Solution for Problem Set 12

201300035 方盛俊

Problem 1

(a)

	z.dist	z.parent	x.dist	x.parent	s.dist	s.parent	t.dist	t.parent	y.dist	y.parent
pass 1	0	NIL	9	z	2	z	8	s	9	s
pass 2	0	NIL	6	y	2	z	7	x	9	s
pass 3	0	NIL	6	y	2	z	4	x	9	s
pass 4	0	NIL	6	y	2	z	4	x	9	s

(b)

	r.dist	r.prnt	s.dist	s.prnt	t.dist	t.prnt	x.dist	x.prnt	y.dist	y.prnt	z.dist	z.prnt
iter 1	0	NIL	5	r	8	r	INF	NIL	INF	NIL	INF	NIL
iter 2	0	NIL	5	r	7	s	11	s	INF	NIL	INF	NIL
iter 3	0	NIL	5	r	7	s	11	s	11	t	9	t
iter 4	0	NIL	5	r	7	s	11	s	10	x	9	t
iter 5	0	NIL	5	r	7	s	11	s	10	x	8	y
iter 6	0	NIL	5	r	7	s	11	s	10	x	8	y

Problem 2

(a)

开始:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	INF	INF	INF	-1	INF
v2	1	0	INF	2	INF	INF
v3	INF	2	0	INF	INF	-8
v4	-3	INF	INF	0	3	INF
v5	INF	7	INF	INF	0	INF

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v6	INF	5	12	INF	INF	0

第 1 次外层循环后:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	INF	INF	INF	-1	INF
v2	1	0	INF	2	0	INF
v3	INF	2	0	INF	INF	-8
v4	-3	INF	INF	0	-4	INF
v5	INF	7	INF	INF	0	INF
v6	INF	5	12	INF	INF	0

第 2 次外层循环后:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	INF	INF	INF	-1	INF
v2	1	0	INF	2	0	INF
v3	3	2	0	4	2	-8
v4	-3	INF	INF	0	-4	INF
v5	8	7	INF	9	0	INF
v6	6	5	12	7	5	0

第 3 次外层循环后:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	INF	INF	INF	-1	INF
v2	1	0	INF	2	0	INF
v3	3	2	0	4	2	-8
v4	-3	INF	INF	0	-4	INF
v5	8	7	INF	9	0	INF
v6	6	5	12	7	5	0

第 4 次外层循环后:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	INF	INF	INF	-1	INF
v2	-1	0	INF	2	-2	INF
v3	1	2	0	4	0	-8
v4	-3	INF	INF	0	-4	INF
v5	6	7	INF	9	0	INF

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v6	4	5	12	7	3	0

第 5 次外层循环后:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	6	INF	8	-1	INF
v2	-1	0	INF	2	-2	INF
v3	1	2	0	4	0	-8
v4	-3	3	INF	0	-4	INF
v5	6	7	INF	9	0	INF
v6	4	5	12	7	3	0

第 6 次外层循环后:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	6	INF	8	-1	INF
v2	-1	0	INF	2	-2	INF
v3	-4	-3	0	-1	-5	-8
v4	-3	3	INF	0	-4	INF
v5	6	7	INF	9	0	INF
v6	4	5	12	7	3	0

(b)

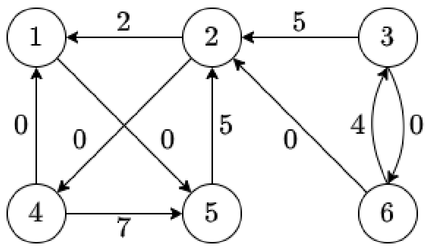
所有节点之间的最短路径距离值:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	6	INF	8	-1	INF
v2	-1	0	INF	2	-2	INF
v3	-4	-3	0	-1	-5	-8
v4	-3	3	INF	0	-4	INF
v5	6	7	INF	9	0	INF
v6	4	5	12	7	3	0

每个节点的 h 值:

	z	v1	v2	v3	v4	v5	v6
h	0	-4	-3	0	-1	-5	-8

因此更新的边权重为:



Problem 3

(a)

定义 `v.paths` 为以 `v` 为终止顶点的所有路径数目, 并定义 `v.parents` 为以 `v` 终止的所有边的另一个顶点的集合.

我们知道, 对于 `v` 顶点来说, 以它为终止顶点的所有路径, 应该是以它为终止的所有边数, 加上 `v.parents` 每个元素的 `v.parent.paths` 的和.

