Appunti di Calcolo Probabilità e statistica

Alessandro Cheli - Prof. Ghimenti - Prof.ssa Chiodaroli

A.A 2019-2020

Indice

Capitolo 1

Probabilità Discreta e Condizionata

1.1 Definizione di Probabilità

La definizione di Probabilità è

> Attendibilità confortata da motivi ragionevoli

Definizione di Probabilità Discreta La probabilità di un evento è definita come

$$P(\text{evento}) = \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}}$$

. Prendiamo ad esempio il lancio di un dado, voglio ottenere un numero ≥ 5, la probabilità dell'evento è

$$P = 2/6 = 1/3$$

Un altro esempio può essere la probabilità di ottenere un numero ≥ 4 lanciando 2 dadi.

$$P = \frac{27}{6^2} = \frac{3}{4}$$

I casi favorevoli sono 27 perché lanciando se lanciando il primo dado ottenendo un numero ≤ 3 significa che ho 3 possibili casi per ognuno dei lanci del primo dado per ottenere un numero ≥ 4 dal lancio del secondo dado $(3 \cdot 3)$, a cui si aggiungono $(3 \cdot 6)$ casi se ottengo un numero ≥ 4 dal primo lancio (tutti i casi del secondo lancio sono validi.)

Esercizio, mazzo di carte Qual'è la probabilità di ottenere almeno un asso pescando 2 carte da un mazzo di 54?

$$P = \frac{(50 \cdot 4) + (53 \cdot 4)}{54 \cdot 53} = \frac{206}{1431}$$

Per i casi possibili, ho 54 casi per la prima pescata e 53 per la seconda, per i casi favorevoli ho

$$\begin{cases} \text{Se pesco un Asso} \implies 4 \cdot 53 \\ \text{Se non pesco un Asso} \implies 4 \cdot 50 \end{cases} \tag{1.1}$$

1.2 Formule Combinatorie

1.2.1 Permutazioni di n elementi

Da Wikipedia:

> Una permutazione è uno scambio dell'ordine di una sequenza di elementi che possono essere di qualunque tipo. L'obiettivo è trovare il numero di tutte le permutazioni (cioè tutte le sequenze con ordine) possibili dato un certo numero n di elementi.

Le permutazioni di un insieme di n elementi sono definite come

$$\mathrm{Perm}(n) = n!$$

Dimostrando per induzione, i casi base sono $\mathrm{Perm}(0) = 1$ e $\mathrm{Perm}(1) = 1$
Il passo induttivo sarà

$$\mathrm{Perm}(n) = n! \implies \mathrm{Perm}(n+1) = (n+1)!$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Perm}(n+1) &= (n+1) \cdot \mathrm{Perm}(n) \\ &= (n+1) \cdot n! = (n+1)!\end{aligned}$$

□

1.2.2 Coefficiente Binomiale

Il coefficiente binomiale è un numero intero non negativo definito dalla seguente formula, è analogo alla proposizione "Come scegliere k oggetti da un insieme di n elementi"

$$S_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Dimostrazione Fissato $k \geq 2$ dimostriamo per induzione su $n \geq k$
Il primo passo iniziale è, per $n = k$

$$S_{n,k} = 1 = \frac{k!}{k!(k-k)!} = 1$$

Il secondo passo iniziale è

$$S_{k,k-1} = \frac{k!}{(k-1)!(k-k+1)!} = k$$

Procedendo, il passo induttivo è

$$S_{n+1,k} = S_{n,k} + S_{n,k-1}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$= \frac{n!((n-n+1)+k)}{k!(n-k+1)} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{k}$$

□

1.2.3 Disposizioni

Una disposizione $D_{n,k}$ significa il numero di modi per "prendere" k oggetti ordinati da un insieme di n elementi.

$$D_{n,k} = S_{n,k} \cdot \mathrm{Perm}(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.3 Esercizi

1.3.1 Terno al lotto

Giocando 5 numeri al lotto (estrazione da 1 a 90) calcolare la probabilità di ottenere un terno esatto e più di un terno.

Se vogliamo ottenere un terno esatto i casi possibili sono $\binom{90}{5}$ (I modi di estrarre 5 palline dall'urna). I casi favorevoli saranno $S_{5,3} \cdot S_{85,2} = \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$

La probabilità di ottenere un terno esatto sarà quindi

$$P(\text{terno esatto}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{85 * 84 * 5}{\binom{90}{5}}$$

Per ottenere almeno un terno i casi favorevoli sono

- terno: $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$
- quaterna: $\binom{5}{4}\binom{85}{1}$
- cinquina: 1

La probabilità di ottenere almeno un terno sarà data dalla somma delle probabilità corrispondenti a terno, quaterna e cinquina:

$$P(\text{almeno un terno}) = \frac{\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{85}{1}\binom{5}{4}}{\binom{90}{5}} + 1$$

1.3.2 Probabilità del gioco di Monty Hall

Nel gioco televisivo di Monty Hall il partecipante deve scegliere una fra tre porte, una di esse contiene un premio mentre le altre due contengono rispettivamente due capre. Dopo la scelta del giocatore iniziale il presentatore apre una delle due porte contenenti una capra. Al giocatore conviene cambiare porta o mantenere quella scelta in origine?

Ipotesi Se scelgo una porta e la mantengo vinco solo se il premio era nella porta che ho scelto $\implies P = 1/3$

Ipotesi Se scelgo una porta e la cambio avrò $P = 2/3$

Tabella 1.1: Gioco di Monty Hall

1	2	3
x	x	$
x	$	x
$	x	x

1.3.3 Probabilità Condizionata

Lancio due dadi sommando il risultato, qual'è $P(\geq 10)$ sapendo che il primo ha fatto almeno 3?

