Appunti di Calcolo Probabilità e Statistica

Lezioni della prima parte di Marco Ghimenti
Lezioni della seconda parte di Maurizio Pratelli
A cura di Alessandro Cheli

A.A 2019-2020

Indice

Parte I

Probabilità Discreta e Catene di Markov Lezioni di Marco Ghimenti

Capitolo 1

Probabilità Discreta e Condizionata

1.1 Probabilità Discreta e Formule Combinatorie

Definizione 1.1.1. Probabilità: **Attendibilità confortata da motivi ragionevoli**

La probabilità (discreta) di un evento si può definire, in maniera intuitiva,

Definizione 1.1.2.

$$\mathrm{P}\left(\text{evento}\right) = \frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi possibili}} \tag{1.1}$$

Esempio 1.1.1. Prendiamo ad esempio il lancio di un dado, voglio ottenere un numero ≥ 5, la probabilità dell'evento è

$$P = 2/6 = 1/3$$

Un altro esempio può essere la probabilità, lanciando 2 dadi, che almeno uno dei due renda un numero ≥ 4.

$$P = \frac{27}{6^2} = \frac{3}{4}$$

I casi favorevoli sono 27 perché lanciando se lanciando il primo dado ottenendo un numero ≤ 3 significa che ho 3 possibili casi per ognuno dei lanci del primo dado per ottenere un numero ≥ 4 dal lancio del secondo dado $(3 \cdot 3)$, a cui si aggiungono $(3 \cdot 6)$ casi se ottengo un numero ≥ 4 dal primo lancio (tutti i casi del secondo lancio sono validi.)

Esempio 1.1.2. Qual è la probabilità di ottenere almeno un asso pescando 2 carte da un mazzo di 54?

$$P = \frac{(50 \cdot 4) + (53 \cdot 4)}{54 \cdot 53} = \frac{206}{1431}$$

Per i casi possibili, ho 54 casi per la prima pescata e 53 per la seconda, per i casi favorevoli ho

$$\begin{cases} \text{Se pesco un Asso alla prima e una carta qualsiasi alla seconda} \implies 4 \cdot 53 \\ \text{Se non pesco un Asso alla prima e un Asso alla seconda} \implies 50 \cdot 4 \end{cases}$$

Esercizio 1.1.3. Calcolare la probabilità di pescare esattamente 2 assi pescando 5 carte

Esercizio 1.1.4. Calcolare la probabilità di pescare esattamente 2 due donne pescando 5 carte sapendo che la prima carta uscita è una figura

Svolgere questi due esercizi contando i casi è molto macchinoso. Serve introdurre un po' di calcolo combinatorio e, per il secondo esercizio, il concetto di probabilità condizionata.

1.1.1 Principio di induzione

Vogliamo dimostrare una proposizione che dipende da un indice $n \in \mathbb{N}$. Una possibile strategia dimostrativa è il *principio di induzione* Se riusciamo a dimostrare che

1. La proposizione è verificata per un certo indice n_0
2. Se assumiamo per verificata la proposizione per un generico indice n, allora riusciamo a dimostrare la proposizione per l'indice $n + 1$

allora la proposizione è verificata per ogni $n \geq n_0$.

1.1.2 Permutazioni di n elementi

Definizione 1.1.3. Una permutazione è uno scambio dell'ordine di una sequenza di elementi che possono essere di qualunque tipo. L'obiettivo è trovare il numero di tutte le permutazioni (cioè tutte le sequenze con ordine) possibili dato un certo numero n di elementi.

Proposizione 1.1.1. *Le permutazioni di un insieme di n elementi sono definite come*

$$Perm(n) = n! \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione. Come passo base possiamo verificare immediatamente che $\text{Perm}(1) = 1$.

Il passo induttivo sarà

$$\begin{aligned} \text{Perm}(n) = n! \implies \text{Perm}(n+1) &= (n+1)! \\ \text{Perm}(n+1) &= (n+1) \cdot \text{Perm}(n) \\ &= (n+1) \cdot n! = (n+1)! \end{aligned}$$

□

1.1.3 Coefficiente Binomiale

Definizione 1.1.4. Il coefficiente binomiale è un numero intero non negativo definito dalla formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{1.3}$$

Proposizione 1.1.2. *Indicato con $S_{n,k}$ il numero di modi possibili di scegliere k oggetti da un insieme di n elementi vale $S_{n,k} = \binom{n}{k}$*

Dimostrazione. Fissato $k \geq 2$ dimostriamo per induzione su $n \geq k$

Il primo passo iniziale è, per $n = k$

$$S_{k,k} = 1 = \binom{k}{k} = \frac{k!}{k!(k-k)!}$$

(c'è un solo modo di prendere k elementi da un insieme di k oggetti: prenderli tutti)

Per questa dimostrazione serve anche un ulteriore passo iniziale: dobbiamo vedere in quanti modi si possono scegliere $k - 1$ elementi da un insieme di k oggetti. Abbiamo

$$S_{k,k-1} = k = \binom{k}{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!(k-k+1)!}$$

(infatti dobbiamo semplicemente scegliere quale elemento non prendere, e quindi abbiamo k scelte possibili)

Passo induttivo: consideriamo che $S_{n+1,k} = S_{n,k} + S_{n,k-1}$ infatti posso scegliere i k elementi dai primi n, e scartare l'ultimo, oppure sceglierne $k-1$ dai primi n e prendere l'ultimo. Questa formula spiega perché abbiamo bisogno di due passi iniziali.

$$\begin{aligned}
S_{n+1,k} &= S_{n,k} + S_{n,k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!((n-k+1)+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

□

1.1.4 Disposizioni

Definizione 1.1.5. Una disposizione $D_{n,k}$ significa il numero di modi per "prendere" k oggetti ordinati da un insieme di n elementi.

Ovviamente avremo

$$D_{n,k} = S_{n,k} \cdot \text{Perm}(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.4}$$

1.2 Probabilità Condizionata

Esempio 1.2.1. Lancio due dadi sommando il risultato, qual'è $\text{P}(\geq 10)$ sapendo che il primo ha fatto almeno 3?

Sappiamo che $\text{P}(\text{Somma} \geq 10) = 6/36 = 1/6$

Poniamo il vincolo che il lancio del primo dado risulti almeno ≥ 3. Allora se vediamo i possibili risultati vediamo che i casi favorevoli sono 6 e quelli possibili sono 24, quindi

$$\text{P}(\text{Somma} \geq 10 \mid \text{Primo dado} \geq 3) = 6/24 = 1/4$$

Definizione 1.2.1. Ponendo Ω = gli eventi possibili; La **probabilità condizionata** che succeda A sapendo B si indica con:

$$\begin{gathered}
\text{P}(A|B) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\Omega|}{|B|} \\
\text{P}(A|B) = \frac{\text{P}(A \cap B)}{\text{P}(B)}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Esempio 1.2.2. Nel lancio di un dado, la probabilità di ottenere ≤ 4 sapendo che è uscito un numero pari è

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\leq 4|\text{pari}) &= \frac{\mathrm{P}(\leq 4|\text{pari})}{\mathrm{P}(\text{pari})} \\ \mathrm{P}(\text{pari}) &= 3/6 = 1/2 \\ \mathrm{P}(\leq 4 \cap \text{pari}) &= 2/6 \\ \implies \mathrm{P}(\leq 4|\text{pari}) &= \frac{2/6}{1/2} = 2/3 \end{aligned}$$

Definizione 1.2.2. Definiamo il **complementare** di un evento, ovvero $A^C = \Omega \backslash A$. La probabilità di un complementare è $\mathrm{P}\left(A^C\right) = 1 - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\Omega) - \mathrm{P}(A)$

In generale, dati due eventi A, B con $A \cap B \neq 0$ si ha che la probabilità dell'unione è $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Definizione 1.2.3. Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$.

Dalla definizione di probabilità condizionata si ottiene che se A e B sono indipendenti vale $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

1.3 Esercizi

Esercizio 1.3.1. Terno al lotto: Giocando 5 numeri al lotto (estrazione da 1 a 90) calcolare la probabilità di ottenere un terno esatto e più di un terno.

Se vogliamo ottenere un terno esatto i casi possibili sono $\binom{90}{5}$ (I modi di estrarre 5 palline dall'urna). I casi favorevoli saranno $S_{5,3} \cdot S_{85,2} = \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$ (ovvero i modi in cui si possono scegliere 3 numeri tra i 5 estratti e 2 numeri dagli altri).

La probabilità di ottenere un terno esatto sarà quindi

$$\mathrm{P}(\text{terno esatto}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \simeq \frac{1}{1230}$$

Per ottenere almeno un terno i casi favorevoli sono

- terno: $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$
- quaterna: $\binom{5}{4}\binom{85}{1}$
- cinquina: 1

La probabilità di ottenere almeno un terno sarà data dalla somma delle probabilità corrispondenti a terno, quaterna e cinquina:

$$\mathrm{P}(\text{almeno un terno}) = \frac{\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{85}{1}\binom{5}{4}}{\binom{90}{5}} + 1$$

Esercizio 1.3.2. Probabilità del gioco di Monty Hall Nel gioco televisivo di Monty Hall il partecipante deve scegliere una fra tre porte, una di esse contiene un premio mentre le altre due contengono rispettivamente due capre. Dopo la scelta del giocatore iniziale il presentatore apre una delle due porte contenenti una capra. Al giocatore conviene cambiare porta o mantenere quella scelta in origine?

Ipotesi Se scelgo una porta e la mantengo vinco solo se il premio era nella porta che ho scelto $\implies P = 1/3$

Ipotesi Se scelgo una porta e la cambio avrò $P = 2/3$

1	2	3
x	x	\$
x	\$	x
\$	x	x

Tabella 1.1: Gioco di Monty Hall

Esercizio 1.3.3. Dado rosso e dado nero

Tiriamo due dadi, uno rosso ed uno nero. Calcolare la probabilità che il dado rosso risulti 3 sapendo che sul dado nero è uscito 2:

$$\mathrm{P}\left(R = 3 \mid N = 2\right) = \frac{\mathrm{P}\left(R = 3 \cap N = 2\right)}{\mathrm{P}\left(N = 2\right)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$
$$\mathrm{P}\left(R = 3\right) = 1/6$$

Ne otteniamo che $\mathrm{P}\left(A|B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) \implies A, B$ sono indipendenti.

Capitolo 2

Spazio Probabilizzato

2.1 Lo Spazio Probabilizzato

Definizione 2.1.1. L'insieme delle parti di A, indicato con $\mathcal{P}(A)$, è dato da tutti i sottoinsiemi che posso costruire a partire dagli elementi di A. Ad esempio:

$$A = \{0, 1\}$$
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}\}$$

Definizione 2.1.2. Un inseme $F \subseteq \mathcal{P}(A)$ chiuso rispetto a intersezione, unione e complementare, ovvero

$$A, B \in F \implies \begin{cases} A \cup B \\ A \cap B \\ A^C, B^C \end{cases} \in F$$

Si chiama *algebra*.

Se è chiuso rispetto all'unione numerabile di insiemi, ovvero se $A_1, \ldots, A_n \subset F$ allora $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F$, allora F si dice σ-Algebra (o tribù).

Uno **spazio probabilizzato** è un ente matematico che serve per introdurre una definizione più rigorosa e più flessibile di probabilità rispetto a quella usata fino ad adesso.

Definizione 2.1.3. Uno spazio probabilizzato è definito come una terna:

$$(\Omega, F, P) \tag{2.1}$$

Dove Ω è l'insieme degli eventi elementari, ovvero tutti i risultati possibili, ad esempio in un lancio di un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, F è una σ-algebra contenuta nelle parti di Ω e la probabilità P è una funzione definita come

$$\begin{gathered} P : F \to [0, 1] \\ P(\Omega) = 1 \\ \forall i \neq j \;.\; A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Spesso, se Ω è un insieme finito, allora si prende $F = \mathcal{P}(\Omega)$ e

$$P(A \subset F) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

ritrovando il concetto intuitivo del primo capitolo, ma definito in maniera rigorosa.

