

# 09 拉普拉斯变换及其应用

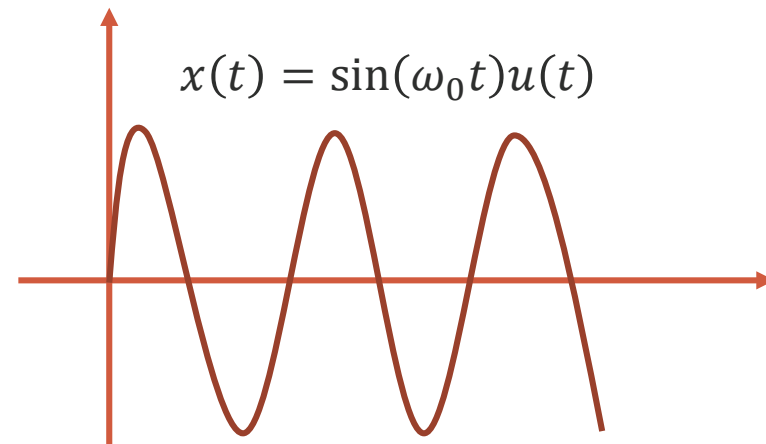
---

连续信号的复频域分析



# 傅里叶变换的计算

计算单边信号  $x(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$  的傅里叶变换



■ 已知

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

■ 利用频域卷积特性,

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{j\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

# 傅里叶变换的缺陷

## ■ 傅里叶变换的缺陷

### 表达信号受限制

$$x(t) = e^{at}u(t); a > 0,$$

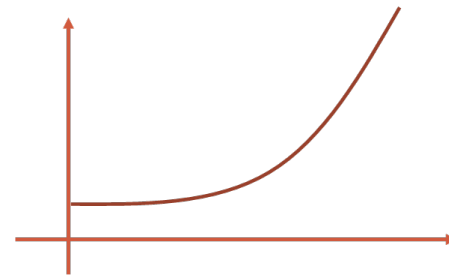
$X(j\omega)$ 不存在

### 变换形式相对复杂

$$x(t) = u(t),$$
$$x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$$

### 求解微分方程过程复杂

$$x(t) = e^{at}u(t); a > 0$$



### 分析系统有限制

## ■ 拉普拉斯变换的优势

### 求解微分方程步骤简化

将微分方程  
转换为代数方程

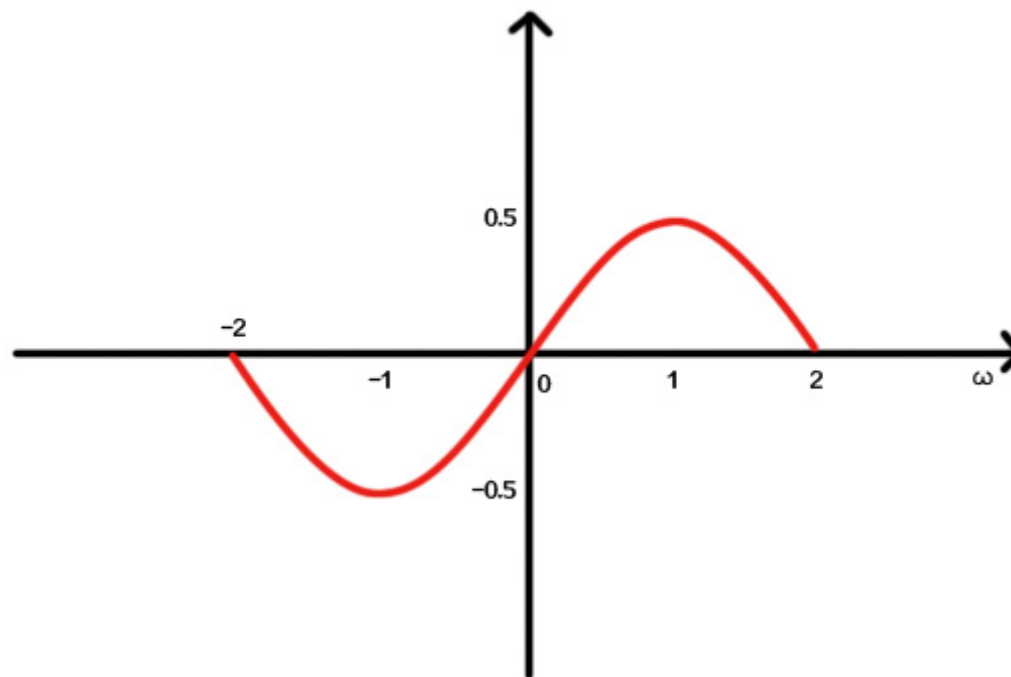
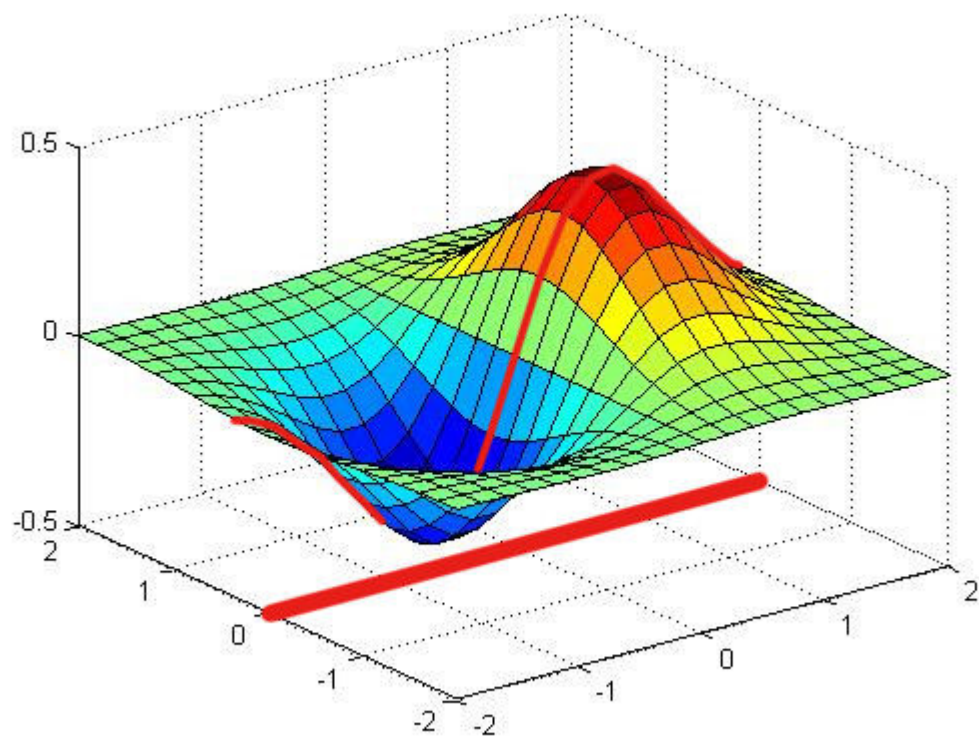
指数函数等有**不连续点**  
的函数可转换为简单的  
初等函数

时域中的卷积变换为  
复频域中的乘积，建立  
**系统函数**的概念

利用系统函数**零极点分**  
**布**可直观表达系统  
很多特性

# 拉普拉斯变换和傅里叶变换

- 拉普拉斯变换是傅里叶变换的一种扩展



# 概要

---

**1. 拉普拉斯变换：**  
对“频率 $\omega$ ”含义的扩充

**2. (单边)**  
**拉普拉斯变换的计算：**  
复频域的优势

**3. (单边)**  
**拉普拉斯变换的性质：**  
信号的复频域特性

**4. 拉普拉斯反变换：**  
部分分式展开

# 概要

---

**1. 拉普拉斯变换：**  
对“频率 $\omega$ ”含义的扩充

**2. (单边)**  
**拉普拉斯变换的计算：**  
信号的时域、频域抽样，  
抽样定理

**3. (单边)**  
**拉普拉斯变换的性质：**  
信号的复频域特性

**4. 拉普拉斯反变换：**  
部分分式展开

# 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 针对指数信号  $x(t) = e^{at}u(t)$ ;  $a > 0$ ; 不存在傅里叶变换

- 将  $x(t)$  乘以**衰减因子**  $e^{-\sigma t}$ , 满足绝对可积条件

$$\text{令 } s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a} \quad \text{若 } \sigma > a$$

