Fibonacci sequence重要公式证明

Math 数列

斐波拉切数列拥有很多有趣的公式，且在计算机中有重要作用

公式1：

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \text{(1)}$$

1.因为n=2时:

$$F_3F_1 - F_2^2 = (-1)^2 = 1$$

2.若存在k,使得

$$F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$$

则

$$F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} = (-1)^{k+1}$$

上时刻等价于

$$(F_k + F_{k-1})^2 - F_k(2F_k + F_{k-1}) => F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$$

推导出

$$F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$$

由此得证

公式2：

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$$

1.对于m=3，

$$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n$$

m=4

$$F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2} = 3F_{n+1} + 2F_n$$

2,若存在k

$$F_{k+n} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n$$

$$F_{k+n+1} = F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n$$

则

$$F_{k+n+2} = F_{k+n+1} + F_{k+n}$$

将上两式带入

$$F_{k+n+2} = F_{k+2}F_{n+1} + Fk + 1F_n$$

由此得证

一个推论：

若m为n的倍数，则可得

F_{nk}为F_n的倍数

公式3：

$$gcd(F_n,F_m)=F_{gcd(n,m)}$$

证明：

$$gcd(F_n,F_{n+m})=gcd(F_n,F_m)\text{（}n<=m\text{）}$$

由上式可推出：
由公式·2可推出[1]：

$$gcd(F_n,F_{n+km})=gcd(F_n,F_m)$$

则因为n<=m,则$(n+km)\ mod\ m=n$
所以令$n=n+km$

$$gcd(F_n,F_m)=gcd(F_m,F_{n\ mod\ m})$$

执行以下过程(欧几里得算法)
A.令n=m,m=n%m
B.若m=0,则n为原两个数的最大公约数，算法结束
C.调至A
所以反复执行上述过程,原式会变为

$$gcd(F_n,F_m)=gcd(F_{gcd(m,n)},0)$$

化简得证

注1：
反证法证明，在

$$F_{m+n}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n$$

中令F_m与F_n的最大公约数为d
若$d*c=gcd(F_{m+n},F_m)\neq d$
则可发现$F_{m-1}F_n$为d的倍数且不为c的倍数，
而F_mF_{n+1}与F_{m+n}为c的倍数.
产生矛盾
所以$gcd(F_n,F_{n+km})=gcd(F_n,F_m)$

没有看懂的朋友可以参看《计算机程序设计与艺术（第一版）》

Leanote
Upgrade Account