考试范围

积分

期中考过的会少一些, 不超过 30%, 20%.

主要是涉及到重积分, 曲线曲面积分那部分. 这部分以各种各样的计算, 几大积分公式为主. 还有可能有含有参变量的积分, 以及它的连续性, 可导性, 可积性.

数项级数

数项级数.

正项级数的判别法.

任意项级数的判别法.

函数项级数

连续, 可积, 可导的可交换性.

一致收敛性的分析.

幂级数

收敛范围的特殊性.

内闭一致收敛性

复习题

1.

$$I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant h$$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} (x+y+z)\mathrm{d}z \\
&= \iint_S \left[\frac{h^2}{2} + h\left(x+y\right) - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \left(x+y\right)\sqrt{x^2+y^2}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{h} \left[r(\cos\theta+\sin\theta)h + \frac{1}{2}h^2 - r(\cos\theta+\sin\theta)r - \frac{1}{2}r^2\right] r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^{h} \left[rh(\cos\theta+\sin\theta) + \frac{1}{2}h^2 - r^2(\cos\theta+\sin\theta) - \frac{1}{2}r^2\right] r\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

2.

设 $f \in C'\mathbb{R}$, 求 $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^4} \iint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega : x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2$

令 $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

原式即

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{t} f(\rho)\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^4} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \mathrm{d}\varphi \int_0^{t} f(\rho)\cdot\rho^2\mathrm{d}\rho \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{4\pi\int_0^{t}\rho^2 f(\rho)\mathrm{d}\rho}{t^4} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{4\pi\cdot t^2 f(t)}{4t^3} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\pi f(t)}{t}
\end{aligned}
$$

当 $f(t) \to 0$ 时, 可以继续洛必达 $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\pi f(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} f'(t) = f'(0)$

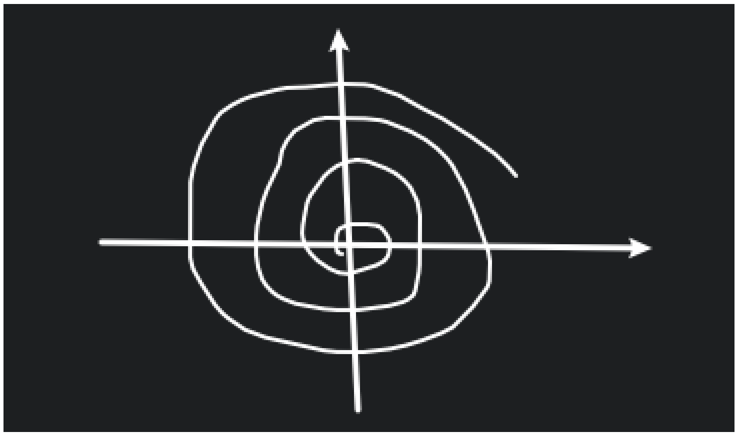
当 $f(t) \not\to 0$ 时, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\pi f(t)}{t} \to +\infty$

3.

$$\int_L x\mathrm{d}s, L: r = ae^{k\theta}, a > 0$$ 在 $r = a$ 内部.

曲线积分公式 $I = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$

而极坐标为 $I = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$



这是一个无穷的积分.

所以从 0 积到 $+\infty$.

4.

$$\int_L x^2\mathrm{d}s, L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}, a > 0$$

$$\therefore \oint_L x^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2\oint_L \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\pi a^4$$

5.

$$\int_{\partial\Omega} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$, 其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界, 逆时针方向.

我们只需要挖掉中间的一个小圆 $\delta: x^2+y^2=\delta^2$

然后就能用 Green 公式了.

6.

$\iint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \Sigma : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 取外侧方向.

我们可以做一部分, 由对称性可得其他部分.

$\iint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, z = z(x,y), \Sigma_{\text{top}} : c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}, \Sigma_{\text{bottom}} : c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}, D_{xy} : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant R^2$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \iint_{\Sigma_{\text{top}}} + \iint_{\Sigma_{\text{bottom}}} \\
&= \iint_{D_{xy}} \left(c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&- \iint_{D_{xy}} \left(c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4c \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4c \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r\mathrm{d}r \\
&= 8\pi c \cdot \frac{1}{3} R^3 \\
&= \frac{8}{3} \pi c R^3
\end{aligned}
$$

同理有 $\frac{8}{3}\pi a R^3, \frac{8}{3}\pi b R^3$

或者用另一种方法:

$$I = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

令 $x - a = u, y - b = v, z - c = w$, 则

$$I = 2 \iiint_{\Omega} (u+a+v+b+w+c) \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w, u^2 + v^2 + w^2 \leqslant R^2$$

$$
\begin{aligned}
I &= 2\iiint_{\Omega}(u+a+v+b+w+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= 2\iiint_{\Omega}(u+v+w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w + 2\iiint_{\Omega}(a+b+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= 0 + 2(a+b+c)\iiint_{\Omega}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)
\end{aligned}
$$

