第6章 线性空间

- 集合 映射
- 线性空间的定义与简单性质
- 维数 基与坐标
- 基变换与坐标变换
- 线性子空间
- 子空间的交与和
- 子空间的直和
- 线性空间的同构

集合与映射

一、集合

1、定义

把一些事物汇集到一起组成的一个整体就叫做集合；

组成集合的这些事物称为集合的元素.

☆ 常用大写字母A、B、C 等表示集合；

用小写字母a、b、c 等表示集合的元素.

当a是集合A的元素时，就说a 属于A，记作：$a \in A$ ；

当a不是集合A的元素时，就说a不属于A，记作：$a \notin A$

注：

- 关于集合没有一个严谨的数学定义，只是有一个描述性的说明.
- 集合论的创始人是19世纪中期德国数学家康托尔（G．Cantor），他把集合描述为：所谓集合是指我们直觉中或思维中确定的,彼此有明确区别的那些事物作为一个整体来考虑的结果;集合中的那些事物就称为集合的元素．即，集合中的元素具有：确定性、互异性、无序性.

集合的表示方法：**描述法**、**列举法**

描述法：给出这个集合的元素所具有的特征性质.

$$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\text{具有性质}\boldsymbol{P}\}$$

列举法：把构成集合的全部元素一一列举出来.

$$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$$

例1 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, x, y \in R\}$

例2 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$， $\boldsymbol{2Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots\cdots\}$

☆ 空集：不含任何元素的集合，记为φ.

注意：$\{\varphi\} \neq \varphi$

约定：空集是任意集合的子集.

2、集合间的关系

☆ 如果B中的每一个元素都是A中的元素，则称B是A的**子集**，记作 $B \subseteq A$ ，（读作B**包含于**A）

$B \subseteq A$当且仅当 $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

☆ 如果A、B两集合含有完全相同的元素，则称A与B**相等**，记作$A=B$.

$A=B$当且仅当$A \subseteq B$且 $B \subseteq A$

3、集合间的运算

交：$A \bigcap B = \{x | x \in A且x \in B\}$　；

并：$A \bigcup B = \{x | x \in A或x \in B\}$

显然有，$A \bigcap B \subseteq A$;　$A \subseteq A \bigcup B$

二、映射

1、定义

设M、M'是给定的两个非空集合，如果有 一个对应法则σ，通过这个法则σ对于M中的每一个元素a，都有M'中一个唯一确定的元素a'与它对应, 则称 σ为M到M'的一个映射，记作 :$\sigma: M \to M'$或 $M \xrightarrow{\sigma} M'$

称 a'为 a 在映射σ下的象，而 a 称为a'在映射σ下的原象，记作$\sigma(a)=a'$ 或 $\sigma: a \mapsto a'$.

注:①设映射$\sigma: M \to M'$,集合$\sigma(M)=\{\sigma(a) | a \in M\}$,

称之为M在映射σ下的**象**（image),记作 $\mathrm{Im}\sigma$.

显然，$\mathrm{Im}\sigma \subseteq M'$

②集合M 到M 自身的映射称为M 的一个**变换**.

例3　判断下列M 到M'对应法则是否为映射

1）$M=\{a, b, c\}$、$M'=\{1, 2, 3, 4\}$

σ：$\sigma(a)=1$，$\sigma(b)=1$，$\sigma(c)=2$　　（是）

δ：$\delta(a)=1, \delta(b)=2, \delta(c)=3, \delta(c)=4$　　（不是）

τ：$\tau(b)=2$，$\tau(c)=4$　　（不是）

2）$M = P^{n\times n}$，$M' = P$，（P为数域）

σ：$\sigma(A) = |A|$，　$\forall A \in P^{n\times n}$　（是）

3）$M = P$，$M' = P^{n\times n}$，（P为数域）

τ：$\tau(a) = aE$，$\forall a \in P$（E为n级单位矩阵）　（是）

4）M、M' 为任意两个非空集合，a_0是M' 中的一个固定元素. σ：$\sigma(a) = a_0$，　$\forall a \in M$　（是）

例4 M是一个集合，定义I：

$$I(a)=a\ ,\qquad \forall a\in M$$

即 I 把 M 上的元素映到它自身，I 是一个映射，称为 M 上的**恒等变换**或**单位变换**.

例5 任意一个在实数集R上的函数 $y=f(x)$ 都是实数集R到自身的映射，即，函数可以看成是映射的一个特殊情形.

2、映射的乘积

设映射 $\sigma: M \to M'$, $\tau: M' \to M''$， 乘积 $\tau \circ \sigma$

定义为：$\tau \circ \sigma(a) = \tau(\sigma(a))$　　$\forall a \in M$

即相继施行σ和τ的结果，$\tau \circ \sigma$是 M 到 M'' 的一个映射.

