第六章：控制系统的稳定性

2022年10月28日

知识点回顾

性能分析与评价

调

性能调节与改进：
调参数、调结构等

控制工程的循环主题

工程目标：性能可接受的控制系统

稳，快，准！

本章的**基本要求**：

1. 用劳斯判据判定线性系统稳定性

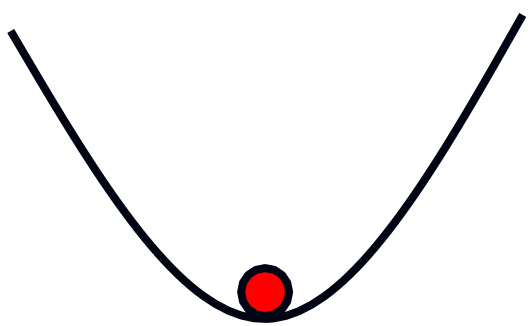
2. 用劳斯判据设计参数

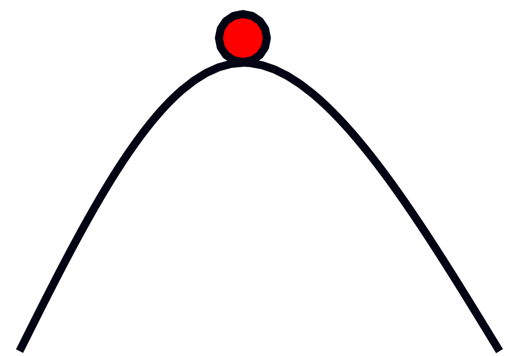
内容安排

平衡状态

　　如果没有受到任何扰动或者输入信号的激励，控制系统输出量将保持在某个状态，则称控制系统处于平衡状态。

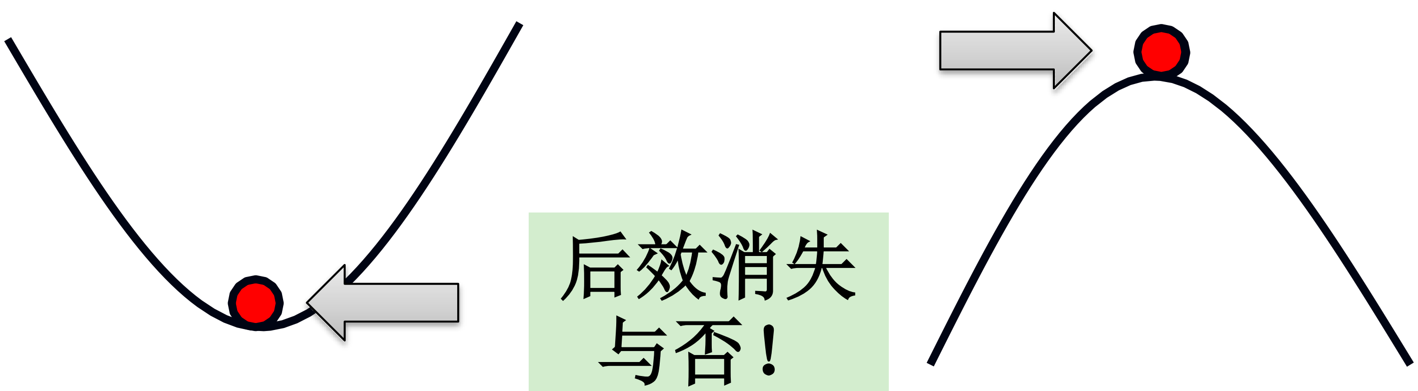
$$\frac{dx}{dt} = 0$$





稳定性

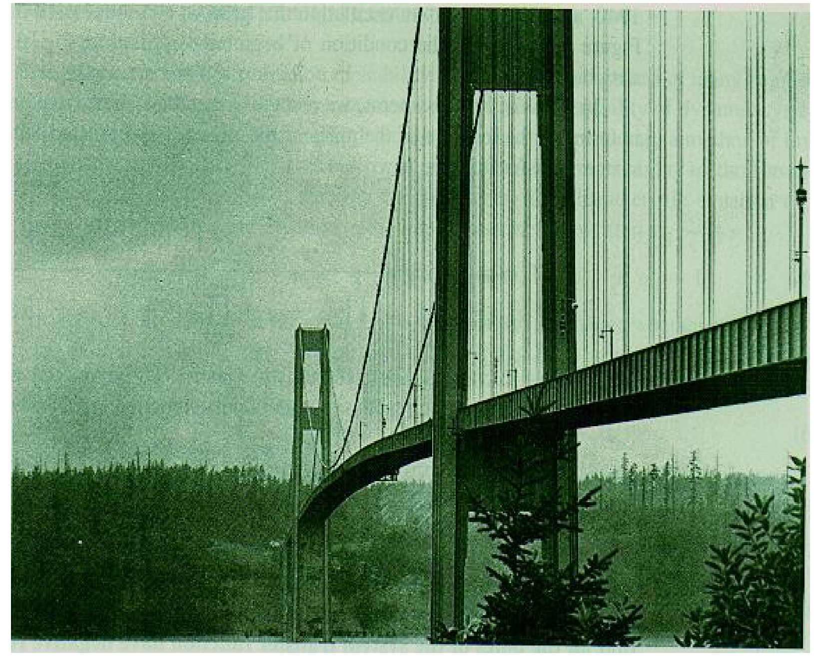
一个处在平衡状态的系统，在扰动作用下，会偏离平衡状态。当扰动消失后，扰动的后效随着时间消失，系统能恢复到平衡状态，则称该系统是稳定的。反之，则称该系统不稳定。

