선형대수학팀

3팀
김진혁
김보근
노정아
심수현
이상혁

INDEX

0

선형대수학의 개념과 필요성

선형대수학의 개념

선형대수 (Linear Algebra)

선형성을 지닌 것들을 **연구**하는 대수학의 한 분야

방정식을 보다 쉽게 표현하고 해를 쉽게 구하기 위해

행렬과 벡터를 이용

↓

2차원 이상의 공간을 갖는 데이터를 다루는 데에 효과적

선형대수학의 개념

선형대수 (Linear Algebra)

선형성을 지닌 것들을 연구하는 대수학의 한 분야

방정식을 보다 쉽게 표현하고 해를 쉽게 구하기 위해

행렬과 벡터를 이용

↓

2차원 **이상의 공간을 갖는 데이터를 다루는 데에 효과적**

0 선형대수학의 개념과 필요성

선형대수학의 필요성

현실에서 다루는 데이터셋은
단순히 몇 개의 변수만 존재하지 않음

고차원 데이터를 이해하는 데에 선형대수 개념이 중요

데이터프레임화, 행렬화, 차원 축소 등의 과정 모두 선형대수에 근간을 둠

선형대수학의 필요성

현실에서 다루는 데이터셋은

머신러닝, 딥러닝 모델 알고리즘까지 적용

고차원 데이터를 이해하는 데에 선형대수 개념이 중요

선형대수는 통계적 이론의 기초이기 때문에

데이터프레임화, 행렬화, 차원 축소 등의 과정은 선형대수에서 시작함

데이터 분석 과정에서 매우 중요

1

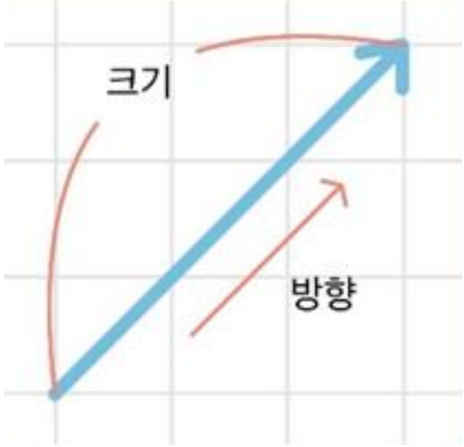
벡터와 행렬

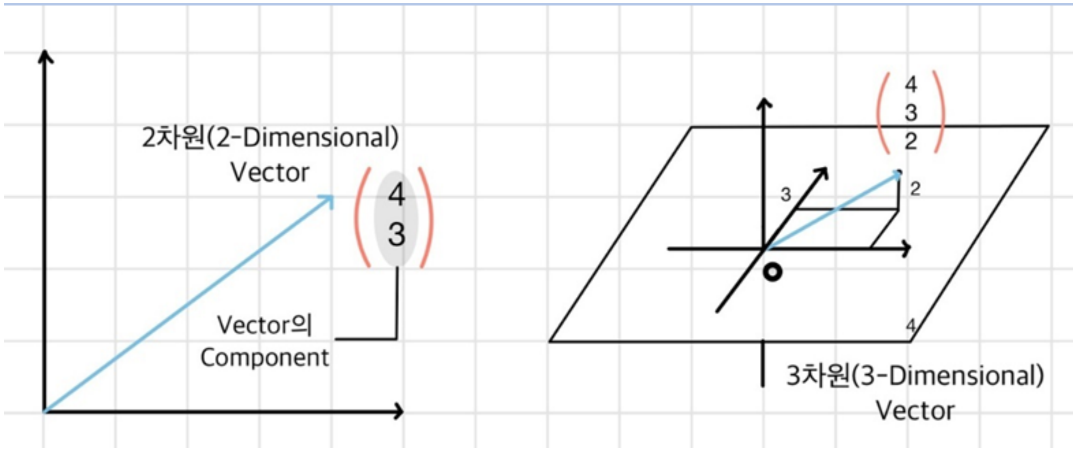
벡터의 의미

벡터 (vector)

선형대수학의 기본 단위이자 데이터 분석 시에도 중요한 개념

물리적으로 **방향과 크기**로 구성됨





1 벡터와 행렬

벡터의 의미

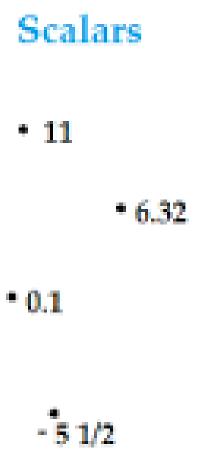
스칼라 (scalar)

크기만 나타내는 상수

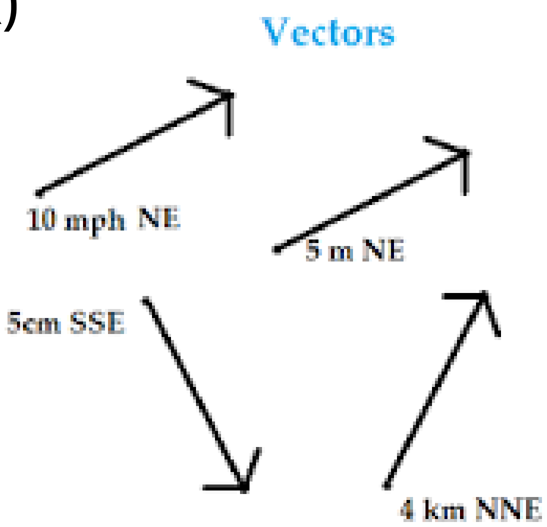
벡터 (vector)

크기 + 방향

Ex)



Ex)



1 벡터와 행렬

벡터의 의미

컴퓨터 과학의 측면

데이터 형태의 기본 단위

데이터를 선형적인 관점에서 이해할 수 있는 매개

공간적 이해

원점을 중심으로 뻗어가는 화살표

벡터로 이뤄지는 공간을 벡터공간(Vector Space)라고 함

성분의 개수에 따라 벡터의 차원이 결정됨

N개의 원소로 이뤄진 벡터는 N차원 공간에 있음

벡터의 연산

벡터의 연산법칙

벡터의 연산은 원소끼리 이뤄진다

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad / \quad w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

상수배 : $cv = \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix}$

덧 셈 : $v + w = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$

뺄 셈 : $v - w = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$

다양한 벡터연산

$\mathbb{R}^n$의 벡터 x, y, z와 스칼라 h , k에 대해 다음이 성립한다

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + 0 = x = 0 + x$$

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

$$k(x + y) = kx + ky$$

$$(h + k)x = hx + ky$$

$$(hk)x = h(kx)$$

$$1x = x$$

1 벡터와 행렬

벡터의 연산

벡터의 연산법칙

벡터의 연산은 원소끼리 이뤄진다

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad / \quad w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

상수배 : $cv = \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix}$

덧 셈 : $v + w = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$

뺄 셈 : $v - w = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$

다양한 벡터연산

$\mathbb{R}^n$의 벡터 x, y, z와 스칼라 h , k에 대해

다음이 성립한다

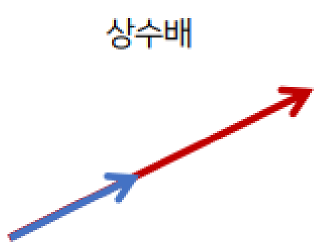
$$x + y = y + x$$
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x + 0 = x = 0 + x$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$
$$k(x + y) = kx + ky$$
$$(h + k)x = hx + ky$$
$$(hk)x = h(kx)$$
$$1x = x$$

벡터의 연산의 기하학적 의미

상수배 (scalar multiplication)

벡터에 스칼라 c를 곱하는 것

기하학적으로 벡터의 길이를 c배 한다는 것을 의미



파란색 벡터를 c배하여 빨간색 벡터를 만들어줌

이때 상수 **c의 부호에 따라 벡터 방향이 바뀜**

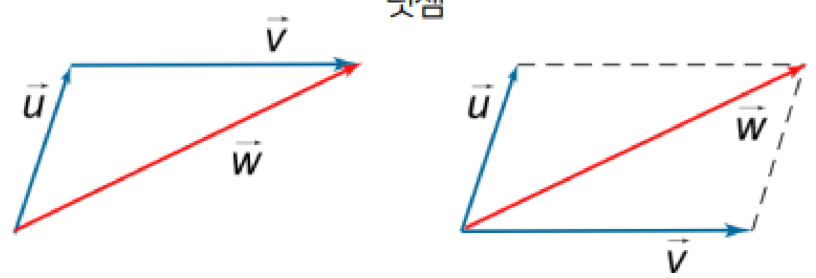
벡터의 연산의 기하학적 의미

벡터 간 덧셈/뺄셈

원점에서 벡터 u만큼 이동한 후 벡터 v만큼 이동하면 만들어지는

평행사변형의 대각선이 u+v, 즉 벡터 w

덧셈



뺄셈도 덧셈과 마찬가지로

원점에서 벡터 u만큼 이동 후 벡터 -v만큼 이동하면 벡터 u-v를 구할 수 있음

행렬의 의미

행렬 (Matrix)