或者再换一种做法, 将其换成第一型的曲面积分:

令 $x-a=u, y-b=v, z-c=w$, 则

$$I = \iint_{\Sigma'}(a+u)^2\mathrm{d}v\mathrm{d}w + (v+b)^2\mathrm{d}w\mathrm{d}u + (w+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \Sigma' : u^2+v^2+w^2=R^2$$

$$\frac{\{u,v,w\}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \{\frac{u}{R},\frac{v}{R},\frac{w}{R}\}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma'}(a+u)^2\mathrm{d}v\mathrm{d}w + (v+b)^2\mathrm{d}w\mathrm{d}u + (w+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_{\Sigma'}[(a+u)^2\frac{u}{R} + (v+b)^2\frac{v}{R} + (w+c)\frac{w}{R}]\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{R}\iint_{\Sigma}[(u^3+v^3+w^3) + 2(au^2+bv^2+cw^2) + (a^2u+b^2v+c^2w)]\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{R}\iint_{\Sigma}2(au^2+bv^2+cw^2)\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

我们又知道 $\iint_{\Sigma'}u^2\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma'}v^2\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma'}w^2\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma'}(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}S = \frac{4}{3}\pi R^4$

$$I = \frac{1}{R}\iint_{\Sigma}2(au^2+bv^2+cw^2)\mathrm{d}S = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$$

7.

判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan(\sqrt{n^2+2})\pi$ 是否收敛, 绝对收敛还是条件收敛?

$$\therefore \tan(\sqrt{n^2+2})\pi = \tan(\sqrt{n^2+2}-n)\pi = \tan(\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n})\pi$$

$\therefore \tan(\sqrt{n^2+2})\pi$ 单调递减.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan(\sqrt{n^2+2})\pi$ 收敛.

而 $\tan(\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n})\pi > \frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}$

后者级数发散, 因此原级数并不绝对收敛.

所以原级数条件收敛.

我们不能直接说 $(-1)^n \tan\sqrt{n^2+2}\pi \sim (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\pi \sim (-1)^n \frac{\pi}{n}$

因为比较判别法只能用于正项级数.

8.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n > 0), S_n = u_1 + \cdots + u_n$, 证明若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n}$ 发散且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

(1)

$\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$\therefore \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, \exists p > 0, |u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| > \varepsilon$

$\because S_{n+p} > S_n$

$\therefore \left|\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{u_{n+p}}{S_{n+p}}\right| > \left|\frac{u_{n+1}}{S_{n+p}} + \cdots + \frac{u_{n+p}}{S_{n+p}}\right| = \left|\frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}\right| = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

其中, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 然后就能有对应的 p.

(2)

$\because \frac{u_n}{S_n^2} < \frac{u_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$

而后者 $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}) = \frac{1}{u_1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} = \frac{1}{u_1}$ 收敛.

因此前者也收敛.

9.

$\{u_n\}$ 是一个单调递增的正数列, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{u_n\}$ 有界.

$\Leftarrow$:

$$a_n=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}$$

我们可以看成 $\frac{1}{u_{n+1}}\cdot(u_{n+1}-u_n)$, 使用 Abel 判别法, 就可以说明其收敛.

$\Rightarrow$:

我们使用 8. 的结论.

假设 $\{u_n\}$ 无界即发散, 我们令 $u_n=S_n$

则 $a_n=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}$ 也发散.

与题设收敛矛盾.

或者也可以用:

$$\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}+\cdots+\frac{u_{n+p+1}-u_{n+p}}{u_{n+p+1}}\right|>\frac{u_{n+p+1}-u_n}{u_{n+p+1}}=1-\frac{u_n}{u_{n+p+1}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

10.

求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4n-3}$ 的和函数 $(x\geqslant 0)$

收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n-3}=1$

收敛范围 $[0,1)$.

令 $x=t^4$, 则级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{4n}}{4n-3}=t^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{4n-3}}{4n-3}=t^3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t t^{4n-4}\mathrm{d}t\right)=t^3\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n-4}\mathrm{d}t$$

11.

将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 在 $x_0=1$ 处展开.

$\because f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+3}$

令 $t=x-1$ 即 $x=t+1$, 则 $f(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\frac{t}{2}+1}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{\frac{t}{4}+1}$

$$\because \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$$

$$\therefore \frac{1}{1+\frac{t}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{t}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n t^n, t\in(-2,2)$$

$$\frac{1}{1+\frac{t}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{t}{4})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{4})^n t^n, t\in(-4,4)$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{2})^n-\frac{1}{8}\cdot(-\frac{1}{4})^n\right]t^n, x\in(-1,3)$$

12.

$I=\oiint_{\Sigma}x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(1+xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \Sigma$ 是由 $z=a^2-x^2-y^2$ 与 $z=0$ 所围立体 Ω 的外侧. 其中 Ω 的体积为 V.

使用 Gauss 公式.

$$\therefore I=\iiint_{\Omega}(2xyz^2-2xyz^2+1+xyz+xyz)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=V$$