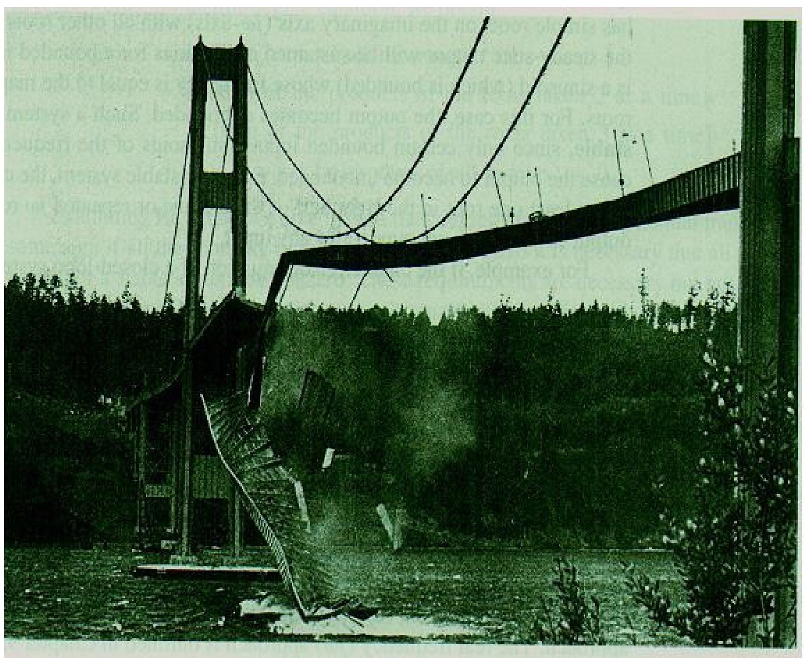


稳定的系统　　不稳定的系统

不倒翁是全局稳定的。

右图是塔科马峡谷的首座大桥，开通于1940 年7月1日。只要有风，这座大桥就会晃动。





4个月之后，一阵风吹过，引起桥的晃动，而且越来越大，直到……

相对稳定性

- 稳定的系统之间，还需要进一步衡量哪一个更稳定。

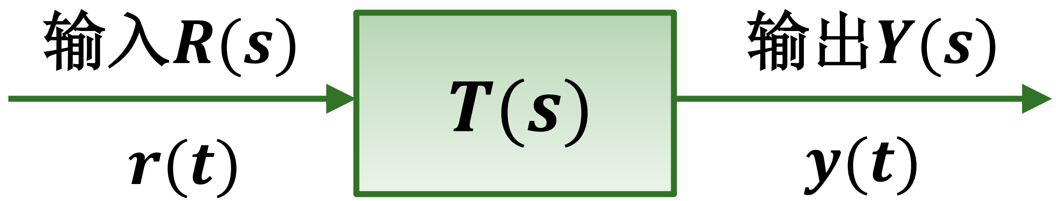
  

相对稳定性	轮船	>	民航客机	>	战斗机
机动性		<		<	

- 稳定性的严格定义多种多样：
  - 有界输入有界输出（BIBO）
  - 扰动消失稳定，Lyapunov稳定性（论运动的稳定性）……

BIBO稳定性

- 有界输入的激励下，系统只会产生有界的输出。

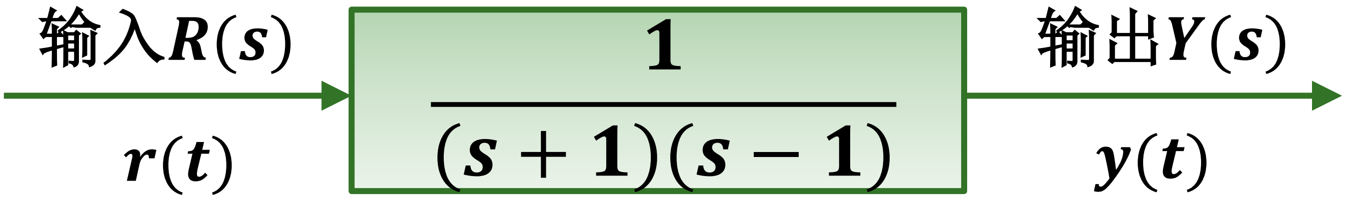


有界输入 有界输出

$$\left|r(t)\right|_{t\to\infty} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \left|y(t)\right|_{t\to\infty} < \infty$$