- 针对一般信号

$$\text{令 } s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

- 由  $x(t)e^{-\sigma t}$  的傅里叶反变换可推出

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

# 拉普拉斯变换

- 拉普拉斯变换 (LT)

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- 拉普拉斯反变换 (逆变换)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

- 信号 $x(t)$ 可分解成复指数 $e^{st}$ 的线性组合，不同信号只是复指数 $e^{st}$ 前的系数 $X(s)$ 不同。 $X(s)$ 是复频率 $s$ 的函数，称**复频谱**。

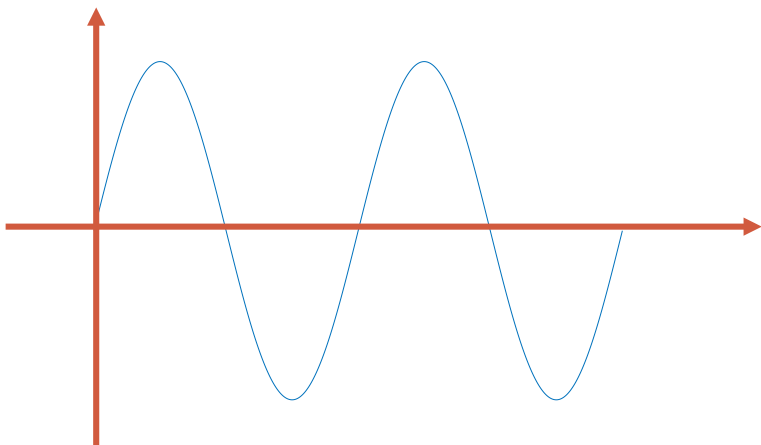


# 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

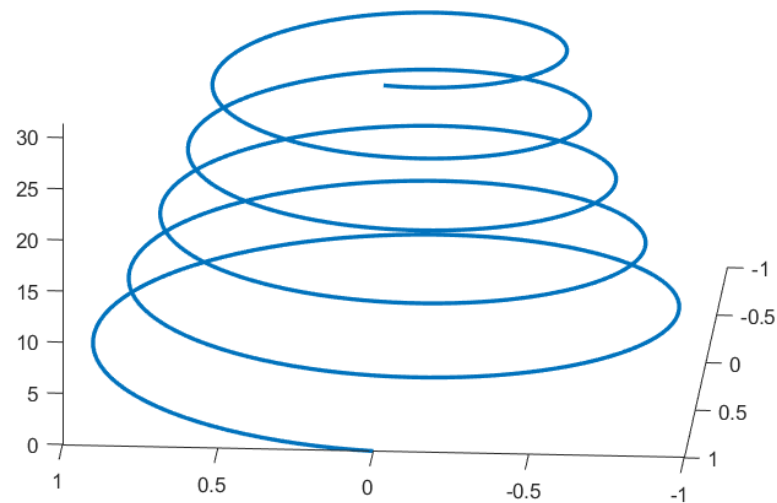
- FT为**实频域**，将信号分解为等幅振荡的频率分量
- LT将信号分解成幅度可变的复指数分量，针对**复频域**，物理含义不如FT，对信号的频谱分析还是要通过FT

实频域

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$



复频域



# 单边拉普拉斯变换

- 单边拉普拉斯正变换

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- 单边拉普拉斯反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

- 积分下限定义为零的左极限 $0_-$ ，目的在于 $s$ 域分析时能够有效地处理**出现在0时刻的冲激信号**。

# 单边拉普拉斯变换存在的条件

---

- 充分条件为：

- 绝对可积

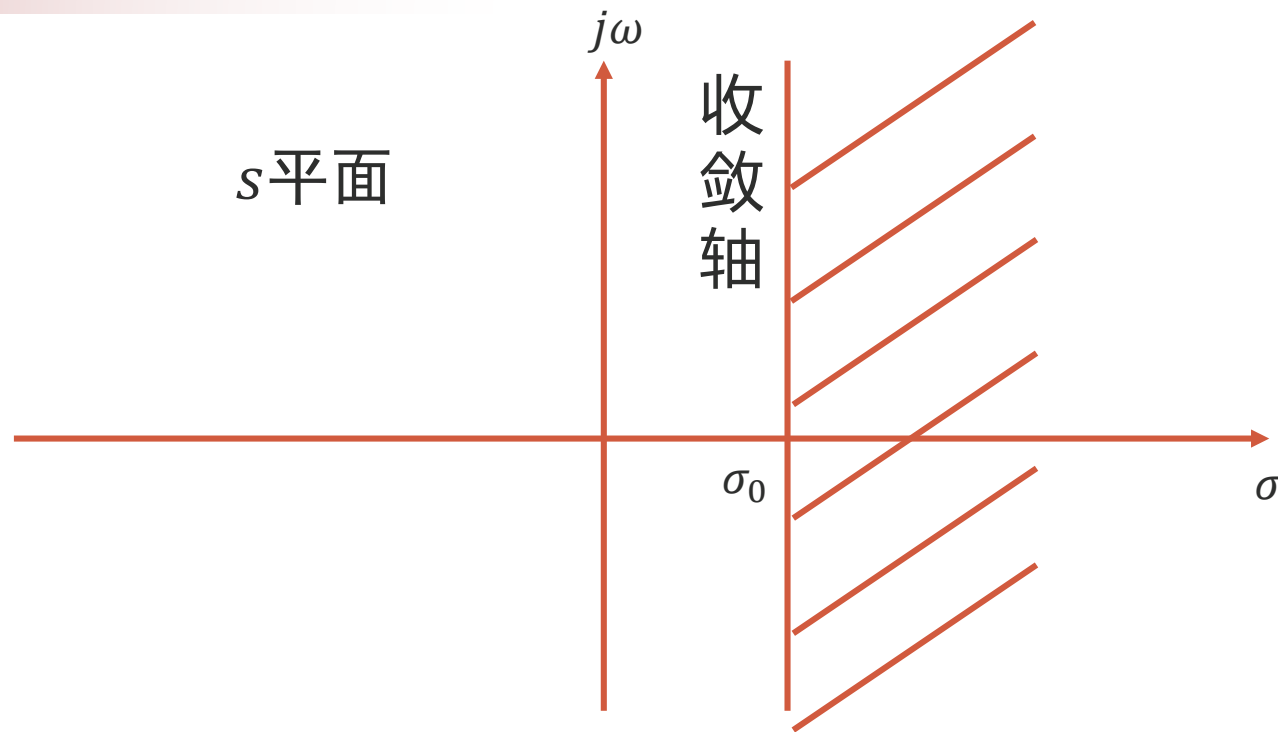
$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = C < \infty$$

- 对任意信号 $x(t)$ ，若满足上式，则 $x(t)$ 应满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\sigma t} = 0; \quad (\sigma > \sigma_0)$$

# 单边拉普拉斯变换及其存在的条件

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0; \quad (\sigma > \sigma_0)$ 
  - $\sigma > \sigma_0$  称收敛条件
  - $\sigma_0$  称绝对收敛坐标



- 有始有终、能量有限的信号（如冲激信号），收敛区为整个s平面。有界非周期信号LT一定存在

# 单边拉普拉斯变换及其存在的条件

---

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0; \quad (\sigma > 0)$$

- 随时间的幂成正比增长的信号，收敛坐标落于原点

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{-\sigma t} = 0; \quad (\sigma > a)$$

- 指数增长的信号，收敛坐标与 $a$ 有关
- 比指数增长的更快的函数，无法进行LT，如 $e^{t^2}$ 或 $te^{t^2}$ ，仅在**有限时间**范围内LT存在。

# 拉普拉斯变换收敛域

---

计算下列信号拉普拉斯变换的收敛域

(1)  $u(t) - u(t - \tau)$

收敛域为全s平面

(2)  $u(t)$

$$\sigma > 0$$

(3)  $e^{3t}u(t)$

$$\sigma > 3$$

(4)  $t^n u(t)$

$$\sigma > 0$$

(5)  $t^t, e^{t^2}$

不存在

# 拉普拉斯变换的发展历程



Leonhard Euler

瑞士数学家欧拉，1744 年研究  $\int X(x)e^{ax}dx$  形式的积分，用于求解微分方程



Joseph-Louis  
Lagrange

拉格朗日1773年对PDF做积分时研究  $\int X(x)e^{-ax}a^x dx$  形式的积分



Pierre-Simon  
Laplace

拉普拉斯1785年使用形如  $\int x^s \varphi(x) dx$  的变换对整个微分方程进行转换和求解，并研究其性质。1809年使用该变换求解空间任意形式的热扩散求解问题。



