

第五章：控制系统的性能

2022年10月28日

内容安排

5.1

时域响应概述

5.2

瞬态响应和瞬态性能指标

5.3

一阶系统的时域响应性能分析

5.4

二阶系统的时域响应性能分析

5.5

高阶系统的时域响应性能分析

5.6

系统的稳态性能分析

5.7

MATLAB在时域响应分析中的应用

1. 求取单位阶跃响应

1. `step (sys)` 或 `step (sys, t)`

`step (num, den)` 或 `step (num, den, t)`

绘制系统的单位阶跃响应曲线。

其中`sys`是由函数`tf()`、`zpk()`、`ss()`中任意一个建立的系统模型；`num`和`den`分别为系统的分子、分母多项式系数向量；`t`为选定的仿真时间向量。

2. `y=step (sys, t)` 或 `[y, t]=step (sys)`

`y=step (num, den, t)`

`[y, t]=step (num, den)`

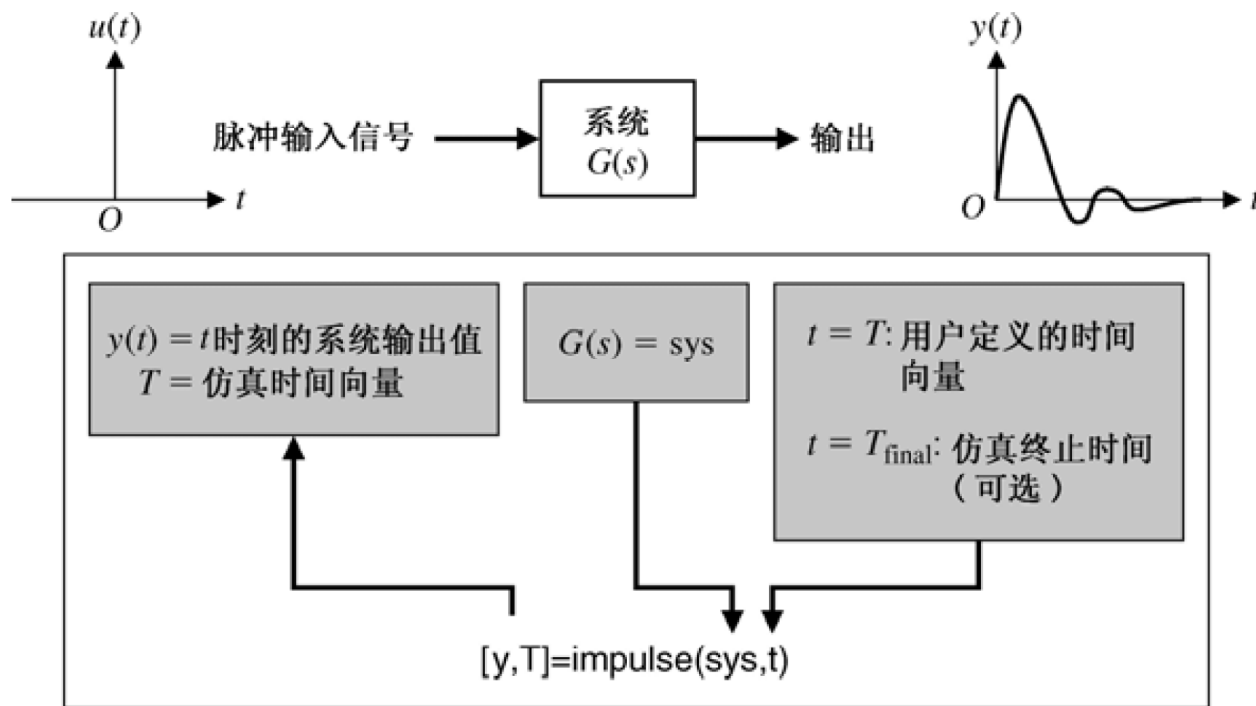
计算系统的单位阶跃响应数据。

2. 求取单位脉冲响应

1. `impulse(sys, t)` 绘制系统的单位脉冲响应曲线。

2. `y=impulse(sys, t)` 或 `[y, t]=impulse(sys)`

计算系统的单位脉冲响应数据。



3. 求取任意输入下系统的输出响应

1. `lsim(sys, u, t)`

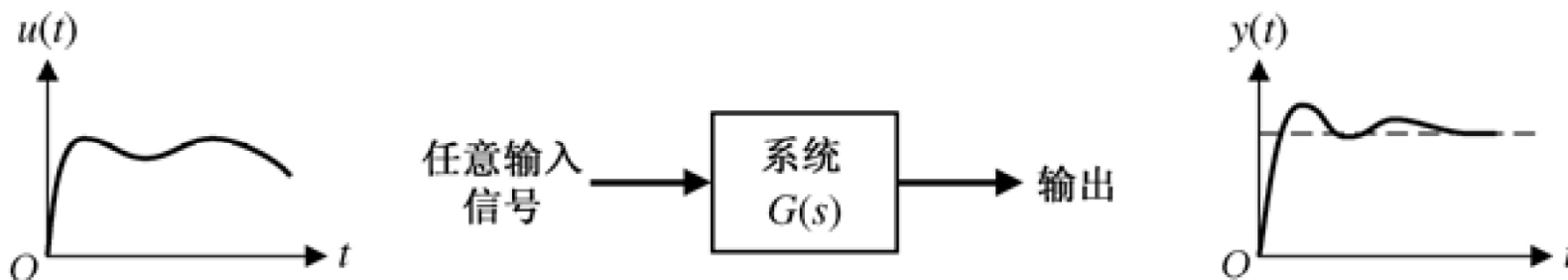
绘制在给定输入下系统的输出响应曲线。

u 为给定输入构成的列向量，它的元素个数应该和 t 的个数是一致的。

2. `y=lsim(sys, u, t)` 或