同时, 我们使用 `v.paths` 来进行动态规划 (记答案).

```python
# 1. 找出唯一的 source s 和 sink t
s, t = (None, None)
for u in graph.vertices:
    # 初始化 is_source 和 is_sink
    u.is_source = True
    u.is_sink = True
    # 初始化 paths 和 parents
    # paths 还可以用来记答案
    u.paths = None
    u.parents = []
for (u, v) in graph.edges:
    # 设定 is_sink 和 is_source
    u.is_sink = False
    v.is_source = False
    # 顺便设定 v.parents
    v.parents.append(u)
for u in graph.vertices:
    # 找出 source 和 sink
    if u.is_source:
        s = u
    if u.is_sink:
        t = u

# 使用 sum 保存所有路径数
sum = 0

# 2. 从 t 开始, 动态规划与递归地获取 paths
def calculate_paths(u):
    if u.paths != None:
        # 已经计算过了, 直接返回
        return u.paths
    elif u.parents == []:
        # parents 为空, 即为 source, 没有 parents, 返回 0 即可
        return 0
    else:
        # 主要的调用与计算
        # 对 parents 的 paths 求和, 更新 paths, 记录答案
        u.paths = sum([calculate_paths(v) + 1 for v in u.parents])
        # 通过 sum 记录一下, 每个 paths 不为空的顶点只会记录一次
        sum += u.paths
        # 然后返回
        return u.paths

calculate_paths(t)

# 输出 sum, 即所有路径的总数
print(sum)
```

时间复杂度:

因为 1. 可以很简单地看出, 三个循环分别遍历了顶点, 边, 顶点, 因此时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$; 而 2. 虽然是递归的, 但是每一个顶点最多只会进行一次主要的调用与计算, 而且每个顶点对应的 `parents` 的个数和即是边数总和, 因此时间复杂度也是 $O(|V|+|E|)$.

因此总的时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$.

(b)

理同 (a), 我们定义 `v.start_time` 为最早的开始时间.

```python
# 1. 找出唯一的 source s 和 sink t
s, t = (None, None)
for u in graph.vertices:
    # 初始化 is_source 和 is_sink
    u.is_source = True
    u.is_sink = True
    # 初始化 start_time 和 parents
    # paths 还可以用来记答案
    u.paths = None
    u.parents = []
for (u, v) in graph.edges:
    # 设定 is_sink 和 is_source
    u.is_sink = False
    v.is_source = False
    # 顺便设定 v.parents
    v.parents.append(u)
for u in graph.vertices:
    # 找出 source 和 sink
    if u.is_source:
        s = u
    if u.is_sink:
        t = u

# 2. 从 t 开始, 动态规划与递归地获取 start_time
def calculate_start_time(u):
    if u.start_time != None:
        # 已经计算过了, 直接返回
        return u.start_time
    elif u.parents == []:
        # parents 为空, 即为 source, 没有 parents, 返回 0 即可
        return 0
    else:
        # 主要的调用与计算
        # 对 parents 的 start_time 加上顶点权重 (持续时间) 得出结束时间,
        # 求最大值, 更新 start_time, 记录答案
        u.start_time = max([calculate_start_time(v) + w(v) for v in u.parents])
        # 然后返回
        return u.start_time

calculate_start_time(t)

# 输出 graph
print(graph)
```

(c)

我们只需要将每一条边的方向逆转, 要求的最晚开始时间就变为 "结束时间", 即 "开始时间" + "持续时间" (当然, 要用总时间减去这个值).

```python
# 1. 复制一份图, 并将边方向全部逆转
graph_reversed = copy_graph_and_reverse_all_edges(graph)

# 2. 使用 (b) 中的算法计算逆转图的所有开始时间, 并返回总时间
total_time = calculate_start_time_with_graph(graph_reversed)

# 3. 对原来的图的每一个节点, 根据其匹配的节点, 计算最终最迟开始时间
for u, u_reversed in zip(graph.vertices, graph_reversed.vertices):
    u.latest_start_time = total_time - (u_reversed.start_time + w(u_reversed))

# 输出 graph
print(graph)
```

可以看出, 1. 的时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$, 2. 的时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$, 3. 的时间复杂度为 $O(|V|)$, 因此总的时间复杂度仍然为 $O(|V|+|E|)$.

Problem 4

因为题目给出所有边的权重均为负数, 我们仅仅需要判断有没有环, 就能判断有没有负环.