- 稳定性是系统的**固有属性**，只与系统自身有关。

例6.1：求系统的单位阶跃响应，即 $r(t)=1(t)$



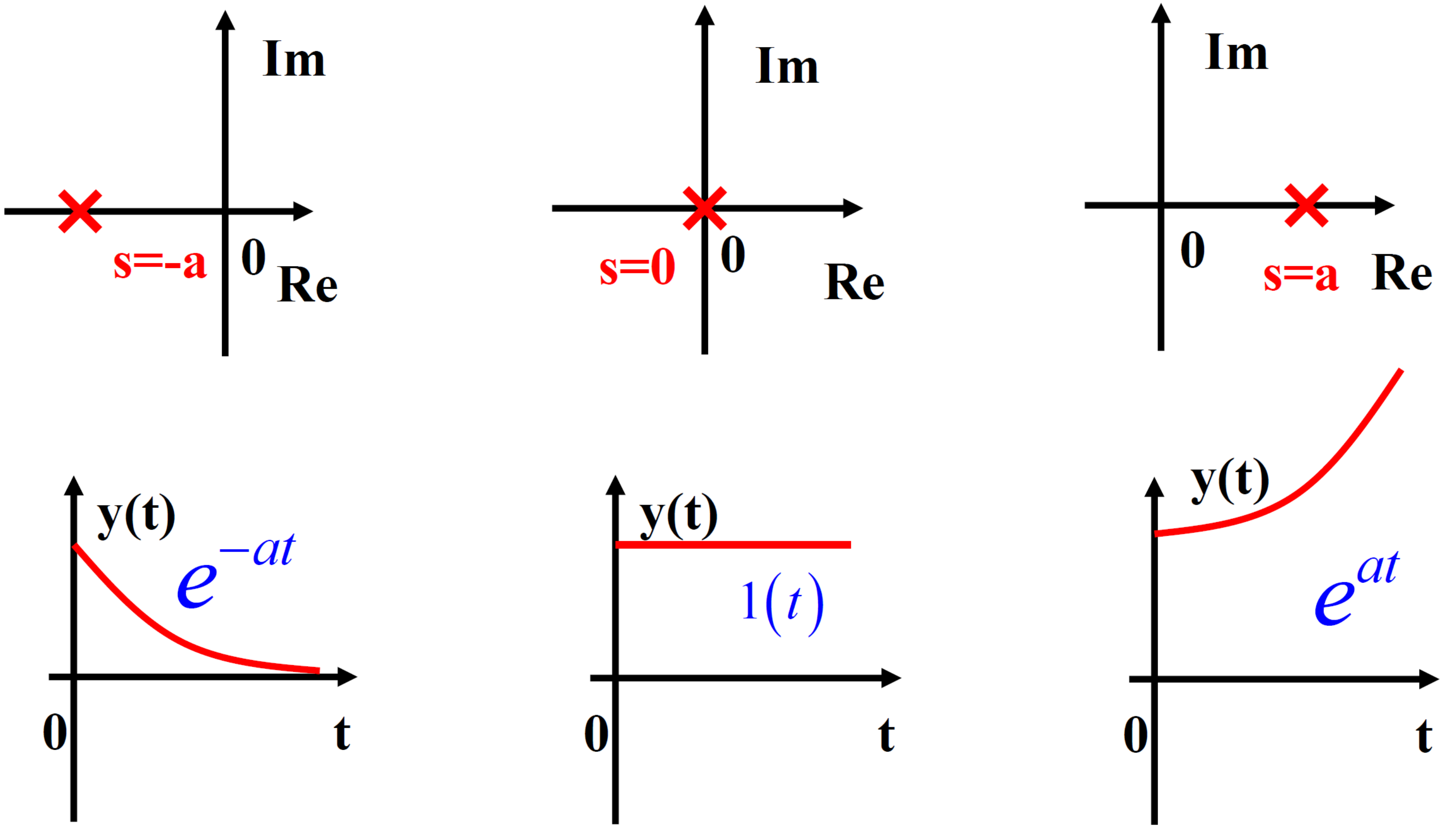
解：

$$Y(s)=G(s)R(s)=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\frac{1}{s}=\frac{-1}{s}+\frac{0.5}{s+1}+\frac{0.5}{s-1}$$