Proposizione 2.1.1. *Dagli assiomi di probabilità dati sopra si possono dimostrare le seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned} P(A^C) &= 1 - P(A) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ A \subseteq B &\implies P(A) \leq P(B) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Esempio 2.1.1. Lotteria di De' Finetti: Si assiste all'estrazione di un numero $n \in \mathbb{N}$ casuale. Supponiamo che ogni numero abbia la stessa probabilità di essere estratto.

Dato un altro naturale $m \in \mathbb{N}$

$$p_n = P(n) = \text{ La probabilità di estrarre il numero n}$$

Vogliamo che $0 \leq p_n \leq 1$ e anche $p_m = p_n \; \forall n = m$. Quindi $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$. Assumendo $p_n = 0 \; \forall n$ allora $\sum_n p_n = 0$. Se $p_n = c > 0, \forall n$ allora $\sum_n p_n = \sum_n c = +\infty$ In nessuno dei due casi è possibile che $\mathrm{P}\left(\Omega\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$, quindi la lotteria di De Finetti non si può modellizzare con l'ipotesi che ogni numero sia equiprobabile.

Si noti che nello stesso esempio, se si prende come $F = \{\emptyset, \{\text{numeri pari}\}, \{\text{numeri dispari}\}, \mathbb{N}\}$, supponendo sempre che ogni numero abbia la stessa probabilità di venire estratto, si può dare una buona definizione di probabilità almeno all'estrazione di un numero pari o dispari:

$$\begin{gathered} P(\emptyset) = 0 \\ P(\{\text{numeri pari}\}) = 1/2 \\ P(\{\text{numeri dispari}\}) = 1/2 \\ P(\mathbb{N}) = 1/2 \end{gathered}$$

Questo è un esempio in cui è utile prendere una σ-algebra che non coincida con le parti di A

Definizione 2.1.4. Densità di Probabilità discreta: Una successione $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $p_n \in \mathbb{R}$ con $p_n \geq 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$ è detta densità di probabilità discreta.

Se $\{p_n\}$ è una densità di probabilità discreta, allora su $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ si può definire la probabilità $P(n) = p_n$. In tal modo $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$ diventa uno spazio probabilizzato.

Definizione 2.1.5. Ultimo assioma di probabilità: Se $P(B) \neq 0$, si definisce la probabilità condizionata come

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

e si dice che A e B sono indipendenti se $P(A \mid B) = P(A)$.

Questo ultimo assioma rende rigoroso quello che avevamo visto con la probabilità intuitiva nel capitolo precedente. La definizione di indipendenza a prima vista sembra strana: da una parte il ruolo di A e B sembra simmetrico (si dicono indipendenti entrambi), ma nella formula il ruolo di A e B non sembra intercambiabile. In effetti anche nella formula precedente i ruoli si possono scambiare, come dimostra la proposizione seguente.

Proposizione 2.1.2. *Se* $P(A \mid B) = P(A)$ *allora* $P(B \mid A) = P(B)$

Dimostrazione. Supponiamo che entrambi gli eventi non siano impossibili. Si ha

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Allora

$$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

da cui segue

$$P(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B \mid A).$$

□

Si può usare la definizione equivalente di eventi indipendenti

Definizione 2.1.6. A e B sono indipendenti se $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \cdot P(B)$

Quest'ultima definizione si generalizza bene al caso di molti eventi indipendenti.

Definizione 2.1.7. Gli eventi $A_1, \dots, A_n$ si dicono indipendenti se per ogni scelta di indici $i_1, \dots, i_k$ vale

$$P\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Esempio 2.1.2. A, B indipendenti $\implies \left\{(A, B^C), (A^C, B^C), (A^C, B)\right\}$ indipendenti

Dimostrazione. Dimostriamo solo che A e B^C sono indipendenti, le altre sono analoghe

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) \implies$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B^C) \implies$$
$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B^C)$$

□

Esercizio 2.1.3. Lancio due dadi, uno rosso ed uno nero. Definiamo lo spazio probabilizzato con $\Omega = \{(r, n),\ \text{dove } r = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F = \mathcal{P}(\Omega)$, e la probabilità intuitiva, es $\mathrm{P}(n = 1) = \dfrac{1}{36}$.

Calcoliamo la probabilità che il rosso sia 3 sapendo che rosso + nero fa 6

$$\mathrm{P}(r = 3 \mid r + n = 6) = \frac{\mathrm{P}(r = 3 \cap r + n = 6)}{\mathrm{P}(r + n = 6)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

Probabilità che il rosso sia pari sapendo che rosso + nero fa 6

$$\mathrm{P}(r = \text{ pari} \mid r + n = 6) = \frac{\mathrm{P}(r \text{ pari} \cap r + n = 6)}{\mathrm{P}(r + n = 6)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

Esercizio 2.1.4. Gioco di Monty Hall: Riprendendo il gioco delle tre porte definiamo lo spazio probabilizzato: Formalizzo di aver scelto la porta 3. $\Omega = (x, y)$ dove $x = 1, 2, 3$ è la porta vincente e $y = 1, 2$ è la porta perdente che è stata aperta dal presentatore. Gli eventi impossibili saranno $\mathrm{P}(1,1) = 0, \mathrm{P}(2,2) = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x=1) = \mathrm{P}(x=2) = \mathrm{P}(x=3) &= \frac{1}{3} \\ \mathrm{P}(x=1, y=2) &= \frac{1}{3} \\ \mathrm{P}(x=2, y=1) &= \frac{1}{3} \\ \mathrm{P}(x=3, y=1) = \mathrm{P}(x=3, y=2) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{P}(y=1) = \mathrm{P}(y=2) = \frac{1}{2}$
Se scelgo la porta 3, suppongo venga aperta la 2. Se non cambio e vinco $(x = 3)$ allora

$$\mathrm{P}(x=3 \mid y=2) = \frac{\mathrm{P}((3,2))}{\mathrm{P}(y=2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Se scelgo la porta 3, suppongo venga aperta la 1 e cambio allora:

$$\mathrm{P}(x=1 \mid y=2) = \frac{\mathrm{P}((1,2))}{\mathrm{P}(y=2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \tag{2.4}$$

2.2 Formula di fattorizzazione

Definizione 2.2.1. Dato uno spazio probabilizzabile (Ω, F), una famiglia di insiemi $B_1, \ldots, B_n \in F$, con $n \in \mathbb{N}$ è detta una partizione finita di Ω se se $\forall i, j$ con $j \neq i$ allora $B_i \cap B_j = \emptyset$ e se $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

Lemma 2.2.1. *Sia $\{B_i\}_{i=1,\ldots,n}$ partizione finita di Ω e sia $P(B_i) > 0$ $\forall i$. Allora si avrà*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) \tag{2.5}$$

Dimostrazione.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

□

Definizione 2.2.2. Condizionamento Ripetuto: Dati $A_1, \ldots, A_n$ eventi, allora

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ \ldots \ \cdot \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

2.3 Formula di Bayes

Lemma 2.3.1. *Dati due eventi A, B con probabilità non nulla $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ allora*

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} \tag{2.6}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\
\mathrm{P}(B \mid A) &= \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \\
\implies \mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A), \\
\implies \mathrm{P}(A \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Esercizi

Esercizio 2.4.1. Un produttore di vino produce due vini (bianco B e rosso R) e vende in Francia (F) e Germania (G). Le vendite totali sono 1/3 per la Francia e 2/3 per la Germania. Le richieste della Francia sono per 3/4 vino bianco e per 1/4 di vino rosso. Le richieste della Germania si dividono equamente tra vino bianco e vino rosso Utilizzando la formula di partizione troviamo la probabilità che una richiesta (senza sapere da chi viene fatta) sia vino bianco.

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid G) \cdot \mathrm{P}(G) + \mathrm{P}(B \mid F) \cdot \mathrm{P}(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Esercizio 2.4.2. Abbiamo 3 livelli di preparazione di degli studenti iscritti ad un esame: Ottimo, Buono e Scarso. Un esito dell'esame è Promosso o Respinto.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{Promosso} \mid \text{Ottimo}) &= 0.995 \\
\mathrm{P}(\text{Promosso} \mid \text{Scarso}) &= 0.3 \\
\mathrm{P}(\text{Promosso} \mid \text{Buono}) &= 0.8
\end{aligned}$$

Uno studente prova l'esame e viene respinto. Qual è la probabilità che avesse una preparazione scarsa (ovvero $\mathrm{P}(\text{Scarso} \mid \text{Respinto})$)? Prima calcoliamo la probabilità di essere respinti.

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(R \mid O) \cdot \mathrm{P}(O) + \mathrm{P}(R \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(R \mid S) \cdot \mathrm{P}(S) = 0.302$$

Senza informazioni aggiuntive $\mathrm{P}(O) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(S) = \frac{1}{3}$. La probabilità di essere respinto è $\mathrm{P}(R) = 0.302$ quindi

$$\mathrm{P}(S \mid R) = \frac{\mathrm{P}(R \mid S) \cdot \mathrm{P}(S)}{\mathrm{P}(R)} = \frac{0.7 \cdot 1/3}{0.302} = 0.773$$

Esercizio 2.4.3. Qual è la probabilità che lo studente aveva di avere una preparazione scarsa, sapendo che è stato respinto e sapendo che le probabilità dei voti sono:

$$\mathrm{P}(O) = \frac{1}{6}, \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}, \mathrm{P}(S) = \frac{1}{6}$$

Calcoliamo, come prima $\mathrm{P}(R) = 0.005 \cdot \frac{1}{6} + 0.2 \cdot \frac{2}{3} + 0.7 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.25$. Abbiamo quindi che

$$\mathrm{P}(S \mid R) = \frac{0.7 \cdot 1/6}{0.25} \approx 0.466$$

Esercizio 2.4.4. La probabilità di ammalarsi di un soggetto a rischio (R) è 0.2, mentre la probabilità di ammalarsi di un soggetto non a rischio (N) è 0.006. Il 15% della popolazione è di soggetti a rischio. Un malato si denota con M mentre uno sano con S. Vogliamo sapere

1. $\mathrm{P}(\text{Soggetto casuale sia malato}) =$

   $\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(M \mid R) \cdot \mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(R \mid N) \cdot \mathrm{P}(N) = 0.35$

   $\mathrm{P}(M) = 0.2 \cdot 0.15 + 0.006 \cdot 0.85 = 0.35$

2. $\mathrm{P}(\text{Soggetto malato fosse a rischio}) =$

   $\mathrm{P}(R \mid M) = \dfrac{\mathrm{P}(M \mid R) \cdot \mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(M)} = \dfrac{0.2 \cdot 0.15}{0.35} = 0.855$

3. $\mathrm{P}(\text{Soggetto soggetto sano sia a rischio}) =$

   $\mathrm{P}(R \mid S) = \dfrac{\mathrm{P}(S \mid R) \cdot \mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{(1 - 0.2) \cdot 0.15}{(1 - 0.35)} = 0.124$

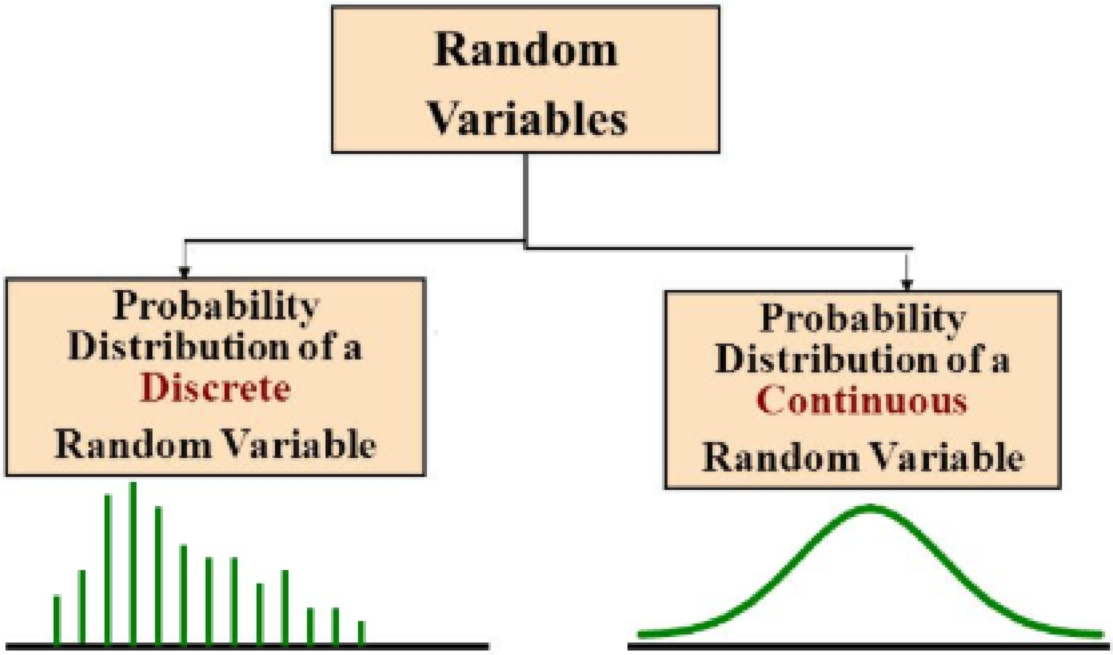
Nota. La probabilità che l'evento A^c (A complementare) si verifichi sapendo B è $\mathrm{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$ mentre la probabilità di A sapendo B^c è $\mathrm{P}(A \mid B^c) \not\equiv 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$.