Oliver Heaviside

1850-1925，英国数学家。19世纪末，发明“运算法（算子法）”解决电气工程计算的基本问题。方法被广泛采用，但缺乏数学依据。



Gustav Doetsch

1892-1977，德国数学家，强调拉普拉斯变换的优势。

# 概要

---

1. 拉普拉斯变换：  
对“频率 $\omega$ ”含义的扩充

2. (单边)  
拉普拉斯变换的计算：  
复频域的优势

3. (单边)  
拉普拉斯变换的性质：  
信号的复频域特性

4. 拉普拉斯反变换：  
部分分式展开



# 常用信号的拉普拉斯变换

- 指数型函数 $e^{\lambda t}u(t)$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}u(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt = \frac{1}{s - \lambda}, \quad \sigma > \lambda$$

- 同理:

$$e^{-\lambda t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s + \lambda}, \quad \sigma > -\lambda$$

$$e^{-j\omega_0 t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \sigma > 0$$

$$e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - (\sigma_0 + j\omega_0)}, \quad \sigma > \sigma_0$$

# 常用信号的拉普拉斯变换

---

- 冲激信号

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \quad \sigma > -\infty$$

- 冲激信号出现在  $t = t_0$  ( $t_0 > 0$ ) 处

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}, \quad \sigma > -\infty$$

# 常用信号的拉普拉斯变换

---

- 阶跃函数 $u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{L}[e^{\lambda t} u(t)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{s - \lambda} = \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$$

或

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$$

# 单边拉普拉斯变换的计算

---

已知 $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$ , 计算其LT

- 利用定义

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st} dt$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} e^{-a}e^{-t(s+a)} dt = \frac{e^{-a}}{s+a}, \quad \sigma > -a$$

# 概要

---

1. 拉普拉斯变换：  
对“频率 $\omega$ ”含义的扩充

2. (单边)  
拉普拉斯变换的计算：  
信号的时域、频域抽样，  
抽样定理

3. (单边)  
拉普拉斯变换的性质

4. 拉普拉斯反变换：  
部分分式展开

# 单边拉普拉斯变换的性质

- 线性特性：若  $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s), \sigma > \sigma_1; x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s), \sigma > \sigma_2$ ，则

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$$

$$\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

- 单边拉普拉斯变换性质中收敛域的变化仅反映一般情况，信号变换后，对应的收敛域可能会变大

# 单边拉普拉斯变换的性质

---

已知 $x(t) = \delta(t) + e^t u(t)$ , 计算其LT

- 注意单边LT积分区域

$$X(s) = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}, \quad \sigma > 1$$

# 单边拉普拉斯变换的性质

$$e^{-j\omega_0 t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \sigma > 0$$

- 正弦信号

$$\cos \omega_0 t u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} u(t)$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sigma > 0$$

$$\sin \omega_0 t u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} u(t)$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sigma > 0$$



# 单边拉普拉斯变换的性质

- 展缩特性（尺度变换）：若  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \sigma > \sigma_0$ , 则

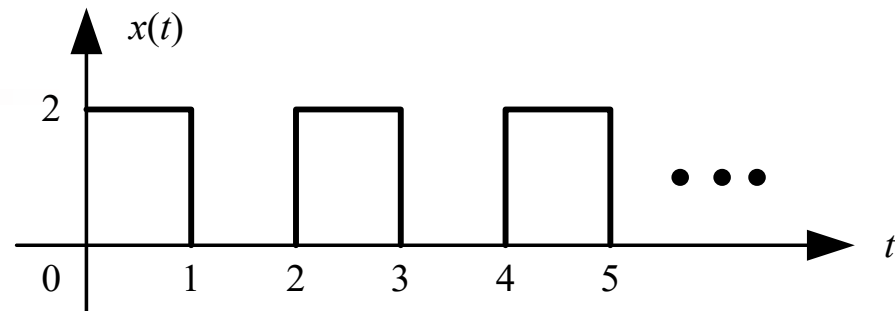
$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \sigma > a\sigma_0, \quad a > 0$$

- 时移特性：若  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \sigma > \sigma_0$ , 则

$$x(t - t_0)u(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s), \quad \sigma > \sigma_0, \quad t_0 > 0$$

# 拉普拉斯变换计算

求如图所示周期信号的单边LT



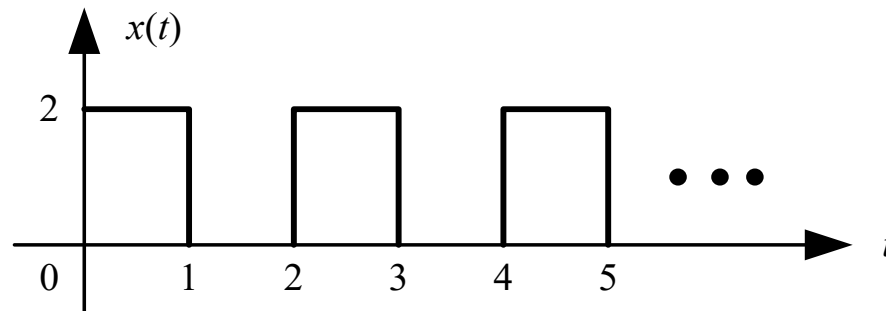
- 周期为 $T$ 的单边周期信号 $x(t)$ 可以表示为第一个周期信号 $x_1(t)$ 及其时移 $x_1(t - kT)$ 的线性组合，即

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(t - kT)$$

- 若计算出 $x_1(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_1(s)$ ，利用LT的**时移**特性和**线性**特性，即可求得单边周期信号的LT为

$$L[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} X_1(s) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}}, \sigma > 0$$

# 拉普拉斯变换计算



求如图所示周期信号的单边LT

$$x_1(t) = 2[u(t) - u(t - 1)]$$

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t - 2) + x_1(t - 4) + \dots$$

- 所以  $T = 2$ , 且

$$X_1(s) = L\{x_1(t)\} = \frac{2}{s}(1 - e^{-s}), \sigma > -\infty$$

- 代入

$$X(s) = X_1(s)(1 + e^{-2s} + e^{-4s} + \dots) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-2s}}, \quad \sigma > 0$$

# 单边拉普拉斯变换的性质

已知 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ , 若 $a > 0, b > 0$ , 求 $\mathcal{L}[x(at - b)u(at - b)]$

- 先进行时移

$$\mathcal{L}[x(t - b)u(t - b)] = X(s)e^{-bs}$$

后进行尺度变换

$$\mathcal{L}[x(at - b)u(at - b)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{bs}{a}}$$

# 单边拉普拉斯变换的性质

已知 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ , 若 $a > 0, b > 0$ , 求 $\mathcal{L}[x(at - b)u(at - b)]$

## ■ 先尺度变换

$$\mathcal{L}[x(at)u(at)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

再时移

$$\mathcal{L}[x(at - b)u(at - b)] = \mathcal{L}\left[x\left(a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right)u\left(a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right)\right] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{bs}{a}}$$

# 单边拉普拉斯变换的性质

- 卷积特性：若  $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s), \sigma > \sigma_1$ ;  $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s), \sigma > \sigma_2$ , 则

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)X_2(s)$$

$$\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

- 乘积特性：若  $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s), \sigma > \sigma_1$ ;  $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s), \sigma > \sigma_2$ , 则

$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} [X_1(s) * X_2(s)]$$

$$\sigma > \sigma_1 + \sigma_2$$

# 单边拉普拉斯变换的性质

- 乘积特性的特殊形式：
- 指数加权（ $s$ 域平移）：若  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \sigma > \sigma_0$ ，则

$$e^{-\lambda t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s + \lambda), \sigma > \sigma_0 - \lambda, \quad \lambda > 0$$

- 线性加权（ $s$ 域微分）：若  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \sigma > \sigma_0$ ，则

