概率统计第十四次作业

201300035 方盛俊

2.

(1)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_c^{+\infty} x \cdot heta c^{ heta} x^{-(heta+1)} \mathrm{d}x = heta c^{ heta} \int_c^{+\infty} x^{- heta} \mathrm{d}x = rac{c heta}{ heta-1}$$

令样本矩等于总体矩 $ar{X}=E[X]$ 可得

则
$$heta$$
 的矩估计量为 $\hat{ heta}=rac{ar{X}}{ar{X}-c}$, 矩估计值为 $\hat{ heta}=rac{ar{x}}{ar{x}-c}$

其中
$$ar{X}=rac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, ar{x}=rac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

(2)

$$E[X] = \int_0^1 x \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta} - 1} dx = \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} + 1}$$

则
$$heta$$
 的矩估计量为 $\hat{ heta}=\left(rac{ar{X}}{ar{X}-1}
ight)^2$,矩估计值为 $\hat{ heta}=\left(rac{ar{x}}{ar{x}-1}
ight)^2$

(3)

$$E[X] = \sum_{x=1}^m x \cdot inom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} = mp$$

则
$$p$$
 的矩估计量为 $\hat{p}=rac{ar{X}}{m}$, 矩估计值为 $\hat{p}=rac{ar{x}}{m}$

3.

(1)

似然函数对数为
$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n heta c^{ heta} x_i^{-(heta+1)} = n \ln heta + heta n \ln c - (heta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

对
$$heta$$
 求导令其等于零 $rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} heta} \ln L = rac{n}{ heta} + n \ln c - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$

可得最大似然估计值
$$\hat{ heta} = rac{1}{rac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \ln c}$$

进而最大似然估计量
$$\hat{ heta} = rac{1}{rac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i - \ln c}$$

(2)

似然函数对数为
$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = n \ln \sqrt{\theta} + (\sqrt{\theta}-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

对
$$\sqrt{ heta}$$
 求导令其等于零 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sqrt{ heta}}\ln L = \dfrac{n}{\sqrt{ heta}} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$

可得最大似然估计值
$$\hat{ heta} = rac{n^2}{(\sum_{i=1}^n \ln x_i)^2}$$

进而最大似然估计量
$$\hat{ heta} = rac{n^2}{(\sum_{i=1}^n \ln X_i)^2}$$

(3)

似然函数对数为
$$\ln L=\ln\prod_{i=1}^n\binom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=\sum_{i=1}^n\ln\binom{m}{x_i}+\ln p\sum_{i=1}^nx_i+\ln(1-p)\sum_{i=1}^n(m-x_i)$$

对
$$p$$
 求导令其等于零 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L=\dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^nx_i+\dfrac{1}{1-p}(nm-\sum_{i=1}^nx_i)=0$

可得最大似然估计值
$$\hat{p} = rac{\sum_{i=1}^n x_i}{nm} = rac{ar{x}}{m}$$

进而最大似然估计量
$$\hat{p} = rac{\sum_{i=1}^n x_i}{nm} = rac{ar{X}}{m}$$

(1)

因为
$$E[X] = 1 \cdot \theta^2 + 2 \cdot 2\theta(1-\theta) + 3 \cdot (1-\theta)^2 = 3-2\theta$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{3}(1+2+1) = \frac{4}{3} = E[X] = 3-2\theta$$

可得
$$heta$$
 的矩估计值为 $heta=rac{3}{2}-rac{2}{3}=rac{5}{6}$

最大似然函数对数为 $\ln L = \ln \theta^2 + \ln 2\theta (1-\theta) + \ln \theta^2 = 5 \ln \theta + \ln (1-\theta) + \ln 2$

对
$$heta$$
 求导等于零 $rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} heta} \ln L = rac{5}{ heta} - rac{1}{1- heta} = 0$

可得最大似然估计值 $\hat{ heta}=rac{5}{6}$

(2)

似然函数的对数为
$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n (\frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}) = \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i!$$

对
$$\lambda$$
 求导令其等于零 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L=\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^nx_i-n=0$

则 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=ar{X}$

因为 $E[X]=\lambda$,因此矩估计量也为 $\hat{\lambda}=ar{X}$

(3)

