# Appunti di Calcolo Probabilità e Statistica

Alessandro Cheli - Prof. Ghimenti - Prof.ssa Chiodaroli

A.A 2019-2020

# Indice

# Capitolo 1

# Probabilità Discreta e Condizionata

## 1.1 Definizione di Probabilità

La definizione di Probabilità è

Attendibilità confortata da motivi ragionevoli

**Definizione di Probabilità Discreta** La probabilità di un evento è definita come

$$\mathrm{P}\left(\text{evento}\right) = \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}}$$

. Prendiamo ad esempio il lancio di un dado, voglio ottenere un numero $\geq 5$, la probabilità dell'evento è

$$P = 2/6 = 1/3$$

Un altro esempio può essere la probabilità di ottenere un numero $\geq 4$ lanciando 2 dadi.

$$P = \frac{27}{6^2} = \frac{3}{4}$$

I casi favorevoli sono 27 perché lanciando se lanciando il primo dado ottenendo un numero $\leq 3$ significa che ho 3 possibili casi per ognuno dei lanci del primo dado per ottenere un numero $\geq 4$ dal lancio del secondo dado $(3 \cdot 3)$, a cui si aggiungono $(3 \cdot 6)$ casi se ottengo un numero $\geq 4$ dal primo lancio (tutti i casi del secondo lancio sono validi.)

**Esercizio, mazzo di carte** Qual'è la probabilità di ottenere almeno un asso pescando 2 carte da un mazzo di 54?

$$P = \frac{(50 \cdot 4) + (53 \cdot 4)}{54 \cdot 53} = \frac{206}{1431}$$

Per i casi possibili, ho 54 casi per la prima pescata e 53 per la seconda, per i casi favorevoli ho

$$\begin{cases} \text{Se pesco un Asso} \implies 4 \cdot 53 \\ \text{Se non pesco un Asso} \implies 4 \cdot 50 \end{cases} \tag{1.1}$$

## 1.2 Formule Combinatorie

### 1.2.1 Permutazioni di n elementi

Da Wikipedia:

> Una permutazione è uno scambio dell'ordine di una sequenza di elementi che possono essere di qualunque tipo. L'obiettivo è trovare il numero di tutte le permutazioni (cioè tutte le sequenze con ordine) possibili dato un certo numero n di elementi.

Le permutazioni di un insieme di $n$ elementi sono definite come

$$\text{Perm}(n) = n!$$

Dimostrando per induzione, i casi base sono $\text{Perm}(0) = 1$ e $\text{Perm}(1) = 1$
Il passo induttivo sarà

$$\text{Perm}(n) = n! \implies \text{Perm}(n+1) = (n+1)!$$

$$\begin{aligned} \text{Perm}(n+1) &= (n+1) \cdot \text{Perm}(n) \\ &= (n+1) \cdot n! = (n+1)! \end{aligned}$$

□

### 1.2.2 Coefficiente Binomiale

Il coefficiente binomiale è un numero intero non negativo definito dalla seguente formula, è analogo alla proposizione "Come scegliere k oggetti da un insieme di n elementi"

$$S_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**Dimostrazione** Fissato $k \geq 2$ dimostriamo per induzione su $n \geq k$
Il primo passo iniziale è, per $n = k$

$$S_{n,k} = 1 = \frac{k!}{k!(k-k)!} = 1$$

Il secondo passo iniziale è

$$S_{k,k-1} = \frac{k!}{(k-1)!(k-k+1)!} = k$$

Procedendo, il passo induttivo è

$$S_{n+1,k} = S_{n,k} + S_{n,k-1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\ &= \frac{n!((n-n+1)+k)}{k!(n-k+1)} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{k} \end{aligned}$$

□

### 1.2.3 Disposizioni

Una disposizione $D_{n,k}$ significa il numero di modi per "prendere" $k$ oggetti ordinati da un insieme di $n$ elementi.

$$D_{n,k} = S_{n,k} \cdot \mathrm{Perm}(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

## 1.3 Esercizi

### 1.3.1 Terno al lotto

Giocando 5 numeri al lotto (estrazione da 1 a 90) calcolare la probabilità di ottenere un terno esatto e più di un terno.

Se vogliamo ottenere un terno esatto i casi possibili sono $\binom{90}{5}$ (I modi di estrarre 5 palline dall'urna). I casi favorevoli saranno $S_{5,3} \cdot S_{85,2} = \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$

La probabilità di ottenere un terno esatto sarà quindi

$$\mathrm{P}\left(\text{terno esatto}\right) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{85 * 84 * 5}{\binom{90}{5}}$$

Per ottenere almeno un terno i casi favorevoli sono

- terno: $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$
- quaterna: $\binom{5}{4}\binom{85}{1}$
- cinquina: 1

La probabilità di ottenere almeno un terno sarà data dalla somma delle probabilità corrispondenti a terno, quaterna e cinquina:

$$\mathrm{P}\left(\text{almeno un terno}\right) = \frac{\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{85}{1}\binom{5}{4}}{\binom{90}{5}} + 1$$

### 1.3.2 Probabilità del gioco di Monty Hall

Nel gioco televisivo di Monty Hall il partecipante deve scegliere una fra tre porte, una di esse contiene un premio mentre le altre due contengono rispettivamente due capre. Dopo la scelta del giocatore iniziale il presentatore apre una delle due porte contenenti una capra. Al giocatore conviene cambiare porta o mantenere quella scelta in origine?

