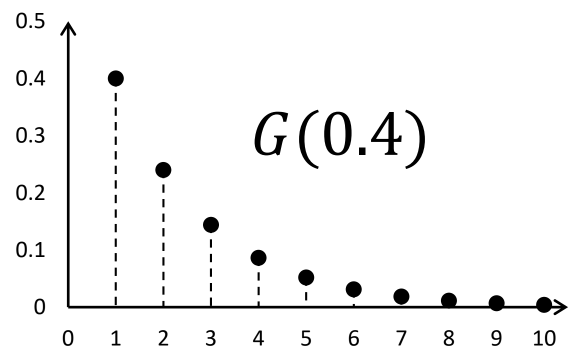
在多重Bernoulli试验, 设事件A发生的概率为p.

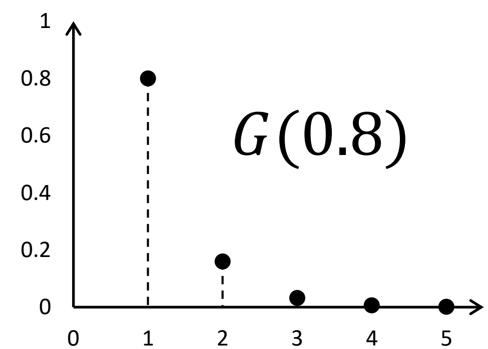
用随机变量X表示事件A首次发生时的试验次数, 则X的取值为1,2, ⋯, 其分布列为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad (k\geq 1)$$

称***X*服从参数为*p*的几何分布**, 记为 $\boldsymbol{X\sim G(p)}$







几何分布的期望与方差

若随机变量$X \sim G(p)$, 则有

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad 和 \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

几何分布：无记忆性 (memoryless property)

设随机变量$X \sim G(p)$, 对任意正整数m, n, 有

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$$

直观解释: 现已经历m次失败, 从当前起到成功的次数与m无关

例：一赌徒在赌博时前面总是输, 总觉得下一次应该赢了

几何分布的无记忆性：下一次是否赢与前面输了多少次无关

例题

古人非常重视生男孩且资源有限，规定每个家庭可生一个男孩，如果没男孩则可以继续生育直至有一个男孩；若已有一个男孩，则不再生育．多年后男女比例是否会失衡？

负二项分布 (Pascal分布)

在多重Bernoulli试验中, 随机事件A发生的概率为p.

用X表示事件A第r次成功时发生的试验次数，则X取值$r, r+1, r+2, \cdots$, 其分布列为

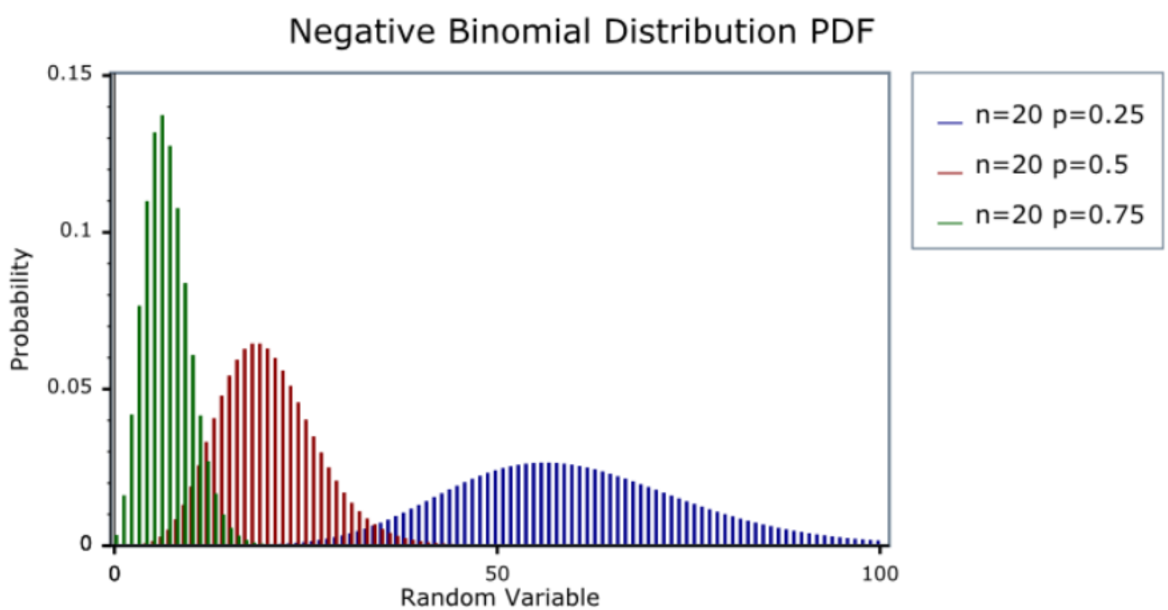
$$P(X=n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-r} \cdot p \quad (n \geq r)$$