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}, \sigma > \sigma_0$$

# 单边拉普拉斯变换的性质

- 微分特性：若  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \sigma > \sigma_0$ , 则

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0_-), \sigma > \sigma_0$$

若  $x(0_-) = 0$ , 则  $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)$

- 高阶扩展

$$\frac{d^n x(t)}{d^n t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} x^{(r)}(0_-), \sigma > \sigma_0$$



# 单边拉普拉斯变换的性质

- 积分特性：若  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \sigma > \sigma_0$ , 则

$$x^{-1}(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} x(\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0_-)}{s}, \sigma > \max(\sigma_0, 0)$$

若  $x^{-1}(0_-) = 0$ , 则

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X(s)}{s}$$

# 拉普拉斯变换计算

求如图所示信号的单边拉普拉斯变换

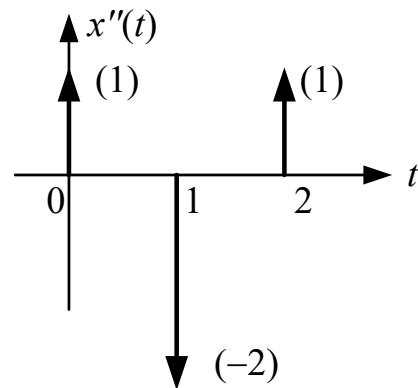
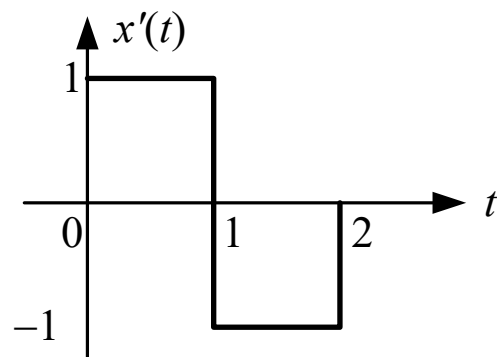
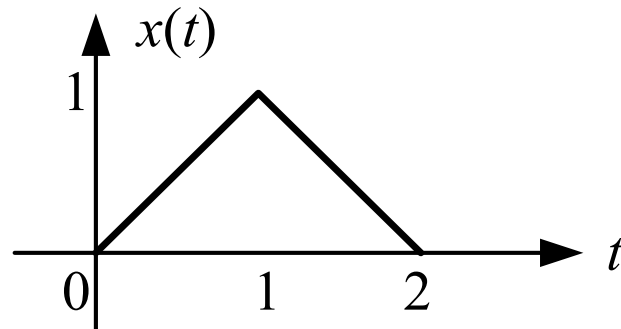
- 对 $x(t)$ 求导, 利用LT的微分特性, 可得

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^2 X(s) - sx(0_-) - x'(0_-)$$

因此

$$s^2 X(s) = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s}$$

$$X(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}, \sigma > -\infty$$



# 拉普拉斯变换计算

求如图所示信号的单边拉普拉斯变换

- 对 $x(t)$ 表达为 $x(t) = x_1(t) * x_1(t)$

$$x_1(t) = u(t) - u(t - 1)$$

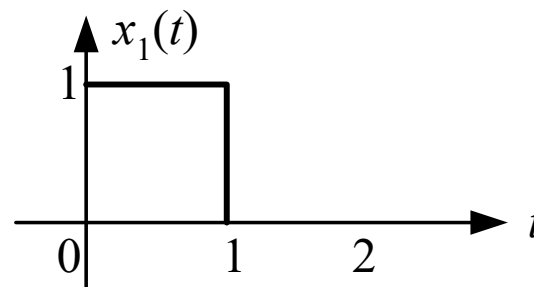
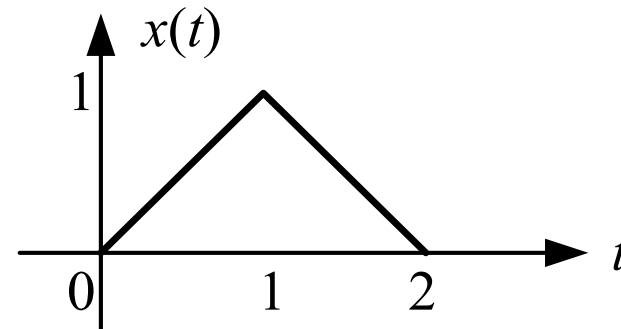
- 已知 $\mathcal{L}[u(t)] = 1/s$

- LT位移特性

$$X_1(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad \sigma > -\infty$$

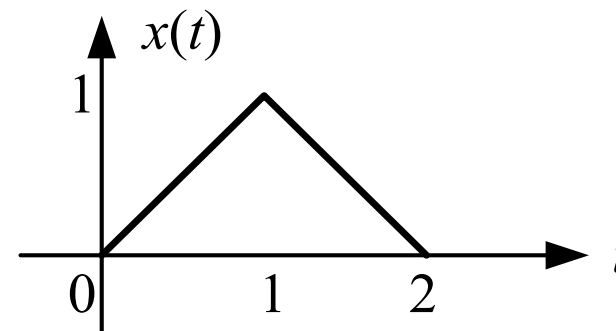
- 利用LT的卷积特性, 可得

$$X(s) = X_1(s) \cdot X_1(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^2, \quad \sigma > -\infty$$



# 拉普拉斯变换计算

求如图所示信号的单边拉普拉斯变换



- 将 $x(t)$ 用基本信号表达为

$$x(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$$

$$r(t) = tu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}$$

- 利用拉氏变换的位移特性和线性特性,可得

$$X(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}, \sigma > -\infty$$

# 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

- 当收敛域包含 $j\omega$ 轴时，拉普拉斯变换和傅里叶变换均存在

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

- 当收敛域不包含 $j\omega$ 轴时，拉普拉斯变换存在而傅里叶变换均不存在
- 当收敛域的收敛边界位于 $j\omega$ 轴时，拉普拉斯变换和傅里叶变换均存在（ $K_n$ 为系数）

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega} + \pi \sum_n K_n \delta(\omega - \omega_n)$$

# 拉普拉斯变换的计算

计算拉普拉斯变换和傅里叶变换

时域信号

傅里叶变换

拉普拉斯变换

$$e^{-3t}u(t)$$

$$\frac{1}{j\omega + 3}$$

$$\frac{1}{s + 3} \quad \sigma > -3$$

$$e^{3t}u(t)$$

不存在

$$\frac{1}{s - 3} \quad \sigma > 3$$

$$\cos 2t u(t)$$

$$\frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 4} + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]$$

$$\frac{s}{s^2 + 4} \quad \sigma > 0$$

# 拉普拉斯变换的计算

---

基于  $X(s) = \frac{s}{(s+4)^2}$   $\sigma > -4$ , 求  $X(j\omega)$

- 收敛域  $\sigma > -4$  包含  $j\omega$  轴

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{(j\omega + 4)^2}$$

# 拉普拉斯变换的计算

基于  $X(s) = \frac{1}{(s^2+9)s}$   $\sigma > 0$ , 求  $X(j\omega)$

- 收敛域的收敛边界位于  $j\omega$  轴

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega} + \pi \sum_n K_n \delta(\omega - \omega_n)$$

$$X(s) = -\frac{1}{18} \frac{1}{s-j3} - \frac{1}{18} \frac{1}{s+j3} + \frac{1}{9} \frac{1}{s}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega(9-\omega^2)} - \frac{\pi}{18} [\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)] + \frac{\pi}{9} \delta(\omega)$$



# 概要

---

1. 拉普拉斯变换：  
对“频率 $\omega$ ”含义的扩充

2. (单边)  
拉普拉斯变换的计算：  
复频域的优势

3. (单边)  
拉普拉斯变换的性质：  
信号的复频域特性

4. 拉普拉斯反变换：  
部分分式展开

# 单边拉普拉斯的反变换

---

- 单边拉普拉斯的反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

- 计算拉普拉斯反变换方法：
  - 利用复变函数中的留数定理
  - 采用**部分分式展开法**

# 单边拉普拉斯的反变换计算

- 对于LT的结果，一般可以表示为

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$
$$= \frac{b_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