**Ipotesi** Se scelgo una porta e la mantengo vinco solo se il premio era nella porta che ho scelto $\Longrightarrow P = 1/3$

**Ipotesi** Se scelgo una porta e la cambio avrò $P = 2/3$

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| x | x | \$ |
| x | \$ | x |
| \$ | x | x |

Tabella 1.1: Gioco di Monty Hall

### 1.3.3 Probabilità Condizionata

Lancio due dadi sommando il risultato, qual'è $\mathrm{P}(\geq 10)$ sapendo che il primo ha fatto almeno 3?

Sappiamo che $\mathrm{P}(\text{Somma} \geq 10) = 6/36 = 1/6$

Poniamo il vincolo che il lancio del primo dado risulti almeno $\geq 3$

$$\mathrm{P}(\text{Somma} \geq 10 | \text{Primo dado} \geq 3) = 6/24 = 1/4$$

**Definizione** Ponendo $\Omega =$ gli eventi possibili; La **probabilità condizionata** che succeda $A$ sapendo $B$ si indica con:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\Omega|}{|B|}$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

**Esempio** La probabilità di ottenere $\leq 4$ sapendo che è uscito un numero pari è

$$\mathrm{P}(\leq 4|\text{pari}) = \frac{\mathrm{P}(\leq 4|\text{pari})}{\mathrm{P}(\text{pari})}$$

$$\mathrm{P}(\text{pari}) = 3/6 = 1/2$$

$$\mathrm{P}(\leq 4 \cap \text{pari}) = 2/6$$

$$\implies \mathrm{P}(\leq 4|\text{pari}) = \frac{2/6}{1/2} = 2/3$$

### 1.3.4 Dado rosso e dado nero

Tiriamo due dadi, uno rosso ed uno nero.

Calcolare la probabilità che il dado rosso risulti 3 ed il dado nero risulti 2:

$$\mathrm{P}(R = 3|N = 2) = \frac{\mathrm{P}(R = 3 \cap N = 2)}{\mathrm{P}(N = 2)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(R = 3) = 1/6$$

Ne otteniamo che $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \implies A, B$ sono indipendenti.

In generale, dati due eventi $A, B$ con $A \cap B \neq 0$ la probabilità dell'unione è $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, allora $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ dove $\Omega =$ tutti gli eventi.

**Definizione** Definiamo il **complementare** di un evento, ovvero $A^C = \Omega \backslash A$. La probabilità di un complementare è $\mathrm{P}\left(A^C\right) = 1 - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\Omega) - \mathrm{P}(A)$

La probabilità di un intersezione di eventi è $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

# Capitolo 2

# Spazio Probabilizzato

## 2.1 Lo Spazio Probabilizzato

Uno spazio probabilizzato è un costrutto matematico che modella un processo del mondo reale o "esperimento", consistente in degli stati che occorrono casualmente. Viene costruito su una situazione o esperimento particolare, Uno spazio probabilizzato è definito come una terna:

$$(\Omega, F, P)$$

$\Omega$ è l'insieme degli eventi elementari, ovvero tutti i risultati possibili, ad esempio in un lancio di un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{P}(A)$, ovvero le parti di A, sono tutti gli insiemi che posso costruire a partire dagli elementi di A. Ad esempio:

$$A = \{0, 1\}$$
$$\mathcal{P}(A) = \{0, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}\}$$

$F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è un sottoinsieme delle parti di omega, chiuso rispetto a intersezione, unione e complementare.

$$A, B \in F \implies \begin{cases} A \cup B \\ A \cap B \\ A^C, B^C \end{cases} \in F$$

Se $A_1, \ldots, A_n \subset F \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F$

Se $F$ comprende queste proprietà si dice che è una $\sigma$ Algebra (tribù)

La probabilità $P$ è una funzione definita come

$$P : F \to [0, 1]$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$\forall i \neq j . A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

Dato $\Omega$ insieme finito, allora $F = \mathcal{P}(\Omega)$ allora la probabilità sarà

$$P(A \subset F) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

**Esempio: Lotteria di De' Finetti** Si assiste all'estrazione di un numero $n \in \mathbb{N}$ casuale. Supponiamo che ogni numero abbia la stessa probabilità di essere estratto.

Dato un altro naturale $m \in \mathbb{N}$

$$p_n = P(n) = \text{ La probabilità di estrarre il numero n}$$

Vogliamo che $0 \leq p_n \leq 1$ e anche $p_m = p_n \forall n = m$. Quindi $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$. Assumendo $p_n = 0, \forall n$ allora $\sum_n p_n = 0$. Se $p_n = c > 0, \forall n$ allora $\sum_n p_n = \sum_n c = +\infty$

Ciò significa che nella lotteria di De' Filetti è impossibile che ogni numero sia equiprobabile perché $P$ non è definibile. Abbiamo dimostrache che non è possibile che $\mathrm{P}\left(\Omega\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$, essendo $\mathbb{N}$ insieme infinito.

**Dimostrazione** La terna $(\Omega, F, P)$ si può dimostrare.

$$P(A^C) = 1 - P(A) \iff \begin{cases} A \cap A^C \neq \emptyset \\ A \cup A^C = \Omega \\ P(\Omega) = 1 \end{cases}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$

**Densità di Probabilità** Definiamo $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $p_n \in \mathbb{R}$ come funzione, detta densità di probabilità come $p_n \geq 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$

Se $\{p_n\}$ è una densità di probabilità discreta $\implies (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$ è uno spazio probabilizzato. Vale anche per eventi non equiprobabili.