실수를 직사각형 모양의 **행과 열로 배열**한 것

원소(element) : 배열 안의 수를 의미하며 성분(entry)이라고도 함

원소(element)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & \boxed{A_{1n}} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ 행렬

행렬의 연산

상수배

모든 원소에 같은 상수를 곱함

Ex)

$$2 \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 3 \\ 2 \times 2 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

행렬의 합

크기가 같은 두 행렬에서

같은 위치에 있는 원소끼리 합함

Ex)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

행렬의 곱

앞 행렬의 열의 개수와

뒤 행렬의 행의 개수가

같을 때 가능

Ex)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 & 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 & 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix}$$

1 벡터와 행렬

행렬의 종류

영행렬(Zero Matrix)

모든 원소가 0인 행렬

Ex)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

대각행렬(Diagonal Matrix)

대각 성분을 제외한

다른 성분이 모두 0인 행렬

Ex)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

단위행렬(Identity Matrix)

대각행렬 중 주대각선이 1인 행렬

Ex)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

행렬의 종류

삼각행렬(Triangular Matrix)

정방행렬 중 주대각선 위 혹은 아래 성분이 모두 0인 행렬

Ex)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

전치행렬(Transpose Matrix)

행과 열을 교환하여 얻는 행렬

Ex)

$$A = \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

대칭행렬(Symmetric Matrix)

$A = A^T$인 행렬

Ex)

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 5\\ -4 & 2 & 1\\ 5 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

역행렬 (Inverse matrix)

역행렬 (Inverse Matrix)

하나의 정방행렬 A에 다른 정방행렬 C를 곱한 결과가 단위행렬이라면,

행렬 C를 행렬 A의 **역행렬(Inverse Matrix)**이라고 함

Ex) 2 X 2 행렬의 경우 다음과 같은 방법으로 역행렬을 구할 수 있음

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2

선형방정식과 선형결합

2 선형방정식과 선형결합

선형방정식(Linear Equation)

선형방정식

양의 정수 n에 대해

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$로 표현되는 식

하나 이상의 선형방정식 집합을

연립선형방정식 또는 **선형시스템(Linear System)**이라고 함

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n
\end{matrix}
\rightarrow Ax = b \Leftrightarrow
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

선형방정식과 선형결합

선형방정식

선형방정식(Linear Equation)

이때 미지수 / 방정식 개수가 늘어나면?

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

하나 이상의 선형방정식 집합을 연립선형방정식 또는 선형시스템(Linear System)이라고 함

가우스 – 조던 소거법을 사용하여

해를 찾을 수 있음

Elementary Row Operation (ERO)

Elementary Row Operation (ERO)

① 두 행의 위치 교환

② 한 행에 대한 상수배

③ 한 행에 대해 상수배 후 다른 행과 덧셈

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 + 2 & 5 + 3 \end{bmatrix}$$

Elementary Row Operation (ERO)

Elementary Row Operation (ERO)

① 두 행의 위치 교환

② 한 행에 대한 상수배

③ 한 행에 대해 상수배 후 다른 행과 덧셈

ERO는 행 간 연산을 통해 **연립방정식의 해를 쉽게 구할 수 있게 함**

행렬사다리꼴 (Row Echelon Form / REF)

행렬사다리꼴 (Row Echelon Form / REF)

① 0 으로만 구성된 행은 0이 아닌 값이 존재하는 행보다 아래에 위치

② leading entry는 위에 있는 leading entry보다 오른쪽에 위치

③ 열 내에서 leading entry보다 아래에 있는 값들은 모두 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬사다리꼴 (Row Echelon Form / REF)

Leading Entry란?

행에서 첫 번째로 나타나게 되는

0이 아닌 수

행렬사다리꼴 (Row Echelon Form / REF)

① 0 으로만 구성된 행은 0이 아닌 값이 존재하는 행보다 아래에 위치

② leading entry는 위에 있는 leading entry보다 오른쪽에 위치

③ 열 내에서 leading entry보다 아래에 있는 값들은 모두 0

Leading 1이란?

ERO를 통해 leading entry가 1이 되는 경우

각 열마다 최대 1개만 존재

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

기약행사다리꼴 (Reduced Row Echelon Form / RREF)

기약행사다리꼴 (Reduced Row Echelon Form / RREF)

① 0 으로만 구성된 행은 0이 아닌 값이 존재하는 행보다 아래에 위치

② leading entry는 위에 있는 leading entry보다 오른쪽에 위치

③ 열 내에서 leading entry보다 아래에 있는 값들은 모두 0

④ 0 으로만 구성되지 않은 행의 leading entry가 1

⑤ 각각의 leading 1은 해당 열에서 유일한 0이 아닌 값

행렬사다리꼴 조건에 2가지 조건 추가

기약행사다리꼴 (Reduced Row Echelon Form / RREF)

기약행사다리꼴 (Reduced Row Echelon Form / RREF)

① 0 으로만 구성된 행은 0이 아닌 값이 존재하는 행보다 아래에 위치

② leading entry는 위에 있는 leading entry보다 오른쪽에 위치

③ 열 내에서 leading entry보다 아래에 있는 값들은 모두 0

④ 0 으로만 구성되지 않은 행의 leading entry가 1

⑤ 각각의 leading 1은 해당 열에서 유일한 0이 아닌 값

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)

가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)

ERO를 통해 복잡한 연립선형방정식을

기약행사다리꼴(RREF)로 **변환**하여 해를 구하는 방법

① 성분이 모두 0인 행을 가장 아래로 옮김

② 첫번째 열의 값이 0이 아닌 행을 제일 위로 옮김

③ 다른 행의 첫 번째 열의 수가 0이 되도록 첫 번째 행을 상수배해서 다른 행에 더함

④ 첫번째 행과 열을 제외한 나머지 부분에 대해서 ①~③ 과정을 반복

⑤ 각 열에 최대 1개의 leading 1만 존재하도록 아래에서부터 거꾸로 ERO를 진행

가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)

① 선형방정식을 행렬로 표현

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

② 1행과 2행의 위치 변경

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)

③ 1행에 (-2)를 곱하여 2행에 더함/1행에 (-3)을 곱하여 3행에 더함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

④ 2행에 (1/2)를 곱함/3행에 (1/3)을 곱함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 1 & -11/3 & -9 \end{pmatrix}$$

가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)

⑤ 2행에 (-1)를 곱하여 3행에 더함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 1 & -11/3 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$$

⑥ 3행에 -6을 곱함

REF 형태

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)

⑦ 3행에 -7/2를 곱하여 2행에 더함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

⑧ 3행에 -2을 곱하여 1행에 더함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)

⑨ 2행에 -1를 곱하여 1행에 더함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

RREF 형태

⑩ 가우스-조던 소거법을 이용해 해 도출

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 22 \\ x_2 &= -19 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2 선형방정식과 선형결합

선형시스템에서의 해집합

해가 존재
(consistent)

- ① 유일한 해가 있다
- ② 해가 무수히 많다

해가 존재 X
(inconsistent)

- ③ 해가 없다

2차원 그래프 (미지수 2개인 연립방정식)

유일한 해 존재

무수히 많은 해 존재

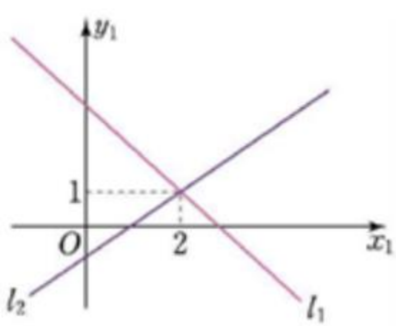
해 존재 X

선형시스템에서의 해집합

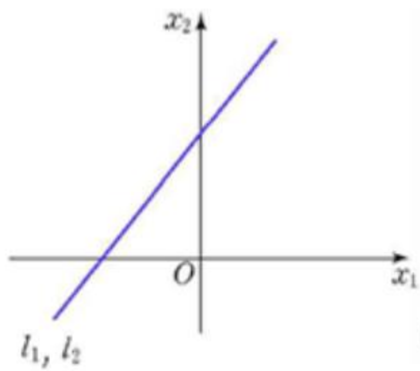
해가 존재 (consistent)
- ① 유일한 해가 있다
- ② 해가 무수히 많다