Definizione 2.4.1. Prendendo S = soggetti sani, M = soggetti malati, T^- = test negativo, T^+ = test positivo. La **specificità** di un test è $\mathrm{P}(T^- \mid S)$. Una specificità alta implica pochi falsi positivi. La **sensibilità** è $\mathrm{P}(T^+ \mid M)$. Una sensibilità alta implica pochi falsi negativi.

Capitolo 3

Variabili Aleatorie

Figura 3.1: Tipi di variabili casuali



3.1 Variabili Aleatorie Discrete

Una variabile aleatoria è una funzione che può assumere diversi valori in dipendenza da qualche fenomeno casuale. Il risultato del lancio di un dado, o la vincita legata a tale risultato, ad esempio, sono variabili aleatorie.

Definizione 3.1.1. Prendiamo uno spazio probabilizzabile (Ω, F). Una variabile aleatoria discreta è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$, che assume valori in un sottoinsieme finito o numerabile $\{a_1, \ldots, a_k, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ e tale che $\forall j$ la controimmagine di a_j sia un elemento della σ-algebra, ovvero che

$$X^{-1}(a_j) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a_j\} \in F.$$

Definizione 3.1.2. Data la probabilità di tutti gli eventi posso definire la densità di probabilità associata ad X: nello spazio probabilizzato (Ω, F, P) la probabilità che la variabile aleatoria assuma il valore a_j sarà $p_j = \mathrm{P}(X = a_j) = \mathrm{P}(X^{-1}(a_j))$. La successione $\{p_j\}$ viene detta *densità di probabilità di X*.

Dato che X è una funzione valgono le seguenti proprietà

1. $\forall j$ gli insiemi $X^{-1}(a_j)$ sono tutti disgiunti.
2. La loro unione copre Ω

Proposizione 3.1.1. *La successione $\{p_j\}$ sopra definita è effettivamente una densità di probabilità*

Dimostrazione. Ovviamente abbiamo $p_j \geq 0$ per ogni j. Inoltre vale $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$, infatti

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}\left(\bigcup_j X^{-1}(a_j)\right) = \sum_j \mathrm{P}\left(X^{-1}(a_j)\right)$$

□

Sia $X : \Omega \to \{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ una variabile aleatoria definita su uno spazio probabilizzabile (Ω, F), sia $\{p_j\}_j$ la densità di probabilità di X. Allora si può dotare (Ω, F) della probabilità indotta da X definita come $\mathrm{P}(X = a_j) = p_j$.

Esempio 3.1.1. Preso uno spazio probabilizzabile (Ω, F) e una variabile aleatoria $X : \Omega \to \{a_1, \dots, a_k\}$, supponendo che i numeri a_j siano ordinati, sia p_j la densità di probabilità , come posso ricostruire, ad esempio $\mathrm{P}(x \leq a_3)$?

$$\mathrm{P}(X \leq a_3) = \mathrm{P}(X = a_1) + \mathrm{P}(X = a_2) + \mathrm{P}(X = a_3) = p_1 + p_2 + p_3$$

Esempio 3.1.2. Voglio contare quanti 6 escono in 10 lanci di dadi.

Sia $\Omega = \{(1, 2, 3, 4, 5, 6)\}^{10}$, ovvero tutte le possibili parole di 10 elementi composte dai numeri da 1 a 6. Ad ogni lancio, ho $\frac{1}{6}$ di probabilità di ottenere 6 e $\frac{5}{6}$ di ottenere gli altri numeri. Definiamo la variabile aleatoria $X : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$ come il conteggio dei risultati dei lanci dove ottengo 6. Qual è la probabilità di ottenere 3 lanci dove ho fatto 6? Deve uscire 3 volte il numero 6, con probabilità 1/6, e 7 volte un numero diverso da 6, con probabilità 5/6. Inoltre non conta l'ordine, quindi devo moltiplicare per i modi in cui si prendono 3 oggetti (i tre dadi che hanno fatto 6) da un insieme di 10 elementi (tutti i lanci). Abbiamo quindi

$$\mathrm{P}(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

3.2 Variabili Aleatorie notevoli

Definizione 3.2.1. Legge di Bernoulli: Faccio un esperimento, il risultato positivo ha probabilità p, mentre il risultato negativo ha probabilità $1 - p$. Definisco $\Omega = \{\text{successo}, \text{insuccesso}\}$ Una variabile aleatoria Bernoulliana è definita come

$$X : \Omega \to \{0, 1\}$$
$$X(\text{successo}) = 1$$
$$X(\text{insuccesso}) = 0.$$

Ovviamente avremo la densità di X data da $p_0 = p$, $p_1 = 1 - p$.

Definizione 3.2.2. Legge Binomiale Sia k il conteggio dei successi di n esperimenti ripetuti, tutti indipendenti. Abbiamo quindi che $B(n, p) : \Omega = \{\text{successo}, \text{insuccesso}\}^n \to \{0, \dots, n\}$. Abbiamo che la densità di probabilità Binomiale $p_k = \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ (abbiamo k successi con prob. p, $n - k$ insuccessi di prob. $1 - p$ e non conta l'ordine).

Siamo sicuri che p_k sia una densità ? Sappiamo che $p_k \geq 0$. Vediamo che $1 = \sum_k p_k$, infatti, ricordando che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (binomio di Newton), abbiamo che

$$\sum_k p_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Esempio 3.2.1. Somma di Variabili Aleatorie Lancio due dadi, uno rosso e uno nero, avremo quindi $\Omega = \{(R, N) \ : \ R, N = 1, \ldots, 6\} = \{(1, \ldots, 6)\}^2$. Definisco due variabili aleatorie, X per il dado rosso dove $X : (R, N) \to R$ e la variabile $Y : (R, N) \to N$. La densità per X sarà $p_j = \frac{1}{6}$ $\forall j$ mentre la densità per Y sarà $q_j = \frac{1}{6}$ $\forall j$ Definiamo $Z = X + Y$ conta la somma dei dadi.

Calcolare la densità di Z

In questo caso X, Y sono indipendenti, quindi avremo la densità di Z detta t_n con $n = 2, \ldots, 12$ data da

$$t_n = \mathrm{P}(Z = n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = n - i)$$

$X+Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_j + q_j$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Tabella 3.1: Distribuzione discreta della somma del lancio di due dadi.

Figura 3.2: Distribuzione della somma del lancio di due dadi

Esempio 3.2.2. Calcolare $\mathrm{P}(4 \leq Z \leq 6)$

$$\mathrm{P}(4 \leq Z \leq 6) = \mathrm{P}(Z=4) + \mathrm{P}(Z=5) + \mathrm{P}(Z=6) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Definizione 3.2.3. Indipendenza di variabili aleatorie Due variabili aleatorie X_1, X_2 sono indipendenti se $\forall I_1, I_2, \subseteq \mathbb{R}$ intervalli o semirette si ha che

$$(\mathrm{P}(X_1 \in I_1) \cap \mathrm{P}(X_2 \in I_2)) = \mathrm{P}(X_1 \in I_1) \cdot \mathrm{P}(X_2 \in I_2)$$

Nell'esempio di prima X, Z sono dipendenti perché, dati $I_1 = [3,4], I_2 = [1,2]$, allora si ha che $\mathrm{P}(X \in I_1) = \mathrm{P}(X = 3,4) = \frac{1}{3}$ e si ha anche $\mathrm{P}(Z \in I_2) = \mathrm{P}(Z = 1,2) = \mathrm{P}(Z = 2) = \frac{1}{36}$. D'altra parte se ottengo 3 o 4 con il primo dado la somma sarà sempre superiore a 5, quindi

$$\mathrm{P}((X \in I_1) \cap (Z \in I_2)) = 0 \neq \mathrm{P}(X \in I_1) \cdot \mathrm{P}(Z \in I_2)$$

Definizione 3.2.4. Variabili Aleatorie Congiunte Due variabili aleatorie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ discrete sono congiunte quando si può calcolare $\mathrm{P}(X = m \cap Y = n) = p_{n,m}$, ovvero una densità di probabilità $\{p_{n,m}\}_{n,m}$ con $(p_{n,m} \geq 0) \wedge (\sum_{n,m} p_{n,m} = 1)$.

Sapendo $p_{n,m}$ ricavo tutti i $\mathrm{P}(X = m) = p_m^X$ e $\mathrm{P}(Y = n) = q_n^Y$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} p_m^X = \mathrm{P}(X = m) &= \mathrm{P}\left(X = m \cap \left\{\bigcup_n Y = n\right\}\right) \\ &= \sum_n \mathrm{P}(X = m, Y = n) = \sum_n p_{n,m} \\ q_n^Y &= \mathrm{P}(Y = n) = \sum_m p_{n,m} \end{aligned}$$

In generale non si può ricostruire dalle due densità di probabilità la densità della variabile aleatoria congiunta. Ad esempio, conoscendo p_n^X, q_n^Y cerco $p_{n,m} = \mathrm{P}(X = m \cap Y = n) = \mathrm{P}(X = m | Y = n) \cdot \mathrm{P}(Y = n)$, ma non conosco necessariamente $\mathrm{P}(X = m | Y = n)$ Se X, Y sono indipendenti allora $P(X = m \mid Y = n) = \mathrm{P}(X = m)$ e vale il prodotto $p_{m,n} = p_n^X \cdot q_m^Y$. Si noti che in questo caso si verifica subito che $p_{m,n}$ è una densità di probabilità, infatti $p_{m,n} \geq 0$ perché sia p_n^X che q_m^Y lo sono; inoltre

$$\sum_m \sum_n p_{n,m} = \sum_m \sum_n p_n^X \cdot q_m^Y = \left(\sum_m p_m^X\right)\left(\sum_n q_m^Y\right) = 1$$

Definizione 3.2.5. Formula di Convoluzione

Tornando alla somma di due variabili aleatorie discrete, dati X, Y indipendenti e $Z = X + Y$, con $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$, se vogliamo calcolare $\mathrm{P}(Z = n)$ e la densità di probabilità discreta $\{Z = n\}$ possiamo usare le seguenti formule (dette di convoluzione)

$$\{Z = n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{X = i \cap Y = n - i\}$$

$$\mathrm{P}(z = n) = \sum_i \mathrm{P}(X = i \cap Y = n - i) = \sum_{i=n}^{n} \mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = n - i)$$

Ho definito $B(n, p)$ come i successi di n esperimenti che hanno successo con prob. p. In effetti vale la seguente formula

Proposizione 3.2.1. *Si ha che* $B(n,p) = \sum_{i=1}^{n} Bern_i(p)$

Dimostrazione. Caso base, per $n = 1$ ovviamente $B(1,p) = \text{Bern}(p)$. Vediamo il passo induttivo:

$$B(n,p) = \sum_{i=1}^{n} \text{Bern}_i(p) \implies B(n+1,p) = \sum_{i=1}^{n+1} \text{Bern}_i(p)$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{n+1} \text{Bern}_i(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} \text{Bern}_i(p) \right) + \text{Bern}_{n+1}(p) = B(n,p) + \text{Bern}(p)$$