$$y(t)=-1+0.5e^{-t}+0.5e^{t}$$

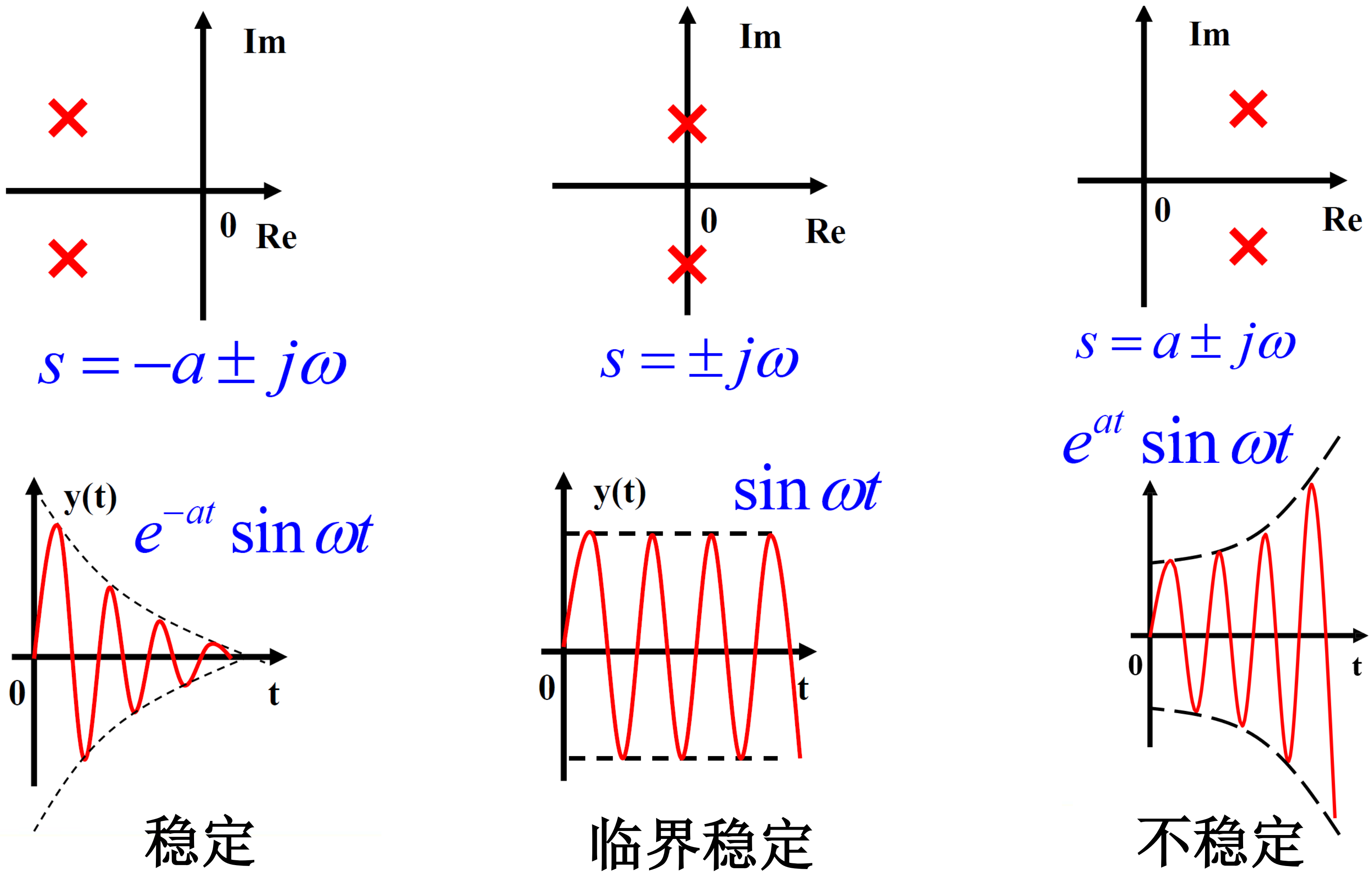
不稳定！

实极点位置与单位脉冲响应曲线

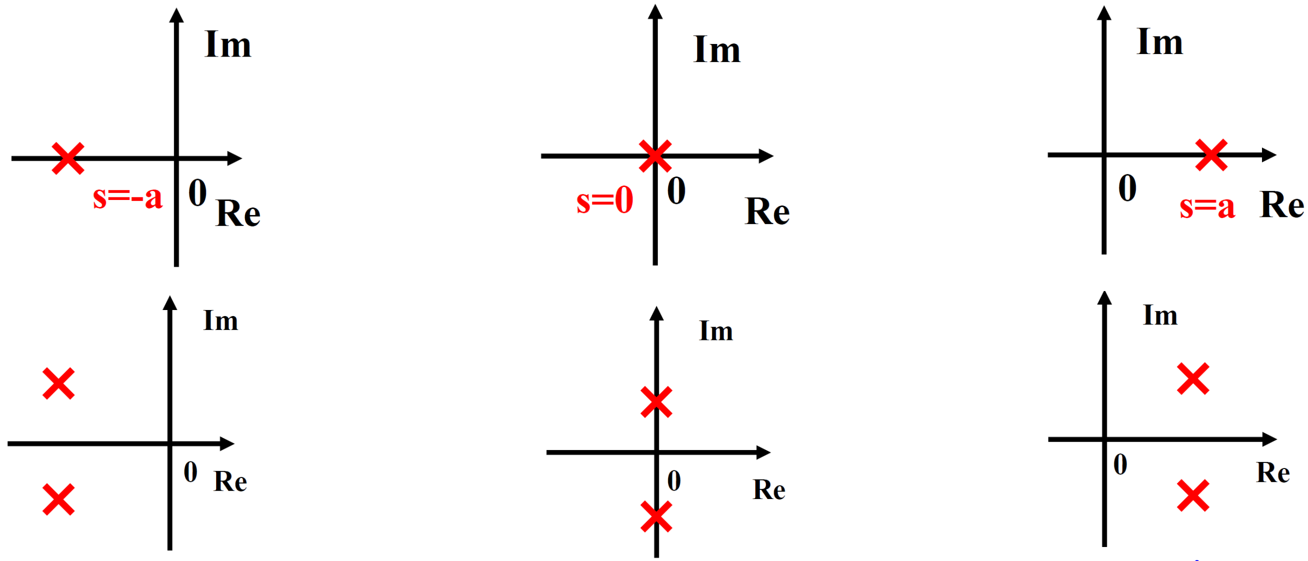


稳定　　临界稳定　　不稳定

复极点位置与单位脉冲响应曲线



线性系统稳定的充分必要条件



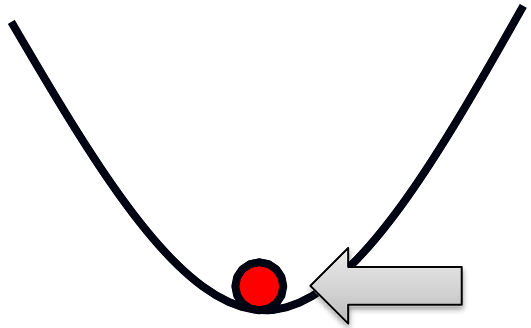
$s=-a\pm j\omega$　　$s=\pm j\omega$　　$s=a\pm j\omega$

稳定　　临界稳定　　不稳定

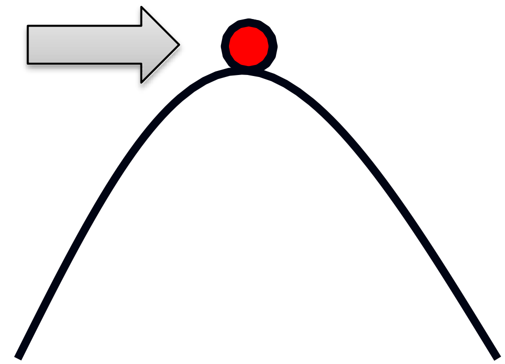
所有闭环极点的实部为负，或者说，所有闭环极点都位于s平面的左半平面。

小结

- 稳定性：



稳定的系统



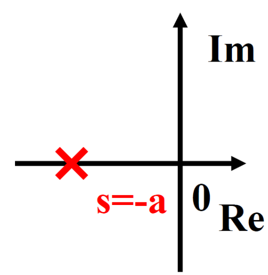
不稳定的系统

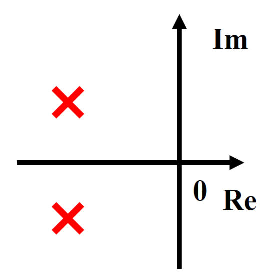
- 稳定性是系统的固有属性，只与系统自身有关
- 相对稳定性



相对稳定性　轮船 > 民航客机 > 战斗机

- BIBO稳定性
- 线性系统稳定的充分必要条件
  - 所有闭环极点的实部为负





内容安排

线性系统稳定的充分必要条件：

所有闭环极点的实部为负，或者说，所有闭环极点都位于s平面的左半平面。

输出是有界输入与单位脉冲响应的卷积（组合）。

↓

闭环传递函数的脉冲响应是否有界。

闭环传递函数的一般形式：

$$G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{l}(s-z_i)}{s^N\prod_{j=1}^{Q}(s+\sigma_j)\prod_{m=1}^{R}\left(s^2+2a_m s+(a_m^2+\omega_m^2)\right)}$$