**Definizione, indipendenza degli eventi** Sia dato $P(A \mid B) \equiv \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Di conseguenza, se $P(A \mid B) = P(A)$ due eventi $A, B$ sono indipendenti. Un esempio è il lancio di due dadi, il primo dado non influenzerà in alcun modo il risultato del secondo, per questo gli eventi del lancio di due dadi $A, B$ sono indipendenti.

È vero quindi che $P(A \mid B) = P(A) \implies P(B \mid A) = P(B)$? Sì se $A, B$ sono indipendenti.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \text{ se } P(B) \neq 0$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B), \text{ se } P(A) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B \cap A)$$

Se $A_1, \ldots, A_n$ sono indipendenti:

$$\forall i_1, \ldots, i_k.k \leq n \implies P(A) \cap (A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k})$$

**Esercizio teorico** $A, B$ indipendenti $\Longrightarrow \begin{cases} A, B^C \\ A^C, B^C \\ A^C, B \end{cases}$ indipendenti

**Dimostrazione:**

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B^C)$$

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B^C)$$

$A$ e $B^C$ sono indipendenti

□

**Esercizio: Lancio di due dadi** Lancio due dadi, uno rosso ed uno nero. $\Omega = (r, n)$ dove $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Definiamo lo spazio probabilizzato con $F = \mathcal{P}(\Omega), \omega \in \Omega$. Ad esempio $\mathrm{P}(n) = \frac{1}{36}$

Probabilità che il rosso sia 3 sapendo che rosso + nero fa 6

$$\mathrm{P}(r = 3 \mid r + n = 6) = \frac{\mathrm{P}(r = 3 \cap r + n = 6)}{\mathrm{P}(r + n = 6)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

Probabilità che il rosso sia pari sapendo che rosso + nero fa 6

$$\mathrm{P}(r = \text{ pari} \mid r + n = 6) = \frac{\mathrm{P}(r \text{ pari} \cap r + n = 6)}{\mathrm{P}(r + n = 6)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}$$

**Esercizio: Gioco di Monty Hall** Riprendendo il gioco delle tre porte definiamo lo spazio probabilizzato: Formalizzo di aver scelto la porta 3. $\Omega = (x, y)$ dove $x = 1, 2, 3$ è la porta vincente e $y = 1, 2$ è la porta perdente che è stata aperta dal presentatore.

Gli eventi impossibili saranno $\mathrm{P}(1, 1) = 0, \mathrm{P}(2, 2) = 0$

Dalla tabella otteniamo che

$$\mathrm{P}(x = 1) = \mathrm{P}(x = 2) = \mathrm{P}(x = 3) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(x = 1, y = 2) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(x = 2, y = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(x = 3, y = 1) = \mathrm{P}(x = 3, y = 2) = \frac{1}{6}$$

Quindi $\mathrm{P}(y = 1) = \mathrm{P}(y = 2) = \frac{1}{2}$

Se scelgo la porta 3, suppongo venga aperta la 2. Se non cambio e vinco $(x = 3)$ allora

$$\mathrm{P}(x = 3 \mid y = 2) = \frac{\mathrm{P}((3, 2))}{\mathrm{P}(y = 2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Se scelgo la porta 3, suppongo venga aperta la 1 e cambio allora:

$$\mathrm{P}(x = 1 \mid y = 2) = \frac{\mathrm{P}((1,2))}{\mathrm{P}(y=2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

### 2.1.1 Formula di fattorizzazione

Supponiamo di avere una famiglia di insiemi $B_1, \ldots, B_n$ con $n \in \mathbb{N}$ che è detta una partizione finita di $\Omega$ (insieme fondamentale). Voglio che $\forall i.B_i \in F$ e che $\forall i \forall j \neq i.B_i \cap B_j = \emptyset$ e anche che $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

**Teorema** Sia $\{B_i\}_{i=1,\ldots,n}$ parte finita di $\Omega$ e sia $\forall 1 \leq i \leq n \mathrm{P}(B_i) > 0$

$$\implies \mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

**Dimostrazione**

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

**Condizionamento ripetuto** Dati $A_1, \ldots, A_n$ eventi, allora

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

### 2.1.2 Formula di Bayes

Dati due eventi $A, B$ con probabilità non nulla $\mathrm{P}(A) > 0$ e $\mathrm{P}(B) > 0$ allora

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}, \text{ se } \mathrm{P}(B) \neq 0, \\ \mathrm{P}(B \mid A) &= \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)}, \text{ se } \mathrm{P}(A) \neq 0, \\ \Rightarrow \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A), \\ \Rightarrow \mathrm{P}(A \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}, \text{ se } \mathrm{P}(B) \neq 0. \end{aligned}$$

## 2.2 Esercizi

**Esercizio: Vino** Un produttore di vino produce due vini (bianco $B$ e rosso $R$) e vende in Francia ($F$) e Germania ($G$). Le vendite sono 1/3 per la Francia e 1/3 per la Germania. 3/4 delle richieste dalla Francia sono vino bianco. 1/4 delle richieste dalla Francia sono vino rosso. 1/2 delle richieste dalla Germania sono vino bianco. 1/2 delle richieste dalla Germania sono vino rosso.

Utilizzando la formula di partizione troviamo la probabilità che una richiesta sia vino bianco.