Introduciamo le densità per continuare la dimostrazione

$$\begin{aligned} \text{P}\left(B(n,p) + \text{Bern}(p) = k\right) &= \text{P}\left(B(n,p) = k \cap \text{Bern}(p) = 0\right) + \text{P}\left(B(n,p) = k-1 \cap \text{Bern}(p) = 1\right) \\ &= \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \cdot p + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot (1-p) \\ = \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] p^k (1-p)^{n-k+1} &= \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} = \text{P}\left(B(n+1,p) = k\right) \end{aligned}$$

□

Definizione 3.2.6. Variabile Geometrica Ripetiamo una successione esperimenti identici ed indipendenti con probabilità di successo $0 \leq p \leq 1$ fino ad ottenere il primo successo. Geom(p) conta il numero di prove che abbiamo fatto. Ovvero $\text{P}\left(\text{Geom}(p) = k\right) =$ la probabilità di fare k esperimenti di cui i primi $k-1$ sono stati insuccessi e l'ultimo un successo. La densità di probabilità sarà quindi

$$p_k = \text{P}\left(\text{Geom}(p) = k\right) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Ovviamente $p_k \geq 0$ e anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

dalla somma della una serie geometrica. Quindi p_k è una densità di probabilità

Una variabile geometrica **non ha memoria**, ovvero la probabilità di avere un successo all'esperimento numero n dopo $n-1$ fallimenti ha la stessa probabilità avere un successo al primo esperimento. Infatti vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.2.2. *Si ha*

$$P\left(Geom(p) = n + m | Geom(p) > n\right) = P\left(Geom(p) = m\right)$$

Dimostrazione. Notiamo che dire che abbiamo avuto successo alla prova $m+n$ già contiene l'informazione che abbiamo avuto almeno n insuccessi. Inoltre $\text{Geom}(p) > n$ significa avere avuto sicuramente n insuccessi, quindi $\text{P}\left(\text{Geom}(p) > n\right) = (1-p)^n$, quindi si ha

$$\begin{aligned} &\text{P}\left(\text{Geom}(p) = n + m \mid \text{Geom}(p) > n\right) = \\ = \frac{\text{P}\left(\text{Geom}(p) = m + n \cap \text{Geom}(p) > n\right)}{\text{P}\left(\text{Geom}(p) > n\right)} &= \frac{\text{P}\left(\text{Geom}(p) = m + n\right)}{\text{P}\left(\text{Geom}(p) > n\right)} \\ = \frac{(1-p)^{m+n-1} \cdot p}{(1-p)^n} &= (1-p)^{m-1} \cdot p = \text{P}\left(\text{Geom}(p) = m\right) \end{aligned}$$

□

Si può dimostrare sapendo che $\forall m.\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=n+m\cap \mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}\right)>n\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p)=m+n\right)$

Definizione 3.2.7. Variabili Ipergeometriche

Siano dati r sfere rosse, b sfere bianche, n estrazioni senza reimbussolamento, k = numero di sfere rosse estratte, $H(b+r,r,n)$ conta il numero di sfere rosse estratte dopo n tentativi. Questa variabile si chiama variabile ipergeometrica. Le condizioni di esistenza per i parametri sono $(0<n\leq b+r)\wedge(k\leq n)\wedge(k\leq r)\wedge(n-k\leq b)$ ovvero $\max(0,n-b)\leq k\leq \min(n,r)$.

Estrarre k sfere rosse in n estrazioni significa estrarne k rosse e $n-k$ bianche, senza tener conto dell'ordine, e i casi possibili sono $\binom{b+r}{n}$ (estrarre n sfere da un totale di $b+r$) Quindi la densità di probabilità è

$$\mathrm{P}\left(H(b+r,r,n)=k\right)=\frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

Esempio 3.2.3. Abbiamo 10 sfere rosse, 15 bianche e facciamo 7 estrazioni. Voglio contare il numero di sfere rosse estratte.

Senza reimbussolamento: $H(25,10,7)$

Con reimbussolamento: $B(7,2/5)$ (infatti sono 7 esperimenti identici con prob. di successo pari a $10/25=2/5$

Definizione 3.2.8. Binomiale Negativa (o di Pascal) Sia data una Bernoulliana di parametro p. Ripetiamo l'esperimento fino a che non ho n successi. Quanti sono i fallimenti ottenuti? Se la binomiale negativa, indicata con $NB(n,p)$ ha valore k significa che ho fatto $n+k$ prove, e ho avuto n successi e k fallimenti (in qualsiasi ordine) la densità di probabilità di una Binomiale Negativa quindi si definisce come

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{NB}\left(n,p\right)=k\right)=p^n(1-p)^k$$

Riassumendo: una variabile Binomiale conta i successi, una variabile Geometrica conta i fallimenti prima del primo successo e la Binomiale Negativa (NB) conta i fallimenti prima del successo n-esimo. In una Binomiale Negativa non conta l'ordine degli esperimenti (tranne l'ultimo risultato). Le prove totali prima di avere n successi sono $n+\mathrm{NB}$.

Esempio 3.2.4. Lancio una moneta fino ad ottenere 3 croci (non consecutive). Qual è la probabilità di aver fatto esattamente 2 risultati testa? E di avere ottenuto almeno una testa?

$\mathrm{P}\left(\mathrm{NB}\left(3,\frac{1}{2}\right)=2\right)=\binom{3+2-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{16}$.

La probabilità di ottenere almeno un risultato testa è complementare ad avere ottenuto solo croci, quindi è pari a $1-\mathrm{P}\left(\mathrm{NB}\left(3,\frac{1}{2}\right)=0\right)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

3.3 Valore Atteso

Consideriamo di voler calcolare la media pesata dei voti degli esami universitari. La media sarà per ogni esame i:

$$\sum_i \frac{(\text{voto})_i\cdot(\text{crediti})_i}{\sum_i \text{crediti}}=\sum_i(\text{voto})_i\cdot(\text{peso})_i$$

Se vogliamo definire la media, o il valore atteso di una variabile aleatoria discreta ragioniamo in maniera analoga, con il $(\text{peso})_i$ sarà dato dalla probabilità che X assuma il valore i.

Definizione 3.3.1. Media Pesata, Speranza o Valore Atteso Sia X una variabile aleatoria discreta. La media di X, detta anche **speranza** o **valore atteso** si definisce come

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_k k\cdot\mathrm{P}\left(X=k\right)=\sum_k k\cdot p_k$$

Più in generale, data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per calcolare il valore atteso della variabile $f(X)$ si definisce

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \sum_k f(k) \cdot p_k$$

Osservazione $\sum_k p_k = 1$ non implica che $\sum_k kp_k$ sia convergente. Se $\sum_k kp_k$ non converge ad un numero allora si dice che la variabile non ha media.

Proposizione 3.3.1. *Se la variabile assume solo valori interi positivi allora*

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(X > k\right) \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Se si scrive $\mathrm{P}\left(X > k\right) = \mathrm{P}\left(X = k+1\right) + \mathrm{P}\left(X = k+2\right) + \dots$ per ogni k, e poi si inizia a sommare ci si accorge che p_0 non compare mai, p_1 compare una sola volta, p_2 2 volte e in generale p_k compare esattamente k volte. Quindi $\sum_k \mathrm{P}\left(X > k\right) \sum_k kp_k = \mathbb{E}\left[X\right]$. □

Proposizione 3.3.2. *La speranza di una Binomiale $B(n,p)$ vale $\mathbb{E}\left[B(n,p)\right] = np$.*

Dimostrazione. La densità di $B(n,p)$ è $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\forall k \in [0,n]$. Abbiamo che $kp_k = k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$. Definiamo $h = k-1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B(n,p)\right] = \sum_{k=1}^{n} kp_k &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} p^{h} (1-p)^{(n-1)-h} \\
&= np(p + (1-p))^{n-1} = np
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la formula del binomio di Newton. □

Proposizione 3.3.3. *La speranza di di una variabile geometrica Geom(p) vale $\mathbb{E}\left[Geom(p)\right] = 1/p$.*

Dimostrazione. Usiamo la formula (3.1), perché altrimenti non è banale nemmeno dimostrare la convergenza della serie.

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p) > k\right)$$

Come abbiamo già osservato $\mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p) > k\right) = (1-p)^k$, quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{Geom}(p) > k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

□

Esempio 3.3.1. Scommetto. Pago 1 euro. Lancio 3 dadi e guadagno 1 euro ogni 6 che esce. Rappresento il guadagno con una variabile binomiale $X = B(3, 1/6) - 1$. Abbiamo che $\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[B(3, 1/6)\right] - 1 = 3 \cdot 1/6 - 1 = -1/2$ (quindi non mi conviene scommettere!)

Definizione 3.3.2. Distribuzione di Poisson Nel caso di una variabile binomiale conosco p e n (numero esperimenti). In una distribuzione di Poisson si conosce una media μ di successi in un intervallo di osservazione τ, e si suppone che nell'intervallo di tempo si verifichino molte prove indipendenti tra di loro. In qualche senso (euristico) la variabile di Poisson di parametro μ rappresenta il limite di una binomiale $B(n,p)$ con $n \to \infty$. In effetti supponiamo che nell'intervallo τ avvengano n prove di parametro p tutte indipendenti tra di loro. Se abbiamo in media μ successi per intervallo τ, se n è molto grande si può supporre che $\mu = \mathbb{E}\left[B(n,p)\right] = np$. Per definire la Poisson allora proviamo a fare il limite di una densità binomiale.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(B(n,p) = k\right) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \frac{\mu^k}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} \frac{\mu^k}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} \cdot \frac{\mu^k}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Con questo ragionamento (non rigoroso!) possiamo definire

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Poisson}(\mu) = k\right) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \tag{3.2}$$

La variabile di Poisson in qualche senso ci dice quanto è la probabilità che in un certo intervallo di tempo ci si discosti dal valore medio che ci si aspetta in uno stesso intervallo di tempo.

Esempio 3.3.2. Siamo nel secolo 1800, prendiamo l'esercito di Napoleone nel reparto della cavalleria. Ogni anno 12 cavalieri muoiono per incidente a cavallo. Voglio sapere la probabilità che nel 1861 siano morti 7 cavalieri.

$$\mathrm{P}\left(\text{anno 1861} | \text{sono morti 7 cavalieri}\right)$$

Utilizziamo la distribuzione di Poisson.

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Poisson}(12) = 7\right) = \frac{12^7}{7} e^{-12} \approx 0.04$$

Proposizione 3.3.4. *Linearità della media*
Siano date X, Y variabili aleatorie, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$\mathbb{E}\left[\alpha X + \beta Y\right] = \alpha \mathbb{E}\left[X\right] + \beta \mathbb{E}\left[Y\right]$$

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà nel caso $\alpha = \beta = 1$. La dimostrazione nel caso generale è assolutamente analoga. Supponiamo anche, per semplificare le notazioni, che X, Y assumano valori naturali. Come al solito, chiamiamo $p_{i,j} = \mathrm{P}\left(X = i \cap Y = j\right)$, $p_i^X = \mathrm{P}\left(X = i\right)$ e $q_j^Y = \mathrm{P}\left(Y = j\right)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X+Y\right] &= \sum_{i,j} (i+j) p_{i,j} = \sum_{i,j} i p_{i,j} + \sum_{i,j} j p_{i,j} \\ &= \sum_i i \sum_j p_{i,j} + \sum_j j \sum_i p_{i,j} \\ &= \sum_i i p_i^X + \sum_j j q_j^Y = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[Y\right] \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.3.5. ***Valore atteso del prodotto*** *Siano date X, Y variabili aleatorie* ***indipendenti****. Allora*

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Dimostrazione. Se X e Y sono indipendenti, allora abbiamo che $p_{i,j} = p_i^X \cdot q_j^Y$, quindi

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \sum_{i,j} ij\mathrm{P}(X = i \cap Y = j)$$
$$= \sum_{i,j} ijp_{i,j} = \sum_{i,j} ijp_i^X q_j^Y = \sum_i ip_i^X \cdot \sum jq_j^Y = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

□

Definizione 3.3.3. Momenti di ordine superiore

Si definisce $\mathbb{E}[X^n]$ il momento di X di ordine n. Dalla definizione di valore atteso sappiamo, ad esempio $\mathbb{E}[X^2] = \sum_i i^2 p_i$. Attenzione: per quanto detto sopra, e visto che X non è indipendente da se stessa, in generale $\mathbb{E}[X^2] \neq (\mathbb{E}[X])^2$.