零点  
极点

- $X(s)$ 为有理真分式( $m < n$ ), 极点为**一阶极点**

$p_1, \dots, p_n$ 互不相等

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n}$$

$$k_i = (s - p_i)X(s) \Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x(t) = (k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t})u(t)$$

# 单边拉普拉斯的反变换计算

采用部分分式展开法求 $X(s)$ 的反变换

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3+4s^2+3s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

- $X(s)$ 为有理真分式，极点为一阶极点

$$X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+3}$$

- 将上式两端同时乘以 $s$ 可得

$$sX(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = k_1 + \frac{sk_2}{s+1} + \frac{sk_3}{s+3}$$

- 令 $s=0$ ，上式右端只有 $k_1$ 项不等于零，所以

$$k_1 = sX(s)|_{s=0} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{2}{3}$$

# 单边拉普拉斯的反变换计算

采用部分分式展开法求 $X(s)$ 的反变换

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3+4s^2+3s} \quad \text{Re}(s) > 0$$

▪ 同理可求出

$$k_2 = (s+1)X(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s(s+3)} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$k_3 = (s+3)X(s) \Big|_{s=-3} = \frac{s+2}{s(s+1)} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

▪ 由此可得

$$X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{2/3}{s} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{-1/6}{s+3}$$

▪ 对上式进行拉氏反变换可得

$$x(t) = \frac{2}{3}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$

# 单边拉普拉斯的反变换计算

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

- $X(s)$  为有理假分式 ( $m \geq n$ )

真分式

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = B_0 + B_1s + \dots + B_{m-n}s^{m-n} + \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

- 利用以下结论辅助反变换

$$B_0 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} B_0\delta(t), \quad B_1s \xleftrightarrow{\mathcal{L}} B_1\delta'(t), \quad B_{m-n}s^{m-n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} B_{m-n}\delta^{(m-n)}(t)$$

# 单边拉普拉斯的反变换计算

采用部分分式展开法求 $X(s)$ 的反变换

$$X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s + 1)(s + 2)}$$

- 不满足真分式要求，先变换为

$$X(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = s + 2 + \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

- 最后一项为真分式，因此

$$x(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, t \geq 0$$

# 单边拉普拉斯的反变换计算

采用部分分式展开法求 $X(s)$ 的反变换

$$X(s) = \frac{s^4 - 13s^2 - 11s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s} \quad \text{Re}(s) > 0$$

- $X(s)$ 为有理假分式，将其化为有理真分式

$$X(s) = s - 4 + \frac{s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

- 可得

$$x(t) = \delta'(t) - 4\delta(t) + \frac{2}{3}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$



# 单边拉普拉斯的反变换计算

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- $X(s)$  为有理真分式 ( $m < n$ ), 极点为  $r$  重阶极点

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{k_1}{(s - p_1)^r} + \frac{k_2}{(s - p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{k_r}{s - p_1} + \frac{k_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} \end{aligned}$$

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s - p_1)^r X(s)]|_{s=p_1} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x(t) = \left[ \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{p_1 t} \right] u(t) + \sum_{i=r+1}^n k_i e^{p_i t} u(t)$$

# 单边拉普拉斯的反变换计算

采用部分分式展开法求 $X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$ ,  $\text{Re}(s) > 0$ 的反变换

- $X(s)$ 有一个3阶重极点

$$X(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+1)^3} + \frac{k_3}{(s+1)^2} + \frac{k_4}{s+1}$$

$$k_1 = sX(s) \Big|_{s=0} = \frac{s-2}{(s+1)^3} \Big|_{s=0} = -2$$

- 将①式两端同时乘以 $(s+1)^3$ 可得

$$(s+1)^3 X(s) = \frac{k_1(s+1)^3}{s} + k_2 + k_3(s+1) + k_4(s+1)^2$$

- 令 $s = -1$ , ②式右端只有 $k_2$ 项不等于零, 所以

$$k_2 = (s+1)^3 X(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s-2}{s} \Big|_{s=-1} = 3$$

①

②

# 单边拉普拉斯的反变换计算

采用部分分式展开法求 $X(s)$ 的反变换  $X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3} \quad \text{Re}(s) > 0$

$$(s+1)^3 X(s) = \frac{k_1(s+1)^3}{s} + k_2 + k_3(s+1) + k_4(s+1)^2 \quad \textcircled{2}$$

- 对②式求一阶导数，再令 $s = -1$ 可得

$$k_3 = \frac{d[(s+1)^3 X(s)]}{ds} \Big|_{s=-1} = \left( \frac{s-2}{s} \right)' \Big|_{s=-1} = 2$$

- 对②式求二阶导数，再令 $s = -1$ 可得

$$k_4 = \frac{1}{2} \frac{d^2[(s+1)^3 X(s)]}{ds^2} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{s-2}{s} \right)'' \Big|_{s=-1} = 2$$

# 单边拉普拉斯的反变换计算

$$X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3} \quad \text{Re}(s) > 0$$

采用部分分式展开法求 $X(s)$ 的反变换

- 整理可得

$$X(s) = \frac{-2}{s} + \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1}$$

- 因此

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = (-2 + \frac{3}{2}t^2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t})u(t)$$

# 拉普拉斯反变换计算

求下列 $X(s)$ 的反变换

$$(1) \quad X(s) = \frac{s^2 + 8}{(s + 4)^2}$$

- $X(s)$ 不是真分式，且有一个2阶重极点

$$X(s) = 1 + \frac{-8s - 8}{(s + 4)^2} = 1 + \frac{k_1}{(s + 4)^2} + \frac{k_2}{s + 4}$$

$$k_1 = (s + 4)^2 X(s) \Big|_{s=-4} = (-8s - 8) \Big|_{s=-4} = 24$$

$$k_2 = \frac{d}{ds} [(s + 4)^2 X(s)] \Big|_{s=-4} = (-8s - 8)' = -8$$

- 因此

$$x(t) = \delta(t) - 8e^{-4t}u(t) + 24te^{-4t}u(t)$$

# 拉普拉斯反变换计算

求下列 $X(s)$ 的反变换

$$(2) \quad X(s) = \frac{1}{3s^2(s^2 + 4)}$$

■  $X(s)$  有一个2阶重极点和一对**共轭**极点

■ 令 $s^2 = q$ , 则 $X(s) = \frac{1}{3q(q+4)} = \frac{1}{3} \left( \frac{k_1}{q} + \frac{k_2}{(q+4)} \right)$

$$k_1 = q \cdot \frac{1}{q(q+4)} \Big|_{q=0} = \frac{1}{4}; \quad k_2 = (q+4) \cdot \frac{1}{q(q+4)} \Big|_{q=-4} = -\frac{1}{4}$$

$$X(s) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4(s^2 + 4)} \right)$$

■ 因此

$$x(t) = \frac{1}{12} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) u(t)$$

# 拉普拉斯反变换计算

求  $X(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$  的反变换

- $X(s)$  不是有理分式，将其表示为

$$X(s) = \frac{X_1(s)}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)}$$

$X_2(s) = X_1 e^{-2s}$

- 将  $X_1(s)$  展开为

$$X_1(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2 + 4}$$
$$k_1 = \frac{1}{4} \quad k_2 = -\frac{1}{4} \quad k_3 = 0$$

- 可得

$$x_1(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)u(t); \quad x_2(t) = -\frac{1}{4}[1 - \cos 2(t-2)]u(t-2)$$