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid G) \cdot \mathrm{P}(G) + \mathrm{P}(B \mid F) \cdot \mathrm{P}(F) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

**Esercizio, esami e studenti** Abbiamo 3 livelli di preparazione: Ottimo, Buono e Scarso. Un esito dell'esame è Promosso o Respinto.

$$\mathrm{P}(\text{Promosso} \mid \text{Ottimo}) = 0.995$$
$$\mathrm{P}(\text{Promosso} \mid \text{Scarso}) = 0.3$$
$$\mathrm{P}(\text{Promosso} \mid \text{Buono}) = 0.8$$

Uno studente prova l'esame e viene respinto. Qual'è la probabilità che aveva di avere una preparazione scarsa? $\mathrm{P}(\text{Scarso} \mid \text{Respinto})$

Prima calcoliamo la probabilità di essere respinti.

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(R \mid O) \cdot \mathrm{P}(O) + \mathrm{P}(R \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(R \mid S) \cdot \mathrm{P}(S) = 0.302$$

Senza informazioni aggiuntive $\mathrm{P}(O) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(S) = \frac{1}{3}$

La probabilità di essere respinto è $\mathrm{P}(R) = 0.302$ quindi

$$\mathrm{P}(S \mid R) = \frac{\mathrm{P}(R \mid S) \cdot \mathrm{P}(S)}{\mathrm{P}(R)} = \frac{0.7 \cdot 1/3}{0.302} = 0.773$$

**Esercizio alternativo** Qual'è la probabilità che lo studente aveva di avere una preparazione scarsa, sapendo che è stato respinto e sapendo che le probabilità dei voti sono: $\mathrm{P}(O) = \frac{1}{6}, \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}, \mathrm{P}(S) = \frac{1}{6}$

Calcoliamo, come prima $\mathrm{P}(R) = 0.005 \cdot \frac{1}{6} + 0.2 \cdot \frac{2}{3} + 0.7 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.25$

Abbiamo quindi che

$$\mathrm{P}(S \mid R) = \frac{0.7 \cdot 1/6}{0.25} \approx 0.466$$

**Esercizio: Malattia con fattore di rischio** La probabilità di ammalarsi di un soggetto a rischio ($R$) è 0.2, mentre la probabilità di ammalarsi di un soggetto non a rischio ($N$) è 0.006. Il 15% della popolazione sono soggetti a rischio. Un malato si denota con $M$ mentre uno sano con $S$.

Vogliamo sapere

1. $\mathrm{P}(\text{Soggetto casuale sia malato}) =$
   $\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(M \mid R) \cdot \mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(R \mid N) \cdot \mathrm{P}(N) = 0.35$
   $\mathrm{P}(M) = 0.2 \cdot 0.15 + 0.006 \cdot 0.85 = 0.35$

2. $\mathrm{P}(\text{Soggetto malato fosse a rischio}) =$
   $\mathrm{P}(R \mid M) = \frac{\mathrm{P}(M \mid R) \cdot \mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(M)} = \frac{0.2 \cdot 0.15}{0.35} = 0.855$

3. $\mathrm{P}(\text{Soggetto soggetto sano sia a rischio}) =$
   $\mathrm{P}(R \mid S) = \frac{\mathrm{P}(S \mid R) \cdot \mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{(1 - 0.2) \cdot 0.15}{(1 - 0.35)} = 0.124$

**Osservazione** La probabilità che l'evento $A^c$ ($A$ complementare) si verifichi sapendo B è $\mathrm{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$ **mentre invece** la probabilità di $A$ sapendo $B^c$ è $\mathrm{P}(A \mid B^c) \neq 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$

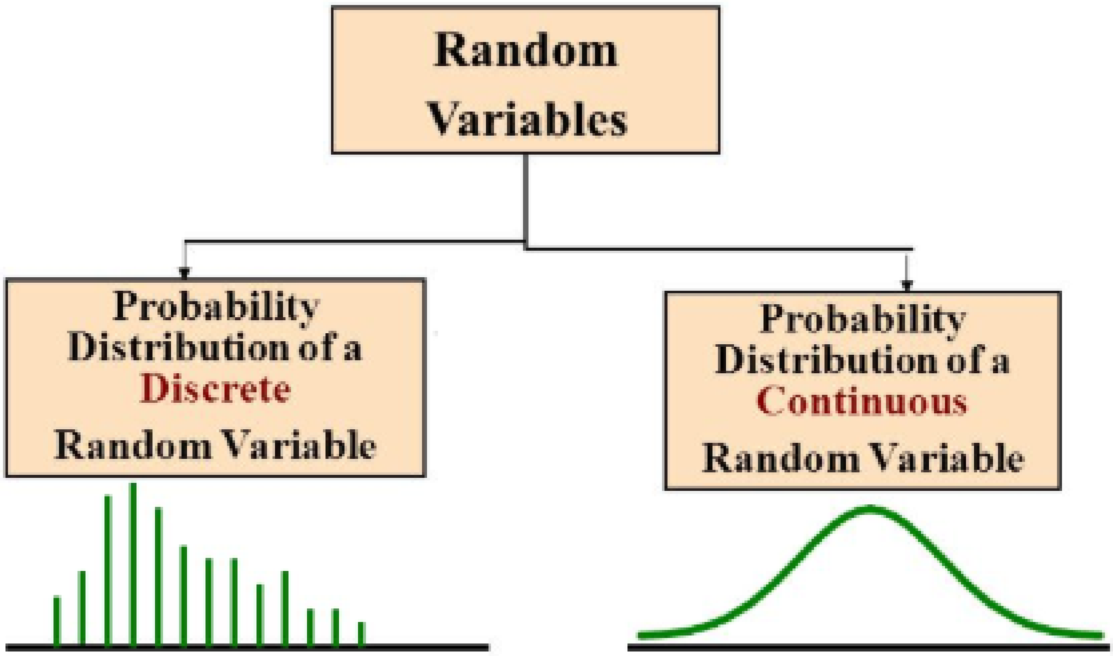
**Esercizio: Test** Prendendo $S =$ soggetti sani, $M =$ soggetti malati, $T^- =$ test positivo, $T^+ =$ test positivo.