注：①对于任意映射 $\sigma: M \to M'$，有

因为对$\forall a, (I_M o\sigma)(a) = I_M\sigma(a) = \sigma(a)$　$I_{M'} \circ \sigma = \sigma \circ I_M = \sigma$

②设映射 $\sigma: M \to M'$, $\tau: M' \to M''$, $\psi: M'' \to M'''$,

有　$(\psi \circ \tau) \circ \sigma = \psi \circ (\tau \circ \sigma)$

3、映射的性质： 设映射 $\sigma: M \to M'$

1）若 $\operatorname{Im}\sigma = M'$，即对于任意 $y \in M'$，均存在 $x \in M$，使 $y = \sigma(x)$，则称σ是M到M'的一个**满射**（或称 σ为**映上的**）；

2）若M中不同元素的象也不同，即

$\forall a_1, a_2 \in M$，若$a_1 \neq a_2$，则$\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$

（或 $\forall a_1, a_2 \in M$，若$\sigma(a_1) = \sigma(a_2)$，则$a_1 = a_2$ ），

则称σ是M到M'的一个**单射**（或称σ为**1—1的**）；

3）若σ既是单射，又是满射，则称σ为**双射**，（或称σ为 **1—1对应**）

例6　判断下列映射的性质

1）$M=\{a, b, c\}$、$M'=\{1,2, 3\}$

σ：$\sigma(a)=1$，$\sigma(b)=1$，$\sigma(c)=2$　　（既不单射，也不是满射）

τ：$\tau(a)=3$，$\tau(b)=2$，$\tau(c)=1$　　（双射）

2）$M=P^{n\times n}$，$M'=P$，（P为数域）

σ：$\sigma(A)=|A|$，　$\forall A\in P^{n\times n}$　　（是满射，但不是单射）

3）$M = P$，$M' = P^{n\times n}$, P为数域, E为n级单位矩阵

τ：$\tau(a) = aE$，　　$\forall a \in P$　　（是单射，但不是满射）

4）M、M' 为任意非空集合，$a_0 \in M'$为固定元素

σ：$\sigma(a) = a_0$，　　$\forall a \in M$　　（既不单射，也不是满射）

5）M是一个集合，定义I：

$I(a) = a$，　$\forall a \in M$　　（双射）

6）$M = Z$，$M' = 2Z$，

σ：$\sigma(n) = 2n$,　　$\forall n \in Z$　　（双射）

注：

① 对于有限集来说，两集合之间存在1—1对应的充要条件 件是它们所含元素的个数相同；

② 对于有限集A及其子集B，若$B \neq A$（即B为A的真子集），则 A、B之间不可能存在1—1对应；但是对于无限集未必如此.

如例6中的6），σ是1—1对应，但$2Z$是Z的真子集.

$M=Z$，$M' = 2Z$，

σ：$\sigma(n) = 2n, \quad \forall n \in Z$

4、可逆映射

定义：设映射 $\sigma: M \to M'$, 若有映射 $\tau: M' \to M$,

使得 $\tau \circ \sigma = I_M, \sigma \circ \tau = I_{M'}$

则称$\boldsymbol{\sigma}$为**可逆映射**，$\boldsymbol{\tau}$为$\boldsymbol{\sigma}$的**逆映射**，记作$\boldsymbol{\sigma}^{-1}$.

σ的逆映射是由σ唯一确定的

注：

①若$\boldsymbol{\sigma}$为可逆映射，则$\boldsymbol{\sigma}^{-1}$也为可逆映射，且

$$(\boldsymbol{\sigma}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{\sigma}.$$

② $\sigma: M \to M'$ 为可逆映射，$a \in M$，若 $\sigma(a) = a'$,

则有 $\sigma^{-1}(a') = a.$

③ $\boldsymbol{\sigma}$为可逆映射的充要条件是$\boldsymbol{\sigma}$为1—1对应.

3、设映射 $f:A\to B,\ g:B\to C$ ，令 $h=g\circ f$ **，证明：**

1）如果 *h* 是单射，那么 *f* 也是单射；

2）如果 *h* 是满射，那么 *g* 也是满射；

3）如果 *f*、*g* 都是双射，那么 *h* 也是双射，并且

$$h^{-1}=(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

证：1）若 *f* 不是单射，则存在 $a_1,a_2\in A$, 且 $a_1\neq a_2$,

但 $f(a_1)=f(a_2)$, 于是有

$$h(a_1)=g\circ f(a_1)=g(f(a_1))=g(f(a_2))$$
$$=g\circ f(a_2)=h(a_2)$$

这与*h*是单射矛盾，∴ *f* 是单射.

2）$\because$ ***h*** **是满射**，$\forall c \in C, \exists a \in A,$使$h(a) = c$ ，**即**

$$c = h(a) = g \circ f(a) = g(f(a))$$

又$\because$ $f(a) \in B$ ，$\therefore$ **g 是满射.**

3）$\forall c \in C$ ，**因为 g 是满射，存在** $b \in B$,**使**

$$g(b) = c.$$

又因为 ***f*** **是满射，存在** $a \in A$ ，**使** $f(a) = b$

$\therefore$ $h(a) = g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c,$

h**是满射.**

∵若 $a_1, a_2 \in A$, 且$a_1 \neq a_2$，由于 $\boldsymbol{f}$ 是单射，有

$f(a_1) \neq f(a_2).$

又因为 $\boldsymbol{g}$ 是单射，有 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$

即, $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$

∴ $h(a_1) \neq h(a_2)$, $\boldsymbol{h}$ 是单射.

因而 $\boldsymbol{h}$ 是双射.

又 $\because \boldsymbol{h \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_C}$

同理 $\boldsymbol{(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ h = I_A}$. $\boldsymbol{\therefore h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$