IOI2018 中国国家候选队互测解题报告

绍兴市第一中学 任轩笛

目 录

1 小 A 的旅行

1.1 问题描述

给出一个 n 个点的有向图的邻接矩阵，n 是 2 的幂次，点的标号为 $[0,n)$。定义一次旅行是从某个起点开始，经过至少一条边，到某个终点结束的路径。定义一次旅行的愉悦值为起点和终点编号的按位与的值。要求对于所有 $x\in[0,n),i\in[1,m]$ 求 $f(x,i)$ 表示：进行了若干次旅行，所有愉悦值按位与 $=x$，且一共经过了 i 条边的方案数。输出这 $n*m$ 个数对 998244353 取模后的按位异或值。

$n\le 64,m\le 20000$。

1.2 算法一

将图的邻接矩阵求 k 次方就能得到走 k 步的信息。

用 m 次矩阵乘法求出 $A,A^2,...A^m$，就能得出所有从点 x 走 i 步走到点 y 的方案数。

接下来用一个 dp 计算答案：$dp_{i,j}$ 表示总共走了 i 步，愉悦值的按位与 $=j$ 的方案数。枚举下一次旅行的步数以及愉悦值，可以方便转移。

时间复杂度 $O(n^3m+n^2m^2)$，可以通过 subtask1 拿到 15 分。

1.3 算法二

注意到我们需要求的是所有起点/终点的按位与，而将当前旅行扩展一步时只需要知道当前在哪个点，那么可以在状态中记录前面所有旅行的起点/终点的按位与和现在的位置，即用 $f_{i,x,y}$ 表示走了 i 步，之前所有旅行的起点/终点及最后一次的起点的按位与为 x，现在位于 y 的方案数。

转移时首先将 y 扩展一步变成 z，然后把所有 $f_{i,x\&z\&w,w}$ 加上 $f_{i,x,z}$，表示让最后一次旅行结束于 z，并开始一次起点为 w 的旅行。

时间复杂度 $O(n^3m)$，可以得到 30 分。

1.4 算法三

考虑集合幂级数变换，我们想要求 f_S 表示按位与 $=S$ 的方案数，如果能求出 g_S 表示按位与 $\supseteq S$ 的方案数，做一个简单的莫比乌斯反演就能得到答案了。

首先仍然是用 m 次矩阵乘法算出 $w_{S,i}$ 表示走 i 步，愉悦值为 S 的方案数，用莫比乌斯变换得到 $h_{S,i}$ 表示走 i 步，愉悦值 $\supseteq S$ 的方案数。

将 h_S 表示成生成函数 $H_S(x)=\sum h_{S_i}x^i$，进行多次旅行就相当于生成函数的多次幂。

要求的是 $1+H_S(x)+H_S(x)^2+H_S(x)^3...$ 中 $x,x^2,...x^m$ 前的系数，即 $\frac{1}{1-H_S(x)}$ 模 x^{m+1} 的结果。

这个用快速傅里叶变换和多项式求逆算法可以在 $O(m\log m)$ 时间内求得。

于是总的复杂度是 $O(n^3m + nm\log m)$，同样是 30 分。

1.5 算法四

上面的算法复杂度瓶颈在于求邻接矩阵的 $1 \sim m$ 次方。

subtask3 中，$A_{i,j} = i \otimes j$，$\otimes$ 表示异或运算，即这是一个循环矩阵。

这个矩阵显然可以只用一行或一列来表示，一次矩乘是 $O(n^2)$ 的。

配合算法三，复杂度是 $O(n^2m + nm\log m)$，可以得到 65 分。

1.6 算法五

分析一下我们具体要预处理什么信息，实际上是：$Q_S(A^i)$ 表示 A_i 中，起点和终点编号的按位与 $= S$ 的方案数。

Q_S 有一个很好的性质：它是线性的，即 $Q_S(A+B) = Q_S(A) + Q_S(B)$ 且 $Q_S(kA) = kQ_S(A)$。

根据 Cayley-Hamilton 定理，设 $F(x)$ 是 n 阶方阵 A 的特征多项式，有 $F(A) = 0$。设 $F(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$，则有

$$\sum_{i=0}^{n} f_i A^i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i A^{i+w} = 0$$

$$Q_S\left(\sum_{i=0}^{n} f_i A^{i+w}\right) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i Q_S(A^{i+w}) = 0$$

这样我们就得到了一个关于 $Q_S(A^i)$ 的 $n+1$ 阶线性递推式，只要暴力求出 $A, A^2, ...A^n$，算出前 n 项的答案，后面的就可以线性递推了。

线性递推的系数即特征多项式的系数可以 $O(n^4)$ 代入 n 个值，拉格朗日插值得到，或者直接用高斯消元或者 BM 算出线性递推的系数也是可以的。

总的复杂度是 $O(n^4 + n^2m + nm\log m)$，可以通过所有子任务得到 100 分。

1.7 得分预计

本题考察了集合幂级数的莫比乌斯变换、莫比乌斯反演，快速傅里叶变换，多项式求逆等知识，满分做法还要求选手对线性代数中的 Cayley-Hamilton 定理有一定理解，总体思维难度不大，大致位于 NOI 中 $T2 \sim T3$ 的难度。

预计候选队参加比赛的 12 人中有 12 人能获得至少 65 分，10 人能获得满分。

1.8 参考资料

[1] 吕凯风,《集合幂级数的性质与应用及其快速算法》, 2015 年信息学奥林匹克中国国家队候选队员论文集.

[2] 彭雨翔, Inverse Element of Polynomial, Picks's Blog.

[3] Codechef, CLOWAY - Editorial.

[4] WikiPedia, Cayley-Hamilton theorem.