해가 존재 X (inconsistent)
- ③ 해가 없다

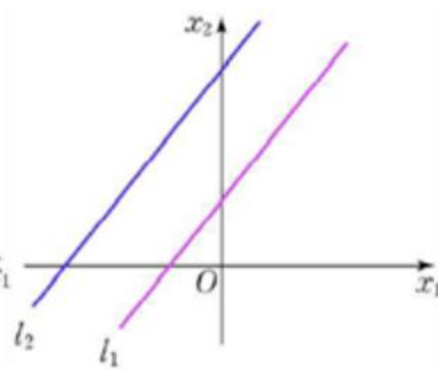
2차원 그래프 (미지수 2개인 연립방정식)



유일한 해 존재



무수히 많은 해 존재



해 존재 X

선형시스템에서의 해집합

해가 존재 (consistent)

(1) 유일한 해가 있다

(2) 해가 무수히 많다

해가 존재 X (inconsistent)

(3) 해가 없다

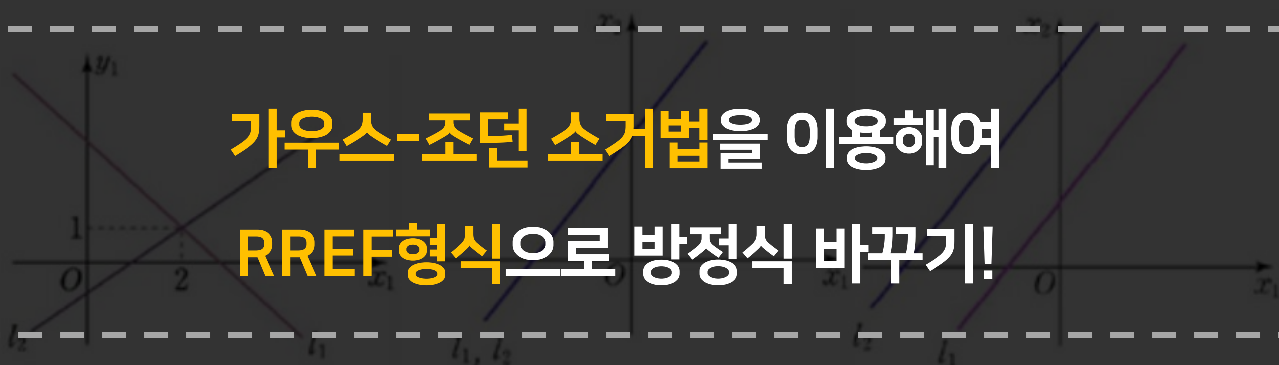
고차원 연립선형방정식에서는

해의 존재 여부를 파악하기 어려움

2차원 그래프 (미지수 2개인 연립방정식)

가우스-조던 소거법을 이용해여

RREF형식으로 방정식 바꾸기!



(1) (2) (3)

2 선형방정식과 선형결합

선형결합(Linear Combination)

선형결합

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

상수인 $a_1, a_2, \cdots, a_n$과 변수인 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 각각 상수배 되어 더해진 상태

Ex)

$$x1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow a1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

두 벡터에 각각 상수가 곱해진 형태!

선형결합(Linear Combination)

선형결합

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

상수인 $a_1, a_2, \cdots, a_n$과 변수인 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 각각 상수배 되어 더해진 상태

벡터 간의 선형결합

두 벡터의 상수배 합을 통해

2차원 공간의

어떤 벡터든 만들 수 있음

공간을 만들어내는 것

→ 공간생성(span)

ex)

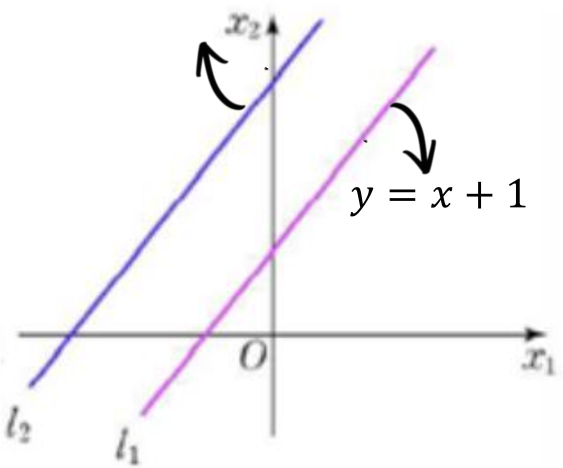
$x1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, x2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \rightarrow a1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

두 벡터에 각각 상수가 곱해진 형태!

Span에 대한 자세한 설명은 4장에서!

2 선형방정식과 선형결합

벡터의 선형결합으로의 연립선형방정식



① **기하학적 관점**: 두 벡터는 평행, 교점 X, 해 존재 X

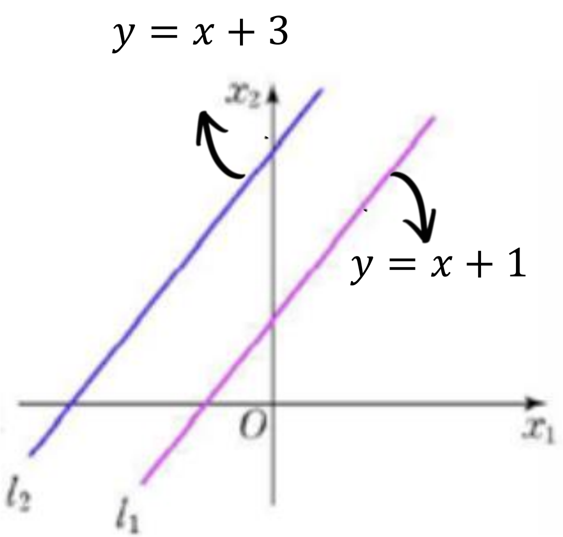
② 벡터의 선형결합의 관점 :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases} \rightarrow x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = (x-y)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$$

즉, 두 벡터를 통해 $\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$ 를 만들 수 없기 때문에 해 존재 X

2 선형방정식과 선형결합

벡터의 선형결합으로의 연립선형방정식



① **기하학적 관점**: 두 벡터는 평행, 교점 X, 해 존재 X

② **벡터의 선형결합의 관점** :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases} \rightarrow x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = (x-y)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$$

즉, 두 벡터를 통해 $\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$ 를 만들 수 없기 때문에 해 존재 X

3

선형변환

선형변환의 수식적 & 기하학적 의미

선형변환

R^n에서 R^m으로 변환하는 함수 T가 다음의 조건 만족하면 **선형변환**이라고 함

① $T(u+v) = T(u) + T(v)$

② $T(ku) = kT(u), k$는 상수

$Ax = b$를 **변환의 관점**에서 이해하면,

Input으로 받은 **벡터** x에 A라는 **함수**를 적용한 후

Output으로 **새로운 벡터** b를 **반환**하는 것

선형변환의 수식적 & 기하학적 의미

선형변환

R^n에서 R^m으로 변환하는 함수 T가 다음의 조건 만족하면 **선형변환**이라고 함

① $T(u+v) = T(u) + T(v)$

② $T(ku) = kT(u)$, k는 상수

$Ax = b$를 **변환의 관점**에서 이해하면,

Input으로 받은 **벡터** x에 A**라는 함수**를 적용한 후

Output으로 **새로운 벡터** b**를 반환**하는 것

선형변환의 수식적 & 기하학적 의미

선형변환

정의역에서 원소 두 개를 뽑아 선형결합해서 나오는 함수

=

선형결합을 통해 나온 함수의 값

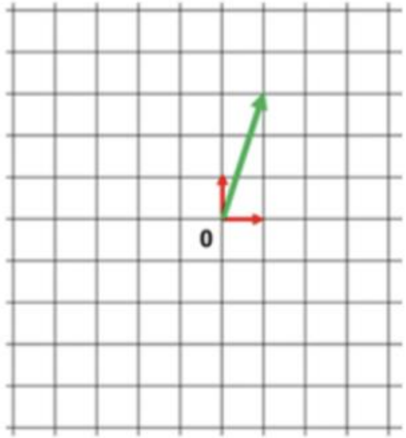
(2) $T(ku) = kT(u)$, k는 상수

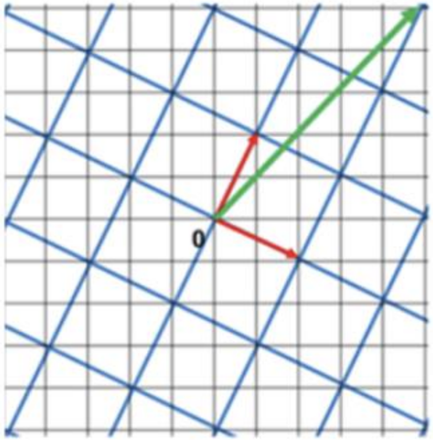
공간 위 직선은 변환 후에도 **직선**

원점은 변환 후에도 **원점**

Output으로 새로운 벡터 b를 반환하는 것

선형변환의 수식적 & 기하학적 의미





기저벡터 (좌표계 기본)

