良心题

An_Account

April 27, 2021

礼物

- 给定 n, m, k，你需要求出 n 元手环的数量，满足其中恰有 m 个位置被选中，且不能连续选中 k 个位置。对 998244353 取模。
- 两个手环不同当且仅当它们不能通过旋转重合。
- $T \leq 5, n \leq 10^6, k \leq m \leq n$

礼物

- 考虑 Polya 。记 $f(a,b)$ 表示长度为 a 的链，其中有 b 个位置被选中，且不能连续选中 k 个位置的方案数。(包括首尾)
- 容易得出答案为
$$\sum_{d|n,m} f(\frac{n}{d},\frac{m}{d})\varphi(d)$$
- 现在我们需要快速计算 f。

礼物

- 将 $f(a,b)$ 看作先固定 $a-b$ 个不选的珠子，将剩下的珠子插入间隙，使得每个间隙的珠子的数量都小于 k 的方案数。
- 固定 $a-b,k$，可以得出 f 的生成函数

$$F(x)=(\sum_{i=0}^{k-1}x^i)^{a-b-1}\times(\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)x^i)$$

- 记 $G(x)=\sum_{i=0}^{k-1}x^i$，则

$$F(x)=G(x)^{a-b-1}(G(x)+x^k)'$$

礼物

$$G(x) = \frac{x^k - 1}{x - 1}$$

$$G'(x) = \frac{(kx^{k-1} - 1)(x-1) - (x^k - 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(k-1)x^k - kx^{k-1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$F(x) = \left(\frac{x^k - 1}{x - 1}\right)^{a-b-1} \left(\frac{(k-1)x^k - kx^{k-1} + 1}{(x-1)^2} + kx^{k-1}\right)$$

$$= \frac{(x^k - 1)^{a-b-1}}{(x-1)^{a-b+1}} \times (kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1)$$

礼物

- 我们有 $f(a,b)=[x^b]F(x)$，根据上面的式子可以发现我们只需要计算 $\frac{(x^k-1)^{a-b-1}}{(x-1)^{a-b+1}}$ 某三项的值。
- 将分母分子同时二项式展开，可以发现分母只有 $\frac{b}{k}$ 项可能有用。因此暴力计算一次 $f(a,b)$ 的复杂度为 $O(\frac{b}{k})$。
- 复杂度 $O(\frac{\sigma_1(\gcd(n,m))}{k})\approx O(\frac{n\log\log n}{k})$

Adi and the Matrix

- 统计 $n \times m$ 的 01 矩阵的数量，如果两个矩阵可以通过给行列重新分配编号重合则被视为相同。
- $n \times m \leq 550$

Adi and the Matrix

- 注意到题目数据范围比较特殊，$n \times m \leq 550$ 等价于 n, m 中较小的那个不会超过 23。
- 对于 (i, j) 这个位置，考虑它在行列的置换。如果在行中它所在环的长度为 a，在列中它所在的长度为 b，那么它就需要 $\operatorname{lcm}(a, b)$ 次轮换才能回到原位置，即每个不动点实际上都包含 $\operatorname{lcm}(a, b)$ 个位置。
- 因此，考虑行内轮换中的一个环 A 以及列内轮换中的一个环 B，显然它会涉及到 $|A| \times |B|$ 个格子，而根据上面的讨论我们可以得出不动点的数量为 $\frac{|A| \times |B|}{\operatorname{lcm}(|A|,|B|)} = \gcd(|A|, |B|)$。

- 显然如果组成两个轮换的每个环的环长相等，则两个轮换对答案的贡献相同。
- 不妨设 $n < m$，则 $n \le 23$，我们可以爆搜 n 的划分方案。
- 假设在 n 的轮换中，长度为 a_i 的环有 b_i 个，那么置换的数量为

$$\frac{n!}{\prod (a_i!)^{b_i} b_i!} \times \prod (a_i - 1)!^{b_i} = \frac{n!}{\prod a_i^{b_i} b_i!}$$