`[y, t]=lsim(sys, u)`

计算在给定输入下系统的输出响应数据。





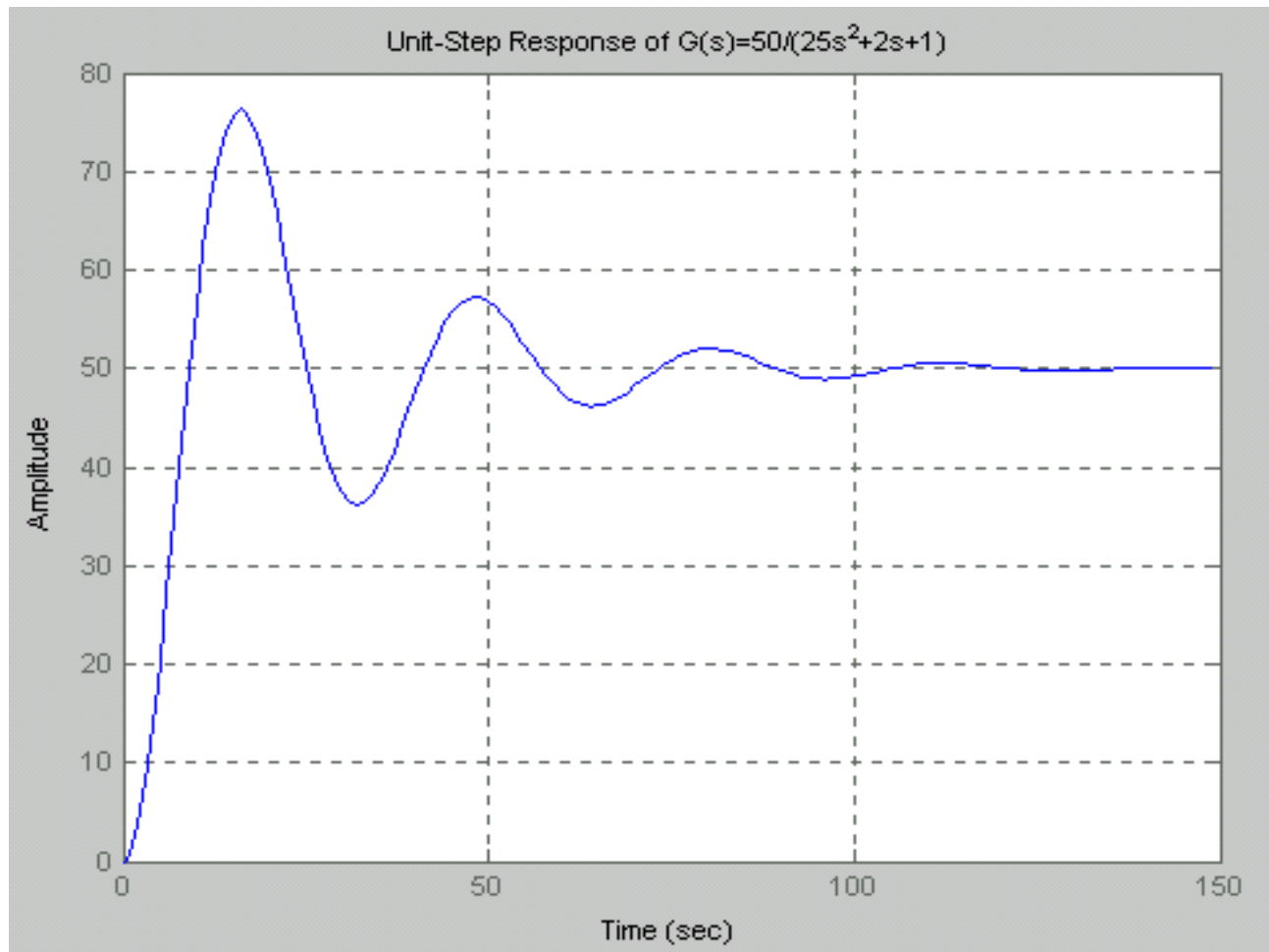
对于下列系统传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{50}{25s^2 + 2s + 1}$$

下列程序将给出该系统的单位阶跃响应曲线。

```
num=50;  
den=[25,2,1];  
step(num,den);  
grid;  
title('Unit-Step Response of G(s)=50/(25s^2+2s+1)');
```

$G(s) = 50/(25s^2 + 2s + 1)$ 的单位阶跃响应





例

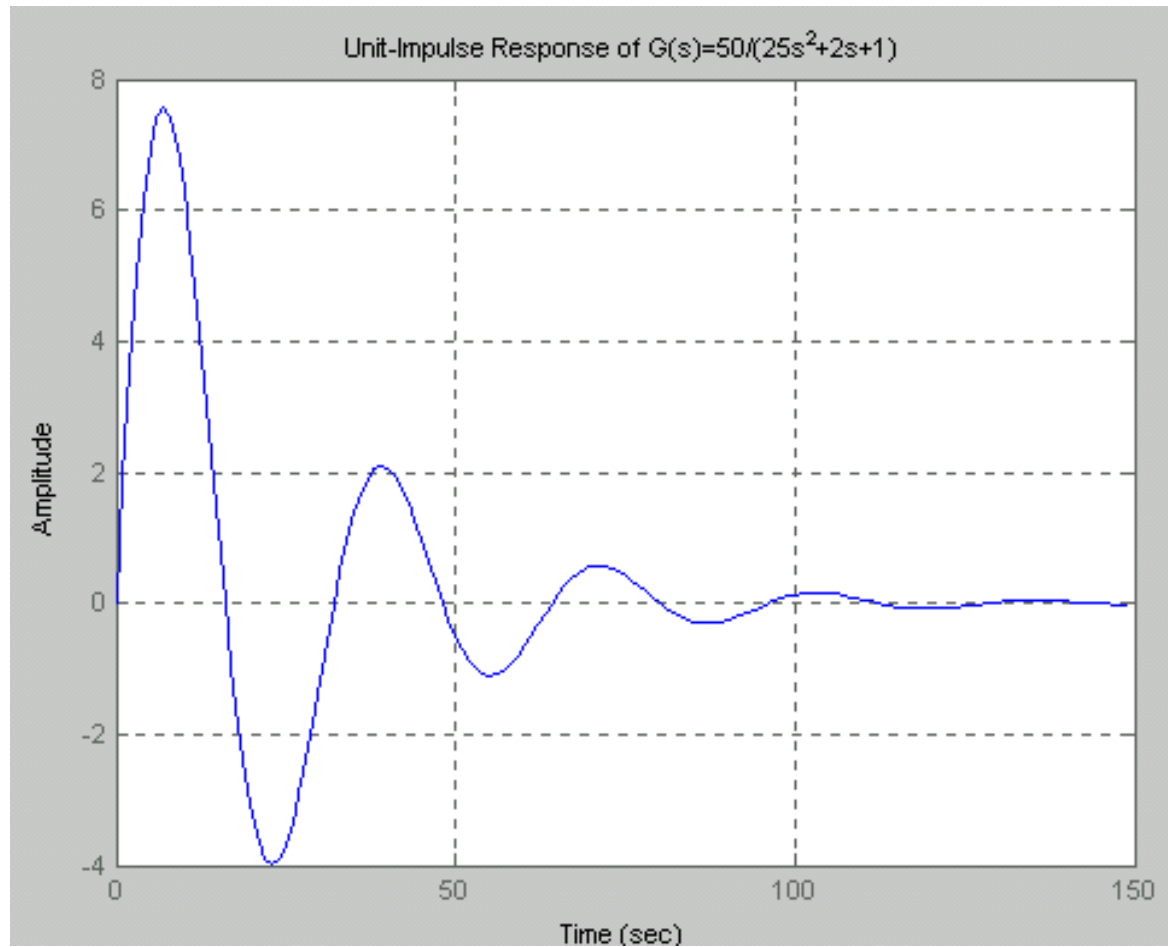
对于下列系统传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{50}{25s^2 + 2s + 1}$$

下列程序将给出该系统的单位脉冲响应曲线。

```
num=50;  
den=[25,2,1];  
impulse(num,den);  
grid;  
title('Unit-Impulse Response of G(s)=50/(25s^2+2s+1)');
```


$G(s) = 50/(25s^2 + 2s + 1)$ 的单位脉冲响应



在MATLAB中没有斜坡响应命令，可利用阶跃响应命令求斜坡响应，先用 s 除 $G(s)$ ，再利用阶跃响应命令。

例如，考虑下列闭环系统：
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{50}{25s^2 + 2s + 1}$$

