

# 《整除分块》分析

杭州学军中学 郎思轲

- 一道找规律好题
- 考察了选手的基础数论简单应用和数学推导能力以及如何分配比赛时间的能力

■ 正整数  $i$  没有出现在数列中的充要条件是

$$\left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor \neq i \implies \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor \geq i+1 \implies \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \geq i+1$$

$$\implies \left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \implies \left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = a \implies n \in [ai, ai+i-1] \cap [ai+a, ai+a+i]$$

$$\implies n \in [ai+a, ai+i-1]$$

■ 使得正整数  $i$  没有出现在数列中的  $n$  的值:

$$[0, i-1]$$

$$[i+1, 2i-1]$$

$$[2i+2, 3i-1]$$

$$[3i+3, 4i-1]$$

...

$$[i^2 - i - 2, i^2 - i - 1]$$

$$[i^2 - 1, i^2 - 1]$$

■  $[ai + a, ai + i - 1]$  与  $[(i+1)(a-1) + a - 1, (i+1)(a-1) + (i+1) - 1]$   
可以拼接

■ 答案的表:

<u>2</u>	f(40)	7
3	<u>7</u>	
2	9	
<u>3</u>	9	
3	9	
4	8	
4	8	
3	8	
<u>5</u>	7	
4	<u>10</u>	
4	9	
5	9	
5	9	
5	9	
4	8	
<u>6</u>	8	
6	<u>10</u>	
5	10	
<u>5</u>	10	
f(20)	10	
7	9	

- 如何快速计算
- 分成奇数等差数列段和偶数等差数列段计算
- 最后的零碎段单独计算
- 以奇数等差数列段为例：

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^i (i + \lfloor \sqrt{j-1} \rfloor) \Rightarrow \\
 & \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^i \lfloor \sqrt{j-1} \rfloor = \sum_{j=1}^l \lfloor \sqrt{j-1} \rfloor (l - j + 1) \\
 & = \sum_{j=1}^l \left( \sum_{k \geq 1} [k^2 < j] \right) (l - j + 1) = \sum_{1 \leq k^2 < l} \sum_{j=1}^{l-k^2} j
 \end{aligned}$$

- 注意各种细节即可