我们可以使用 DFS 算法来计算出所有的 SCC, 我们可以认为, 超过一个节点的 SCC 就形成了环, SCC 内部节点之间均为 $-\infty$, 然后可以使用拓扑排序后的 Component Graph 进行 DAG-APSP, 进行相应处理即可.

伪代码:

```
# 一个用来保存距离的全局字典
dist = {}

# 1. 初始化每个点对之间的距离为正无穷
for u in graph.vertices:
    dist[u] = +infty

# 给 s 自身 dist 设为 0
dist[s] = 0

# 2. 通过 DFS 计算出 SCC, 并获取 component_graph
component_graph = computing_scc_by_dfs(graph)

# 3. 找出 s 所在的 scc, 可以通过 DFS 搜索
base_scc = search_scc_for_node(s)

# 4. 如果 base_scc 多于一个顶点, 那就直接从 s 开始 dfs,
#    把所有可以到达的点的距离全设为 -infty
if len(base_scc) > 1:
    dfs_and_set_all_dist_negative_infty(s)
else:
    # 5. 否则就对 component_graph 这个 DAG 图进行拓扑排序
    component_graph = topological_sort(component_graph)

    # 6. 进行 DAG-SSSP 处理
    for scc in component_graph.vertices.begin_with(base_scc):
        if len(scc.vertices) == 1:
            # 如果 SCC 中顶点数唯一, 说明没有形成负环, 可以照常处理
            for (scc, aft_scc) in component_graph.edges:
                if len(aft_scc) == 1:
                    # 如果 aft_scc 也只有一个顶点, 则是正常情况, 进行更新
                    if dist[aft_scc] > dist[scc] + w(scc, aft_scc):
                        dist[aft_scc] = dist[scc] + w(scc, aft_scc)
                else:
                    # 不然 aft_scc 就形成了负环, 直接设为 -infty,
                    # 且只有当 base_scc 与 scc 连通时才更新
                    if dist[scc] != +infty:
                        for v in aft_scc.vertices:
                            dist[v] = -infty
        else:
            # 如果 SCC 中顶点数不唯一, 说明形成负环, 要给对应路径全设为 -infty
            for (scc, aft_scc) in component_graph.edges:
                # 并且连通, 则设为负无穷
                if dist[scc.vertices[0]] != +infty:
                    dist[u, v] = -infty
```

正确性:

一开始所有点的距离被设置成为 $+\infty$, 然后我们通过 DFS 找到了所有的 SCC, 然后我们分了两种方式进行讨论: 如果 s 所在 SCC 成环, 就将 s 能够到达的所有顶点的距离都设为了 $-\infty$, 这种情况易知正确; 如果 s 所在 SCC 不成环, 那么我们经过拓扑排序后, 就可以进行一次常见的 DAGSSSP 算法, 对于单顶点组成的 SCC 由 DAGSSSP 的算法正确性即可知正确, 而对于多顶点的 SCC, 如果 s 与其相连, 我们就将多顶点的 SCC 内部节点也设置成了 $-\infty$, 在后续中, 对于 "单 -> 多 -> 单" 这样的情况, 我们知道 $-\infty$ 加上任何数依然等于 $-\infty$, 因此也是正确的.

时间复杂度:

1. 初始化所有点的字典, 时间复杂度为 $O(|V|)$
2. 通过 DFS 计算 SCC, 时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$
3. 通过 DFS 找出 `base_scc` , 时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$
4. 通过 DFS 设定 $-\infty$, 时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$

5. 通过 DFS 进行拓扑排序, 时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$
6. 对每一个 SCC 进行 DAG-SSSP 处理, 可以看出, 每个 SCC 最多只会被访问一次, 且每个 SCC 最多只会对其他 SCC 根据边进行一次判断与更新, 即原图中每个顶点最多只会访问其他所有顶点一次, 那么总时间复杂度为 $O(|V|^2)$.

所以最后的总时间复杂度为 $O(|V|^2)$.

Problem 5

(a)

令 C 是这一个负环.

$\therefore \sum_{(i,j)\in C} w_{ij} = \sum_{(i,j)\in C}(r \cdot c_{ij} - p_j) = r \cdot \sum_{(i,j)\in C} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in C} p_j < 0$

$\therefore r < \dfrac{\sum_{(i,j)\in C} p_j}{\sum_{(i,j)\in C} c_{ij}} = r(C) \leqslant r^*$

即有 $r < r^*$

(b)

令 C 为任意一个环.