对于单位斜坡输入量 $R(s) = \frac{1}{s^2}$

则

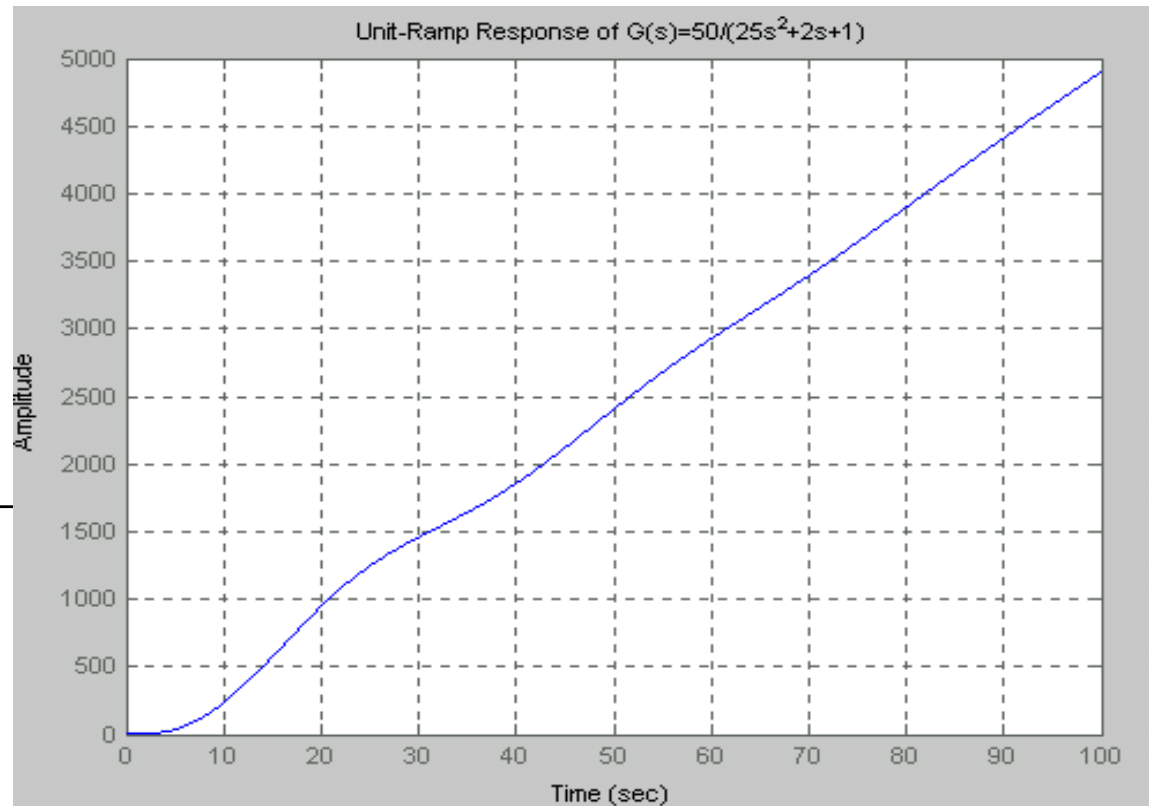
$$Y(s) = \frac{50}{25s^2 + 2s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{50}{(25s^2 + 2s + 1)s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{50}{25s^3 + 2s^2 + s} \cdot \frac{1}{s}$$

下列程序将给出该系统的单位斜坡响应曲线。

闭环系统：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{50}{25s^2 + 2s + 1}$$

```
num=50;  
den=[25,2,1,0];  
t=0:0.01:100;  
step(num,den,t);  
grid;  
title('Unit-Step ramp Response of G(s)=50/(25s^2+2s+1)');
```



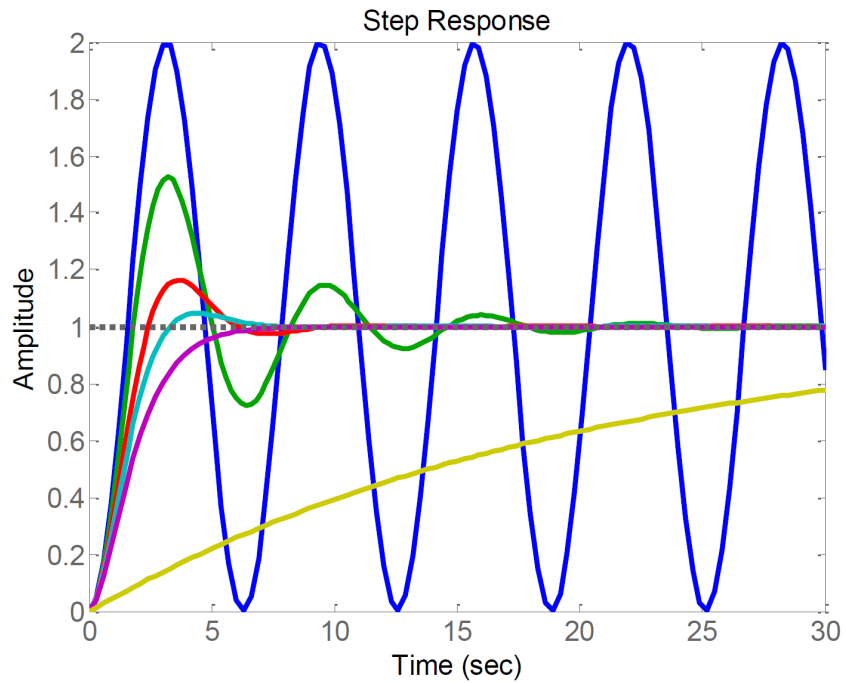


例 对于二阶系统 $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$ ，分别就

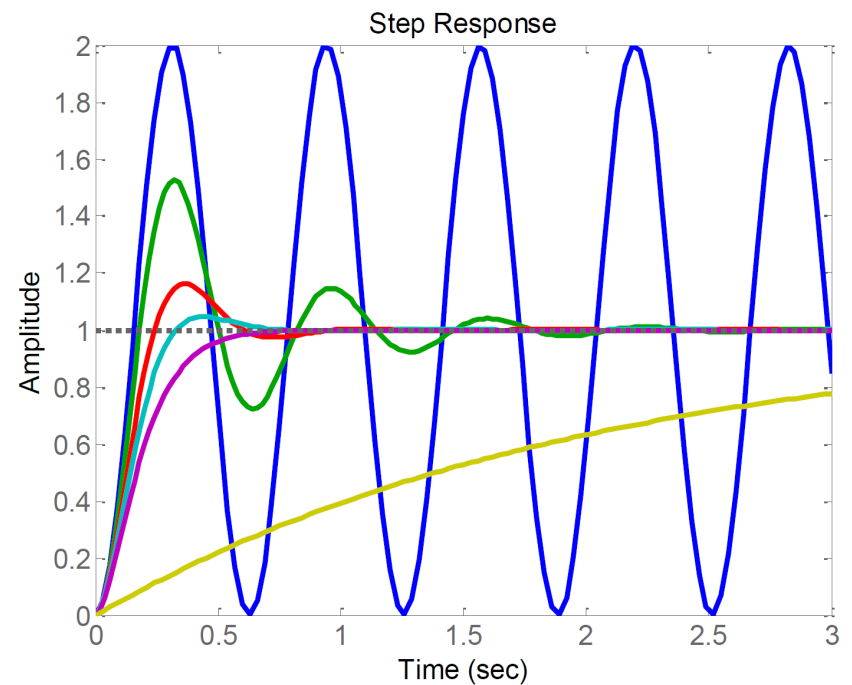
$T=1$ 和 $T=0.1$ ， $\zeta=0, 0.2, 0.5, 0.7, 1, 10$ 时，画出系统的单位阶跃响应曲线。

```
for T=[1 0.1]
    figure;
    for Zeta=[0 0.2 0.5 0.7 1 10]
        num=1;
        den=[T*T,2*Zeta*T,1];
        step(num, den, T*30);
        hold on;
    end
    grid
end
```