$\boldsymbol{N=0, a_m\neq 0}$(虚轴上无极点)时，求出系统的闭环极点：

$$\boldsymbol{s_j=-\sigma_j} \qquad \boldsymbol{s_m=-a_m\pm j\omega_m}$$

脉冲响应的一般形式为：

$$y(t)=\sum_{j=1}^{Q}A_j e^{-\sigma_j t}+\sum_{m=1}^{R}B_m\left(\frac{1}{\omega_m}\right)e^{-a_m t}\sin(\omega_m t+\theta_m)$$

脉冲响应的一般形式为：

$$y(t)=\sum_{j=1}^{Q}A_j e^{-\sigma_j t}+\sum_{m=1}^{R}B_m(\frac{1}{\omega_m})e^{-a_m t}\sin(\omega_m t+\theta_m)$$

如果系统稳定，应有：$y(\infty)=0$

即：$\sigma_j>0$，$a_m>0$

$-\sigma_j$，$-a_m$为系统闭环极点的实部

所有极点的实部为负，则有界（稳定）。有一个非负，则无界（不稳定）。

$N=1$或只有单个$a_m=0$时，系统在原点处或虚轴上单重极点，脉冲响应通常有界，但对特定的输入产生共振效应，出现无界响应（临界稳定）。

以单重极点 $\pm j\omega$为例，脉冲响应为有限振荡，但当输入恰好为同频率谐波信号时，输出响应为：

$$\frac{\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(s-j\omega\right)^2}+\frac{1}{\left(s+j\omega\right)^2}\right)+\frac{1}{2\left(s^2+\omega^2\right)}$$

$$y_{part}\left(t\right)=-\frac{t}{4}\sin(\omega_m t)+\frac{1}{2\omega_m}\sin(\omega_m t)$$

N 大于 **1**，或系统在原点处（或虚轴上）有多重极点时，脉冲响应通常就已无界，对任意有界输入的响应无界（不稳定）。

以$\pm j\omega$为2重极点为例，

$$\frac{\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(s-j\omega\right)^2}+\frac{1}{\left(s+j\omega\right)^2}\right)+\frac{1}{2\left(s^2+\omega^2\right)}$$

则脉冲响应就已经无界！

$$y_{part}\left(t\right) = -\frac{t}{4}\sin(\omega_m t)+\frac{1}{2\omega_m}\sin(\omega_m t)$$

线性系统稳定的充分必要条件：

所有闭环极点的实部为负。

或：所有闭环极点都位于s平面的左半平面。

稳定 ——全部为左极点

不稳定 ——有右极点

临界稳定 ——无右极点，有“0极点”(虚轴上)

判定如下系统的稳定性

(1) $\mathbf{T(s)} = \dfrac{1}{s-1}$ 不稳定

(2) $\mathbf{T(s)} = \dfrac{1}{s^2+2s+2}$ 稳定

(3) $\mathbf{T(s)} = \dfrac{1}{s^2+2}$ 不稳定

求出系统的闭环特征方程的根（闭环极点）。

——最直接的方法

一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根：

$$x=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}+\sqrt{\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^2+\left(\frac{3ac-b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}-\sqrt{\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^2+\left(\frac{3ac-b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

五次及更高次的代数方程没有一般的代数解法。

（即这样的方程不能由方程的系数经有限次四则运算和开方运算求根）

——*阿贝尔定理*

内容安排

求解特征根是否必要？

充要条件：闭环特征方程的根全部具有**负实部**。

劳斯-赫尔维茨稳定性判据：

已知系统的闭环特征方程，不必求解特征根。

根据特征多项式的系数判别闭环系统的稳定性。

劳斯-赫尔维茨稳定性判据基于方程式的根与系数的关系

设系统的特征方程为

$$q(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$$

$$a_n\left(s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}\right)=0$$

设$s_1, s_2, \ldots$，s_n为系统的特征根，方程化为

$$a_n(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)=0$$

$$a_n\left[s^n-(s_1+s_2+\cdots+s_n)s^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_1 s_2\cdots s_n\right]=0$$

$$a_n\left(s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}\right)=0$$

$$a_n\left[s^n-(s_1+s_2+\cdots+s_n)s^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_1 s_2\cdots s_n\right]=0$$