似然函数的对数为
$$\ln L=\ln\prod_{i=1}^n \binom{x_i-1}{r-1} p^r (1-p)^{x_i-r}=\sum_{i=1}^n \ln\binom{x_i-1}{r-1}+nr\ln p+(\sum_{i=1}^n (x_i-r))\ln(1-p)$$

对
$$p$$
 求导令其等于零 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L = \dfrac{nr}{p} + \dfrac{nr - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0$

则 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=rac{r}{ar{x}}$

(1)

似然函数的对数为
$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n heta x_i^{ heta-1} = n \ln heta + (heta-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

对
$$heta$$
 求导等于零得 $rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} heta} \ln L = rac{n}{ heta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$

因此
$$heta$$
 的最大似然估计值为 $\hat{ heta} = -rac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

因为 $U=e^{-\frac{1}{\theta}}$ 是单调反函数,

则 U 的最大似然估计值为 $\hat{U}=e^{\sum_{i=1}^{n}\ln x_{i}\over n}$

(2)

 μ 的最大似然估计值为 $ar{x}$

而
$$heta=P(X>2)=1-P(X-\mu\leqslant 2-\mu)=1-\Phi(2-\mu)$$
 是一个单调函数
因此 $heta$ 最大似然估计值为 $\hat{ heta}=1-\Phi(2-\bar{x})$

(3)

似然函数对数为
$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{m-x_i} = \sum_{i=1}^n \ln \binom{m}{x_i} + \ln \theta \sum_{i=1}^n x_i + \ln (1-\theta) \sum_{i=1}^n (m-x_i)$$

对
$$heta$$
 求导令其等于零 $rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} heta}\ln L = rac{1}{ heta}\sum_{i=1}^n x_i + rac{1}{1- heta}(nm - \sum_{i=1}^n x_i) = 0$

可得
$$heta$$
 的最大似然估计值 $\hat{ heta} = rac{\sum_{i=1}^n x_i}{nm} = rac{ar{x}}{m}$

因为
$$heta=rac{1}{3}(1+eta)$$
 则 $eta=3 heta-1$

可得
$$eta$$
 的最大似然估计值 $\hat{eta} = rac{3ar{x}}{m} - 1$

由题目可知 $E[S_1^2] = E[S_2^2] = \sigma^2$, 则有

$$egin{aligned} E[S_w^2] &= E[rac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}] \ &= rac{(n_1-1)E[S_1^2] + (n_2-1)E[S_2^2]}{n_1 + n_2 - 2} \ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

因此 S_w^2 是 σ^2 的无偏估计量.

(2)

$$E[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i} X_{i}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i}}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i} E[X_{i}]}{\sum_{i=1}^{n} a_{i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i} \mu}{\sum_{i=1}^{n} a_{i}} = \mu$$

因此其是 μ 的无偏估计量.

10.

(1)

$$egin{align} E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2] &= c\sum_{i=1}^{n-1}(D[X_{i+1}-X_i]-(E[X_{i+1}-X_i])^2) \ &= c\sum_{i=1}^{n-1}(D[X_{i+1}]+D[X_i]) \ &= 2(n-1)c\sigma^2 \end{gathered}$$

要使得
$$E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=\sigma^2$$

因此要
$$c=rac{1}{2(n-1)}$$

(2)

要使
$$E[ar{X}^2-cS^2]=E[ar{X}^2]-cE[S^2]=(rac{\sigma^2}{n}+\mu^2)-c\sigma^2=\mu^2$$
 则 $c=rac{1}{n}$

11.

(1)

似然函数对数为
$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n rac{1}{ heta} x_i^{rac{1- heta}{ heta}} = -n \ln heta + rac{1- heta}{ heta} \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

则求导等于零可得
$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} heta} \ln L = -rac{n}{ heta} - rac{1}{ heta^2} \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

则最大似然估计量为
$$\hat{ heta} = -rac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$$

(2)

因为
$$E[-\ln X] = \int_0^1 (-\ln x) \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \mathrm{d}x = -x^{\frac{1}{\theta}} \ln x|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x} x^{\frac{1}{\theta}} \mathrm{d}x = \theta$$

因此
$$E[\hat{ heta}] = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[-\ln X_i] = rac{1}{n} \cdot n heta = heta$$

因此 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

12.