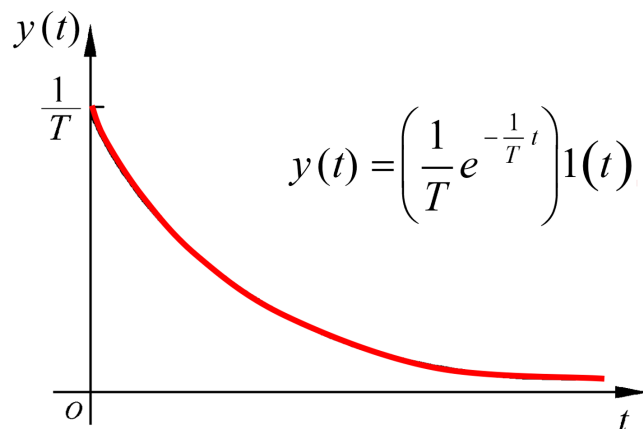
$T = 1, \quad \zeta = 0, 0.2, 0.5, 0.7, 1, 10$



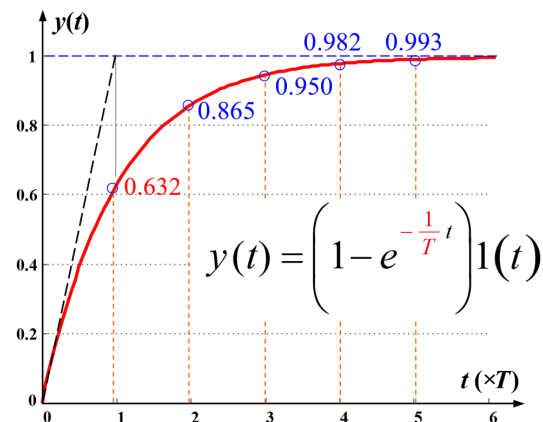
$T = 0.1, \quad \zeta = 0, 0.2, 0.5, 0.7, 1, 10$



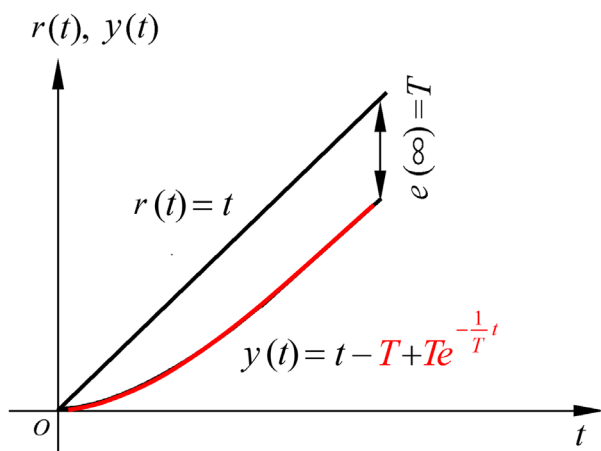
小结：一阶系统的瞬态响应 $\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$



1. 单位脉冲响应



2. 单位阶跃响应

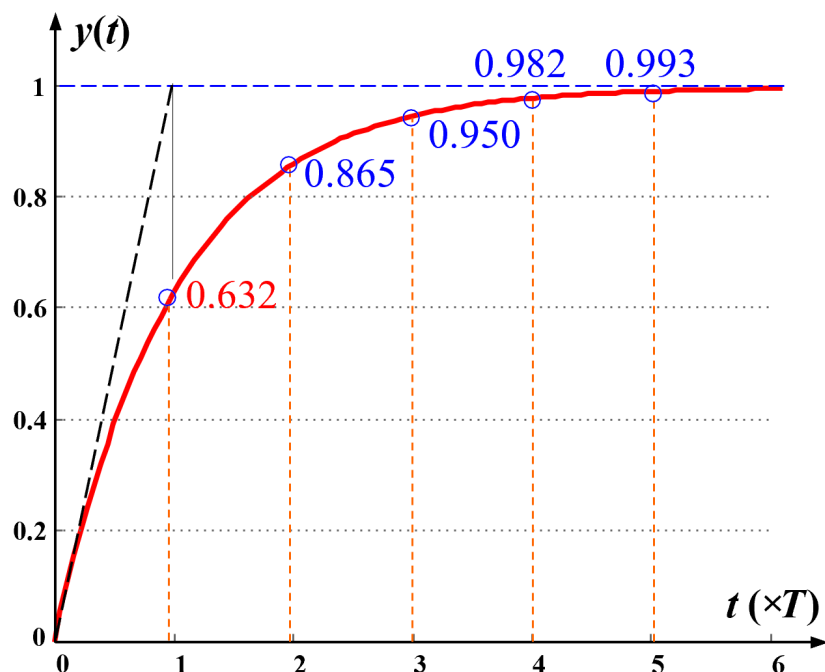


3. 单位斜坡响应

稳定性、快速性和准确性均与系统固有特性有关。稳定性、快速性与输入信号的形式无关；而准确性与输入信号的形式有关。

小结：一阶系统的单位阶跃响应

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$$



单位阶跃的时域响应函数:

$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right)1(t)$$

- (1) 经过时间 T ，曲线上升到稳态值的 63.2%；
- (2) 调节时间为 $(3\sim 4)T$ ；
- (3) 在 $t=0$ 处，响应曲线的切线斜率为 $1/T$ 。

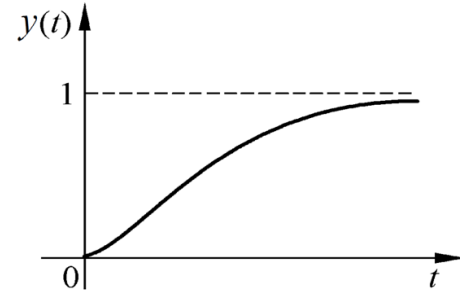
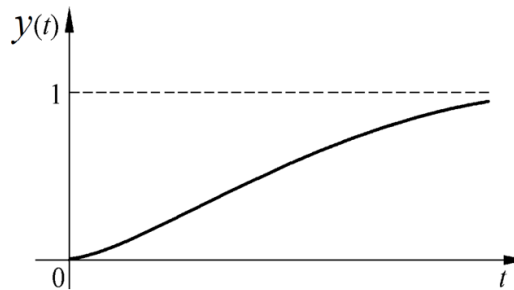
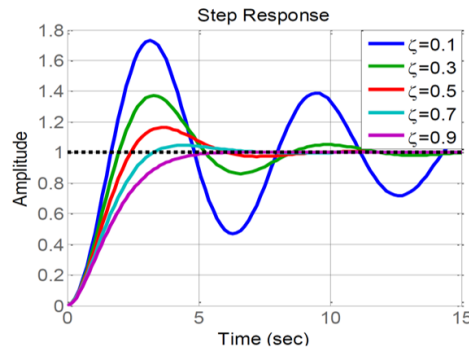
小结：二阶系统的瞬态响应