Definizione 3.3.4. Varianza

Sia X una variabile aleatoria e $\mathbb{E}[X] = \mu$ la sua media. La varianza di X si definisce come

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] \\ &= \sum_i (i-\mu)^2 \mathrm{P}(X = i)\end{aligned}$$

Proposizione 3.3.6. *La varianza di X è anche $\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\sum_i (i-\mu)^2 p_i &= \sum_i (i^2 - 2i\mu + \mu^2) p_i \\ &= \sum_i i^2 p_i - 2\mu \sum_i ip_i + \mu^2 \sum_i p_i \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2\end{aligned}$$

□

Diamo ora alcune diseguaglianze utili (senza dimostrarle)

Proposizione 3.3.7. ***Disuguaglianza di Hölder***

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot Y] &\leq (E[X^p])^{\frac{1}{p}} (E[Y^q])^{\frac{1}{q}} \\ &\textit{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned} \tag{3.3}$$

In particolare, per $p = q = 2$,

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]} \tag{3.4}$$

Proposizione 3.3.8. ***Disuguaglianza di Markov*** *Sia $X \geq 0$ e $a > 0$. Vale*

$$P(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a} \tag{3.5}$$

Proposizione 3.3.9. ***Disuguaglianza di Chebishev*** *Sia $X \geq 0$ e $a > 0$. Vale*

$$P(|X-\mu| > a) \leq \frac{Var(X)}{a^2} \tag{3.6}$$

Della disuguaglianza di Chebishev diamo anche la dimostrazione.

Dimostrazione.

$$\mathrm{P}(|X-\mu| > a) = \sum_{n \text{ t.c.} |n-\mu|>a} \mathrm{P}(X=n)$$
$$\text{se } |n-\mu| > a \text{ allora } 1 \leq \frac{|n-\mu|^2}{a^2}$$
$$\Longrightarrow \sum_{n \text{ t.c.} |n-\mu|>a} p_n \leq \sum_{n \text{ t.c.} |n-\mu|>a} \frac{|n-\mu|^2}{a^2} p_n \leq \frac{1}{a^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |n-\mu|^2 p_n = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

□

La varianza quindi misura, in qualche senso, quanto una variabile aleatoria si scosti dalla sua media.

Definizione 3.3.5. σ Deviazione Standard
Sia X variabile aleatoria. Allora definiamo la deviazione standard $\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Proposizione 3.3.10. *Data μ media di X, e dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha allora che*

$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \, Var(X)$$
$$\sigma(\alpha X + \beta) = |\alpha| \sigma(X)$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima formula, la seconda segue immediatamente.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\alpha X + \beta) &= \mathbb{E}\left[(\alpha X + \beta)^2\right] - (\mathbb{E}[\alpha X + \beta])^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\alpha^2 X^2 + 2\alpha\beta X + \beta^2\right] - (\alpha \mathbb{E}[X] + \beta)^2 \\
&= \alpha^2 \mathbb{E}\left[X^2\right] + 2\alpha\beta\mathbb{E}[X] + \beta^2 - \alpha^2 (\mathbb{E}[X])^2 - 2\alpha\beta\mathbb{E}[X] - \beta^2 \\
&= \alpha^2 (\mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

□

Definizione 3.3.6. Somma di varianza
Siano date X, Y variabili aleatorie indipendenti $\Longrightarrow \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}\left[(X+Y)^2\right] - (\mathbb{E}[X+Y])^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X \cdot Y] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 - 2\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] - (\mathbb{E}[Y])^2 \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y])
\end{aligned}$$

e se X,Y sono indipendenti si ha che $2(E[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]) = 0$ □

Esempio 3.3.3. Varianza di una Bernoulliana: $X = B(1,p)$

$$\mathbb{E}[X] = p$$
$$\mathbb{E}[X]^2 = p^2$$
$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

Esempio 3.3.4. $X = B(n,p) \Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = nB(1,p) = np(1-p)$

Esempio 3.3.5.) $X = \mathrm{Poisson}(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{Var}(\mathrm{Poisson}(\lambda)) = \lambda$ (senza dim)

3.4 Esercizi

Esercizio 3.4.1. Ho una scatola con 12 lampadine, 4 di esse sono fulminate. Ne prendo 2. La probabilità che siano entrambe funzionanti è $\mathrm{P}\left(H(12,4,2)=0\right)=\frac{\binom{4}{0}\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$

Esercizio 3.4.2. Ho una moneta truccata. La probabilità che esca testa è $P_t = 0.55$ e la probabilità che esca croce è $P_c = 0.45$. Lancio la moneta dieci volte, qual è la probabilità che avvenga la sequenza testa-croce per la prima volta al lancio 9-10? Perché ciò sia possibile deve uscire una sequenza composta da $0 \le h \le 8$ lanci "croce" consecutivi e $9-h$ lanci "testa" consecutivi, in modo da ottenere una sequenza formata da $C^hT^{9-h}C$. La probabilità è $\mathrm{P}\left(C^hT^{9-h}C\right) = (0.45)^h \cdot (0.55)^{9-h} \cdot (0.45) = (0.45)^{h+1} \cdot (0.55)^{9-h}$. La probabilità dell'unione $\bigcup_h$ delle stringhe sarà $P = \sum_{h=0}^{8}(0.45)^{h+1}(0.55)^{9-h}$. Provare a svolgere l'esercizio usando la variabile geometrica. Provare a fare l'esercizio con una moneta equilibrata. Come si semplifica la formula?

Esercizio 3.4.3. Un ubriaco cammina in una strada in pendenza. Va in salita con probabilità $\mathrm{P}(\text{salita}) = 1/4$ oppure in discesa con probabilità $\mathrm{P}(\text{discesa}) = 3/4$. Ogni 10 secondi decide casualmente una direzione. Si muove lungo un asse X partendo dall'origine a velocità $\frac{1m}{10s}$. Qual è la posizione più probabile dopo 1 minuto? Introduciamo una variabile X = la posizione dopo 1 minuto. L'ubriaco si sposterà al massimo di 6 metri in salita o 6 metri in discesa, quindi $X \in \{-6, \cdots +6\}$. Introduciamo anche la variabile Y = il numero di volte che l'ubriaco cambia direzione verso la discesa. Y è una variabile binomiale Bernoulliana (conta il numero di "successi" in 6 esperimenti ripetuti) $\implies Y = B(6, 3/4)$. Abbiamo che $X = -1 \cdot Y + 1(6-Y) = 6 - 2Y$. Per quanto detto

$$P_k^Y = \mathrm{P}\left(B(6,3/4)=k\right) = \binom{6}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}$$

k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	$\frac{1}{4^6}$	$\frac{6\cdot 3}{4^6}$	$\frac{15\cdot 3^2}{4^6}$	$\frac{20\cdot 3^3}{4^6}$	$\frac{15\cdot 3^4}{4^6}$	$\frac{6\cdot 3^5}{4^6}$	$\frac{3^6}{4^6}$

Tabella 3.2: Distribuzione della variabile Y

Il valore più probabile per Y è quindi 5, e di conseguenza il valore più probabile per X sarà -4.

Esempio 3.4.4. Prendo un seme di carte francesi $\{A, 2, \ldots, 10, J, Q, K\}$ L'asso ha valore 11. I numeri da 2 a 10 hanno lo stesso valore del numero, le figure hanno valore 10. Estraggo una carta. Definiamo una variabile aleatoria X = punteggio. $X \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Abbiamo che $p_k = 0 \iff k < 2 \land k > 11$. Abbiamo anche che $p_k = 1/13 \iff k = 2, \ldots, 11$ e $p_k = 4/13 \iff k = 10$

Esercizio 3.4.5. È più probabile fare almeno un 6 lanciando 4 dadi o almeno una coppia di 6 lanciando 25 volte una coppia di dadi?

Esercizio 3.4.6. Siano date due slot machines apparentemente identiche A, B. La probabilità di vincere sulla A è $\frac{1}{2}$. La probabilità di vincere sulla B è $\frac{1}{4}$. Calcolare $\mathrm{P}(\text{aver giocato su } A \mid \text{aver vinto})$ [Sugg.: usare Bayes e fattorizzazione]

Esercizio 3.4.7. Data un urna contenente 2 palline bianche e 5 nere. Se la prima estrazione è una pallina bianca, essa viene rimossa. Se invece è una pallina nera, la rimettiamo dentro e aggiungiamo altre 2 nere. Calcolare P (seconda estrazione sia una pallina nera)

Esercizio 3.4.8. In Finlandia il 70% delle ragazze sono Bionde, il 20% sono Rosse, il 10% sono More. Hanno gli occhi Scuri il 10% delle Bionde, il 25% delle Rosse e il 50% delle More. Conosco una ragazza (via email, quindi non ho foto) che dice di avere gli occhi scuri. Con che probabilità è bionda?

I dati che abbiamo sono quindi: $\mathrm{P}(B) = 7/10$, $\mathrm{P}(R) = 1/5$, $\mathrm{P}(M) = 1/10$, $\mathrm{P}(S \mid B) = 1/10$, $\mathrm{P}(S \mid R) = 1/4$, $\mathrm{P}(S \mid M) = 1/2$,

Utilizzando la formula di Bayes e di Fattorizzazione calcoliamo

$$\mathrm{P}(B \mid S) = \frac{\mathrm{P}(S \mid B) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(S)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(S \mid B) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(S \mid B)\,\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(S \mid R)\,\mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(S \mid M)\,\mathrm{P}(M)} \approx 0.41$$

Esercizio 3.4.9. Ho 3 carte colorate sulla faccia e sul dorso. Una carta con la faccia rossa e il retro nero si scrive $\frac{R}{N}$. Le tre carte sono quindi $\frac{R}{N}, \frac{R}{R}, \frac{N}{N}$. Una di queste tre carte è sul tavolo e la faccia visibile è Rossa. Calcolare P (Faccia coperta $= R$). Indichiamo con V la faccia Visibile e con C quella coperta.

$$\mathrm{P}(C = R \mid V = R) = \frac{\mathrm{P}(C = R \cap V = R)}{\mathrm{P}(V = R)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 3.4.10. Siano dati due eventi $A, B \subset \Omega$. Abbiamo che $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$ e abbiamo $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$. Possono essere disgiunti? No. Perché la probabilità della loro unione è maggiore di uno $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3}$, che è > 1. Abbiamo che $A \cup B \subset \Omega$, ma $1 = \mathrm{P}(\Omega) > \mathrm{P}(A \cup B)$.

Si verifichi la disuguaglianza $\frac{1}{12} \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

Sappiamo che

$$A \cap B \subseteq A \text{ e } A \cap B \subseteq B$$
$$\implies (\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(A)) \text{ e } (\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(B)))$$
$$\implies \mathrm{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\}$$

Quindi che $\mathrm{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Verifichiamo ora la prima parte della disuguaglianza $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$ e gli insiemi $(A \cap B)$ e $(A \cap B^C)$ sono disgiunti. Inoltre $A \cap B^C \subset B^C$ Quindi

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}\left(A \cap B^C\right) \geq \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}\left(B^C\right)$$
$$= \mathrm{P}(A) - (1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{12}$$

Esercizio 3.4.11. Siano X e Y variabili aleatorie congiunte $X, Y : \Omega \to \{0, 1\}$. Sia p_i, j la densità di probabilità della variabile congiunta, con Si ha $p_{0,0} = 0,51$, $p_{1,0} = 0,02$, $p_{1,1} = 0,46$.