$\therefore \sum_{(i,j)\in C} w_{ij} = \sum_{(i,j)\in C}(r \cdot c_{ij} - p_j) = r \cdot \sum_{(i,j)\in C} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in C} p_j > 0$

$\therefore r > \dfrac{\sum_{(i,j)\in C} p_j}{\sum_{(i,j)\in C} c_{ij}} = r(C)$ 对于所有的环 C, 也包括了最大环 C^*, 且 $r(C^*) = r^*$

$\therefore r > \dfrac{\sum_{(i,j)\in C^*} p_j}{\sum_{(i,j)\in C^*} c_{ij}} = r(C^*) = r^*$

$\therefore r > r^*$

(c)

算法思路是:

1. 遍历一遍所有的边, 找出最大的权重边, 即题目中提到的 R, 然后 0 作为初始下界 m, R 作为初始上界 M.
2. 开始循环二分查找, 令 $r = (m+M)/2$.
3. 通过 Floyd-Warshall 算法计算出所有点对的最短距离, 其中各边权重为 `lambda i, j: r * c(i, j) - p(j)`.
4. 利用得出来的点对之间的距离矩阵, 通过点对两两配对的方式, 找出最小环的总权重. 根据这个权重判断, 如果权重小于 0, 则更新下界: `m = r`; 否则更新上界 `M = r`.
5. 直到 `M - m <= epsilon`, 说明 $m \geqslant M - \epsilon \geqslant r^* - \epsilon$, 我们又有 C 的最小环 $m \cdot \sum c_{ij} - \sum p_j < 0$ 即 $\dfrac{\sum p_j}{\sum c_{ij}} > m \geqslant r^* - \epsilon$, 我们找到的最小环即是我们需要的环, 就可以终止循环了.
6. 最后使用 Floyd-Warshall 算法计算出 `m` 对应的最小环, 即可得出答案.

```python
def FloydWarshallAPSP(graph, fn):
    # 用来记录距离
    dist = {}
    # 用于保存中间节点, 便于后续查找环
    middle_node = {}
    for (u, v) in product(graph.vertices, graph.vertices):
        if (u, v) in graph.edges:
            dist[u, v, 0] = fn(u, v)
        else:
            dist[u, v, 0] = infty
    for r in range(1, n + 1):
        x = graph.vertices
        for (u, v) in product(graph.vertices, graph.vertices):
            dist[u, v, r] = dist[u, v, r - 1]
            if dist[u, v, r] > dist[u, x[r], r - 1] + dist[x[r], v, r - 1]:
                dist[u, v, r] = dist[u, x[r], r - 1] + dist[x[r], v, r - 1]
                middle_node[u, v, r] = x[r]
    return dist[:, :, n], middle_node

def binary_search(graph, epsilon):
    # 1. 遍历所有边获取 R
    R = max([p(j) / c(i, j) for (i, j) in graph.edges])

    # 初始化 m, M
    m = 0
    M = R

    # 2. 开始二分查找
    while M - m > epsilon:

        r = (m + M) / 2

        # 3. 通过 FloydWarshallAPSP 和 lambda i, j: r * c(i, j) - p(j) 计算最小环
        dist = FloydWarshallAPSP(graph, lambda i, j: r * c(i, j) - p(j))

        # 4. 顶点两两配对, 找出最小环的权值
        min_weight = infty
        for (u, v) in product(graph.vertices, graph.vertices):
            if min_weight > dist[u, v] + dist[v, u]:
                min_weight = dist[u, v] + dist[v, u]

        # 通过判断其是大于零还是小于零, 进行更新上界或下界
        if min_weight < 0:
            m = r
        else:
            M = r

    # 6. 再进行一次对最小值 m 的计算, 找出最小环, 然后返回
    cycle = FloydWarshallAPSP_and_find_minimum_cycle(graph,
        lambda i, j: m * c(i, j) - p(j))

    return cycle
```

时间复杂度:

1. 遍历所有边获取 R, 耗时 $O(|E|)$, 即 $O(|V|^2)$
2. 开始二分查找, 进入一次执行 $\log R - \log \epsilon$ 遍的循环
3. 通过 FloydWarshallAPSP 计算所有顶点之间最小距离, 耗时 $O(|V|^3)$
4. 顶点两两配对, 找出最小环权值, 耗时 $O(|V|^2)$
5. 跳出循环之后, 最后进行一次 FloydWarshallAPSP 并找出最小环, 耗时 $O(|V|^3)$