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

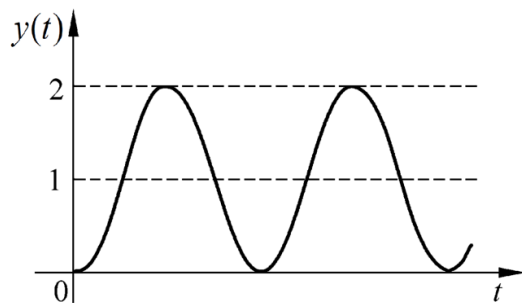
欠阻尼 $0 < \zeta < 1$

过阻尼 $\zeta > 1$

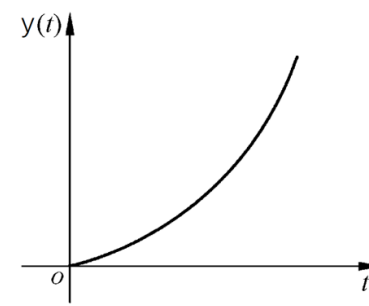
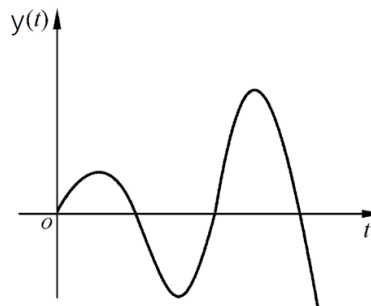
临界阻尼 $\zeta = 1$