: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ → 직선

기저벡터의 선형 결합

: $1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ → 직선

기저벡터 변화

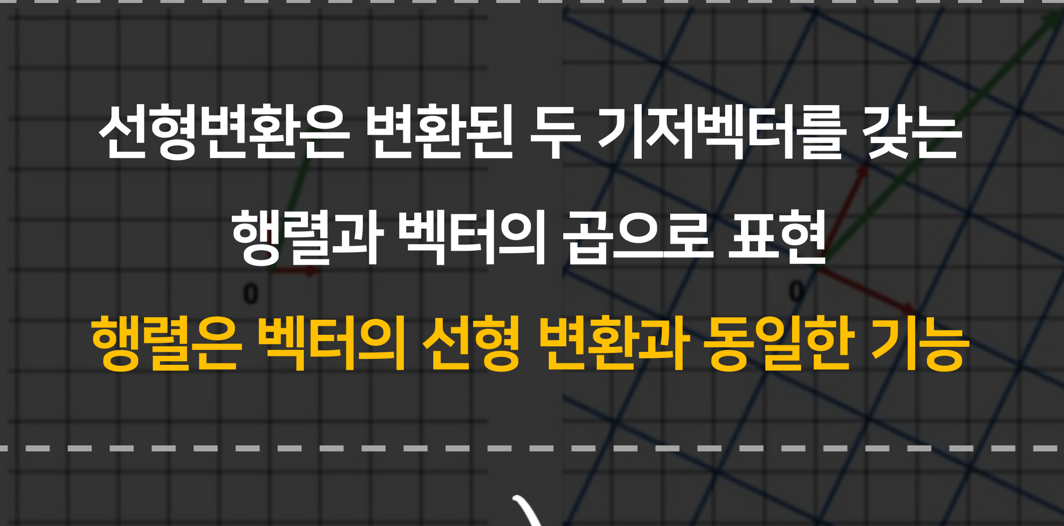
: $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ → 직선

기저벡터의 선형결합

: $1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$ → 직선

3 선형변환

선형변환의 수식적 & 기하학적 의미



선형변환은 변환된 두 기저벡터를 갖는 행렬과 벡터의 곱으로 표현

행렬은 벡터의 선형 변환과 동일한 기능

기저벡터(좌표계 기본)

-> $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

기저벡터의 선형 결합

-> $1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

기저벡터 변화

-> $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

기저벡터의 선형 결합

-> $1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

기저축, 좌표축을 변화시켜 새로운 벡터를 추출

좌표축 자체를 변화시킴

선형변환의 수식적 & 기하학적 의미

선형변환

① $T(u+v) = T(u) + T(v)$

② $T(ku) = kT(u)$, k는 상수

① 벡터에 행렬을 곱해 또 다른 벡터로 바꾸는 것 = 선형변환

② **행렬 = 벡터에 대해 선형변환을 시켜주는 도구**

역행렬의 기하학적 의미

역행렬

어떤 벡터 x가 A라는 선형변환을 통해 b라는 벡터로 변환됐을 때,

벡터 b를 다시 벡터 x로 되돌리는 선형변환

항상 역행렬 존재하는 것 X

선형변환 후 차원이 2차원에서 1차원으로 축소되는 경우,

1차원 벡터를 어떤 특정 2차원 벡터로 되돌려야 하는지 알 수 없음

↓

즉, x와 Ax가 서로 일대일 대응이 아님 ⟺ 역행렬 존재 X

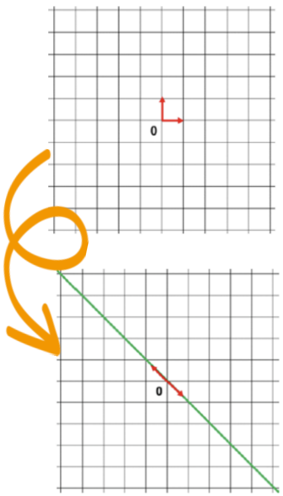
3 선형변환

역행렬의 기하학적 의미

역행렬

어떤 벡터 x가 A라는 선형변환을 통해 b라는 벡터로 변환됐을 때,

벡터 b를 다시 벡터 x로 되돌리는 선형변환



항상 역행렬 존재하는 것 X

선형변환 후 차원이 2차원에서 1차원으로 축소되는 경우,

1차원 벡터를 어떤 특정 2차원 벡터로 되돌려야 하는지 알 수 없음

↓

즉, x와 Ax가 서로 일대일 대응이 아님 $\Leftrightarrow$ 역행렬 존재 X

4

공간에서의 선형대수학

선형부분공간

벡터공간

벡터들의 선형결합을 통해 만들어낼 수 있는 공간

닫혀 있는 벡터들의 집합 (vector space)

덧셈과 상수배 곱셈 연산에 대해 닫혀있음

즉, 벡터들의 집합, 선형결합을 통해 만들어진

새로운 벡터도 그 벡터 공간에 속함

선형부분공간

벡터공간

벡터들의 선형결합을 통해 만들어낼 수 있는 공간

닫혀 있는 벡터들의 집합 (vector space)

덧셈과 상수배 곱셈 연산에 대해 닫혀있음

즉, 벡터들의 집합, 선형결합을 통해 만들어진

새로운 벡터도 그 벡터 공간에 속함

선형부분공간

벡터공간 V의 정의

① V 안의 모든 벡터는 덧셈에 대해 닫혀있음

② V 안의 모든 벡터에 대해 덧셈의 교환법칙이 성립함

1) ③ V 안의 모든 벡터에 대해 덧셈의 결합법칙이 성립함

2) ④ 더해서 벡터 자신이 나오는 덧셈의 항등원이 존재함 (영벡터 0)

3) ⑤ 더해서 항등원이 나오는 덧셈의 역원이 존재함

4) ⑥ V 안의 모든 벡터는 상수배에 대해 닫혀 있음

5) ⑦ V안의 모든 벡터에 대해 상수배 결합법칙이 성립함

6) ⑧ 상수배의 항등원이 존재함

7) ⑨ 분배법칙이 성립함

선형부분공간(subspace)

선형부분공간

집합 S가 벡터공간 V의 **부분공간**이라면, 다음의 3가지 조건을 만족한다.

① 영벡터(원점)가 존재함

② S 안의 모든 벡터는 덧셈에 대해 닫혀있음

③ S 안의 모든 벡터는 상수배에 대해 닫혀있음

왜 모든 선형부분공간에 영벡터가 포함될까?

→ S 안의 벡터에 어떤 스칼라를 곱해도 부분공간에 포함되어야 함

스칼라 0을 곱하면 무조건 영벡터가 되기 때문에, 무조건 포함!

선형부분공간(subspace)

선형부분공간

집합 S가 벡터공간 V의 **부분공간**이라면, 다음의 3가지 조건을 만족한다.

① 영벡터(원점)가 존재함

② S 안의 모든 벡터는 덧셈에 대해 닫혀있음

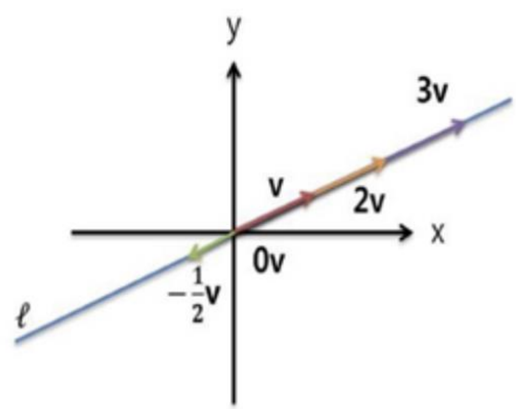
③ S 안의 모든 벡터는 상수배에 대해 닫혀있음

왜 모든 선형부분공간에 영벡터가 포함될까?

$\longrightarrow$ S 안의 벡터에 어떤 스칼라를 곱해도 부분공간에 포함되어야 함

스칼라 0을 곱하면 무조건 영벡터가 되기 때문에, 무조건 포함!