1. Si determini $p_{0,1}$ [R: $p_{0,1} = 0,01$]

2. Si trovino le densità di X e di Y [R: $p_0^X = 0,52$, $p_1^X = 0,48$ e $q_0^X = 0,53$, $q_1^X = 0,47$]

3. Si calcoli $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ [R: $\mathbb{E}[X] = 0,48$ e $\mathbb{E}[Y] = 0,47$]

4. Le due variabili sono indipendenti? [R: No, ad es. $p_{0,1} \neq p_0^X \cdot q_1^Y$]

5. Si calcoli $\mathrm{P}(X = 1 \mid Y = 1)$ [R: $\mathrm{P}(X = 1 \mid Y = 1) = \mathrm{P}(Y = 1 \mid X = 1) / \mathrm{P}(X = 1) \simeq 0,95$]

Esercizio 3.4.12. Sia X una Bernoulliana di parametro $1/2$ e sia Y una variabile aleatoria a valori in $\{1,2,3\}$ tale che $\mathrm{P}(Y = 1 \mid X = 0) = 0,1$; $\mathrm{P}(Y = 2 \mid X = 0) = 0,4$; $\mathrm{P}(Y = 3 \mid X = 0) = 0,5$; $\mathrm{P}(Y = 1 \mid X = 1) = 0,5$; $\mathrm{P}(Y = 2 \mid X = 1) = 0,4$; $\mathrm{P}(Y = 3 \mid X = 1) = 0,1$.

1. Trovare la distribuzione congiunta di X, Y e la distribuzione di Y [R: $\mathrm{P}(Y = 1\ ,\ X = 0) = \mathrm{P}(Y = 1 \mid X = 0) / \mathrm{P}(X = 0) = 0,05$ ecc.]

2. Calcolare $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}(Y)$ [R: $\mathbb{E}[Y] = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 0,6$]

3. Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[XY]$ [R: $\mathbb{E}[X] = 0,5$, $\mathbb{E}[XY] = 0,8$]

4. Dire se X e Y sono indipendenti [R: No]

5. Trovare la densità di probabilità di $Z = X/Y$ [R: $\mathrm{P}(Z = 0) = 0,5$; $\mathrm{P}(Z = 1) = 0,25$; $\mathrm{P}(Z = 1/2) = 0,2$; $\mathrm{P}(Z = 1/3) = 0,05$]

Esercizio 3.4.13. Si lancia un dado a 4 facce, con valori $N = \{0,1,2,3\}$. Il risultato ci dice quante volte dobbiamo lanciare una moneta. La variabile k conta il numero totale di teste uscite.

1. Determinare $p_{N,k}$ [R: $p_{N,k} = 0$ se $k > N$ (non posso avere più teste di quante volte ho lanciato la moneta) e $p_{N,k} = \binom{N}{k}\frac{1}{2^{N+2}}$ se $k \leq N$]

2. Calcolare $\mathrm{P}(N = 2|k = 3)$ e $\mathrm{P}(N = 3|k = 1)$ [R: $\mathrm{P}(N = 2|k = 3) = 0$; $\mathrm{P}(N = 3|k = 1)$=3/11]

Esercizio 3.4.14. Siano $X : \Omega \to \{-1,0,1\}$ e $Y : \Omega \to \{0,1\}$ variabili congiunte, con $p_{1,1} = p_{1,0} = p_{0,0} = p_{-1,1} = 1/10$; $p_{0,1} = p_{-1,0} = 3/10$.

1. Trovare p_i^X e q_j^X.

2. Dire se X e Y sono indipendenti

3. Trovare la distribuzione di X^2 ed di XY

4. Trovare valor medio e varianza di X, Y, X^2, XY.

3.5 Esercitazione del 29/10/19

Lezione tenuta da Maurizio Pratelli.

Esercizio 3.5.1. Ci sono 3 monete indistinguibili, delle quali due sono truccate. La probabilità che esca testa è nell'ordine $1/4$, $1/2$ e $3/4$. Si sceglie una moneta casuale, si lancia 5 volte e si ottiene testa 4 volte: qual'è la probabilità di aver scelto la terza moneta?

Utilizziamo la formula di Bayes. Definiamo le 3 monete A_1, A_2, A_3. Sappiamo anche che $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{3}$. Definiamo l'evento B come "*esce 4 volte su 5 testa*".

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(B \mid A_3)}{P(B \mid A_1) + P(B \mid A_2) + P(B \mid A_3)}$$

$$P(B \mid A_1) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4}$$

$$P(B \mid A_2) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(B \mid A_3) = \binom{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}$$

Esercizio 3.5.2. Si prende un giorno a caso in un anno non bisestile ed è un mercoledì: in quel mese ci sono esattamente 4 mercoledì. Qual'è la probabilità che quel giorno sia di febbraio?

Definiamo

- $A_1 =$ "Mese di 28 giorni". $P(A_1) = \frac{1}{12}$
- $A_2 =$ "Mese di 30 giorni". $P(A_2) = \frac{4}{12}$
- $A_3 =$ "Mese di 31 giorni". $P(A_3) = \frac{7}{12}$
- $B =$ in quele mese ci sono 4 mercoledì.

$$P(A_1 \mid B) = P(B \mid A_1)\frac{P(A_1)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_1) P(A_1)}{P(B \mid A_1) P(A_1) + P(B \mid A_2) P(A_2) + P(B \mid A_3) P(A_3)}$$

$$P(B \mid A_1) = 1 \text{ (a febbraio ci sono sicuramente 4 mercoledì)}$$

$$P(B \mid A_2) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$P(B \mid A_3) = \frac{4}{7}$$

Esercizio 3.5.3. Si lancia un dado equilibrato finché il numero 6 esce per 2 volte (non necessariamente consecutive). Qual'è la probabilità che anche il penultimo lancio fosse un 6?

Sappiamo la definizione di variabile geometrica (conta il numero) di esperimenti con probabilità p falliti necessari prima di ottenere un successo: $X = \text{Geom}p$.

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \ \forall k$$

Definiamo $Y =$ tentativi fino al secondo successo. I valori possibili sono 2, 3, 4...

Nota. Serie geometriche da ricordare

$$|a| < 1 \implies \sum_{h=0}^{\infty} a^h = \frac{1}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Risolviamo l'esercizio.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(Y = k\right) &= (k-1)(1-p)^{k-1} \cdot p^2 \\ \mathrm{P}\left(\text{Avere due successi consecutivi e prima nessuno}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (1-p)^{k-1} p^2 = p^2 \sum_{h=0}^{\infty} (1-p)^h \\ &= \frac{p^2}{1-(1-p)} = p = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Esercizio 3.5.4. Data una variabile aleatoria X per la quale si ha $\mathbb{E}\left[X\right] = 1, \mathrm{Var}\left(X\right) = 2$ e si ha che $\mathbb{E}\left[X^4\right] = 10$. Quanto vale la varianza di X?

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(X\right) &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]^2\right) \\ \mathbb{E}\left[X^2\right] &= 2 + 1^2 = 3 \\ \mathrm{Var}\left(X^2\right) &= \mathbb{E}\left[X^4\right] - \left(\mathbb{E}\left[X^2\right]\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 3.5.5. Si lancia per 15 volte un dado equilibrato e indichiamo con X la somma dei numeri ottenuti. Quanto vale $\mathbb{E}\left[X\right]$? Qual'è la varianza di X?

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{15} \\ X \text{ ha valori possibili } &\{15, 16, 17, \ldots, 90\} \\ \mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] + \ldots + \mathbb{E}\left[X_{15}\right] &= 15\mathbb{E}\left[X_1\right] \\ \mathrm{Var}\left(X\right) &= 15 \cdot \mathrm{Var}\left(X_1\right) \\ \mathbb{E}\left[X_1\right] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} &= \frac{7}{2} \\ \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \frac{\sum_{k=1}^{6} k^2}{6} &= \frac{91}{6} \end{aligned}$$

Esercizio 3.5.6. (Roulette Russa) Paolo, Andrea e Giacomo sparano a turno in questo ordine con una pistola a tamburo a 6 colpi, nella quale è presente un solo proiettile, finché il colpo non viene esploso. Si considerino queste due modalità:

- a) il tamburo viene ruotato una volta sola all'inizio
- b) il tamburo viene ruotato prima di ogni colpo

Quale delle due modalità è più conveniente per Giacomo, e quando e quanto è vantaggioso poter sparare per primo?

Ogni giocatore ha 1/3 di probabilità di vincere. Consideriamo il caso b.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\text{vince Paolo}\right) &= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)^h = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5^3}{6^3}} = \frac{36}{216 - 125} = a \end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\left(\text{vince Andrea}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} a$$

$$\mathrm{P}\left(\text{vince Giacomo}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 a$$

Esercizio 3.5.7. Un candidato affronta una test a risposte multiple, con 5 domande. Ogni domanda ha 4 risposte delle quali una sola è esatta: ogni risposta esatta è valutata un punto e ogni risposta errata è penalizzata con $-1/4$. Consideriamo un candidato del tutto impreparato che risponde a caso. Quale punteggio ottiene in media? Qual'è la probabilità di ottenere un punteggio di 2.5

$$X = \text{risposte esatte} = \mathrm{B}\left(5, \frac{1}{4}\right)$$

$$Y = \text{punteggio} = X - \frac{1}{4}(5-x) = \frac{5}{4}X - \frac{5}{4}$$

Media del punteggio

$$\mathbb{E}\left[Y\right] = \frac{5}{4} \cdot \mathbb{E}\left[X\right] - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$$

Risolviamo il secondo punto. La probabilità di ottenere un punteggio di 2.5.

$$Y = 2.5$$

$$\frac{5}{4}X - \frac{5}{4} = 2.5$$

$$\mathrm{P}\left(Y = 2.5\right) = \mathrm{P}\left(X = 3\right) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Capitolo 4

Catene di Markov

4.1 Catene di Markov e Processi Stocastici

Definizione 4.1.1. Processi Stocastici Spesso abbiamo bisogno di rappresentare quantità incerte che cambiano nel tempo. Possiamo rappresentarle con famiglie di variabili aleatore indicizzate mediante un parametro, spesso corrispondente al "tempo"

Una famiglia di variabili aleatorie $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ dove $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ e che assumono tutte valori nello stesso insieme E è detta **processo stocastico**. L'insieme E è detto spazio degli stati del processo, mentre l'insieme $\mathcal{T}$ è detto insieme dei tempi. Considereremo sempre gli insiemi degli stati e dei tempi *discreti* (numerabili) e molto spesso finiti. L'insieme dei tempi può essere un intervallo $\mathcal{T} = [0, T]$. Ad esempio, insiemi $\mathcal{T}$ validi possono essere: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Dato un processo stocastico $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ le variabili aleatorie $X_t \in E$ sono dette marginali del processo. Le leggi delle marginali di due processi potrebbero coincidere, pur essendo i due processi molto diversi.

Esempio 4.1.1. Consideriamo le estrazioni da un urna contenente palline rosse e palline blu. Prendiamo in considerazione il colore della pallina alla prima, seconda, terza, ecc. estrazione. Il fenomeno è rappresentabile con una famiglia di variabili aleatorie.

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \in \{\text{rossa}, \text{blu}\}$$

I due processi cambiano radicalmente se le estrazioni sono con reimmissione della pallina o senza, ma sappiamo che le marginali hanno tutte le stesse leggi rispetto a $\mathrm{P}(\cdot \mid \Omega)$

$$\mathrm{P}(X_k = \text{rossa} \mid \Omega) = \frac{\#\text{ palline rosse}}{\#\text{ palline totali}}$$

Esempio 4.1.2. Assumiamo che le variabili $X_1, \ldots, X_n \in \{\text{rossa}, \text{blu}\}$ siano tutte indipendenti (rispetto a Ω). Supponiamo di conoscere il numero di palline totali ed il numero di palline rosse inizialmente. Supponiamo di aver fatto $k < n$ estrazioni e di conoscere il loro esito esatto. Poniamo ad esempio che siano state tutte rosse. Qual'è la probabilità che all'estrazione $k + 1$ otteniamo una pallina rossa?

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{k+1} = rossa \mid \Omega \cap \{X_1 = \text{rossa}, \ldots, X_k = \text{rossa}\})\\ = P(X_{k+1} = \text{rossa} \mid \Omega) \text{ (Per indipendenza)}\\ = \frac{\#\text{ palline rosse}}{\#\text{ palline totali}}\end{aligned}$$

L'ipotesi di indipendenza probabilistica significa che non siamo capaci di "imparare" dal passato.