零阻尼 $\zeta = 0$

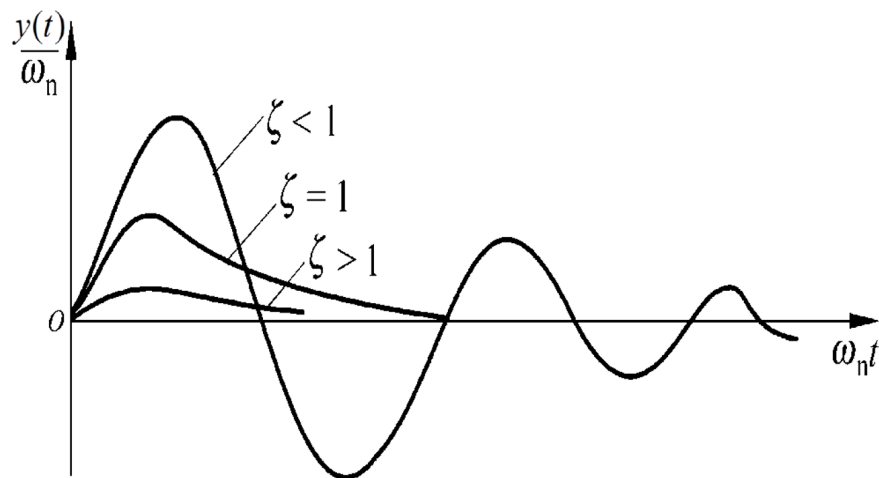


负阻尼 $\zeta < 0$

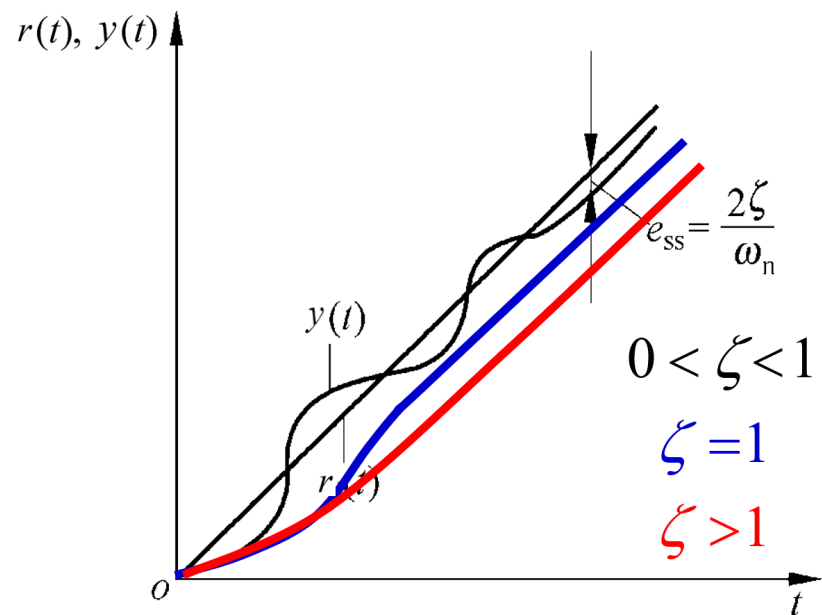


二阶系统的单位阶跃响应

小结：二阶系统的瞬态响应



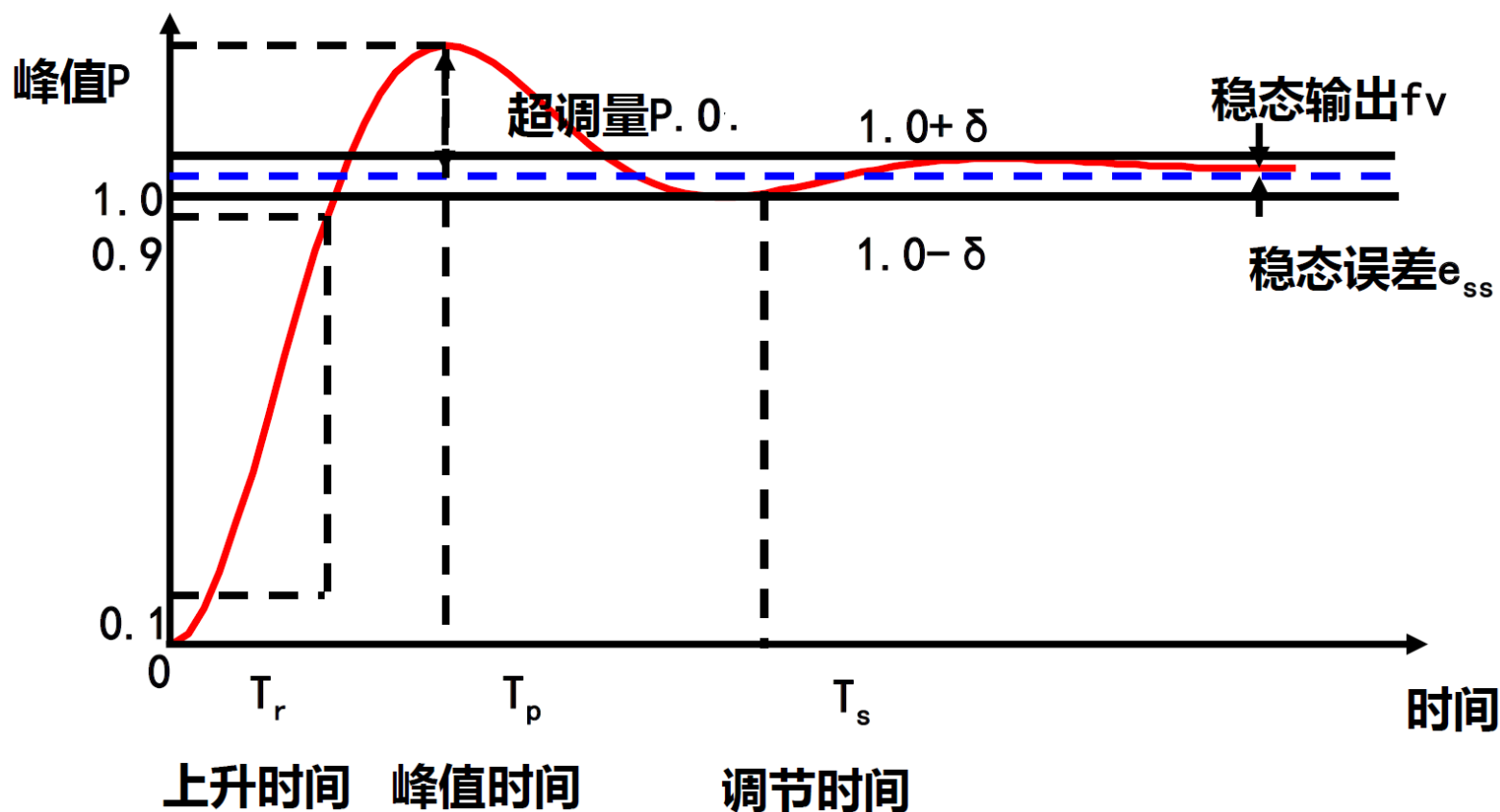
二阶系统的单位脉冲响应



二阶系统的单位斜坡响应

小结：时域分析性能指标

以欠阻尼二阶系统的阶跃响应性能指标为例。



小结：时域性能指标的计算

以欠阻尼二阶系统为例。

1. 上升时间 $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

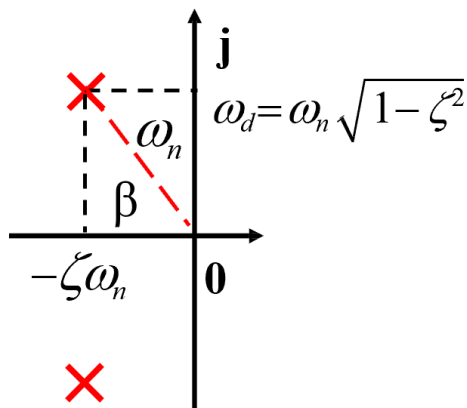
2. 峰值时间 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$

3. 超调量 $P. O. = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot 100\%$

4. 调节时间 $t_s = \frac{-\ln \delta - \ln \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \omega_n}$

小结：极点位置与瞬态响应特性的关系

以欠阻尼二阶系统为例。 $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$



(ζ, ω_n)

极点位置

性能要求

$$P.O. = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100\%$$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} (2\%)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\beta = \arccos \zeta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

单位阶跃的时域响应函数: $y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$

小结：高阶系统的时域响应

由一阶惯性环节和二阶振荡环节的响应函数叠加组成。
设输入为单位阶跃，则

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{\alpha_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{\beta_k (s + \zeta_k \omega_k) + \gamma_k (\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2})}{(s + \zeta_k \omega_k)^2 + (\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2})^2}$$

则

$$y(t) = \alpha + \sum_{j=1}^q \alpha_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r \beta_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + \sum_{k=1}^r \gamma_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t)$$

当所有闭环极点均具有负实部时，系统稳定。

小结：高阶系统的简化

主导零、极点：距离虚轴近，又不构成偶极子的极点和零点。起主导作用，决定瞬态响应性能。

1. 忽略非主导零、极点

忽略的零、极点要具有负实部，且保证系统的静态增益不变。

2. 偶极子相消

相消的零、极点要具有负实部。

小结：系统的稳态性能分析

误差和偏差

单位反馈系统 $E(s) = \varepsilon(s), \quad e_{ss} = \varepsilon_{ss}$

非单位反馈系统 $E(s) = \frac{\varepsilon(s)}{H(s)}, \quad e_{ss} = \frac{\varepsilon_{ss}}{H(0)}$

静态位置误差系数： $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$

静态速度误差系数： $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$

静态加速度误差系数： $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)H(s)$

小结：系统的稳态性能分析

系统的开环传递函数：

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots}{s^\lambda (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots}$$

系统的“型次”：

$\lambda = 0$ —— 0 型系统

$\lambda = 1$ —— I 型系统

$\lambda = 2$ —— II 型系统

输入信号 系统型次	单位阶跃	单位斜坡	单位加速度
0型	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I型	0	$\frac{1}{K}$	∞
II型	0	0	$\frac{1}{K}$

增大 K ，可减小输入引起的稳态误差

提高型次，可以消除输入引起的稳态误差

小结：系统的稳态性能分析

系统的误差 { 输入引起的误差
 { 干扰引起的误差

如何计算闭环系统的稳态误差：

1. 求系统稳态误差应首先判断系统的稳定性。
2. 当求两个量同时作用时线性系统的偏差，可利用叠加原理，分别求出每个量作用情况下的偏差，然后相加求出。

作业5-5

- E5.2 发动机、车体和轮胎都能够影响赛车的加速能力和运行速度^[9]。赛车速度控制系统模型如图 E5.2 所示。当速度指令为阶跃信号时，试求
- (a) 车速的稳态误差。
 - (b) 车速的超调量 P. O. 。

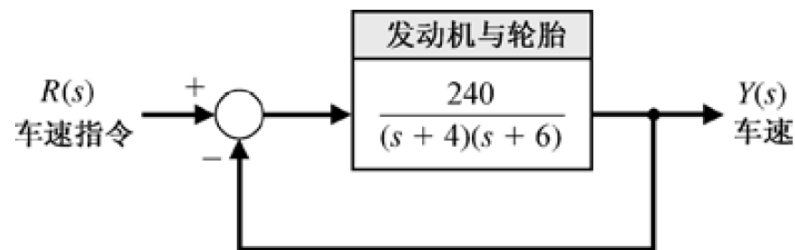


图 E5.2 赛车速度控制系统

作业5-6

E5.8 软盘驱动器配有读/写磁头位置控制系统，该系统的闭环传递函数为

$$T(s) = \frac{11.1(s + 18)}{(s + 20)(s^2 + 4s + 10)}$$

试绘制系统在 s 平面上的零-极点分布图，讨论复极点的主导性，并据此估计系统阶跃响应的超调量。

作业5-7

E5.11 考虑图 E5.11 所示的单位负反馈系统，其受控对象 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{6(s + 8)}{s(s + 1)(s + 4)(s + 10)}$$