Adi and the Matrix

- 暴力做法是，枚举行的拆分，枚举列的拆分，计算不动点数量之后再用刚刚那个式子算对应的置换个数。
- 事实上，我们可以只枚举行的拆分，将枚举列的拆分写成 dp 的形式，即 $dp[i][j]$ 表示还剩 i 列可以拆分，每个环长至多为 j 的贡献之和。
- 将 2 的不动点个数次方以及对应的置换数量写进 dp 转移。

经典题目

- 完全图，每条边 k 染色，可以通过给顶点重新分配编号重合的图被视为相同的图，求方案数。
- $n \le 60$

经典题目

- 仍然考虑枚举 n 的拆分，接下来我们将边分为两类：连接两个在同一个环上的点以及连接两个在不同环上的点。分别考虑这些边的不动点数量。
- 假设一个环长度为 k，那么在所有只连接环内点的边中，本质不同的边只有 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 种。
- 对于两个环，假设第一个环长度为 a，第二个环长度为 b，可以发现一条边与 $\operatorname{lcm}(a, b)$ 条边等价，因此不动点个数为 $\gcd(a, b)$。
- 您会了。

美术作业

- 给出一棵基环**外向树**，求出有多少种本质不同的给点 k 染色的方式，可以通过给顶点重新分配编号重合的染色方式被视为本质相同。
- $n \le 10^5$

美术作业

- 本质上所有置换只有两种：交换子树中某个点的两个儿子以及转环。
- 先考虑如何计算一棵外向树的染色方式。
- 对于 u，它的子树是无序的，对于 u 的每棵子树都求出染色方案以及 hash，然后我们考虑 hash 相同的那些儿子。
- 假设这个相同的 hash 值为 h，有 t 个儿子的 hash 等于 h。设其中一个儿子子树内的染色方案数为 k，那么我们可以将这些方案编号为 $[1, k]$，每个子树从这些方案中选一个，统计排序后本质不同的选择方案的数量。
- 它相当于有 t 个完全相同的球放入 k 个不同的盒子的方案数，答案等于 $\binom{k+t-1}{t}$。

美术作业

- 接下来考虑环的置换。
- 求出环上挂的每棵树的 hash，对这个 hash 跑一遍 KMP 求最小循环节，那么每个置换旋转的距离都应是这个循环节的倍数。
- 然后就是普通 polya。

- 给定 n 个正整数对 (a_i, b_i)，第 i 对数表示一个序列 $\{a_i, a_ib_i, a_ib_i^2, \cdots\}$，问所有序列的最小公共元素，或者判断不存在。
- $n \leq 100, a_i, b_i \leq 10^9$

Geometric Progressions

- 对于每个 a_i, b_i 的质因子我们分开考虑，对于某个质因子 p，公共元素所含的 p 的次数必然相等。
- 先考虑 $n = 2$ 的情况，记 $s(a, p)$ 表示 a 中 p 的次数，那么有

$$s(a_i, p) + xs(b_i, p) = s(a_j, p) + y(b_j, p)$$

- 对于每个质因子我们都可以列出一个这样的方程。如果线性无关的方程数量至少为 2，那么我们就可以直接解出 x, y，从而确定公共元素是啥。

Geometric Progressions

- 当 $n > 2$ 时，依次合并前 i 个序列和第 $i+1$ 个序列。
- 如果合并过程中直接解出了 x, y，那么求出这个公共元素，代入每个序列验证是否合法即可。
- 否则 p 这个质数的质数必然可以被表示为 $kx+b$ 的形式，这里 b 是之前所有方程的最小非负整数解，k 是一个类似于 lcm 的东西。

- 最后，关于二元二次方程有一个很有意思的结论。

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Number of Binomial Coefficients

- 统计有序对 (k, n) 的数量，满足 $0 \le k \le n \le A$，且 $\binom{n}{k}$ 能被 p^a 整除。
- $1 \le p, a \le 10^9, A \le 10^{1000}$