La specificità di un test è $\mathrm{P}(T^- \mid S)$. Una specificità alta implica pochi falsi positivi. La sensibilità è $\mathrm{P}(T^+ \mid M)$. Una sensibilità alta implica pochi falsi negativi.

# Capitolo 3

# Variabili Aleatorie

Figura 3.1: Tipi di variabili casuali




## 3.1 Variabili Aleatorie Discrete

Una variabile aleatoria (casuale o stocastica) discreta è una variabile che può assumere diversi valori in dipendenza da qualche fenomeno casuale. Il risultato del lancio di un dado, ad esempio, è una variabile aleatoria discreta.

Prendiamo uno **spazio probabilizzabile** $(\Omega, F)$ e una variabile aleatoria discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$, che è una funzione continua non surgettiva. I valori di $X$ devono essere un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ ovvero $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Vogliamo anche che $\forall j \in [1, k]$ sia vero $X^{-1}(a_j) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a_j\} \in F$. Utilizziamo la funzione inversa per ottenere gli elementi di $\Omega$ su cui possiamo definire la probabilità.

Con la probabilità di tutti gli eventi definisco la densità di probabilità. Nello spazio probabilizzato $(\Omega, F, \mathcal{P})$ la probabilità che la variabile aleatoria assuma il valore $a_j$ sarà $p_j = \mathrm{P}(X = a_j) = \mathrm{P}(X^{-1}(a_j))$, che viene detta densità di probabilità. Varranno quindi le seguenti proprietà

1. $\forall j. X^{-1}(a_j)$ sono tutti insiemi disgiunti.

2. Essi coprono tutto $\Omega$

Vale che $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Poiché:

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}\left(\bigcup_j X^{-1}(a_j)\right) = \sum_j \mathrm{P}\left(X^{-1}(a_j)\right)$$

Sia $X : \Omega \to \{a_1, \dots, a_k\}$ una variabile aleatoria, e sia la densità di probabilità $p_j \geq 0$ e anche $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$, allora $\mathrm{P}(X = a_j) = p_j$.

Preso uno spazio probabilizzabile $(\Omega, F)$ e una variabile aleatoria $X : \Omega \to \{a_1, \dots, a_k\}$, supponendo che i numeri $a_j$ siano ordinati, sia $p_j$ la densità di probabilità, come posso ricostruire, ad esempio $\mathrm{P}(x \leq a_3)$?

$$\mathrm{P}(X \leq a_3) = \mathrm{P}((X = a_1) \cup (X = a_2) \cup (X = a_3)) = \mathrm{P}(X = a_1) + \mathrm{P}(X = a_2) + \mathrm{P}(X = a_3)$$

**Esempio** Voglio contare quanti 6 escono in 10 lanci di dadi.

Sia $\Omega = \{(1, 2, 3, 4, 5, 6)\}^{10}$, ovvero tutte le possibili parole di 10 elementi composte dai numeri da 1 a 6. Ad ogni lancio, ho $\frac{1}{6}$ di probabilità di ottenere 6 e $\frac{5}{6}$ di ottenere gli altri numeri. Definiamo la variabile aleatoria $X : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$ come il conteggio dei risultati dei lanci dove ottengo 6. Qual'è la probabilità di ottenere 3 lanci dove ho fatto 6?

$$\mathrm{P}(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

### 3.1.1 Legge di Bernoulli

Faccio un esperimento, il risultato positivo ha probabilità $p$, mentre il risultato negativo ha probabilità $1 - p$

Sia lo spazio $\Omega = \begin{cases} \text{successo} \to 1 \\ \text{insuccesso} \to 0 \end{cases}$

Una variabile aleatoria Bernoulliana è definita come $X : \Omega \to \begin{cases} p_1 = p \\ p_0 = 1 - p \end{cases}$

### 3.1.2 Legge Binomiale

Sia $k$ il conteggio dei successi di $n$ esperimenti, abbiamo quindi che $B(n, p) = X_i\{(0, 1)\}^n \to \{0, \dots, n\}$. Abbiamo che la densità di probabilità Binomiale $p_k = \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

$p_k$ è una densità? Sappiamo che $p_k \geq 0$ e sappiamo che $1 = \sum_k p_k$, con il binomio di Newton possiamo dimostrare che $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Proseguendo, abbiamo che

$$\sum_k p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + (1 - p)^n) = 1^n = 1$$

### 3.1.3 Somma di Variabili Aleatorie

Lancio due dadi, uno rosso e uno nero, avremo quindi $\Omega = \{R, N\} = \{(1, 6)\}^2$. Definisco due variabili aleatorie, $X$ per il dado rosso dove $X : (R, N) \to R$ e la variabile $Y : (R, N) \to N$. La densità per $X$ sarà $p_j = \frac{1}{6} \forall j$ mentre la densità per $Y$ sarà $q_j = \frac{1}{6} \forall j$ Avremo che $Z = X + Y$ conta la somma dei dadi.