# 信号的复频域分析小结

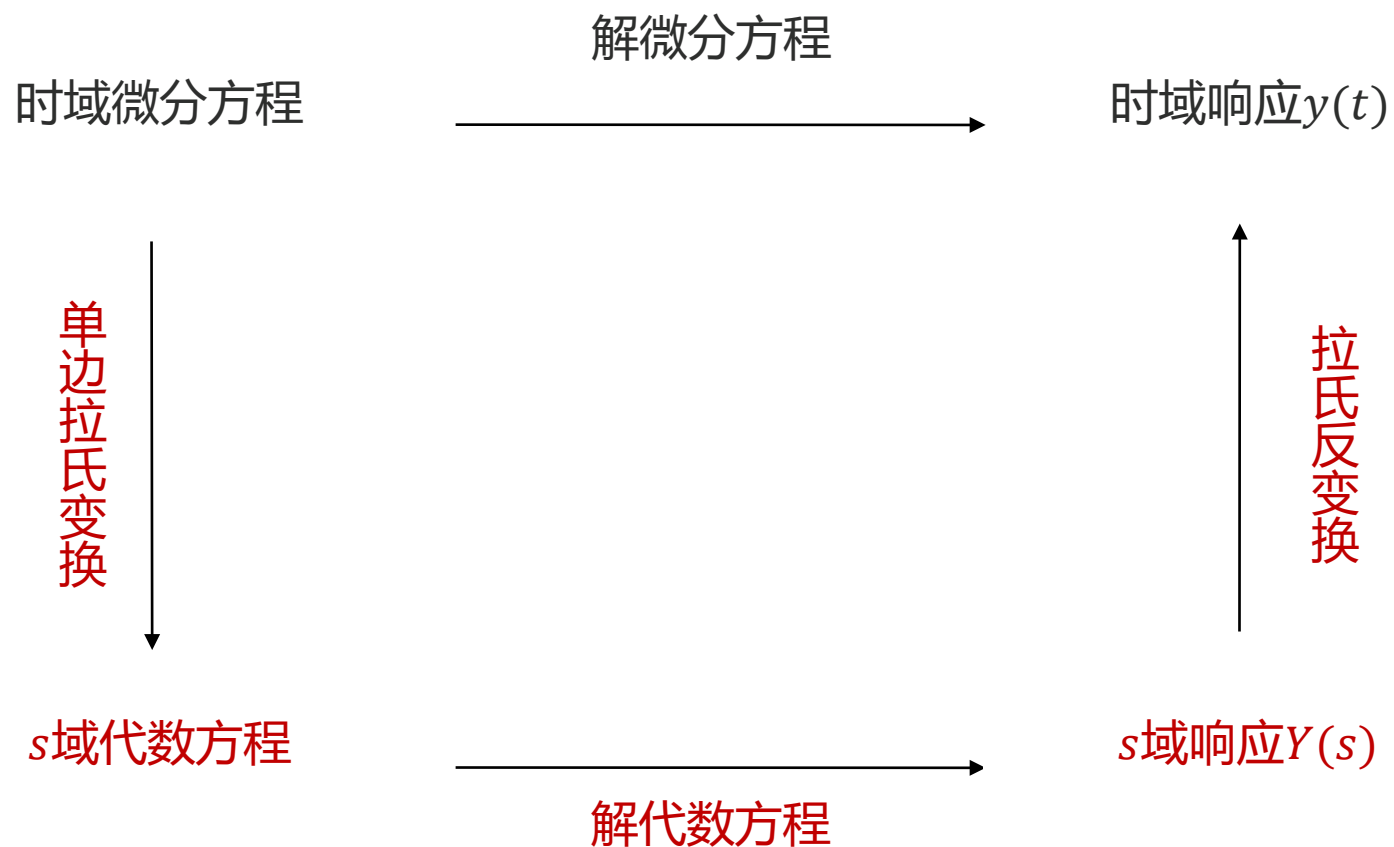
---

- 信号的复频域分析实质是将信号分解为复指数信号的线性组合，使用的数学工具是拉普拉斯变换
- 利用基本信号的复频谱和拉普拉斯变换的性质可对任意信号进行复频域分析
- 复频域分析主要用于线性系统的分析



# 微分方程描述系统的复频域分析

- 微分方程描述系统的复频域分析的流程



# 微分方程描述系统的复频域分析

- 二阶系统响应的 $s$ 域求解

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 x(t)$$

- 已知  $x(t)$ ,  $y(0_-)$ ,  $y'(0_-)$ , 求  $y(t)$ 。
- 求解步骤:
  - 经拉氏变换将时域微分方程变换为 $s$ 域代数方程
  - 求解 $s$ 域代数方程, 求出 $Y_{zi}(s)$ ,  $Y_{zs}(s)$
  - 拉氏反变换, 求出响应的时域表示式

# 微分方程描述系统的复频域分析

- 二阶系统响应的 $s$ 域求解

$$\begin{aligned} [s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)] + a_1 [sY(s) - y(0_-)] + a_2 Y(s) \\ \quad \quad \quad y''(t) \quad \quad \quad a_1 y'(t) \quad \quad \quad a_2 y(t) \\ = b_0 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_2 X(s) \quad \quad \quad b_0 x''(t) + b_1 x'(t) + b_2 x(t) \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{sy(0_-) + y'(0_-) + a_1 y(0_-)}{s^2 + a_1 s + a_2} Y_{zi}(s) + \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} X(s) Y_{zs}(s)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)\}$$

# 微分方程描述系统的复频域分析

系统的微分方程为  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + 8x(t)$ , 激励  $x(t) = e^{-t}u(t)$ , 初始状态  $y(0_-) = 3$ ,  $y'(0_-) = 2$ , 求响应  $y(t)$ 。

- 对微分方程进行单边LT可得

$$s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) + 5[sY(s) - y(0_-)] + 6Y(s) = 2sX(s) + 8X(s)$$

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s) = \frac{(s+5)y(0_-) + y'(0_-)}{(s^2 + 5s + 6)} + \frac{2s+8}{s^2 + 5s + 6}X(s)$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{3s+17}{s^2 + 5s + 6} = \frac{11}{s+2} - \frac{8}{s+3}$$

$$y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{zi}(s)] = 11e^{-2t} - 8e^{-3t}, t \geq 0$$

# 微分方程描述系统的复频域分析

系统的微分方程为  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + 8x(t)$ , 激励  $x(t) = e^{-t}u(t)$ , 初始状态  $y(0_-) = 3$ ,  $y'(0_-) = 2$ , 求响应  $y(t)$ 。

- 对微分方程进行单边LT可得

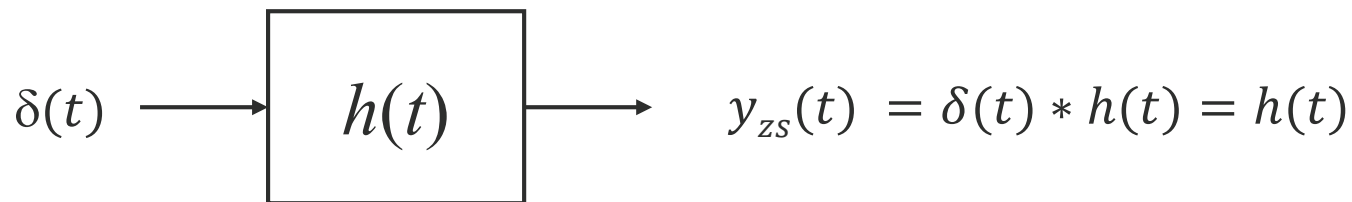
$$Y_{zs}(s) = \frac{2s + 8}{s^2 + 5s + 6} \cdot \frac{1}{s + 1} = \frac{2s + 8}{(s + 2)(s + 3)} \cdot \frac{1}{s + 1}$$
$$= \frac{3}{s + 1} - \frac{4}{s + 2} + \frac{1}{(s + 3)}$$

- 因此  $y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{zs}(s)\} = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t}) \cdot u(t)$
- 综上:  $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = 3e^{-t} + 7e^{-2t} - 7e^{-3t}, t \geq 0$

# 系统函数

- 系统在零状态（起始条件为0）条件下，输出的LT与输入的LT之比，记为 $H(s)$ 。

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[y_{zs}(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]} = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}$$



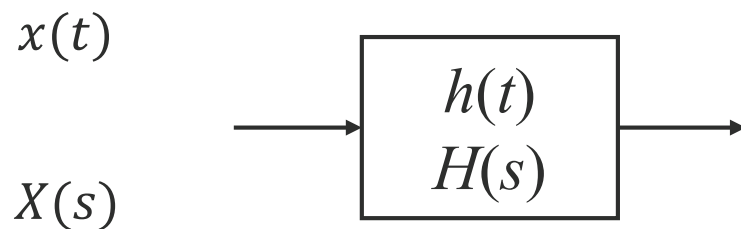
- $H(s)$ 与 $h(t)$ 的关系

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[y_{zs}(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]} = \frac{\mathcal{L}[h(t)]}{1} = \mathcal{L}[h(t)]$$

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] \qquad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