试求系统阶跃响应和斜坡响应的稳态误差。

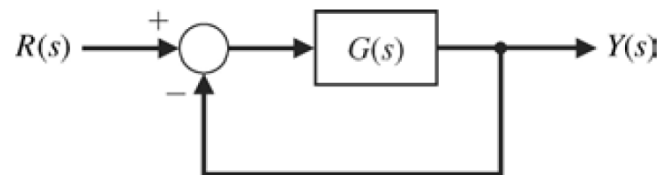


图 E5.11 单位负反馈系统

作业5-8

E5. 18 考虑图 E5. 18(a)所示的反馈系统，当 $K=1$ 时，系统的单位阶跃响应曲线如图 E5. 18(b)所示。试确定 K 的合适取值，使系统的稳态误差为零。

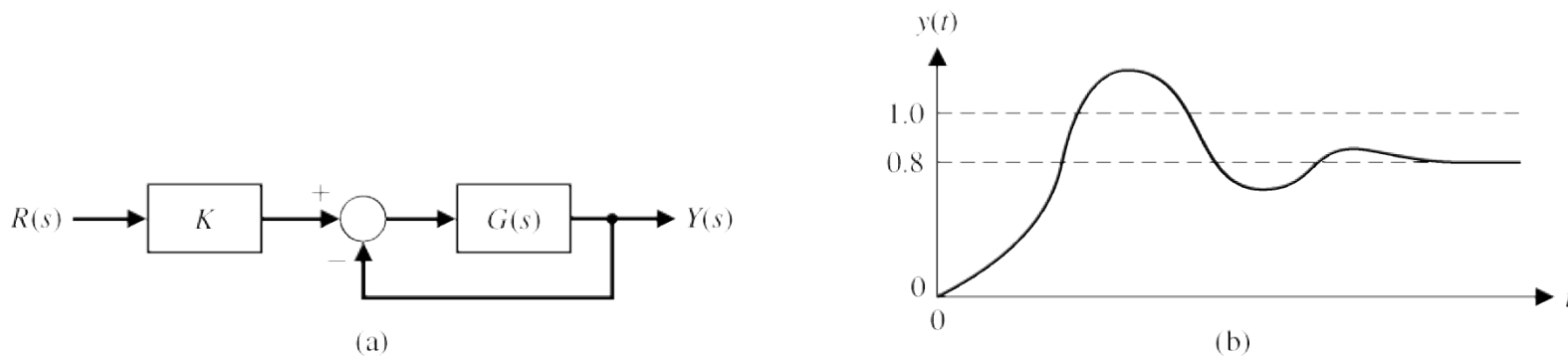


图 E5. 18 带有前置滤波的反馈系统及其单位阶跃响应曲线

作业5-9

E5. 12 在大型博览会和狂欢节上, Ferris 转轮是大家熟悉的娱乐项目。

这种转轮的发明人是 George Ferris, 他于 1859 年出生在伊利诺斯州的盖尔斯堡, 后来搬到内华达州。Ferris 先生于 1881 年毕业于伦斯勒理工学院。到 1891 年, 他在钢铁和桥梁建筑等方面已积累了相当丰富的经验, 由此构思建造了著名的 Ferris 转轮, 并于 1893 年在芝加哥哥伦比亚博览会上首次公开展出^[8]。为了不使游客受到惊吓, Ferris 转轮的速度稳态误差必须控制在预期速度的 5% 以内。速度控制系统如图 E5. 12 所示。

- (a) 试选择增益 K 的合适取值, 以满足系统稳态运行时的速度要求。
- (b) 利用 (a) 中确定的增益 K , 计算由于单位阶跃干扰信号 $T_d(s) = 1/s$ 导致的响应误差 $e(t)$, 并绘制误差曲线, 确定速度的变化是否超过了 5% [为便于计算, 令 $R(s) = 0$, 并请留意 $E(s) = R(s) - T(s)$]。

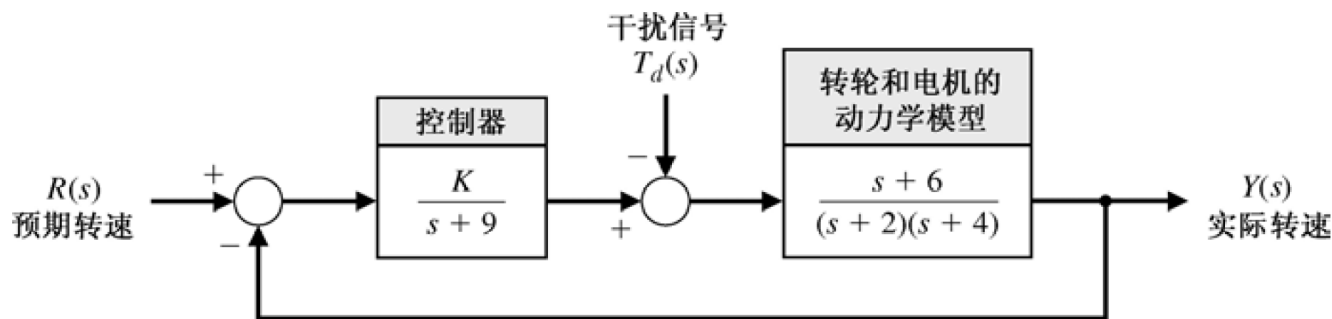


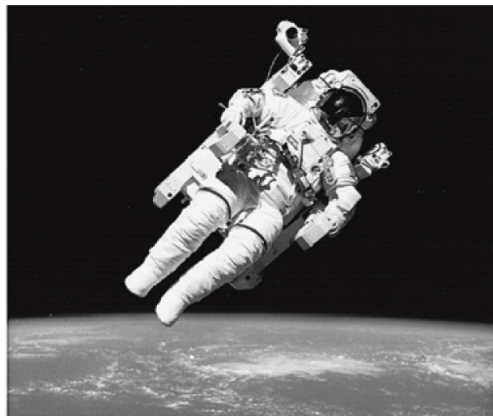
图 E5. 12 Ferris 转轮的速度控制系统

作业5-10

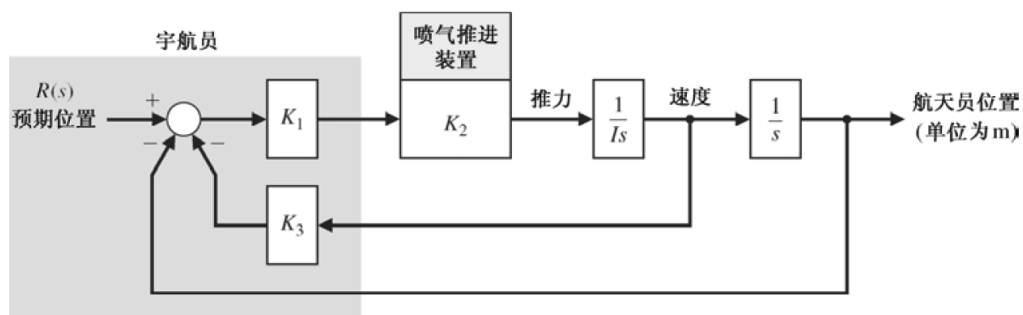
P5.7 如图 P5.7(a)所示, 1984 年 2 月 7 日, 宇航员 Bruce McCandless II 利用手持的喷气推进装置, 完成了人类历史上的首次太空行走。宇航员机动控制系统的框图如图 P5.7(b)所示, 其中手持式喷气推进控制器可以用增益 K_2 表示, 宇航员及自身装备的整体转动惯量为 $25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

