Ch 1-3 古典概型与几何概型

回顾前一次课

- 频率、频率的稳定性、频率与概率的关系
- 概率的公理化
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$
- $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A \cup B) - P(B)$
- 容斥原理 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- Union bound

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

古典概型

概率论最早的研究对象，相对简单、在概率论中具有重要意义

如果试验E满足：

- 试验结果只有有限种可能，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$
- 每种结果发生的可能性相同，即 $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})\ (i \neq j)$

则称这样的试验为**古典概型**，又称**等可能概型**

根据上述定义可知：

$$P(\{\omega_i\}) = 1/n$$

若事件A包含k个基本事件，则事件A发生的概率为：

$$P(A) = k/n = |A|/|\Omega|$$

基本计数原理

计数的两条基本原理

- **加法原理**: 若一项工作可以用两种不同的过程$\mathcal{A}_1$和$\mathcal{A}_2$完成, 且过程$\mathcal{A}_1$和$\mathcal{A}_2$分别有n_1和n_2种方法, 则完成该工作有$n_1 + n_2$种方法

- **乘法原理**: 若一项工作需要依次通过$\mathcal{A}_1$和$\mathcal{A}_2$两过程, 且过程$\mathcal{A}_1$和$\mathcal{A}_2$分别有n_1和n_2种方法, 则完成该工作有$n_1 \times n_2$种方法

上述两条原理可进一步推广到多个过程的情况

排列与组合

排列: 从n个不同的元素中无放回地取出r个元素进行排列，既要考虑取出的元素, 也要顾及其排列顺序, 有

$$(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

种不同的排列。若$r = n$时称全排列, 有$n!$种

组合: 从n个不同的元素中无放回地取出r个元素, 取出的元素之间无顺序关系, 共有$\binom{n}{r}$种不同的取法，其中

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

称为**组合数**或**二项系数**

例题

将n个不同的球随机放入$N\ (N \geq\ n)$个不同的盒子中:

- 事件A表示恰有n个盒子且每盒一球
- 事件B表示指定的n个盒子中各有一球
- 事件C表示指定一盒子恰有m个球

求事件A, B, C发生的概率 (盒子容量不限, 放入同一盒子内的球无顺序区别)

生日问题

有k个人 ($k < 365$), 每个人的生日等可能地出现于365天中的任意一天, 求至少两人生日相同的概率

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}$$

人数	概率
20	0.411
23	0.507
30	0.706
40	0.891
50	0.970
60	0.994
100	0.999999

超几何分布

设一批N件产品中有M件次品, 现从N件产品中不放回地任选n件, 求其中恰有k件次品的事件A的概率$P(A)$

超几何概率：

$$P(A) = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

将上例中“无放回”修改为“有放回”，该问题如何求解？

抽签问题

袋中有a个不同的白球, b个不同的红球, 假设有k个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 问第i个人 ($i \le k$) 取出红球的概率?

Matching问题

有n对夫妻参加一次聚会，现将所有参会人员任意分成n组，每组一男一女,问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

几何概型

古典概型考虑有限的样本空间, 即有限个等可能的基本事件, 在很多实际应用中受到限制. 另一种特殊的随机现象, 具有如下特征:

- **样本空间无限可测** 样本空间包含无限不可列个样本点, 可以用几何图形 (如一维线段、二位平面区域、或三维空间区域等) 来表示, 其相应的几何测度(如长度、面积、体积等) 是一个非零有限的实数
- **基本事件等可能性** 每个基本事件发生的可能性大小相等, 从而使得每个事件发生的概率与该事件的几何测度相关, 与具体位置无关

称为 **几何概型**

几何概型(续)

在一个测度有限的区域Ω内等可能性投点, 落入Ω内的任意子区域A的可能性与A的测度成正比, 与A的位置与形状无关, 这样的概率模型称之为**几何概型**. 事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

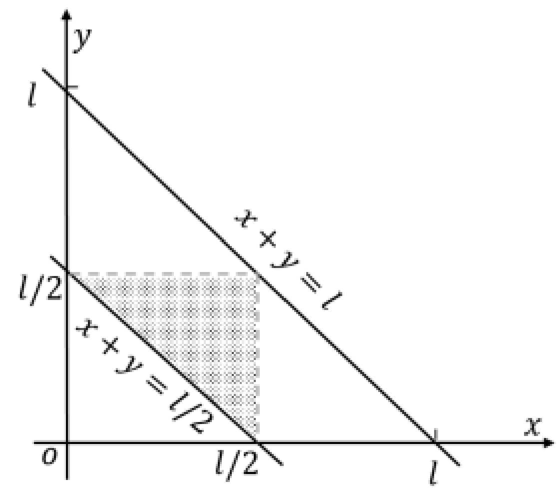
这里$\mu(\cdot)$表示区域的测度

例：公交车发车班次

假设一乘客到达汽车站的时间是任意的, 客车间隔一段时间发班, 请规划最长的间隔发车时间, 才能确保乘客候车等待时间不超过20分钟的概率大于80%.

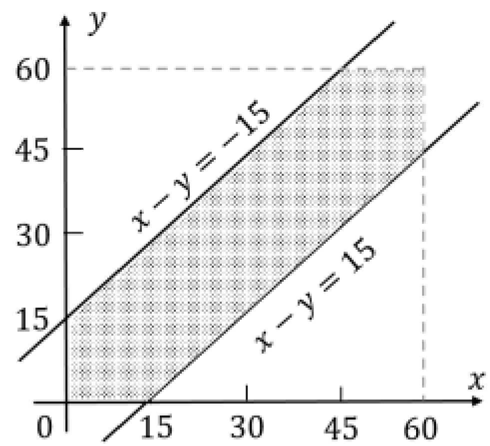
例：平面三角形

将一根长度为l的木棍随意折成三段, 这三段能构成平面三角形的概率是多少?



例：会面问题

两银行经理约定中午12:00 - 13:00到某地会面, 两人到达时间随机, 先到者等另一人15分钟后离开, 求两人见面的概率.



统计模拟法或蒙特卡洛法

统计模拟法：通过计算机模拟近似计算几何概型的概率

先构造概率模型, 再进行计算机模拟试验, 用统计的方法计算其估计值近似概率. 如可利用蒙特卡洛法来近似计算会面问题的概率

$n_A \leftarrow 0$

For $i = 1 : N$

  $x \leftarrow \mathrm{Random}(0, 60)$

  $y \leftarrow \mathrm{Random}(0, 60)$

  If $|x - y| \leqslant 15$ then

    $n_A \leftarrow n_A + 1$

  Endif

Endfor

Return n_A / N