선형부분공간 예시



부분공간 l은 원점을 포함하면서 v에 대해

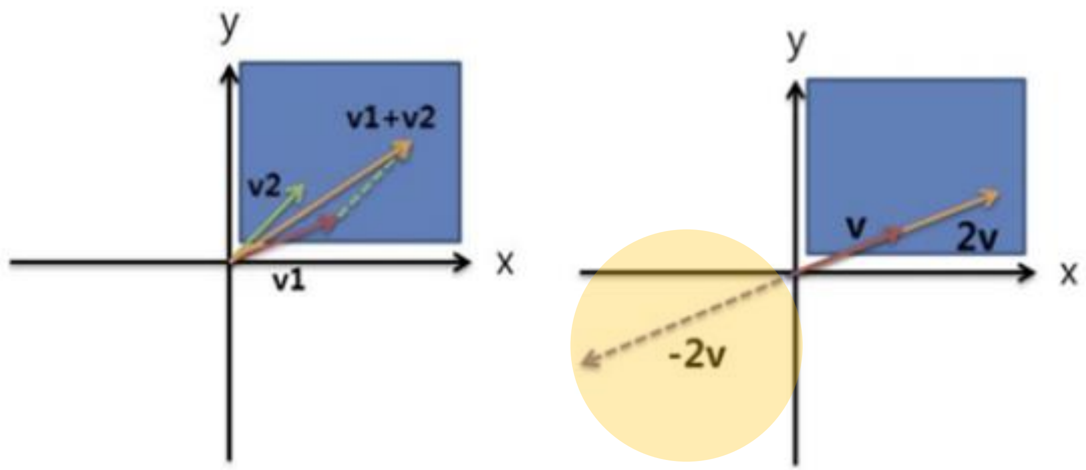
덧셈조건, 상수배조건 만족함

직선 l은 R^2 의 선형부분공간

선형부분공간 예시

R^2의 부분집합 1사분면은 선형부분공간일까?

선형부분공간 예시



부분공간 l은 원점을 포함하면서 v에 대해

덧셈조건, 상수배조건 만족함

1사분면 내 벡터에 음수 스칼라를 곱하면

그 벡터는 1사분면을 벗어나므로 1사분면은 R^2 의 선형부분공간이 아님

직선 l은 R^2 의 선형부분공간

선형부분공간 예시

선형부분공간이 왜 중요?

연립선형방정식의 해집합이 무수히 많은 경우,

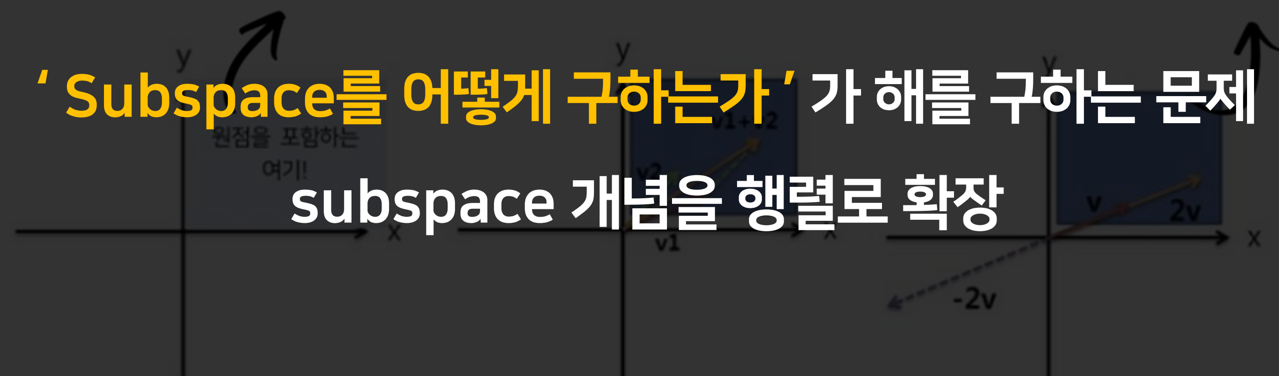
그것은 기본적으로 행렬의 subspace와 관련 있음

R^2의 부분집합

1사분면은 선형부분공간일까?

1사분면 내 벡터에 음수 스칼라 곱하면

그 벡터는 1사분면을 벗어나므로, 아님!



' Subspace를 어떻게 구하는가 ' 가 해를 구하는 문제

subspace 개념을 행렬로 확장

선형독립과 선형종속

n개의 벡터 x_1, x_2 , ⋯ , x_n에 대한 벡터의 선형결합

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = 0$$

선형독립(Linear independent)

상수 c_i가 모두 0인 경우를 제외한 어떠한 조합으로도 식이 성립하지 않는 경우

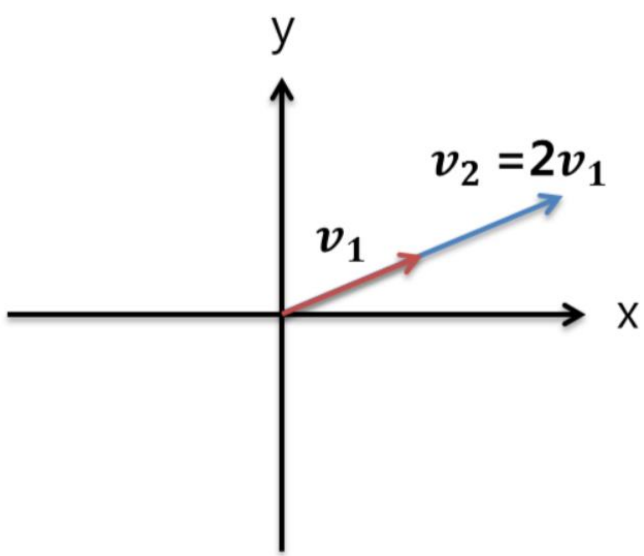
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

선형종속(Linear dependent)

상수 c_i가 0이 아닌 조합 존재

Ex) $c_1 = 1,\ c_2 = 2 \cdots,\ c_n = -4$

선형독립과 선형종속



$c_1 = 2, c_2 = -1$ 일때

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$가 성립

→ $v_{1,}\ v_2$ 는 선형종속임

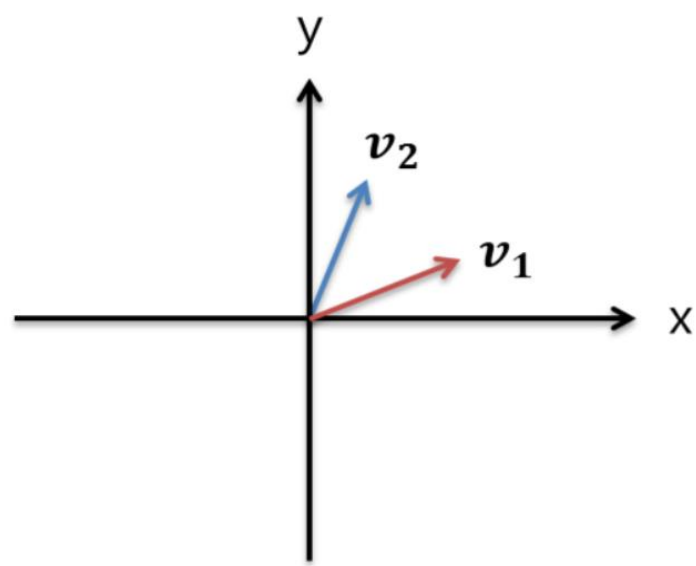
선형독립과 선형종속

v_1, v_2 를 이용해 어떤 선형결합을 해도

C가 모두 0인 경우를 제외하고는

0을 만들 수 없음

$\longrightarrow$ v_1, v_2 는 선형독립



Span

Span

행렬 A를 열벡터를 원소로 갖는 행벡터 $\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$,

열벡터 x를 $[x_1\ x_2 \cdots x_n]^T$ 라고 할 때,

행렬 Ax 는 A의 각 열과 x의 변수 값의 곱으로 나타낼 수 있으며

이를 $Span\{a_1, a_{2,} \dots, a_n\}$ 라고 함

Span

Span

행렬 A를 열벡터를 원소로 갖는 행벡터 $\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$,

열벡터 x를 $[x_1\ x_2 \cdots x_n]^T$ 라고 할 때,

행렬 Ax 는 A의 각 열과 x의 변수 값의 곱으로 나타낼 수 있으며

이를 $Span\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 라고 함

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 의 모든 선형결합을 조합한 공간

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$의 모든 선형결합이 속하는 선형부분공간

Span

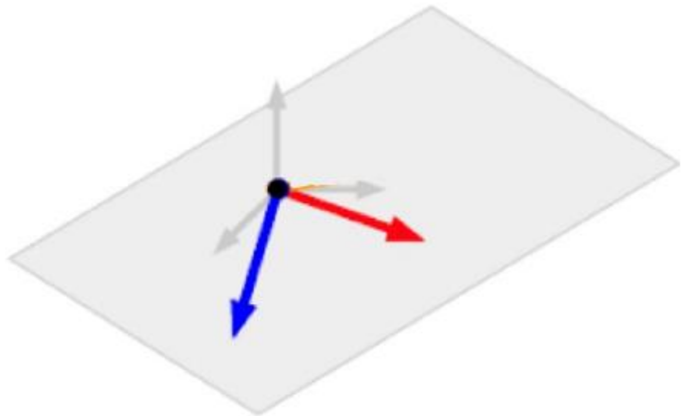
$$Ax = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = ax_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