# 系统函数

- 求零状态响应



$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s)$$

- 求 $H(s)$ 的方法

- 由系统的冲激响应求解:  $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$

- 由定义式

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[y_{zs}(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]}$$

- 由系统的微分方程写出 $H(s)$

# 系统函数

已知LTI连续时间系统满足的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3x(t) + 2x'(t), \quad t \geq 0$$

试求该系统的系统函数 $H(s)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

- 对微分方程两边进行LT

$$(s^2 + 3s + 2)Y_{zs}(s) = (2s + 3)X(s)$$

- 根据系统函数的定义可得

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}$$

- 进行LT反变换, 可得

$$h(t) = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$



# 系统函数

---

求零初始状态的理想**积分**器的系统函数 $H(s)$

- 具有零初始状态的理想积分器的输入输出关系为

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

- 两边取LT, 可得

$$Y(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

- 根据系统函数的定义可得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$$

# 系统函数

---

求零初始状态的理想**微分**器的系统函数 $H(s)$

- 具有零初始状态的理想积分器的输入输出关系为

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- 由于

$$h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

- 两边取LT，根据系统函数的定义可得

$$H(s) = s - \delta(0^-) = s$$

# 零极点与时域特性

- $H(s)$ 的零极点分布与 $h(t)$ 的波形特征相对应

- 零极点分布图

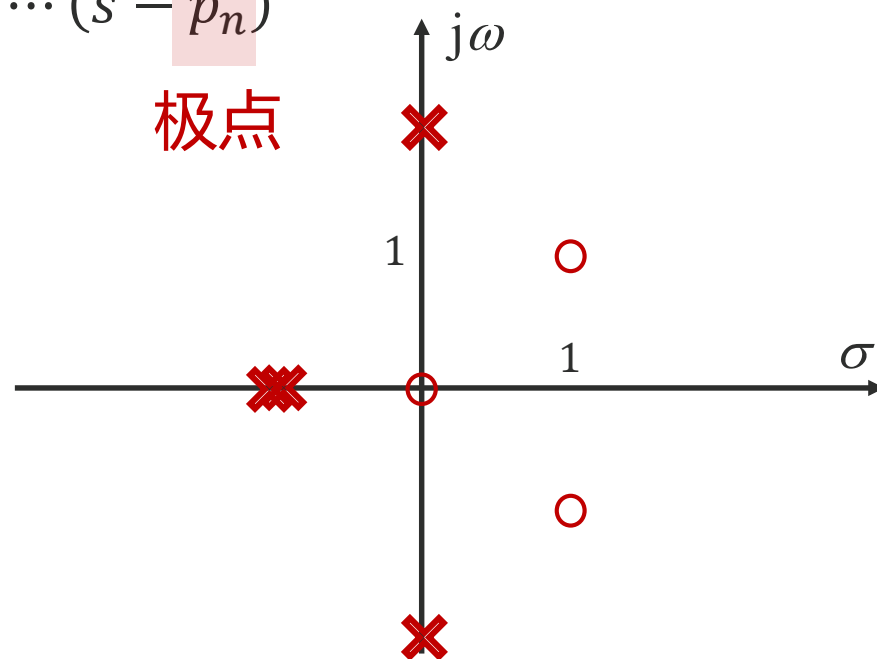
零点

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

极点

- 若

$$H(s) = \frac{s(s-1+j)(s-1-j)}{(s+1)^2(s+2j)(s-2j)}$$



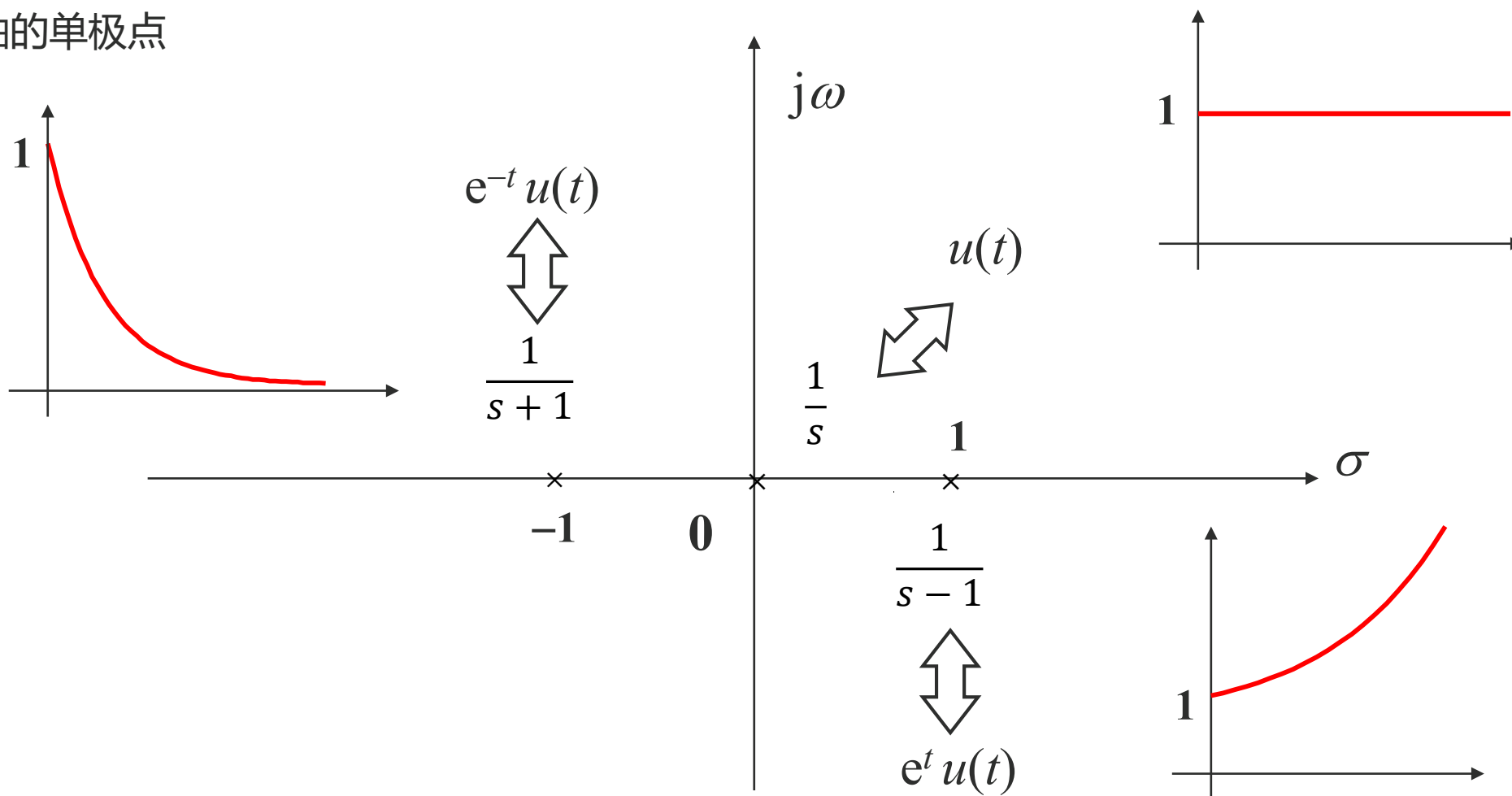
零极点分布图

- 一阶极点:  $2j, -2j$
- 二阶极点:  $-1$
- 一阶零点:  $0, 1 + j, 1 - j, \infty$

# 零极点与时域特性

- $H(s)$ 与 $h(t)$ 的关系

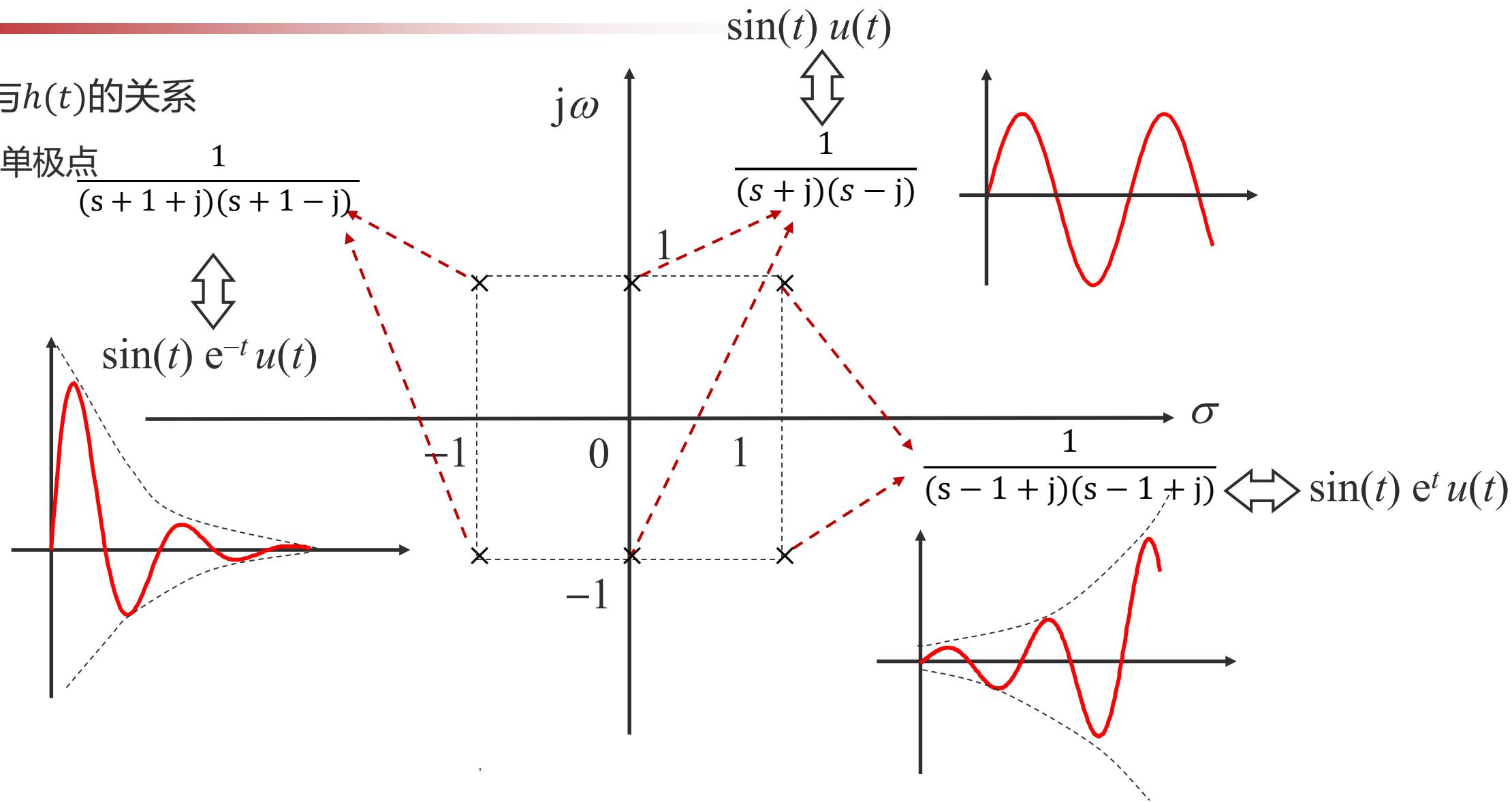
- 位于 $s$ 轴的单极点



# 零极点与时域特性

- $H(s)$ 与 $h(t)$ 的关系

- 共轭单极点



# 系统函数与系统稳定性

---

- 连续时间LTI系统BIBO稳定的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = S < \infty$$

- 因果系统在 $s$ 域有界输入有界输出(BIBO)的充要条件是系统函数 $H(s)$ 的全部**极点**位于**左半 $s$ 平面**。

# 系统函数与系统稳定性

判断下述系统是否稳定

$$H_1(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}, \operatorname{Re}(s) > -1$$

- 极点为 $s = -1$ 和 $s = -2$ ，都在 $s$ 左半平面。系统稳定

$$H_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$$

- 极点为 $s = \pm j\omega_0$ ，是虚轴上的一对共轭极点。系统不稳定。

# 拉普拉斯变换的应用

---