Number of Binomial Coefficients

- 库默尔定理：组合数 $\binom{n+m}{m}$ 所含 p 的次数等于 n, m 在 p 进制下相加时的进位次数。
- 通过观察可以发现，a 必然不会很大。具体来说，a 不会超过 3500。
- 记 $dp[i][j][0/1][0/1]$ 表示从高到低位考虑，当前到了第 i 位，进位次数为 j，当前 $n+m$ 是否等于 A，是否收到了 $i+1$ 位的进位。
- 转移写起来非常酸爽。

简单数学题

- 给定非负整数 x，质数 p，求最小的非负整数 n，使得 $f_n \equiv x \pmod p$。保证 p 是质数且个位为 1 或 9。
- $T \le 100, p \le 2 \times 10^9$

简单数学题

- 通过二次互反律可以得出，对于个位为 1 或 9 的质数，5 必然是二次剩余。
- 首先我们知道

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

- 用 Cipolla 解出 5 的平方根。

简单数学题

- 记 $T=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，可以发现 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{-1}{T}$。
- 接下来是一个关于 T^n 的二次方程。

$$T^n-\frac{(-1)^n}{T^n}=f_n\sqrt{5}$$

- 讨论 n 的奇偶性，你可以假设 n 为奇数或偶数后分别跑一遍，那么问题是：如何判断这个方式是否存在一个 n 是偶数/奇数的解？
- 有两种方法，第一种是在 BSGS 时记录一下偶数的解以及奇数的解，另一种方法是直接解出 $T^k\equiv 1 \pmod p$ 的最小正整数解，判断 k 是否为奇数，可以发现如果 n 是原方程的解，那么 $n+k$ 也是一个解。

Perfect Square

- 给定一个 $n \times n$ 的矩阵，每个位置都有一些数，你需要选出一些数，使得每行每列都有奇数个数被选，且所选数的乘积是完全平方数。求方案数。
- $n \leq 20, a_{i,j} \leq 10^9$

Perfect Square

- 它们乘积的每个质因子的质数都是偶数，也就是说，我们可以将一个数用一个 01 序列表示，第 i 位表示 p_i 的次数的奇偶性。
- 把所有出现过的质因子拿出来，将每个数用 01 序列表示。如果忽略行列的限制，问题就等价于给你若干个数，问异或出 0 的方案数。可以用线性基很方便地求出。
- 现在考虑行列的限制，我们直接给每个序列加上 $2n$ 个数，第 i 个变量表示行，第 $i+n$ 个变量表示列，如果为 1 则表示在这一行/列上有奇数个数被选。
- 相当于询问异或出 $000\cdots01111\cdots1$ 的方案数。

杜老师

- 多组询问，每次给定 L, R，求出有多少种在区间内选数的方式使得它们的乘积是完全平方数。
- $T \leq 100, R_i \leq 10^7, \sum R_i - L_i + 1 \leq 6 \times 10^7$

杜老师

- 根据上一道题我们很容易得出一个暴力：将 $[L, R]$ 中的所有数直接插入线性基。复杂度爆炸。
- 观察到每个数大于 $\sqrt{R}$ 的质因子只有至多一个，把这个质因子拿出来。
- 对于 i 来说，假设它有一个大于 $\sqrt{R}$ 的质因子 p，如果 i 是 $[L, R]$ 中第一个 p 的指数为奇数的数，那么 i 的插入必然成功。我们称这样的位置为特殊位置。
- 否则，将 i 的状态异或上 p 对应的特殊位置的状态，将剩余的状态插入线性基。这样就可以只存 $\sqrt{R}$ 个元素。

杜老师

- 我们不妨大胆猜想：存在一个阈值 k，使得当 $R-L>k$ 时，第 k 个数之后所有的非特殊位置插入必然失败，即矩阵已经满秩。
- 经验证，这个 k 在 6000 左右。
- 此时只需对于每个大于 $\sqrt{R}$ 的 p 判断区间内是否有 p 的倍数。