= $Ax = b$의 해가 있다

= 벡터 b가 $Span\{a_1, a_{2,} \dots, a_n\}$에 있다

= 벡터 b를 $\{a_1, a_{2,} \dots, a_n\}$의 조합으로 표현할 수 있다

Span

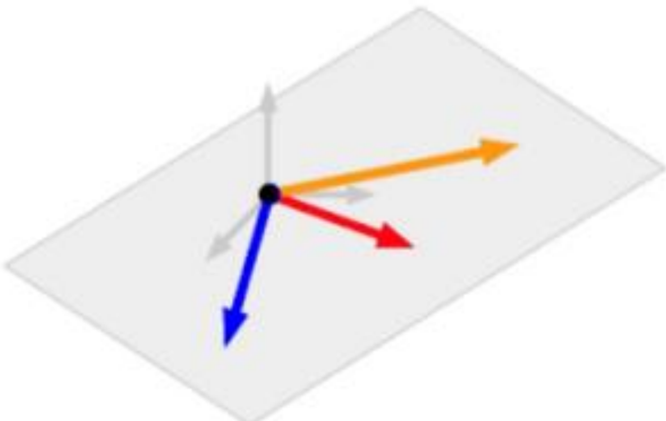


빨간색 벡터와 파란색 벡터의 선형결합을 모으면

평면에 있는 모든 벡터 생성 가능

→ 두 벡터는 평면 공간을 span함

Span



빨간색 벡터와 파란색 벡터로 만들어진,

평면 공간 내에 존재하는 주황색 벡터 추가

↓

빨간색 벡터와 파란색 벡터의 **선형결합으로**

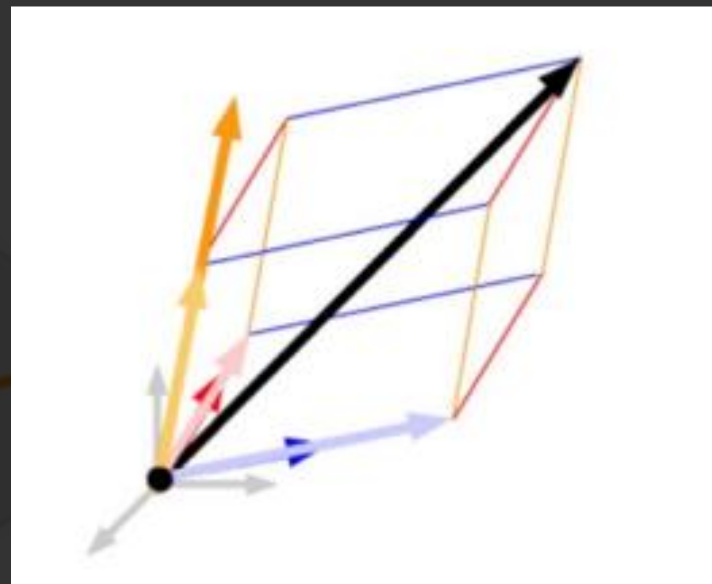
주황색 벡터를 표현할 수 있기 때문에,

세 벡터로 span할 수 있는 공간은 여전히 평면 뿐

선형 종속

3차원을 만들려면..

기저



란색 벡터로 만들어진,

하는 주황색 벡터 추가

색 벡터의 선형결합으로

주황색 벡터를 표현할 수 있기 때문에,

세 벡터로 span할 수 있는 공간은 여전히 평면 뿐

선형 종속!

주황색 벡터가

두 벡터가 span하는 평면 공간의 밖에 있어야

3개의 벡터로 R^3공간 span 가능

기저

기저(Basis)

어떤 공간을 span하는 **벡터의 최소집합**

① $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 이 공간 V를 생성한다

② $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 이 선형 독립(linearly independent)이다

특정 공간을 구성하는데 이미 존재하는 벡터들의 조합으로 설명되는 벡터의 추가는 의미가 없음

기저

기저(Basis)

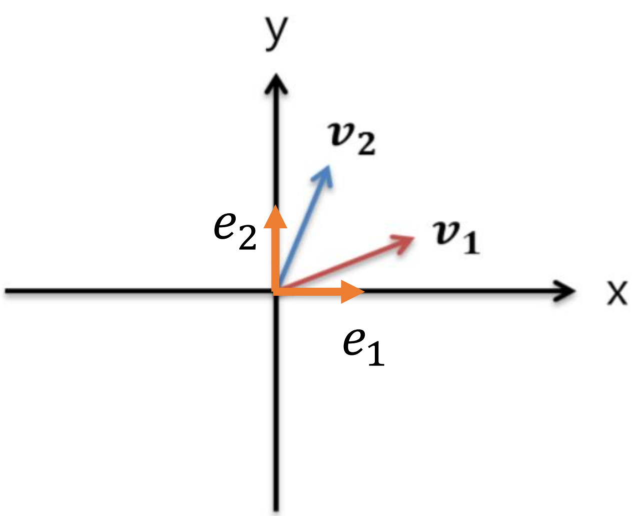
어떤 공간을 span하는 벡터의 최소집합

① $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 이 공간 V를 생성한다

② $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 이 선형 독립(linearly independent)이다

특정 공간을 구성하는데 이미 존재하는 벡터들의 조합으로 설명되는 벡터의 추가는 의미가 없음

Non-uniqueness of Basis



표준 기저벡터

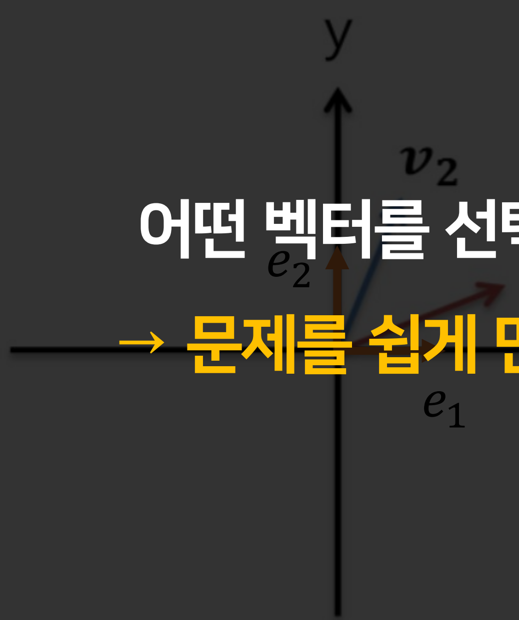
$$R^2 = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$R^2 = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}v_{1x}\\v_{1y}\end{bmatrix}$$

이때 선형독립인 어떤 두 벡터가 와도
두 벡터는 R^2 공간을 span할 수 있음

어떤 공간을 span하는 기저 벡터는 유일하지 않다

Non-uniqueness of Basis



표준 기저벡터

$$R^2 = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$R^2 = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}v_{1x}\\v_{1y}\end{bmatrix}$$

⋮

이와 선형독립인 어떤 벡터가 와도

두 벡터는 R^2 공간을 span할 수 있음

➔ 어떤 공간을 span하는 기저 벡터는 유일하지 않다

어떤 벡터를 선택하느냐에 따라 연립방정식의 계수가 달라짐

→ 문제를 쉽게 만들기 위해 기저벡터의 변환을 시도할 수 있음

Coming soon…

선형변환과 함수

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

행렬은 선형 변환이기에 벡터를 변환시켜 다른 벡터 출력

→ **벡터를 입력 받아 벡터를 출력해주는 함수라고 할 수 있을까?**

선형변환이 함수이기 위해서는 함수의 정의에 부합해야 함

선형변환과 함수

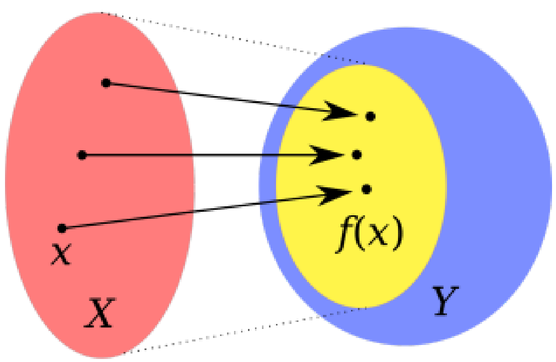
함수

집합에 대해 X, Y 를 각각 정의역, 공역,

graph f는 곱집합 $X \times Y$ 의 부분집합이라고 가정

이 때 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $(x, y) \in graph\ f$ 인 $y \in Y$ 가

유일하게 존재한다면, 이러한 y 를 $f(x)$ 라고 함.