**Esercizi**

1. Calcolare la densità di $Z$

   In questo caso $X, Y$ sono indipendenti, quindi avremo la densità di $Z$ detta $t_Z$.

$$\forall n \in [2, 12]. \left( \mathrm{P}(Z = n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = n - i) \right)$$

| $X + Y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j + q_j$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Tabella 3.1: Distribuzione discreta della somma del lancio di due dadi.

Figura 3.2: Distribuzione della somma del lancio di due dadi

2. Calcolare $\mathrm{P}(4 \leq Z \leq 6)$

   $$\mathrm{P}(4 \leq Z \leq 6) = \mathrm{P}(Z = 4) + \mathrm{P}(Z = 5) + \mathrm{P}(Z = 6) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

### 3.1.4 Indipendenza di Variabili Aleatorie

Due variabili aleatorie $X_1, X_2$ sono indipendenti se $\forall I_1, I_2, \subseteq \mathbb{R}$ intervalli o semirette si ha che

$$(\mathrm{P}(X_1 \in I_1) \cap \mathrm{P}(X_2 \in I_2)) = \mathrm{P}(X_1 \in I_1) - \mathrm{P}(X_2 \in I_2)$$

Nell'esempio di prima $X, Z$ e $Y, Z$ sono dipendenti perché dati $I_1 = [1, 2], I_2 = [3, 4]$ allora si ha che $\mathrm{P}(X \in I_1) = \mathrm{P}(X = 1, 2) = \dfrac{1}{3}$ e si ha anche $\mathrm{P}(Z \in I_2) = \mathrm{P}(2 = 3, 4) = \dfrac{5}{36}$. Ne otteniamo che:

$$\mathrm{P}((X \in I_1) \cap (Z = 3, 4)) = \mathrm{P}(X = 1, 2, Z = 3, 4) = \frac{4}{12}$$

**Variabili Aleatorie Congiunte** Due variabili aleatorie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ discrete sono congiunte quando si può calcolare $\mathrm{P}(X = m \cap Y = n) = p_{n,m}$, ovvero una densità di probabilità $\{p_{n,m}\}_{n,m}$ con $(p_{n,m} \geq 0) \wedge (\sum_{n,m} p_{n,m} = 1)$.

Sapendo $p_{n,m}$ ricavo tutti i $\mathrm{P}(X = m) = p_m$ e $\mathrm{P}(Y = n) = q_n$ con

$$\mathrm{P}(X = m) = \mathrm{P}\left(X = m \cap \left\{\bigcup_n Y = n\right\}\right) = \sum_n \mathrm{P}(X = m, Y = n) = \sum_n p_{n,m} = p_m$$

$$\mathrm{P}(Y = n) = \sum_m p_{n,m} = q_n$$

Non si può ricostruire dalle due probabilità la variabile aleatoria congiunta. Ad esempio, conoscendo $p_n, q_n$ cerco $p_n, m = \mathrm{P}(X = m \cap Y = n) = \mathrm{P}(X = m | Y = n) \cdot \mathrm{P}(Y = n)$. Se $X, Y$ sono indipendenti allora $P(X = m \mid Y = n) = \mathrm{P}(X = m)$ e vale il prodotto $p_{m,n} = p_n \cdot p_m$.

$$\sum_m \sum_n p_{n,m} = \sum_m \sum_n p_n \cdot q_n = \left(\sum_m p_m\right)\left(\sum_n q_m\right) = 1$$

**Formula di Convoluzione** Tornando alla somma di due variabili aleatorie discrete, dati $X, Y$ indipendenti e $Z = X + Y$, con $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$, dobbiamo calcolare $\mathrm{P}(Z = n)$ e la densità di probabilità discreta $\{Z = n\}$

$$\{Z = n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{X = 1 \cap Y = n - i\}$$

$$\mathrm{P}(z = n) = \sum_i \mathrm{P}(X = i \cap Y = n - 1) = \sum_{i=n}^{n} \mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = n - i)$$

**Teorema: Rapporto fra Bernoulli e Binomiale** Sommando $n$ esperimenti di $p$ dove conto i successi ottengo la binomiale $B(n, p)$, quindi $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Bern}_i(p) = B(n, p)$

**Dimostrazione per Induzione** Caso base, per $n = 1 \implies B(1, p) = \mathrm{Bern}(p)$. Come passo induttivo abbiamo

$$B(n, p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Bern}_i(p) \implies B(n + 1, p) = \sum_{i=1}^{n+1} = \mathrm{Bern}_i(p)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{Bern}_i(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Bern}_i(p)\right) + \mathrm{Bern}_{n+1}(p) = B)(n, p) + \mathrm{Bern}(p)$$

Introduciamo le densità per continuare la dimostrazione

$$\mathrm{P}\left(B(n,p)+\mathrm{Bern}(p)=k\right)=\mathrm{P}\left(B(n,p)=k\cap\mathrm{Bern}(p)=0\right)+\mathrm{P}\left(B(n,p)=k-1\cap\mathrm{Bern}(p)=1\right)$$

$$=\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}\cdot p+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot(1-p)$$

$$=\left[\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}\right]p^k(1-p)^{n-k+1}=\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k}=\mathrm{P}\left(B(n+1,p)=k\right)$$

## 3.2 Variabile Geometrica

Data una successione di esperimenti ripetuti con probabilità di successo $0\le p\le 1$. Lo ripeto fino ad ottenere un successo. $\mathrm{Geom}(p)$ conta il numero di prove necessarie. Ovvero $\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=k\right)=$ la probabilità di fare k esperimenti ed avere un successo dall'ultimo. La densità di probabilità sarà $p_k=\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=k\right)=(1-p)^{k-1}\cdot p$ con $p_k\ge 0$ e anche $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}$, che è una serie geometrica. Sarà quindi equivalente a $p\sum_{i=0}^{n}(1-p)^i=\dfrac{p}{1-(1-p)}=1$

Osservazione: consideriamo la serie geometrica $\sum_{i=0}^{\infty}q^i$. Sappiamo che $(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}q^i=1$ perché $(1-q)(1+q+q^2+q^3\dots)=(1-q+q-q^2+q^2+\dots)$, semplificando i termini rimane 1.