因此总的时间复杂度为 $O(|V|^3(\log R - \log \epsilon))$

Problem 6

(a)

基本思路是, 当剩下的燃料不够跑到下一个站点时, 就在这个站点换一次电池.

```
# 用于保存当前剩余燃料 (单位, 还能行驶多少公里)
fuel = 0
# 更换了多少次燃料 (电池)
count = 0

for i in range(1, n):
    # 如果燃料不足
    if fuel < D[i + 1] - D[i]:
        # 换一次电池, 剩余里程数重置
        fuel = 100
        # 计数加一
        count += 1

    # 然后驾过这个站点
    fuel -= (D[i + 1] - D[i])

# 输出这个贪心算法的最小更换电池次数
print(count)
```

可以看出, 这个算法十分简单, 而且循环只进行了 $n-1$ 次, 循环内部时间开销为 $O(a)$, 因此总时间复杂度为 $O(n)$.

(b)

假设 `D = [0, 80, 90, 110], C = [1, 1, 2, 1]`.

可以看出, 如果使用我们的贪心算法的话, 将会在 `D[3] = 90, C[3] = 2` 处更换电池, 因此总开销为 `1 + 2 = 3`.

而我们其实可以在 `D[2] = 80, C[2] = 1` 处更换电池, 总开销为 `1 + 1 = 2`, 低于贪心算法的 `3`.

(c)

我们可以递归地去研究, 定义 $\text{cost}(n)$ 为达到第 n 个站点时的总开销.

可以看出, 我们想要能够到达 n, 就必须在 $(n-k) \sim (n-1)$ 这 k 个站点中更换一次电池, 其中 $D[n]-D[n-k]$ 恰好小于等于 100. (当然, 如果这个范围包括了 1 这个节点, 就可以直接终止, 选择 1).

写为递推表达式可以表示为:

$$\text{cost}(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \min\limits_{D[n]-D[n-k]\leqslant 100} [\text{cost}(n-k) + C[n-k]], & n > 1 \end{cases}$$

伪代码:

```
# 用来动态规划的数组
cost = [0 for _ in range(n + 1)]

# 用来记录最终结果的列表, 一开始只有一个 n, 最后的站点
ans = [n]

# 主循环, 从 2 到 n
for i in range(2, n + 1):
    # 记录最小结果
    min_cost = +infty
    min_station = None
    # 倒过来找, 以减小时间开销
    k = 1
    while i - k >= 1 and D[i] - D[i - k] <= 100:
        if cost[i - k] + C[i - k] < min_cost:
            min_cost = cost[i - k] + C[i - k]
            min_station = i - k
        k += 1
    # 纪录开销
    cost[i] = min_cost
    # 并加入 ans 列表
    ans.append(min_station)

# 最后将 ans 逆转并输出, 还有最终开销输出
ans.reverse()
print(ans)
print(cost[n])
```

对时间复杂度进行分析, 我们可以看出, 一个大的循环内部套了一个小的循环, 大循环执行了 $n-1$ 次, 且小循环的执行次数也不会超过 $n-1$ 次, 最后的总时间开销为 $O(n^2)$.

Problem 7

我们定义 $p(A)$ 为 A 对应的所有划分数.

经过分析, 我们可以写出递推关系式子:

$$p(A) = \begin{cases} 1, & \text{len}(A) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} [\text{p(A[1...i])} \times \text{IsWord}(A[(i+1)...n])], & \text{len}(A) \neq 0 \end{cases}$$

因此对应的伪代码为 (以下以 `0` 为基, 以 `1` 为基同理):

```
# A = 'ARTISTOIL'
# n = len(A)

# def IsWord(s):
#     return s == 'ART' or s == 'IS' or s == 'TOIL' or s == 'ARTIST' or s == 'OIL'

# 用于动态规划的数组
p = [0 for _ in range(n + 1)]

# 初始化 p[0]
p[0] = 1

# 主循环
for k in range(1, n + 1):
    sum = 0
    for i in range(0, k):
       if IsWord(A[i : k]):
           sum += p[i]
    p[k] = sum
```

```
# 输出最后结果
print(p[n])
```

时间复杂度:

外层主循环一共执行了 n 次, 并且里面有一层小循环, 执行次数不会超过 n 次, 内层小循环每一次调用一次 `IsWord(A[i : k])`, 因此最后的总时间复杂度为 $O(n^2)$.