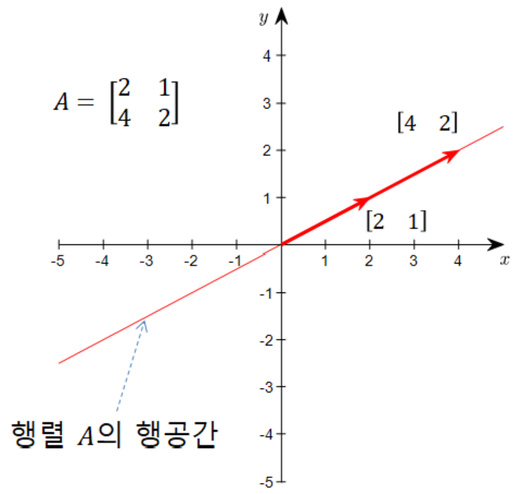


$f : X \to Y$

행공간

행공간 (Row space)

행렬에서 **행들의 선형 결합**을 통해 만들 수 있는 부분공간



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 의 행공간

↓

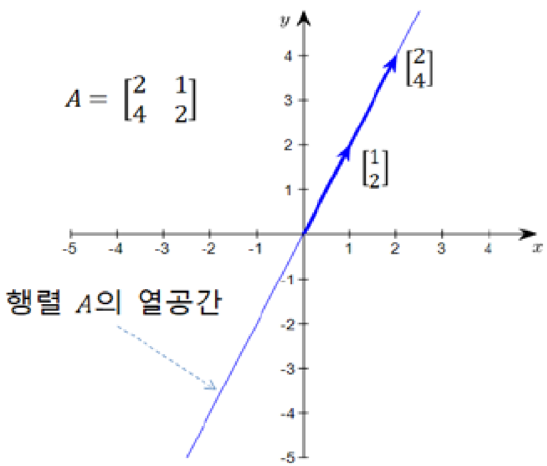
벡터 [2 1], [4 2] 의

선형결합으로 만든 부분 공간인 빨간 직선

열공간

열공간 (Column space)

행렬에서 열들의 선형 결합을 통해 만들 수 있는 부분공간



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 의 열공간

↓

벡터 [2 4], [1 2] 의

선형결합으로 만든 부분 공간인 파란 직선

영공간

영공간 (Null space)

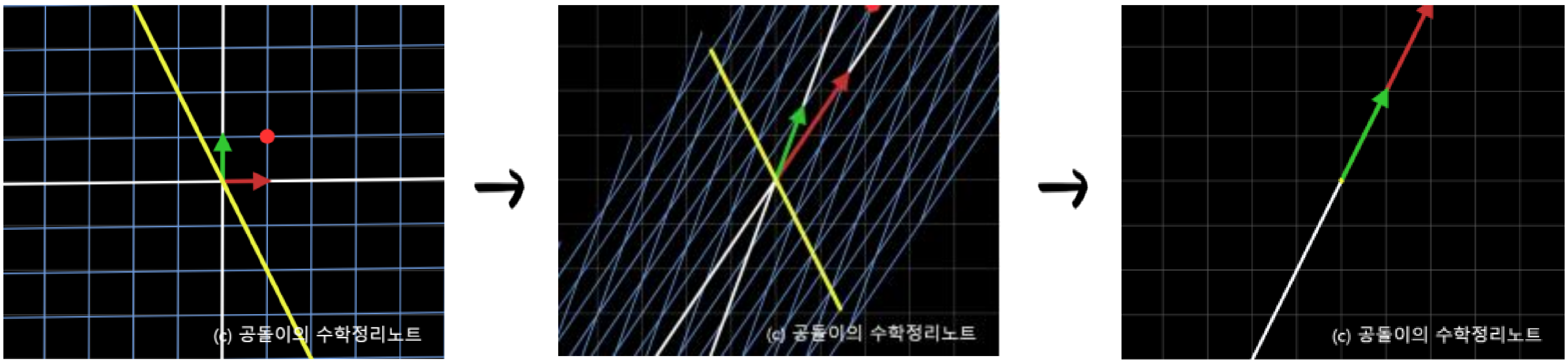
$Ax = 0$ 을 만족하는 벡터 x들의 집합

A 라는 선형변환 후에 모두 0을 출력하게 만들어주는 벡터들의 집합

$$Ax = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 때의 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 가 영공간에 속하는 벡터

영공간



A라는 선형 변환에 의해 2차원 벡터 공간상에 있던 모든 벡터가 열공간으로 이동

선형 변환 후에 (0,0)으로 이동하는 점들의 집합이 노란색 선, 즉 영공간

이때, 영공간과 행공간은 서로 직교함 (2주차 내용)

Left Null Space

Left Null Space

$A^T x = 0$ 을 만족하는 벡터 x들의 집합

A^T 라는 선형변환 후에 모두 0을 출력하게 만들어주는 벡터들의 집합

$$A^T x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 때의 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$가 Left Null Space에 속하는 벡터

선형변환의 정의역과 치역

선형변환을 하나의 함수로 생각할 수 있음

함수

X : 정의역

$f(x)$: 치역

Y: 공역

f : 함수

선형변환

X : 행공간 + 영공간

$f(x)$: 열공간

Y: 영공간 + Left Null Space

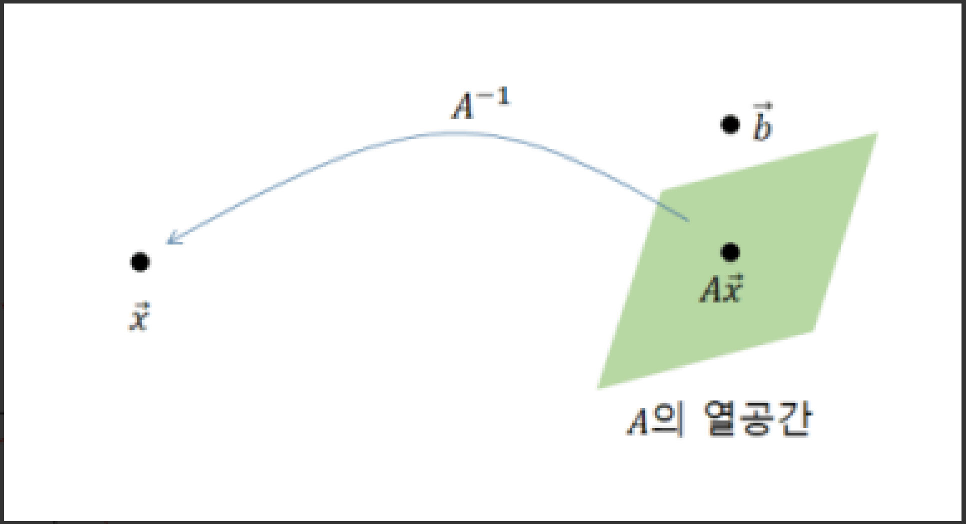
f : 행렬

선형변환의 정의역과 치역

만약 행렬 A의 열공간 안에 b 가 존재하지 않으면

$Ax = b$의 해가 존재하지 않게 됨

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$



Projection을 이용해 b와 가장 가까이 있는

A의 열공간 안에 있는 벡터를 찾을 수 있음

Coming soon…

Rank

Rank

행렬에서의 **선형 독립인 열벡터의 개수 (열공간의 차원)**

Ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

열공간의 차원 = 2

rank(A) = 2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

열공간의 차원 = 1

rank(B) = 1

Rank

Rank

행렬에서의 **선형 독립인 열벡터의 개수 (열공간의 차원)**

Ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

열공간의 차원 = 2

rank(A) = 2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

열공간의 차원 = 1

rank(B) = 1

Rank

행렬 A의 rank와 A^T의 rank가 동일함

=

A의 행벡터로 생성되는 벡터의 공간 차원과

열벡터로 생성되는 벡터 공간의 차원이 같음

행렬 A의 rank는 **열공간의 차원**이면서 동시에 **행공간의 차원**임

5

아핀변환과 딥러닝

아핀변환

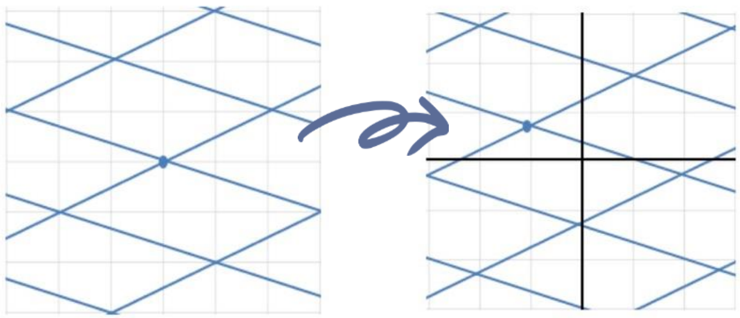
아핀변환

선형변환에 평행이동이 더해진 것

선형변환

$$y = Ax + z$$

평행이동



① 선형변환에 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 추가 ② linear transformation형태 ③ 행렬로 표현