对于均值为 heta 的指数分布有 $E[X]= heta, D[X]= heta^2$, 因此

$$E[T_1] = rac{1}{6}(E[X_1] + E[X_2]) + rac{1}{3}(E[X_3] + E[X_4]) = rac{ heta}{3} + rac{2 heta}{3} = heta$$

$$E[T_2] = rac{1}{5}(E[X_1] + 2E[X_2] + 3E[X_3] + 4E[X_4]) = 2 heta$$

$$E[T_3] = \frac{1}{4}(E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4]) = \theta$$

因此 T_1, T_3 均为 θ 的无偏估计, 但 T_2 不是.

又因为
$$D[T_1] = D[\frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4)] = \frac{1}{36}D[X_1] + \frac{1}{36}D[X_2] + \frac{1}{9}D[X_3] + \frac{1}{9}D[X_4] = \frac{5}{18}\theta^2$$

而
$$D[T_3] = \frac{1}{16}(D[X_1] + D[X_2] + D[X_3] + D[X_4]) = \frac{1}{4}\theta^2$$

因此 T_3 比 T_1 有效.

13.

(1)

因为有 $D[\hat{ heta}] > 0$

所以有 $E[\hat{\theta}^2] = D[\hat{\theta}] + (E[\theta])^2 = D[\hat{\theta}] + \theta^2 > \theta^2$

所以 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计.

(2)

因为似然函数
$$L(heta) = egin{cases} rac{1}{ heta^n}, & 0 < x_1, \cdots, x_n \leqslant heta \ 0, & ext{otherwise} \end{cases}$$

可以看出, $L(\theta)$ 随着 θ 的递增而递减, 所以 θ 取最小值时有 $L(\theta)$ 最大,

因此
$$\hat{ heta} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

因为总体
$$X$$
 的分布函数为 $F(x)=egin{cases} 0, & x<0 \ rac{x}{ heta}, & 0\leqslant x\leqslant heta \ 1, & x>0 \end{cases}$

因此
$$\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$
 的分布函数为 $F_{\hat{\theta}}(z)=[F(z)]^n=$ $\begin{cases} 0, & x<0 \ (rac{z}{\theta})^n, & 0\leqslant x\leqslant \theta \ 1, & x>0 \end{cases}$

进而可知
$$\hat{\theta}$$
 的概率密度为 $f_{\hat{\theta}}(z) = egin{cases} rac{n}{ heta} (rac{z}{ heta})^{n-1}, & 0 \leqslant z \leqslant heta \ 0, & ext{otherwise} \end{cases}$

于是
$$E[\hat{\theta}] = \int_0^{\theta} z \cdot \frac{n}{\theta} (\frac{z}{\theta})^{n-1} dz = \frac{n\theta}{n+1} \neq \theta$$

因此 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计.

14.

由
$$E[ar{X}_1]=E[ar{X}_2]=\mu$$
 且 $a+b=1$ 可知

$$E[Y] = E[aar{X}_1 + bar{X}_2] = aE[ar{X}_1] + bE[ar{X}_2] = a\mu + b\mu = \mu$$

所以 $Y=aar{X}_1+bar{X}_2$ 均是 μ 的无偏估计.

因为
$$D[ar{X}_1]=rac{\sigma^2}{n_1}, D[ar{X}_2]=rac{\sigma^2}{n_2}$$

所以有
$$D[Y]=a^2D[ar{X}_1]+b^2D[ar{X}_2]=(rac{a^2}{n_1^2}+rac{b^2}{n_2^2})\sigma^2\geqslant\sigma^2\cdot2\sqrt{rac{a^2}{n_1^2}\cdotrac{b^2}{n_2^2}}=2ab\sigma^2$$

 $\frac{2ao\sigma^2}{n_1n_2}$

当且仅当
$$rac{a^2}{n_1^2} = rac{b^2}{n_2^2}$$
 时等号成立.

则
$$a=rac{n_1}{n_1+n_2}, b=rac{n_2}{n_1+n_2}$$
 时, $D[Y]$ 达到最小值 $rac{2ab\sigma^2}{n_1n_2}=rac{2\sigma^2}{(n_1+n_2)^2}$