称***X*服从参数为*r*和*p*的负二项分布，又称 Pascal分布**

负二项分布期望与方差

设随机变量X服从参数为$p \in (0,1)$ 和$r > 0$的负二项分布, 则有

$$\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p} \qquad \text{和} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$



泊松分布

若随机变量X的分布列为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k \geq 0)$$

其中$\lambda>0$是一个常数, 称随机变量X**服从参数为 λ 的泊松分布**, 记**为 $X \sim P(\lambda)$**

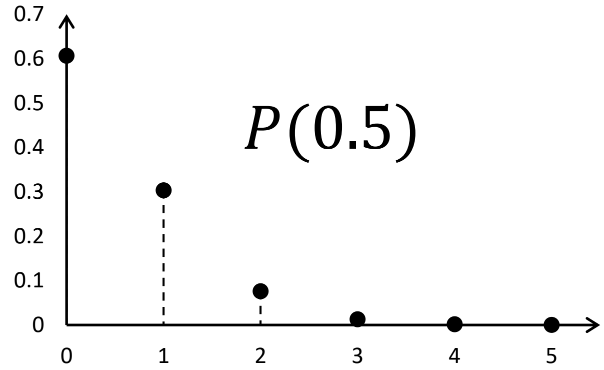
泊松分布：描述大量试验中稀有事件出现次数，例如

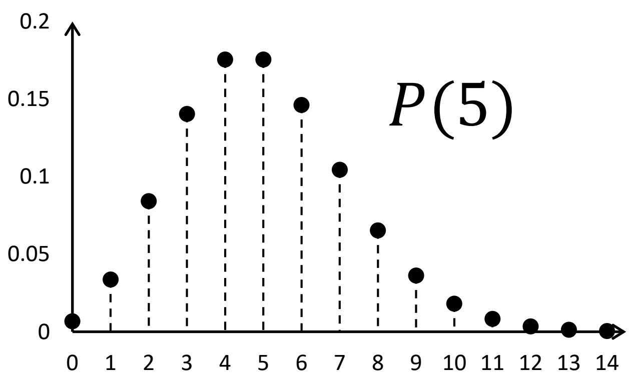
- 一段时间内电话收到的呼叫次数
- 一段时间内通过某路口的出租车数
- 一本书中一页出现错误语法的个数
- 一天内到银行办理业务的顾客数，等等

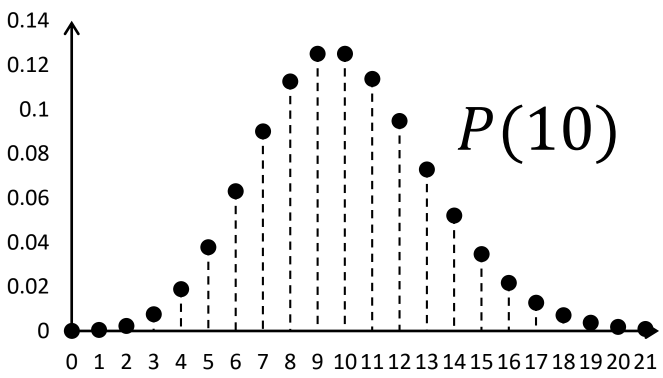
泊松分布的期望和方差

若 $X \sim P(\lambda)$, 则

$$E(X) = \lambda \qquad \text{和} \qquad \mathrm{Var}\,(X) = \lambda$$







例

随机变量$X \sim P(\lambda)$, 且$P(X=1)=P(X=2)$, 求$P(X \geq 4)$.

泊松定理

对任意常数$\lambda > 0$, n为任意正整数, 设$np_n = \lambda$, 则对任意给定的非负整数k, 有

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

泊松分布的应用: 若随机变量$X \sim B(n,p)$, 当n比较大而p比较小时, 令$\lambda = np$, 有

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

即利用**泊松分布近似计算二项分布**

例

有80台同类型设备独立工作，发生故障的概率是0.01，一台设备发生故障时只能由一人处理，考虑方案

I)　由四人维护，每人单独负责20台

II)　由三人共同维护80台

方案I)或方案II)哪种更可取?

例

射击训练每次命中目标的概率为0.002, 现射击1000次, 求命中目标在10与50之间的概率

案例分析：随机数的高度

随机树：初始为一个根结点，再每一次迭代过程中，随机选择一个叶子结点，将该叶子结点分裂为左、右叶子结点，由此重复进行k次，求此随机树的平均高度