Noi.ac 省选模拟赛题解

cz_xuyixuan

March 6, 2019

1 唐时月夜

一旦某一个矩形的子水域被操作了，那么其中所有元素的相邻关系就确定下来，我们只会对其整体进行操作。

那么，我们可以在全局维护这些对当前矩形整体进行的操作的效果，其实质上是一个对位置的线性变换，在操作不同的矩形的时候将新增的部分拼接上去即可。

时间复杂度 $O(N \times M + Q)$ 。

具体实现的时候，笔者采用了一种直观的方式，即维护所有点的相邻关系，以及当前矩形上、下、左、右边界的有序点集。在操作时，我们只需交换和翻转一些点集即可，翻转可以通过标记来实现；而这样的实现方式中，拼接的过程将会比较直观。最后，我们可以依据整个矩形的上、左边界，以及所有点的相邻关系来还原矩阵。

但是，这样的做法将会带来较大的常数，远远不及直接用线性变换的观点来实现本题，这也是本题时间限制较长的原因。

2 附耳而至

首先，我们需要求出每一个区域「光明值」和「黑暗值」，以及相邻的两个区域若被不同的神灵选中所要付出的代价。

我们可以用平面图转对偶图来解决上述问题，其时间复杂度为 $O(N + MLogM)$。

考虑用最小割来解决剩余的问题，我们将源点连向每一个区域，流量为其「光明值」；每一个区域连向汇点，流量为其「黑暗值」；相邻的区域之间连接无向边，流量为同时被选中的代价。

可以发现，所有区域的「光明值」和「黑暗值」之和减去这张图中的最小割即为所求的「气运」的最大值。

本部分时间复杂度为 $O(MaxFlow(C, M + C))$。

总时间复杂度为 $O(N + MLogM + MaxFlow(C, M + C))$。

笔者采用的最大流算法是加上当前弧优化的 $Dinic$ 算法。

3 星辰大海

首先，若 1 号「星」与其他两颗「星」共线，那么显然新出现的 1 号「星」也必须在这条线上，因此可行的面积为 0 ，下文我们考虑 1 号「星」不与其他任意两颗「星」共线的情况。

一个 $O(N^2LogN)$ 的做法是枚举一对「星」，新出现的 1 号「星」必须与 1 号「星」在这一对「星」连成的直线的同侧，那么我们就可以通过半平面交来解决这个问题。

实际上，在这 $O(N^2)$ 个半平面中，有很多是冗余的，我们先给出本题的算法：

将所有其余「星」对 1 号「星」极角排序，令排序后的结果为 $p_2, p_3, ..., p_N$ 。

1、考虑半平面 $p_2 - p_3, p_3 - p_4, ..., p_N - p_2$ 。

2 、令与「星」p_i 极角相差不超过 π ，且极角相差最大的「星」为 p_j ，考虑半平面 $p_i - p_j$ 。

运行半平面交即可。

为什么考虑上述半平面就足够了呢？

假设存在半平面 $p_a - p_b(a < b)$ 应该被考虑而上述算法没有考虑到，找到使得 $b - a$ 最小的一对没有考虑到的 p_a, p_b 。

若存在 $p_c(a < c < b)$ 满足 p_c 与 p_1 在 $p_a - p_b$ 的同侧，那么我们将考虑 $p_a - p_c$ 和 $p_c - p_b$ ，从而不需要考虑 $p_a - p_b$ 。

因此，所有 $p_c(a < c < b)$ 均满足 p_c 与 p_1 不在 $p_a - p_b$ 的同侧，那么我们在第 1 步漏掉需要考虑的就是线段 $p_a - p_b$ ，而在第 2 步，我们一定会考虑到线段 $p_a - p_b$ 或是一个更紧的限制，从而不需要考虑 $p_a - p_b$ 。

综上，考虑上述半平面就足够了。

时间复杂度 $O(NLogN)$ 。

另外，测试点 15~20 中可能存在大片相邻的「星」的情况，因此使用系统函数 $atan2l$ 进行极角排序的选手取 $\epsilon \in [10^{-15}, 10^{-12}]$ 为宜。