(a) 当输入为斜坡信号 $r(t) = t$ (单位为 m) 时, 试确定增益 K_3 的合适取值, 使系统的稳态误差小于 1 cm。

(b) 沿用(a)中确定的增益 K_3 , 试确定 $K_1 K_2$ 的取值, 使系统的超调量小于 10%。



(a)



(b)

图 P5.7 (a) 宇航员 Bruce McCandless II 在太空中行走, 与运行在地球轨道上的航天飞机仅相距数米。他使用了称为手控机动单元的手控氮气推动装置(NASA 友情提供); (b) 控制系统的框图

编程作业5-1

CP5. 1 某闭环系统的传递函数为

$$T(s) = \frac{15}{s^2 + 8s + 15}$$

试分别利用解析方法和函数 `impulse`，求系统的脉冲响应，并比较所得的结果。

编程作业5-2

CP5.2 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$L(s) = G_c(c) = G(s) = \frac{s + 10}{s^2(s + 15)}$$

当输入为斜坡信号 $R(s) = 1/s^2$ 时，利用函数 `lsim` 仿真闭环系统在 $0 \leq t \leq 50$ s 这一时间段内的动态响应，并计算系统的稳态误差。

编程作业5-3

CP5.3 考虑图 CP5.3 所示的二阶标准系统，它的极点位置同动态响应之间存在着紧密关联。对控制系统的设计而言，掌握这种关联关系是非常重要的。考虑如下 4 种情况：

- (1) $\omega_n = 2, \zeta = 0$; (2) $\omega_n = 2, \zeta = 0.1$;
(3) $\omega_n = 1, \zeta = 0$; (4) $\omega_n = 1, \zeta = 0.2$ 。

利用函数 `impulse` 和函数 `subplot`，将上述 4 种情况下的系统脉冲响应曲线绘制在同一张图中，将所得结果与 5.5 节的图 5.17 中的曲线进行比较，并加以讨论分析。

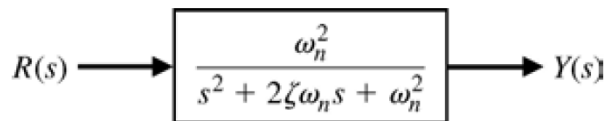


图 CP5.3 二阶系统标准

编程作业5-4

CP5.4 考虑图 CP5.4 所示的负反馈控制系统，

- (a) 用解析方法验证，该闭环控制系统单位阶跃响应的超调量约为 50%。
- (b) 编写 m 脚本程序，绘制该闭环系统的单位阶跃响应曲线，据此估计系统的超调量，并与 (a) 的结果进行比较。

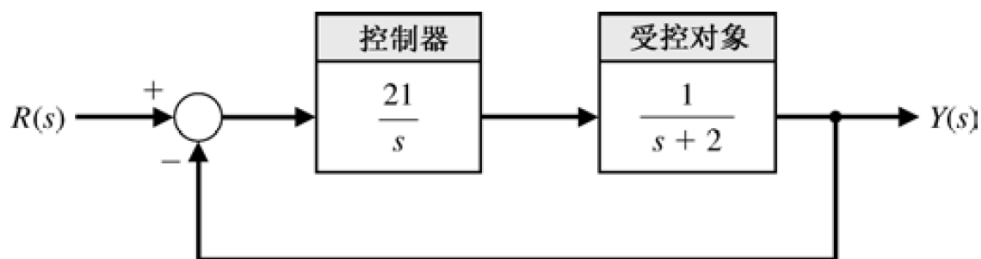


图 CP5.4 负反馈控制系统

编程作业5-5

CP5.6 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$L(s) = G_c(s) G(s) = \frac{25}{s(s+5)}$$

编写 m 脚本程序, 绘制系统的单位阶跃响应曲线, 据此确定系统的最大超调量 M_{pt} 、峰值时间 T_p 和调节时间 T_s (按 2% 准则), 并在图中加以标注。

编程作业5-6

CP5.11 考虑图 CP5.11 所示的闭环系统，编写 m 脚本程序，实现以下功能：

- (a) 求系统的闭环传递函数 $T(s) = Y(s)/R(s)$ 。
- (b) 分别绘制系统对单位脉冲输入 $R(s) = 1$ 、单位阶跃输入 $R(s) = 1/s$ 和单位斜坡输入 $R(s) = 1/s^2$ 的响应，并利用函数 subplot 将三组响应曲线绘制在同一张图中。

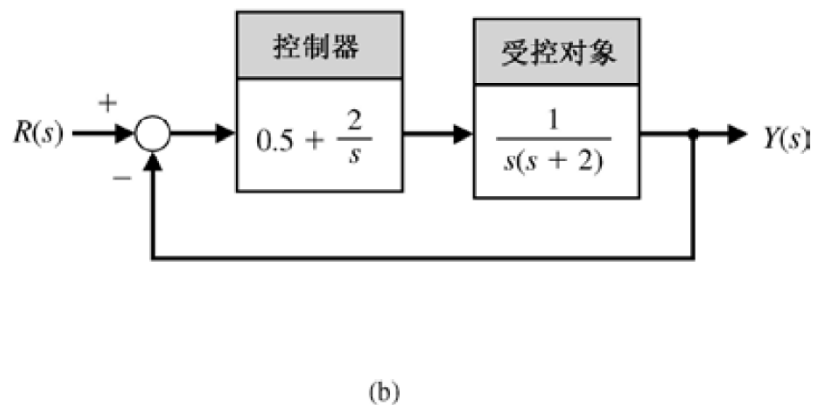
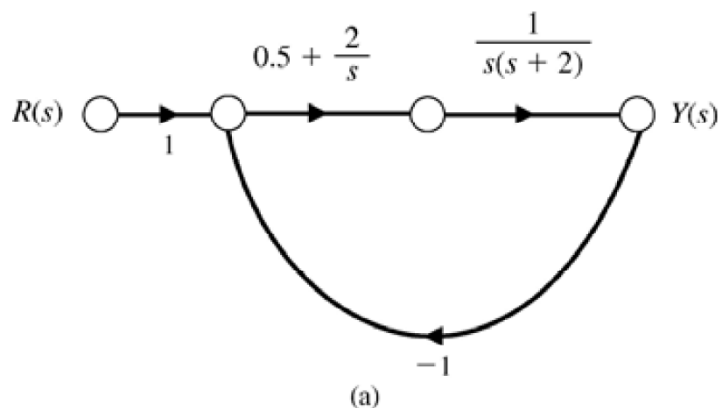


图 CP5.11 单位负反馈系统。(a) 信号流图；(b) 框图