Apple-Lyn

Color

Description

jzoj.net 6100

对 $[1, n]$ 进行区间染色后的颜色及颜色种数 m, 求 m 次染色的区间长度和.(数据保证 $[1, n]$ 通过 m 次染色达到指定状态).

Proof

1

每次染色只能染 1 种颜色, 故每种颜色只能染 1 次.

考虑

$$\begin{aligned} & a_i = a_j \\ & \forall k \in (i, j),\ a_i \neq a_k \end{aligned}$$

显然, (i, j) 构成子问题.

2

只需考虑

$$\forall i, j, k, a_i = a_j, k \in (i, j),\ a_i = a_k$$

设同色区间长为 b, 对应答案为 $f(1, t)$, 其中 t 是同色区间个数.

设 $f(l, r)$ 中, 元素指标与系数的函数关系为 $\gamma_{[l,r]}$.

由 f 的定义得, 对于区间 $[l, r]$ 对应值 $f(l, r)$ 的表达式在区间长相同时同构.

显然,

$$\begin{aligned} f(1,1) &= b_1 = \gamma_{[1,1]}(1)b_1 \\ f(1,2) &= \max(f(2,2), f(1,1)) + b_1 + b_2 \\ &= \max(b_2, b_1) \\ &= \gamma_{[1,2]}(1)b_1 + \gamma_{[1,2]}(2)b_2 \\ f(1,3) &= \max(f(2,3), f(1,1) + f(3,3), f(1,2)) + b_1 + b_2 + b_3 \\ &= \max(\gamma_{[2,3]}(2)b_2 + \gamma_{[2,3]}(3)b_3, b_1 + b_3, \gamma_{[1,2]}(1)b_1 + \gamma_{[1,2]}(2)b_2) + b_1 + b_2 + b_3 \\ &= \gamma(1)_{[1,3]}b_1 + \gamma_{[1,3]}(2)b_2 + \gamma_{[1,3]}(3)b_3 \end{aligned}$$

由 $f(1,t)$ 的系数和 $\frac{(t+1)t}{2}$ 观察到

$$\max(f(1,2),f(1,1)+f(3,3),f(1,2))$$

中 $f(1,1)+f(3,3)$ 的系数明显不足, 事实上, 最大值总是由其余二者取到.

对于

$$f(1,4)=\max(f(1,3),f(1,1)+f(3,4),f(1,2)+f(4,4),f(2,4))+b_1+b_2+b_3+b_4$$

进行同样观察到最大值总是由系数明显不足的 $f(1,1)+f(3,4),f(1,2)+f(4,4)$ 以外的项取到.

由此猜想, 最优策略总是选择区间两端之一以转移, id est

$$f(1,t)=\max(f(2,t)+f(1,t-1))+\sum_{i=1}^{t}b_i$$

观察到取两端元素较小者总能得到最优解, 或者观察到区间端点的等势性, 猜想对区间 $[l,r]$, 每次取出两端元素的较小者, 记元素指标与被取出的次序的函数关系就是 $\gamma_{[l,r]}$. 事实上, 从次序的英文 rank 的首字母 r 得形状看, γ 记号通俗易懂生动形象.

3

由 f 的最大性考虑取 b_{t+1} 得,

$$f(1,t)+\sum_{i=1}^{t+1}b_i\leqslant f(1,t+1)$$

进一步可得考虑取 b_{t+1},b_{t+2} 得,

$$\begin{aligned}\max(f(1,t)+f(t+2,t+2),f(1,t+1))+\sum_{i=1}^{t+2}b_i&\leqslant f(1,t+2)\\ \max(f(1,t)+f(t+2,t+2),f(1,t)+\sum_{i=1}^{t+1}b_i)+\sum_{i=1}^{t+2}b_i&\leqslant f(1,t+2)\\ f(1,t)+f(t+1,t+2)+\max(\sum_{i=1}^{t}b_i,b_{t+1},b_{t+2})&\leqslant f(1,t+2)\end{aligned}$$

将操作视为对 $f(1,t),f(t+1,t+2)$ 的并行求解及共享部分的扩展, 显然

$$f(l,mid)+f(mid+1,r)+\max(\sum_{i=l}^{mid}b_i,\sum_{i=mid+1}^{r}b_i)\leqslant f(l,r)$$

考虑并行求解的共享部分的扩展, 上式等号当且仅当 $f(l,r)$ 在 mid 处取到时成立.

4

设 $f(l,r)$ 在非端点 mid 处取到, id est

$$f(l,r)=f(l,mid-1)+f(mid+1,r)+\sum_{i=l}^{r}b_i$$

可得,

$$
\begin{aligned}
f(l,r) &= (f(l,mid-1)+\sum_{i=1}^{mid} b_i) + f(mid+1,r) + \sum_{i=mid+1}^{r} b_i \\
&\leqslant f(l,mid) + f(mid+1,r) + \sum_{i=mid+1}^{r} b_i
\end{aligned}
$$

同理,

$$
f(l,r) \leqslant f(l,mid-1) + f(mid,r) + \sum_{i=l}^{mid-1} b_i
$$

由 3 得,

$$
\begin{cases}
f(l,mid-1)+f(mid,r)+\max(\sum_{i=l}^{mid-1} b_i, \sum_{i=mid}^{r} b_i) & \leqslant f(l,r) \\
f(l,mid)+f(mid+1,r)+\max(\sum_{i=l}^{mid} b_i, \sum_{i=mid+1}^{r} b_i) & \leqslant f(l,r)
\end{cases}
$$

联立得,

$$
b_{mid} = 0
$$

由于区间长 b 为正整数, $f(l,r)$ 必在端点处取到.

考虑到

$$
\forall i \in [l,r],\ 1 \leqslant \frac{\partial f(l,r)}{\partial b_i}
$$

$f(l,r)$ 必在较小端点处取到, id est

$$
f(l,r) = \sum_{i=l}^{r} \gamma_{[l,r]}(i) b_i
$$

Solution

由 Proof 得, 求解 $f(l,r)$ 的复杂度为 $O(-l+r)$.

考虑到子问题对应区间的嵌套关系, 可用栈处理.

显然, 不必储存整个序列, 事实上, 每读入整段就可进行一步运算, 总时间复杂度为 $O(m+n)$, 总空间复杂度为 $O(n)$.

Detail

同一种颜色可能超过 2 段.

Exempli gratia

```
5 3
1 2 1 3 1
```

中的 1.