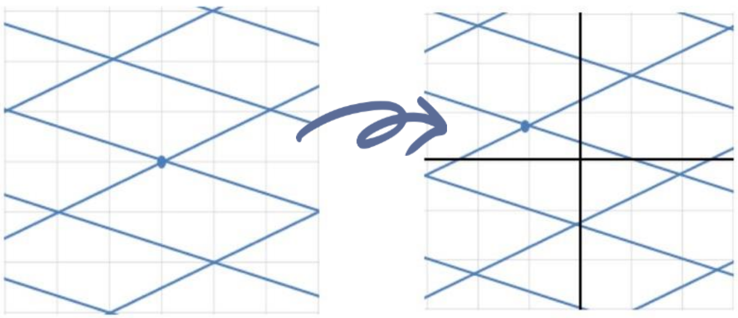
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \qquad a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 & c \\ 1 & 1 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

아핀변환

아핀변환

선형변환에 평행이동이 더해진 것

$$y = \overset{\text{선형변환}}{Ax} + \underset{\text{평행이동}}{z}$$



선형변환 　 아핀변환

① 선형변환에 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 추가

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

② linear transformation형태

$$a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

③ 행렬로 표현

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & c \\ 1 & 1 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

아핀변환

평행이동으로 인해

선형변환의 조건을 만족하지 못함

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$T(x) = Ax + k$ 일 때,

$$T(au+bv) = A(au+bv) + k = Aau + Abv + k$$

$$\neq$$

$$T(au) + T(bv) = (Aau + k) + (Abv + k) = Aau + Abv + 2k$$

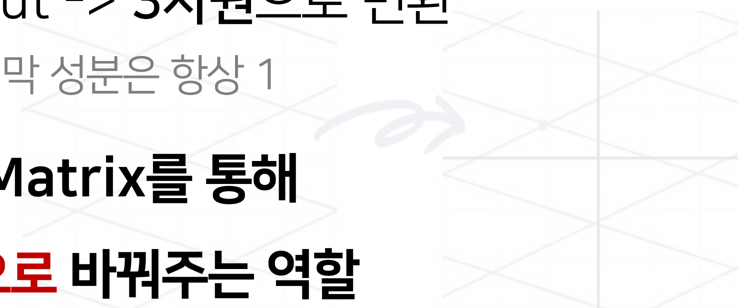
아핀변환

상수항 z가 추가되면서 **2차원** input -> **3차원**으로 변환

변환된 3차원 input 벡터의 마지막 성분은 항상 1

아편변환은 Non-Squared Matrix를 통해

3차원 input을 2차원 output으로 바꿔주는 역할



① 선형변환에 $\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ 추가

$$\begin{bmatrix}2&-3\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

② linear transformation형태

$$a\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

③ 행렬로 표현

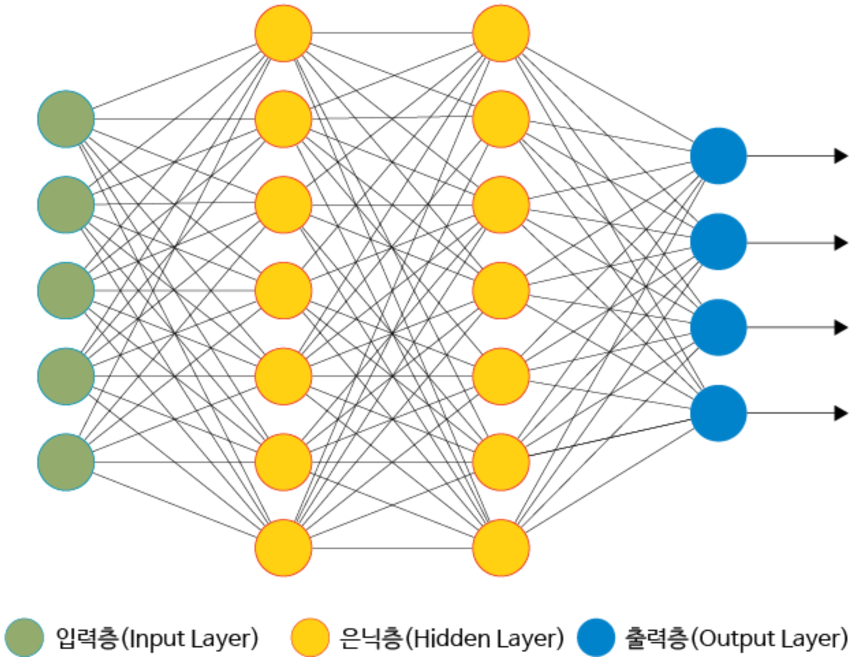
$$\begin{bmatrix}2&-3&c\\1&1&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\1\end{bmatrix}$$

딥러닝

딥러닝

여러 층을 가진 인공신경망을 이용하는 머신러닝 모델

여러 개의 은닉층을 거치면서 학습이 이뤄짐



딥러닝

딥러닝

여러 층을 가진 인공신경망을 이용하는 머신러닝 모델

여러 개의 은닉층을 거치면서 학습이 이뤄짐

- 활성화 함수로 입력값 예측
- 손실함수로 예측과 실제의 오차 측정
- 손실함수를 바탕으로 가중치 업데이트

5 아핀변환과 딥러닝

딥러닝

딥러닝

여러 층을 가진 인공신경망을 이용하는 머신러닝 모델

여러 개의 은닉층을 거치면서 학습이 이뤄짐

활성화 함수로 입력값 예측

입력값을 대응되는 가중치와 곱한 뒤 이를 모두 더해준 후

bias를 더해 다음 layer로 전달

↓

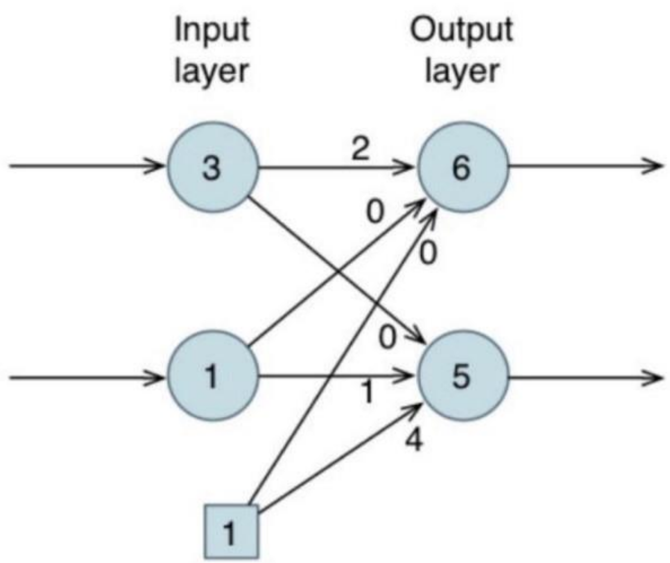
아핀변환이 적용됨

손실함수를 바탕으로 가중치 업데이트

5 아핀변환과 딥러닝

딥러닝

딥러닝 모델



$$Ax + z$$

A = 가중치

z = bias

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$

x = 입력값

가중치와 입력값의 연산에

bias가 더해진 값

=> 다음 층으로 전달

자세한 내용은 딥러닝팀 클린업 참고해주세요

$Y = Ax$가 아닌 $Y = Ax + z$를 사용하는 이유

딥러닝

단순 선형변환을 사용하면

은닉층을 여러 번 통과하더라도 $y = A^n x$가 되어

A^n을 한 번 적용하는 것과 같게 됨

여러 은닉층을 쌓고 가중치를 업데이트하는 이점이 없어짐

Sigmoid, ReLU와 같은 비선형 활성화 함수를 이용해

지속적으로 bias인 z를 더해줌으로써

층을 통과할 때마다 유의미한 차이를 만들어냄

다음 주 예고

1. 행렬식
2. 노름, 내적, 직교성
3. 정사영과 회귀적용
4. 고유값 분해
5. 특이값 분해

감사합니다