Sappiamo che $P(\text{Somma} \geq 10) = 6/36 = 1/6$

Poniamo il vincolo che il lancio del primo dado risulti almeno ≥ 3

$$P(\text{Somma} \geq 10|\text{Primo dado} \geq 3) = 6/24 = 1/4$$

Definizione Ponendo $\Omega =$ gli eventi possibili; La **probabilità condizionata** che succeda A sapendo B si indica con:

$$P(A|B) = \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} = \frac{\#A \cap B}{\#B} = \frac{\#A \cup B}{\#\Omega} \cdot \frac{\#\Omega}{\#B}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esempio La probabilità di ottenere ≤ 4 sapendo che è uscito un numero pari è

$$P(\geq 4|\text{pari}) = \frac{P(\leq 4|\text{pari})}{P(\text{pari})}$$

$$P(\text{pari}) = 3/6 = 1/2$$

$$P(\leq 4 \cap \text{pari}) = 2/6$$

$$\implies P(\leq 4|\text{pari}) = \frac{2/6}{1/2} = 2/3$$

1.3.4 Dado rosso e dado nero

Tiriamo due dadi, uno rosso ed uno nero.

Calcolare la probabilità che il dado rosso risulti 3 ed il dado nero risulti 2:

$$P(R = 3|N = 2) = \frac{P(R = 3 \cap N = 2)}{P(N = 2)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$
$$P(R = 3) = 1/6$$

Ne otteniamo che $P(A|B) = P(A) \implies A, B$ sono indipendenti.

In generale, dati due eventi A, B con $A \cap B \neq 0$ la probabilità dell'unione è $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, allora $P(\Omega) = 1$ dove $\Omega =$ tutti gli eventi.

Definizione Definiamo il **complementare** di un evento, ovvero $A^C = \Omega \backslash A$. La probabilità di un complementare è $P(A^C) = 1 - P(A) = P(\Omega) - P(A)$

La probabilità di un intersezione di eventi è $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Capitolo 2

Spazio Probabilizzato

Uno spazio probabilizzato è definito come

$$(\Omega, F, \mathcal{P})$$

Ω è l'insieme degli eventi elementari, ad esempio in un lancio di un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{P}(A)$, ovvero le parti di A, sono tutti gli insiemi che posso costruire a partire dagli elementi di A. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
&A = \{0, 1\} \\
&\mathcal{P}(A) = \{0, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}\}
\end{aligned}$$

$F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è un sottoinsieme delle parti di omega, chiuso rispetto a intersezione, unione e complementare.

$$A, B \in F \implies \begin{cases} A \cup B \\ A \cap B \\ A^C, B^C \end{cases} \in F$$

Se $A_1, \ldots, A_n \subset F \implies \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F$

Se F comprende queste proprietà si dice che è una σ Algebra (tribù)

La probabilità P è una funzione definita come

$$\begin{aligned}
&P : F \to [0, 1] \\
&P(\Omega) = 1 \\
&\forall i \neq j . A_i \cap A_j \neq 0 \implies P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)
\end{aligned}$$

Dato Ω insieme finito, allora $F = \mathcal{P}(\Omega)$ allora la probabilità sarà

$$P(A \subset F) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Esempio: Lotteria di De' Finetti Si assiste all'estrazione di un numero $n \in \mathbb{N}$ casuale. Supponiamo che ogni numero abbia la stessa probabilità di essere estratto.

Dato un altro naturale $m \in \mathbb{N}$

$$P_n = P(n) = \text{ La probabilità di estrarre il numero n}$$

Vogliamo che

$$0 \leq P_n \leq 1$$
$$P_m = P_n \forall n = m$$

Quindi $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n$
Assumendo $P_n = 0, \forall n$ allora $\sum_n p_n = 0$
Se $P_n = c > 0, \forall n$ allora $\sum_n p_n = \sum_n c = +\infty$
Ciò significa che nella lotteria di De' Filetti è impossibile che ogni numero sia equiprobabile.

Dimostrazione La terna $(\Omega, F, \mathcal{P})$ si può dimostrare.

$$P(A^C) = 1 - P(A) \impliedby \begin{cases} A \cap A^C \neq 0 \\ A \cup A^C = \Omega \\ P(\Omega) = 1 \end{cases}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$

Densità di Probabilità Definiamo $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $p_n \in \mathbb{R}$, detta densità di probabilità come $p_n \geq 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$

Se $\{p_n\}$ è una densità di probabilità discreta $\implies (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$ è uno spazio probabilizzato. Vale anche per eventi non equiprobabili.

Definizione, indipendenza degli eventi $P(A|B) \equiv \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Allora A, B indipendenti se $P(A|B) = P(A)$
È vero quindi che $P(A|B) = P(A) \implies P(B|A) = P(B)$? Sì se A, B sono indipendenti.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B \cap A)$$

Se $A_1, \ldots, A_n$ sono indipendenti:

$$\forall i_1, \ldots, i_k \wedge k \leq n$$

(Con indici tutti diversi) allora vale

$$P(A) \cap (A_i1, \ldots, A_ik) = P(A_i1) \cdot \cdots \cdot P(A_ik)$$

Esercizio teorico A, B indipendenti $\Longrightarrow \begin{cases} A, B^C \\ A^C, B^C \\ A^C, B \end{cases}$ indipendenti

Dimostrazione:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B^C)$$

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B^C)$$

A e B^C sono indipendenti

$\square$