Una variabile geometrica **non ha memoria**, l'esperimento numero $n$ ha la stessa probabilità degli altri esperimenti:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=n+m|\mathrm{Geom}(p)>n\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=m\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=m+n\cap\mathrm{Geom}(p)>n\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)>n\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=m+n\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)>n\right)}$$

$$=\frac{(1-p)^{m+n-1}\cdot p}{(1-p)^n}=\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=m\right)$$

Si può dimostrare sapendo che $\forall m.\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=n+m\cap\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}\right)>n\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=m+n\right)$

### 3.2.1 Variabili Ipergeometriche

Siano dati $r$ sfere rosse, $b$ sfere bianche, $n$ estrazioni senza reimbussolamento, $k=$ numero di sfere rosse estratte, $H(b+r,r,n)$ conta il numero di sfere rosse estratte dopo n tentativi. Sappiamo che $(0<n\le b+r)\wedge(k\le n)\wedge(k\le r)\wedge(n-k\le b)$.

Definiamo la densità di probabilità

$$\mathrm{P}\left(H(b+r,r,n)=k\right)=\frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

### 3.2.2 Esercizi

1. Dati $r=10,15=b,7=n$ abbiamo che $\mathrm{P}\left(H(25,15,7)=3\right)$ è $\dfrac{\binom{15}{3}\binom{10}{7-3}}{\binom{25}{7}}$

2. Ho una scatola con 12 lampadine, 4 di esse sono fulminate. Ne prendo 2. La probabilità che siano entrambe funzionanti è $\mathrm{P}\left(H(12,4,2)=0\right)=\dfrac{\binom{4}{0}\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$

3. Ho una moneta truccata. La probabilità che esca testa è $P_t = 0.55$ e la probabilità che esca croce è $P_c = 0.45$. Lancio la moneta dieci volte, qual'è la probabilità che avvenga la sequenza testa-croce per la prima volta al lancio 9-10? Perché ciò sia possibile deve uscire una sequenza composta da $0 \leq h \leq 8$ lanci "croce" consecutivi e $9-h$ lanci "testa" consecutivi, in modo da ottenere una sequenza formata da $C^h T^{9-h} C$. La probabilità è $\mathrm{P}\left(C^h T^{9-h} C\right) = (0.45)^h \cdot (0.55)^{9-h} \cdot (0.45) = (0.45)^{h+1} \cdot (0.55)^{9-h}$. La probabilità dell'unione $\bigcup_h$ delle stringhe sarà $P = \sum_h (0.45)^{h+1}(0.55)^{9-h}$. Svolgere l'esercizio con una variabile geometrica.

4. Un ubriaco cammina in salita con probabilità $\mathrm{P}(\text{salita}) = 1/4$ oppure in discesa con probabilità $\mathrm{P}(\text{discesa}) = 3/4$. Ogni 10 secondi decide casualmente una direzione. Si muove lungo un asse $X$ partendo dall'origine a velocità $\frac{1m}{10s}$. Qual'è la posizione più probabile dopo 1 minuto? Introduciamo una variabile $X =$ la posizione dopo 1 minuto. L'ubriaco si sposterà al massimo di 6 metri in salita o 6 metri in discesa, quindi $X \in [-6, +6]$. Introduciamo anche la variabile $Y =$ il numero di volte che l'ubriaco cambia direzione verso la discesa. $Y$ è una variabile binomiale Bernoulliana (conta il numero di "successi" in 6 esperimenti ripetuti) $\implies Y = B(6, 3/4)$. Abbiamo quindi che $X = -1 \cdot Y + 1(6 - Y) = 6 - 2Y$.

$$\implies P_k = \mathrm{P}\left(B(6, 3/4) = k\right) = \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}$$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | $\frac{1}{4^6}$ | $\frac{6 \cdot 3}{4^6}$ | $\frac{15 \cdot 3^2}{4^6}$ | $\frac{20 \cdot 3^3}{4^6}$ | $\frac{15 \cdot 3^4}{4^6}$ | $\frac{6 \cdot 3^5}{4^6}$ | $\frac{3^6}{4^6}$ |

Tabella 3.2: Distribuzione della variabile $X$

### 3.2.3 Binomiale Negativa (o di Pascal)

Sia data una Bernoulliana di parametro $p$. Ripetiamo l'esperimento fino a che non ho $n$ successi. Quanti sono i fallimenti ottenuti? Sappiamo che una variabile Binomiale conta i successi, una variabile Geometrica conta i fallimenti prima del primo successo e la Binomiale Negativa (NB) conta i fallimenti prima del successo $n$-esimo. In una Binomiale Negativa non conta l'ordine degli esperimenti (tranne l'ultimo risultato). Le prove totali prima di avere $n$ successi sono $n + \mathrm{NB}$. Sapendo che per avere $n$ successi e $k$ fallimenti, la probabilità di una Binomiale Negativa è definita come

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{NB}\left(n, p\right) = k\right) = p^n (1-p)^k$$

**Esempio** Lancio una moneta fino ad ottenere 3 croci (non consecutive). Qual'è la probabilità di aver fatto esattamente 2 risultati testa? $\mathrm{P}\left(\mathrm{NB}\left(3, \frac{1}{2}\right) = 2\right) = \binom{3+2-1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}$.