Definizione 4.1.2. Proprietà di Markov: Nei processi di Markov le informazioni ottenibili dal "passato" (la storia del processo fino al presente) possono essere utili a fare inferenza sullo stato futuro. In realtà costituiscono la classe più semplice in cui tutta la storia passata può essere trascurata ai fini di fare inferenza sul futuro.

> **Un processo è di Markov se conoscendo il presente, passato e futuro sono indipendenti.**

Dato un processo a tempi $\mathcal{T}$ e stati E discreti. Un processo $\{X_{t_i}\}_{i=0,\ldots,n}$ con $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ è detto **di Markov** (rispetto a $\mathrm{P}(\cdot \mid I)$) se, presi qualunque $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ e $A_0, A_i, A_{k+1} \subseteq E$ vale la seguente proprietà

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X_{t_k+1} \in A_{k+1} \mid I \cap \{X_{t_k} \in A_k\} \cap \{X_{t_{k-1}} \in A_{k-1}\} \cap \{X_0 \in A_0\}\right) = \\ = \mathrm{P}\left(X_{t_{k+1}} \in A_{k+1} \mid I \cap \{X_{t_k} \in A_k\}\right)\end{aligned}$$

La proprietà di Markov permette di semplificare molto (ma non troppo) un modello probabilistico. L'indipendenza probabilistica va sempre considerata come un'ipotesi che introduciamo nel modello.

Più in generale, una variabile aleatoria del processo $X_{t_{k+1}}$ deve dipendere soltanto da X_{t_k}.

Nota. Dato che E è un insieme discreto, si potrebbe dimostrare che è sufficiente verificare la prorietà di Markov su insiemi A_k costituiti da singoli punti $A_k = \{i_k\}$, in modo tale che la condizione $\{X_{t_k} \in A_k\}$ diventi $\{X_{t_k} = i_k\}$

Esempio 4.1.3. Tornando all'esempio dell'estrazione dall'urna (di cui conosciamo il contenuto), un'estrazione con reimmissione è sicuramente un processo di Markov, se l'estrazione è senza reimmissione il processo **non** è di Markov. Il motivo è che tutta la sequenza di palline estratte è necessaria per conoscere il contenuto esatto dell'urna (l'informazione passata non può essere trascurata).

Esempio 4.1.4. Vediamo un esempio di processo di Markov basato dalle estrazioni dall'urna contenente R palline rosse e B palline blu ($N = R + B$). Quando estraiamo la prima pallina, la teniamo all'esterno dell'urna. Successivamente estraiamo la seconda pallina, reinseriamo la prima pallina estratta e mescoliamo l'urna. Si procede poi tenendo fuori sempre l'ultima pallina estratta. Poniamo $X_k =$ il colore della pallina estratta all'estrazione k. La proprietà di Markov vale (l'informazione di tutta la sequenza di estrazioni non è rilevante eccetto l'ultima). Dati $i, j \subseteq E$, le probabilità di transizione

$$\mathrm{P}\left(X_{t_{k+1}} = j \mid I \cap X_{t_k} = i\right)$$

potrebbero in generale dipendere da k. Studieremo il caso in cui queste non dipendono da k per semplificare, e per semplificare ulteriormente assumiamo che $t_k = k$.

Definizione 4.1.3. Un process di Markov $X_{i i=0,\ldots,n}$ è **omogeneo** se le probabilità di transizione non dipendono da $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, ovvero:

$$\forall i, j \in E \,.\, \mathrm{P}\left(X_{k+1} = j \mid I \cap \{X_k = i\}\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = j \mid I \cap \{X_0 = i\}\right)$$

Definizione 4.1.4. Matrice di Transizione: Questa definizione ci permette di collezionare le probabilità di transizione in una singola matrice di transizione

$$\forall i, j \in E \,.\, Q_{ij} = Q_{i \to j} := \mathrm{P}\left(X_1 = j \mid I \cap \{X_0 = i\}\right)$$

Nota. Per scrivere una matrice di trasizione Q bisogna fissare un ordinamento degli stati E. Una volta fissato questo ordinamento va seguito in tutto il problema.

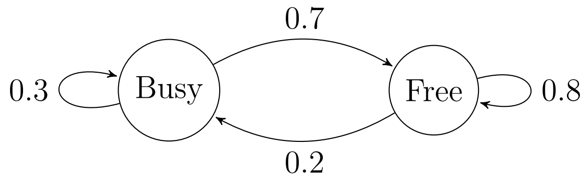
$$\sum_{j\in E} Q_{i\to j} = \sum_{j\in E} \mathrm{P}\left(X_1 = j \mid I \cap \{X_0 = i\}\right) = \mathrm{P}\left(X_1 \in E \mid I \cap \{X_0 = i\}\right) = 1$$

Definizione 4.1.5. Catena di Markov: Un processo di Markov omogeneo $\{X_i\}_{i=0,\dots,n}$ a stati finiti (o discreti) è detto **Catena di Markov**. Si possono visualizzare le Catene di Markov, data una matrice di transizione, con un grafo orientato analogo agli automi a stati finiti. Ad ogni stato $i \in E$ facciamo corrispondere un nodo, e ad ogni probabilità di transizione $Q_{i\to j}$ strettamente positiva facciamo corrispondere un arco (i, j). Non si disegnano gli archi delle probabilità di transizione nulle. La rappresentazione con i grafi non indica nulla sulle leggi marginali della catena.

Esempio 4.1.5. All'interno di una CPU abbiamo due stati, **busy** (nodo 1) e **free** (nodo 2).

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Figura 4.1: Catena di Markov



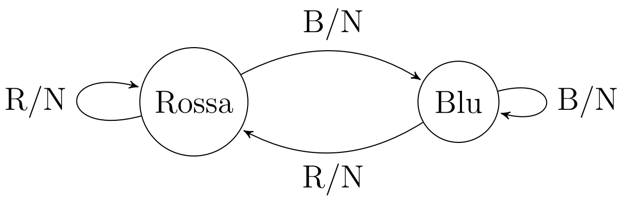
Esempio 4.1.6. Consideriamo un urna contenente R palline rosse e B palline blu, in tutto $N = R+B$ palline. Effettuiamo estrazioni con reimmissione. Abbiamo già visto che la proprietà di Markov vale. Le probabilità di transizione sono molto semplici da calcolare grazie all'indipendenza delle variabili $\{X_k\}$.

$$\mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{rossa} \mid \Omega \cap \{X_k = \text{rossa}\}\right) = \mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{rossa} \mid \Omega\right) = \frac{R}{N}$$
$$\mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{blu} \mid \Omega \cap \{X_k = \text{rossa}\}\right) = \mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{blu} \mid \Omega\right) = \frac{B}{N}$$
$$\mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{rossa} \mid \Omega \cap \{X_k = \text{blu}\}\right) = \mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{rossa} \mid \Omega\right) = \frac{R}{N}$$
$$\mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{blu} \mid \Omega \cap \{X_k = \text{blu}\}\right) = \mathrm{P}\left(X_{k+1} = \text{blu} \mid \Omega\right) = \frac{B}{N}$$

La catena di Markov sugli stati $E = \{\text{rossa}, \text{blu}\}$ è omogenea con matrice di transizione.

$$Q = \begin{pmatrix} R/N & B/N \\ R/N & B/N \end{pmatrix}$$

Figura 4.2: Catena di Markov



4.2 Calcolo Algebrico su catene di Markov

Calcolo del Marginale di una Catena di Markov $\mathrm{P}(X_0 = j)\,\forall j$ è un vettore che chiamiamo $v = (\mathrm{P}(X_0 = j))$, è lo stato iniziale. Definiamo $Q(q_{ji})$ matrice di transizione. $q_{ji} = \mathrm{P}(X_1 = i \mid X_0 = j)$. Definiamo anche $q_{j\to i} = \mathrm{P}(X_1 = i \mid X_0 = j)$. Ne otteniamo che $\mathrm{P}(X_k = i) = (v \cdot Q^k)_i = (v_i = Q \cdot Q \cdot \ldots \cdot Q)_i$. Per correttezza, $v \cdot Q$ è la legge di X_1. Calcoliamo X_1.

$$\mathrm{P}(X_1 = i) \cdot \sum_j (\mathrm{P}(X_1 = i \mid X_0 = j))$$

$$\mathrm{P}(X_1 = j) = \sum_j q_{j\to i} v_j = \sum_j v_j q_{j\to i} = (v \cdot Q_i)$$

A volte, si può assegnare lo stato iniziale, ad esempio $X_0 = j \iff v = \{0, 0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0, 0, \} = e_j$ (significa che vi è un 1 in posizione j). Si ha che:

$$(e_i Q^k) \cdot (\mathrm{P}(X_k = l \mid X_0 = i)) = (e_i Q^k)_l = (Q^k)_{il}$$

Esempio 4.2.1. Riprendendo l'esempio delle palline rosse e blu:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{9}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{10}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}$$

Distribuzione di X_0: $v = (\frac{10}{13}, \frac{3}{13})$.

Marginale X_1: $v \cdot Q = (\frac{10}{13}, \frac{3}{13}) \begin{pmatrix} \frac{9}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{10}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix} = \ldots (\frac{120}{13\cdot 12}, \frac{36}{13\cdot 12}) = (\frac{10}{13}, \frac{3}{13})$

Si ha che $\mathrm{P}(X_{10} = B) = (v \cdot Q^{10})_B = ((v \cdot Q)Q^9)_B = (v)_B = \dfrac{3}{13}$

Calcolo dei valori attesi Data $(X)_k$una Catena di Markov. Q matrice di transizione, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione reale, si ha che $\mathbb{E}[f(X_k) \mid X_0 = i]$. Prendiamo il caso $k = 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_1] \mid X_0 = i) = \sum_j f(j) \cdot \mathrm{P}(x_1 = j \mid X_0 = i) \\ = \sum_j f(j) \cdot q_{ij} = (Q \cdot f)_i \\ \vec{f} = (f(j))_j \end{aligned}$$

Con k generico si ha $\mathbb{E}[f(X_k) \mid X_0 = i] = (Q^k \vec{f})_i$

Se non conosco lo stato iniziale devo conoscere la distribuzione $(P(X_0) = i)_i = v)$

$$\mathbb{E}[f(X_k \mid X_0] = \vec{f} Q^k v$$

Definizione 4.2.1. Distribuzione invariante

Cerchiamo di capire se uno stato di una catena di Markov è uno stato limite. La **distribuzione invariante** è un vettore $\vec{\mu} = (\mu_i)_i$ per Q matrice di transizione se

$$\begin{cases} \mu_i \geq 0 \\ \sum_i \mu_i = 1 \\ \vec{mu} \cdot Q = \vec{\mu} \\ \vec{mu}^T \cdot Q^T = \vec{\mu}^T \end{cases}$$

Ovvero $\vec{mu}^T$ è l'autovettore dell'autovalore 1 per Q^T

Per trovare μ^T si risolve $(Q^T - Id)\mu^T = 0$

Definizione 4.2.2. Catena Stazionaria
Una Catena di Markov $(x_k)_k$ è una **catena stazionaria** se **tutte** le marginali sono uguali:

$$\begin{cases} \exists \mu \text{ distribuzione invariante} \\ \mu Q^k = \mu \forall k \end{cases}$$

Ovvero se $\mathrm{P}(X_0) = \mathrm{P}(X_1) = \ldots = \mathrm{P}(X_k)$

Definizione 4.2.3. Matrice di Transizione regolare Una matrice di transizione Q si dice regolare se $\forall k \,.\, (Q^k)_{ij} > 0$. Se Q è regolare e v è uno stato iniziale qualsiasi allora vQ^k tende ad una qualche distribuzione limite e invariante.