$$\Downarrow$$

根与系数的关系

$$\begin{cases}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=-\left(s_1+s_2+\cdots+s_n\right)\\[2ex]\dfrac{a_{n-2}}{a_n}=+\left(s_1s_2+s_1s_3+\cdots+s_{n-1}s_n\right)\\[2ex]\dfrac{a_{n-3}}{a_n}=-\left(s_1s_2s_3+s_1s_2s_4+\cdots+s_{n-2}s_{n-1}s_n\right)\\[2ex]\cdots\cdots\cdots\\[2ex]\dfrac{a_0}{a_n}=(-1)^n\left(s_1s_2s_3\cdots s_{n-2}s_{n-1}s_n\right)\end{cases}$$

韦达定理

要使全部特征根均具有负实部，必须满足：

(1) 特征方程的各项系数 $a_i \neq 0$

$(i = 0，1，2，\ldots，n)$

(2) 特征方程的各项系数的符号都相同

a_n一般取正值，则上述两条件简化为 $a_i > 0$

——必要条件！不是充分条件！

例6.2 判断下列系统特征方程的稳定性：

$$q(s)=s^2-s+4=0$$ 不稳定

$$q(s)=s^3+2s^2+9=0$$ 不稳定

待定！

$$q(s)=s^3+3s^2+3s+1$$ 稳定

$$q(s)=s^3+s^2+2s+8$$ 不稳定

$$q(s)=(s+2)(s^2-s+4)=s^3+s^2+2s+8$$

- Routh（劳斯）
- 1877年

- Hurwitz（赫尔维茨）
- 1895年

劳斯-赫尔维茨稳定性判据（简称：劳斯判据）

$$q(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s + a_0 = 0$$

劳斯判定表

$$\begin{array}{c|ccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_{n-1} & &
\end{array}$$

劳斯-赫尔维茨稳定性判据：$q(s)$的正实部根的数目等于劳斯判定表首列中符号变化的次数。

闭环系统稳定的充要条件：

(1) 特征方程的各项系数$a_i > 0$

(i = 0，1，2，…，n)

(2) “劳斯判定表”中第一列所有项均为正

如果同时满足以上两个条件，则系统稳定。

且，实部为正的特征根数＝

劳斯判定表中第一列的系数符号改变的次数

——劳斯-赫尔维茨稳定性判据

$$q(s)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

劳斯判定表

$$\begin{array}{c|ccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_{n-1} & &
\end{array}$$

劳斯判定表的第一、第二行，直接由特征多项式系数间隔排列构成。

1) b_{n-1}的计算

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_{n-1} & &
\end{array}
$$

$$
b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}
= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}
$$

一撇减一捺，

除以左下角

2) b_{n-3}的计算

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
s^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}
s^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^0	h_{n-1}		

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

上一行首列元素始终为分母。上两行首列元素始终参与行列式运算，其他轮值。

3) 其它行的计算规律与b行相同，仅涉及该行的前两行

$$\begin{array}{c|ccc}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^{0} & h_{n-1} & &
\end{array}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

例6.3 二阶系统的特征方程如下，分析其稳定性。

$$q(s)=a_2s^2+a_1s+a_0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array} \Rightarrow \quad a_2, a_1, a_0 \text{ 具有相同符号}$$

例6.4 三阶系统的特征方程如下，分析其稳定性。

$$q(s)=a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array}$$

$$b_1=\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{a_2}=\frac{a_2a_1-a_3a_0}{a_2}$$

系数大于0的三阶系统稳定的充要条件是：

$$a_2a_1>a_3a_0$$

例6.5 判断如下5阶系统的稳定性

$$q(s)=s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & 0 & 6 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$b_4=\frac{-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}}{2}=0$$

$$b_2=\frac{-\begin{vmatrix}1 & 11\\ 2 & 10\end{vmatrix}}{2}=6$$

特殊情况1：首列中有1个元素为零

用无穷小正数 ε 代替 0，继续运算

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & c_2 & c_0 & \\
s^1 & & & \\
s^0 & & &
\end{array}
$$

$$c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \varepsilon & 6 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = 4 - \frac{12}{\varepsilon}$$

$$c_0 = \frac{-\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ \varepsilon & 0 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = 10$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & 4-\dfrac{12}{\varepsilon} & 10 & \\
s^1 & d_1 & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

$$
d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \varepsilon & 6 \\ 4-\dfrac{12}{\varepsilon} & 10 \end{vmatrix}}{4-\dfrac{12}{\varepsilon}} = -\frac{10\varepsilon^2 - 24\varepsilon + 72}{4\varepsilon - 12}
$$

