5. 6. 7.(2) 8.(1)

5.

$\because \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$\therefore 1, \cos^2 t, \cos 2t$ 是线性相关的.

6.

令 $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0$

假设 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 线性相关, 则 a, b, c 至少有一个值不为零, 不妨设 $a \neq 0$

$\therefore f_1(x) = -\frac{b}{a}f_2(x) - \frac{c}{a}f_3(x)$

$\because f_2(x), f_3(x)$ 不互素, 假设 $h(x)$ 是他们的最大公因式, 且 $\partial(h(x)) > 0$

有 $f_2(x) = g_2(x)h(x), f_3(x) = g_3(x)h(x)$

$\therefore f_1(x) = -\frac{b}{a}g_2(x)h(x) - \frac{c}{a}g_3(x)h(x) = (-\frac{b}{a}g_2(x) - \frac{c}{a}g_3(x))h(x)$

$\therefore h(x)|f_1(x)$

$\therefore f_1(x)$ 与 $f_2(x), f_3(x)$ 有次数不为 0 的公因式 $h(x)$

$\therefore f_1(x), f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 不互素, 产生矛盾

$\therefore f_1(x), f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 是线性无关的

7.(2)

设 $\xi = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4$

$$\therefore \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 3b - d = 0 \\ a + b - d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

$\therefore \xi = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, 即坐标 $(1, 0, -1, 0)$

8.(1)

令 $E_{ij}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1_{(ij)} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

$\therefore$ 任何一个矩阵 $A=(a_{ij})$ 均可以表示为 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$

令 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}=O$, 可得 $a_{ij}=0$

即 E_{ij} 线性无关.

$\because$ 任意一个 $P^{n\times n}$ 的矩阵都可以表示为 E_{ij} 的和

$\therefore$ 线性空间的维度为 n^2, E_{ij} 是 $P^{n\times n}$ 的一组基.