4.3 Esercizi

Esercizio 4.3.1. Ho un'urna con $N = B + R$ biglie ($(2)B =$ Blu, $(1)R =$ Rosse)

$$q_{1,1} = \mathrm{P}(X_1 = R \mid X_0 = R) = \frac{R-1}{N-1}$$
$$q_{1,2} = \mathrm{P}(X_1 = B \mid X_0 = R) = \frac{B}{N-1}$$
$$q_{2,1} = \mathrm{P}(X_1 = R \mid X_0 = B) = \frac{R}{N-1}$$
$$q_{2,2} = \mathrm{P}(X_1 = B \mid X_0 = B) = \frac{B-1}{N-1}$$
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{R-1}{N-1} & \frac{B}{N-1} \\ \frac{R}{N-1} & \frac{B-1}{N-1} \end{pmatrix}$$

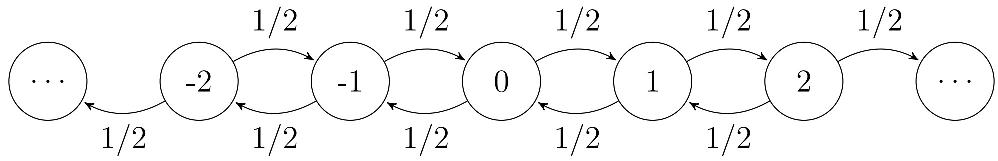
Lo stato iniziale $\mu = \left(\frac{R}{N}, \frac{B}{N}\right)$. Vogliamo sapere se μ è invariante.

$$\mu Q = \left(\frac{R}{N}, \frac{B}{N}\right) \begin{pmatrix} \frac{R-1}{N-1} & \frac{B}{N-1} \\ \frac{R}{N-1} & \frac{B-1}{N-1} \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{R(R-1)}{N(N-1)} + \frac{RB}{N(N-1)}, \frac{B(R+B-1)}{N(N-1)}\right) = \left(\frac{R}{N}, \frac{B}{N}\right)$$

Esercizio 4.3.2. Passeggiata Aleatoria Mi muovo nell'asse X casualmente partendo da 0. Al minuto k lancio una moneta. Se esce testa mi muovo a destra, se esce croce mi muovo a sinistra. Voglio ottenere la posizione al minuto k.

$$Y_k = \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (lancio della moneta)}$$
$$Y_k \in \{-1, +1\}$$
$$X_k = \text{posizione}$$
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + y_k \end{cases}$$

Figura 4.3: Catena di Markov della passeggiata aleatoria



Esercizio 4.3.3. Un ubriaco è restio a cambiare direzione. Se al momento k è andato a sinistra, per $k+1$ la sinistra è più probabile della destra. La sua posizione è una catena di Markov? No, perché dipende dalla posizione all'istante precedente e dalla direzione.

Esercizio 4.3.4. All'interno di una CPU abbiamo due stati, **busy** (nodo 1) e **free** (nodo 2).

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Cerco μ distribuzione invariante. Sappiamo che μ è autovettore di autovalore 1:

$$\mu Q = \mu \iff \mu^T Q^T = \mu^T \iff (Q^T - I)\mu^T = 0$$

$$Q^T - I = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0.2 \\ 0.7 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.7 & 0.2 \\ 0.7 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1 - 0.7\mu_1 + 0.2\mu_2 = 0 \\ 0.7\mu_1 - 0.2\mu_2 = 0 \\ \mu_1 \geq 0; \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

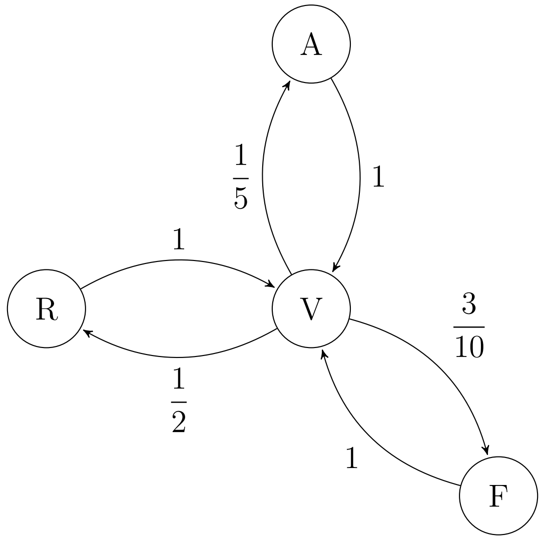
(Risolvendo il sistema si ottiene)

$$\mu_1 = \frac{0.2}{0.9} = \frac{2}{9}$$

$$\mu_2 = \frac{7}{9}$$

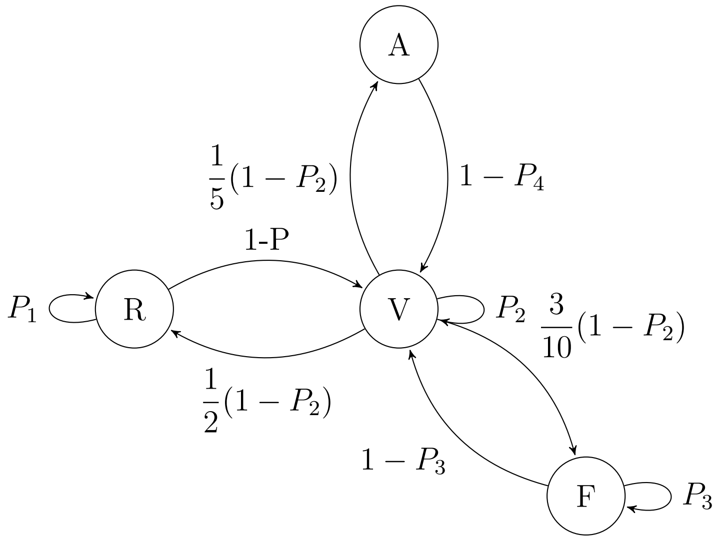
Esercizio 4.3.5. Vogliamo simulare un essere vivente elementare in un automa cellulare. I suoi stati sono (1) **relax**, (2) **vigile**, (3) **fuga**, (4) **attacca**

Figura 4.4: Catena di Markov dell'automa cellulare



$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

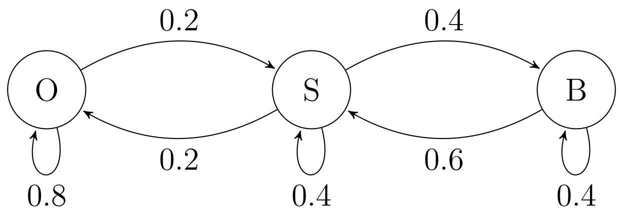
Figura 4.5: Catena di Markov dell'automa cellulare con tempo



Esercizio 4.3.6. content

Abbiamo una CPU con 3 stati: (1) **Off**, (2) **Stand By**, (3) **Busy**

Figura 4.6: Catena di Markov della CPU a 3 stati



1. Completare gli archi del grafo. Si possono completare sapendo che la somma degli archi uscenti da un nodo dev'essere 1.

2. Calcolare $\mathrm{P}(X_1 = O \mid X_0 = O)$ e $\mathrm{P}(X_2 = O \mid X_0 = O)$. Abbiamo

$$Q = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$
$$q_{00} \rightarrow \mathrm{P}(X_1 = O \mid X_0 = O) = 0.8$$
$$\text{Calcoliamo ora } \mathrm{P}(X_2 = 0 \mid X_0 = 0)$$
$$v = (1, 0, 0)$$
$$v \cdot Q \cdot Q = (0.68, \ldots, \ldots) \text{ (Marginale della legge } X_2)$$

3. Trovare i costi $c \to 0$ per O, $c \to 5$ per S, $c \to 10$ per B. Calcolare $\mathbb{E}\left[c(X_k) \mid X_0 = O\right]$ per $k = 1, 2$. Per $k = 1$ si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[c(X_1) \mid X_0 = O\right] = 0 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = O \mid X_0 = O\right) \\ +5 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = S \mid X_0 = O\right) + 10 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = B \mid X_0 = O\right) \\ = 5 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = S \mid X_0 = O\right) = 5 \cdot 0.2 = 1\end{aligned}$$

   Per $k = 2$ si ha che

$$\begin{aligned}f = (0, 5, 10) \\ \mathbb{E}\left[c(X_2) \mid X_0 = O\right] = (Q^2 \cdot f)_1 = vQ^2 f = \ldots = 2\end{aligned}$$

4. Calcolare la varianza

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(c(X_1) \mid X_0 = 0\right) = \\ \mathbb{E}\left[c^2(X_1 \mid X_0 = 0)\right] - \left(Ec(X_1) \mid X_0 = 0\right) \\ c^2 = (0, 25, 100) \\ \mathbb{E}\left[c^2(X_1 \mid X_0 = 0\right]) = 0 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = O \mid X_0 = O\right) \\ +25 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = S \mid X_0 = O\right) + 100 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = B \mid X_0 = O\right) \\ = 25 \cdot 0.2 = 5\end{aligned}$$

5. Calcolare μ distribuzione invariante e $\mathbb{E}\left[c(X_1) \mid \mu\right]$

$$\text{(Calcoliamo } \mu\text{)}$$

$$\begin{aligned}(Q^T - I)\mu^T = 0 \\ \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \\ (Q^T - I)\mu^T = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & -0.6 \end{pmatrix} \mu^T = 0\end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} -0.2\mu_1 + 0.2\mu_2 = 0 \\ 0.2\mu_1 - 0.6\mu_2 + 0.6\mu_3 = 0 \\ 0.4\mu_2 - 0.6\mu_3 = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_3 = \frac{2}{3}\mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases}$$

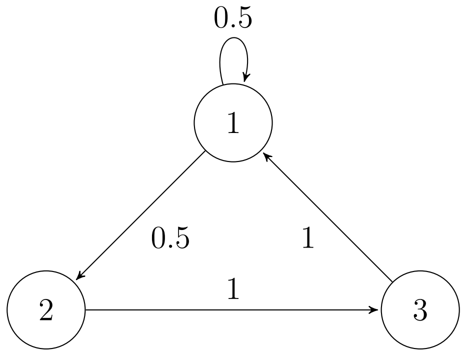
$$\implies \mu = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{(Calcoliamo } \mathbb{E}\left[c(X_1) \mid \mu\right]\text{)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[c(X_1) \mid \mu\right] = \mu \cdot Q \cdot f \\ \text{(si può calcolare anche con) } \mathbb{E}\left[c(X_1) \mid \mu\right] = 0 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = O \mid \mu\right) \\ +5 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = S \mid \mu\right) + 10 \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = B \mid \mu\right) \\ \text{(Si prosegue per fattorizzazione)}\end{aligned}$$

Esercizio 4.3.7. Dato il grafo di una Catena di Markov

Figura 4.7: Catena di Markov



1. Trovare Q matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Scrivere le marginali X_1, X_2, X_3 sapendo che $X_0 = 1$

$$\begin{aligned} v &= (1,0,0) \\ \mathrm{P}\left(X_1 \mid X_0 = 1\right) = v \cdot Q &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \mathrm{P}\left(X_2 \mid X_0 = 1\right) = v \cdot Q^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) Q &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ \mathrm{P}\left(X_3 \mid X_0 = 1\right) = v \cdot Q^3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) Q^2 &= \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

3. Calcolare la distribuzione invariante μ e $\mathbb{E}\left[\mu\right]$

$$(Q^T - I)\mu^T = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} -\mu_1 + 2\mu_3 = 0 \\ \mu_1 - 2\mu_2 = 0 \\ 2\mu_2 - 2\mu_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_1 = 2\mu_3 \\ \mu_1 = 2\mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases} \implies \mu = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{P}\left(X_0 = 1\right) = \frac{1}{2} \\ \mathrm{P}\left(X_0 = 2\right) = \frac{1}{4} \\ \mathrm{P}\left(X_0 = 3\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left[\mu\right] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

4. Se la catena è stazionaria calcolare $\mathrm{P}\left(X_1 = 1 \mid X_3 = 1\right)$. Utilizziamo la formula di Bayes.

$$\mathrm{P}\left(X_1 = 1 \mid X_3 = 1\right) = \mathrm{P}\left(X_3 = 1 \mid X_1 = 1\right) \cdot \frac{\mathrm{P}\left(X_1 = 1\right)}{\mathrm{P}\left(X_3 = 1\right)}$$

$$\text{La catena è stazionaria: } \mathrm{P}\left(X_3 = 1\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = 1\right)$$

$$\implies \mathrm{P}\left(X_1 = 1 \mid X_3 = 1\right) = \mathrm{P}\left(X_3 = 1 \mid X_1 = 1\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(X_2 = 1 \mid X_0 = 1\right) = (1,0,0)Q^2 = \frac{1}{2}$$