令无穷小正数 ε 趋近于零，首列符号变化两次，系统不稳定。

特殊情况2：劳斯判定表中存在全零行

例6.6 判断如下 3 阶系统的稳定性

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + 8$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 8 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & & \end{array}$$

全 0 行的前一行多项式是$q(s)$的因子。

$$q(s)=s^3+2s^2+4s+8$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 4 \\
s^2 & 2 & 8 \\
s^1 & 0 & 0 \\
s^0 & &
\end{array}$$

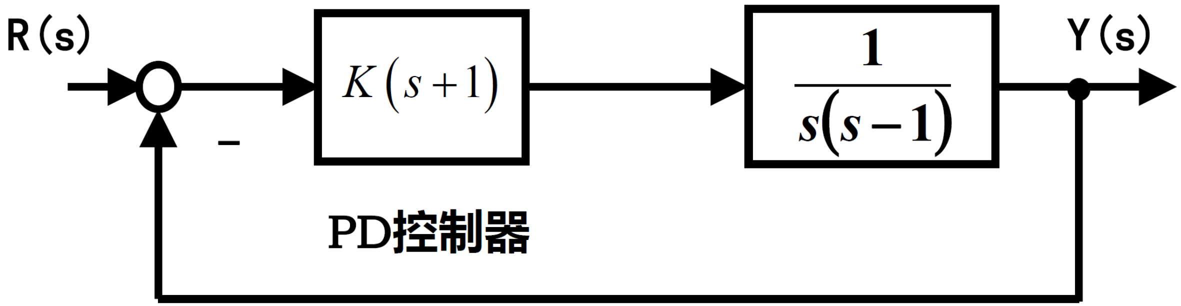
$$2s^2+8=2\left(s^2+4\right)$$

$$=2(s+j2)(s-j2)$$

全 0 行的情况下，系统不稳定

内容安排

例6.7 设计参数K的取值范围，以保证闭环系统稳定。



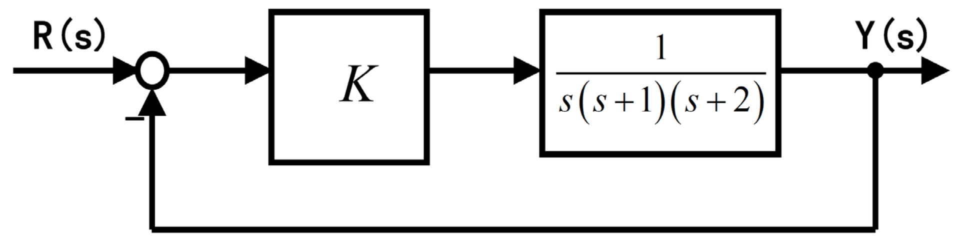
闭环传递函数：$T(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2+(K-1)s+K}$

根据二阶系统稳定的充要条件，

可知使系统稳定须满足$K-1>0$，$K>0$

故使系统稳定的 K 值范围为$K>1$

例6.8　设计参数 ***K*** 的取值范围，以保证闭环系统稳定。



闭环传递函数：$T(s) = \dfrac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s + K}$

列劳斯判定表

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
s^2 & \mathbf{3} & \mathbf{K} \\
s & \dfrac{6-K}{3} &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \frac{6-K}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 6
$$

例6.9 已知系统的特征方程为:

$$-0.025s^3-0.325s^2-s-k=0$$

(1)试确定使系统稳定的 k 的取值范围；

(2)如果要求特征根均位于 $s=-1$ 垂线左侧，问 k 的取值又应该如何调整?

解：

$$-0.025\boldsymbol{s}^{3}-0.325\boldsymbol{s}^{2}-\boldsymbol{s}-\boldsymbol{k}=0$$

列劳斯判定表可知，系统稳定要求：

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{k}>0\\ 0.325>0.025*\boldsymbol{k}\end{array}\right\}\Rightarrow 0<\boldsymbol{k}<13$$

如果要求特征值均位于垂线$s=-1$的左侧，问 k 的取值范围应该如何调整?（相对稳定性）

$$s^3+13s^2+40s+40k=0$$

令 $s_n=s+1$， $s_n=0$ 线就是 $s=-1$ 线。代入 $q(s)$得到新多项式，再用劳斯-赫尔维茨稳定性判据。

$$\left(s_n-1\right)^3+13\left(s_n-1\right)^2+40\left(s_n-1\right)+40k=0$$

$$\left(s_n-1\right)^3+13\left(s_n-1\right)^2+40\left(s_n-1\right)+40k=0$$

$$\Downarrow$$

$$s_n^3+10s_n^2+17s_n+\left(40k-28\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 40k-28>0 \\ 10*17>40k-28 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7<k<4.95$$