- 已知一连续时间LTI系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$$

已知 $x(t) = u(t)$ ，由 $s$ 域求解：

- 该系统的系统函数 $H(s)$ 并画出零极点分布图
- 写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应 $h(t)$
- 判断系统是否因果稳定



# 拉普拉斯变换的应用

- 已知一连续时间LTI系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$$

已知 $x(t) = u(t)$ ，由 $s$ 域求解：

- 该系统的系统函数 $H(s)$ 并画出零极点分布图
- 零状态响应和激励信号的拉氏变换分别为

$$Y_{zs}(s) = \frac{0.5}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1.5}{s+2} = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0$$

- 根据系统函数的定义，可得

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} \quad \text{Re}(s) > -1$$

# 拉普拉斯变换的应用

- 已知一连续时间LTI系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$$

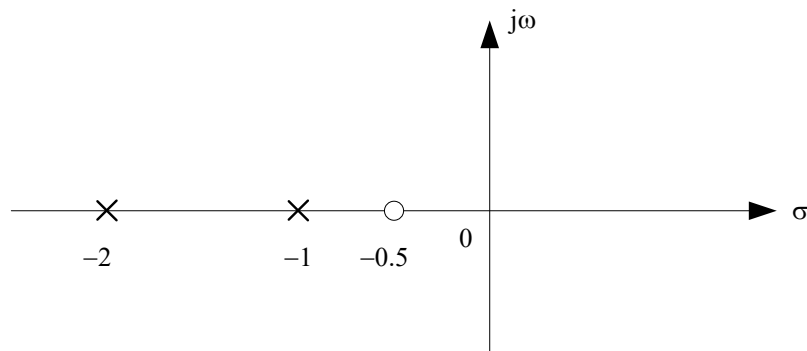
已知 $x(t) = u(t)$ ，由 $s$ 域求解：

- 该系统的系统函数 $H(s)$ 并画出零极点分布图

- 系统函数

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{Re}(s) > -1$$

- 该系统的零点 $z = -0.5$ 为，极点为 $p_1 = -1, p_2 = -2$



# 拉普拉斯变换的应用

- 已知一连续时间LTI系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$$

已知 $x(t) = u(t)$ ，由 $s$ 域求解：

- 写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应 $h(t)$

- 系统函数
$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{Re}(s) > -1$$

- 系统微分方程的 $s$ 域表达式

$$(s^2 + 3s + 2)Y_{zs}(s) = (2s + 1)X(s)$$

- 两边进行拉氏反变换，可得描述系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$$

# 拉普拉斯变换的应用

- 已知一连续时间LTI系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$$

已知 $x(t) = u(t)$ ，由 $s$ 域求解：

- 写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应 $h(t)$
- 将系统函数进行部分分式展开，有

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-1}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}$$

- 再进行拉氏反变换，可得系统冲激响应为

$$h(t) = (-e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

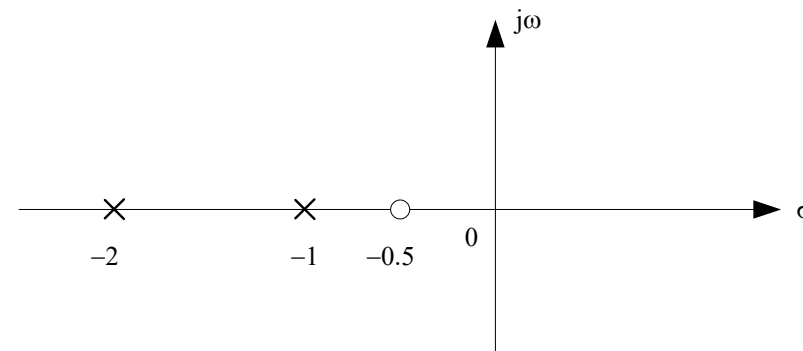
# 拉普拉斯变换的应用

- 已知一连续时间LTI系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})$$

已知 $x(t) = u(t)$ ，由 $s$ 域求解：

- 判断系统是否因果稳定
- 系统函数



$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-1}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}$$

- 系统冲激响应 $h(t) = (-e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$ ，满足 $h(t) = 0, t < 0$ ；故该系统为因果系统
- 对因果系统，由零极点分布图可看出，系统的极点位于 $s$ 左半平面，故该系统稳定