La probabilità di ottenere almeno un risultato testa è $\mathrm{P}\left(\mathrm{NB}\left(3, \frac{1}{2}\right) = 0\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

## 3.3 Media Pesata, Speranza o Valore Atteso

Consideriamo di voler calcolare la media pesata dei voti degli esami universitari. La media sarà per ogni esame $i$:

$$\sum_i \frac{(\text{voto})_i \cdot (\text{crediti})_i}{\sum_i \text{crediti}} = \sum_i (\text{voto})_i \cdot (\text{peso})_i$$

Definiamo $X$ variabile aleatoria discreta $X \subseteq \mathbb{R}$. La media di $X$ è detta **speranza** o **valore atteso** e si denota con

$$E[X] = \sum_k k \cdot \mathrm{P}(X = k) = \sum_k k \cdot p_k$$

.

Per calcolare la media di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$E[f(X)] = \sum_k f(k) \cdot p_k$$

**Osservazione** $\sum_k p_k = 1$ **non implica che** $\sum_k kp_k$ sia convergente. Se non converge ad un numero allora la variabile non ha media. Se la variabile assume solo valori positivi allora

$$E[X] = \sum_{k>0} \mathrm{P}(X > k) = \sum_{k>0} (\mathrm{P}(X = k+1) + \mathrm{P}(X = k+2) + \dots)$$

**Esercizi sulla speranza**

1. Binomiale $B(n, p)$. La distribuzione $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \forall k \in [0, n]$. Abbiamo che $kp_k = k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$. Otteniamo che

$$E[B(n,p)] = \sum_{k=1}^{n} kp_k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

Definiamo $h = k - 1$

$$= np \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{(n-1)-h}$$

$$= np(p + (1-p))^{n-1} = np$$

2. Variabile geometrica Geom($p$), conta il numero di successi prima di un successo:

$$E[\text{Geom}(p)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = \sum_k \mathrm{P}(\text{Geom}(p) > k)$$

Prendiamo in caso

$$\sum_k \mathrm{P}(\text{Geom}(p) > k) = \sum_{h=k+1}^{\infty} (1-p)^(h-1)p = \sum_k (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

3. Scommetto. Pago 1 euro. Lancio 3 dadi e guadagno 1 euro ogni 6 che esce. Rappresento il guadagno con una variabile binomiale $X = B(3, 1/6) - 1$. Abbiamo che $E[X] = E[B(3, 1/6)] - 1 = 3 \cdot 1/6 - 1 = -1/2$

4. Prendo un seme di carte francesi $\{A, 2, \ldots, 10, J, Q, K\}$ L'asso ha valore 11. I numeri da 2 a 10 hanno lo stesso valore del numero, le figure hanno valore 10. Estraggo una carta. Definiamo una variabile aleatoria $X =$ punteggio. $X \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Abbiamo che $p_k = 0 \iff k < 2 \wedge k > 11$. Abbiamo anche che $p_k = 1/13 \iff k = 2, \ldots, 11$ e $p_k = 4/13 \iff k = 10$

### 3.3.1 Distribuzione di Poisson

Nel caso di una variabile binomiale conosco $p$ e $n$ (numero esperimenti). In una distribuzione di Poisson si conosce una media $\mu$ di successi in un intervallo di osservazione. Definiamo un intervallo $\tau$, suddiviso in $n$ sottointervalli. Abbiamo $\mu$ successi. Se $n$ è grande abbastanza tale che in ogni intervallo avviene 1 evento, generati da $n$ esperimenti indipendenti allora $\mu = E[B(n, p)] = np$. Ne segue che:

$$p = \frac{\mu}{n}$$

$$\mathrm{P}\left(B(n,p) = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \frac{\mu^k}{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$

$$= \frac{n^k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} \cdot \frac{\mu^k}{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$

Ne otteniamo che

$$\mathrm{P}\left(\text{Poisson}(\mu) = k\right) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

**Esempio** Siamo nel secolo 1800, prendiamo l'esercito di Napoleone nel reparto della cavalleria. Ogni anno 12 cavalieri muoiono per incidente a cavallo. Voglio sapere la probabilità che nel 1861 siano morti 7 cavalieri.

$$\mathrm{P}\left(\text{anno 1861} | \text{sono morti 7 cavalieri}\right)$$

Utilizziamo la distribuzione di Poisson.

$$\mathrm{P}\left(\text{Poisson}(12) = 7\right) = \frac{12^7}{7} e^{-12} \approx 0.04$$

**Linearità della media** Siano date $X, Y$ variabili aleatorie, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$$

**Valore atteso del prodotto** Siano date $X, Y$ variabili aleatorie **indipendenti**.

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] = \sum_{i,j} i \cdot j \cdot \mathrm{P}\left(X = i \cap Y = j\right)$$

$$= \sum_{i,j} i \cdot j p_{ij} = \sum_{i,j} i j p_i^X p_j^Y = \sum_i i p_i^X \cdot \sum p_j^Y$$