砸题选讲

不保证题目按照难度递增排列

February 20, 2020

CF102512D Equality

- 有两个人，第一个人会在 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_X, b_X]$ 这些时间段在线
- 第二个人会在 $[c_1, d_1], [c_2, d_2], \cdots, [c_Y, d_Y]$ 这些时间段在线
- 你需要统计有多少个 T，满足在 $1 \sim N$ 的时间内的 $T, 3T, 5T, \cdots$ 时刻第一个人在线，$2T, 4T, 6T, \cdots$ 时刻第二个人在线
- $N \le 10^9, X, Y \le 300$

CF102512D Equality

- 对于一个确定的 T，如何快速判断是否合法
- 我们将每个人的在线时间翻转，求出其不在线的时间
- 条件等价于对于第一个人，不存在时刻 $(2k+1)T$ 使得这个时刻被包含在某个不在线的区间内
- 对于第二个人，不存在时刻 $2kT$ 使得这个时刻被包含在某个不在线的区间内
- 于是我们得到了一个 $O(X+Y)$ 检查一个 T 是否合法的做法

CF102512D Equality

- 考虑将所有的 T 按照是否小于等于 $\sqrt{N}$ 分为两类
- 对于小于 $\sqrt{N}$ 的部分直接暴力，时间复杂度 $O(\sqrt{N}(X+Y))$
- 对于大于 $\sqrt{N}$ 的部分，注意到 $\frac{N}{T} \leq \sqrt{N}$
- 考虑第一个人的一段不在线时间 $[l, r]$ 会导致哪些 T 不合法，即存在一个 k 使得 $l \leq (2k+1)T \leq r \Rightarrow \lceil \frac{l}{2k+1} \rceil \leq T \leq \lfloor \frac{r}{2k+1} \rfloor$
- 当 $T \geq \sqrt{N}$ 的时候 k 非常小，因此可以枚举所有的 k
- 时间复杂度 $O(\sqrt{N}(X+Y))$

CF1286D LCC

- 有一个对撞机，对撞机里面有一些质子，第 i 个质子的位置在 x_i，速度为 v_i
- 在实验开始的时候，每个质子会随机一个方向（左或者右）发射出去，第 i 个质子朝右发射的概率是 p_i
- 问实验开始后期望多久会发生第一次碰撞，如果实验结束之前都没有发生任何碰撞，则认为碰撞时间为 0
- $n \le 10^5, v \le 10^6, x \le 10^9$，对 998244353 取模

CF1286D LCC

- 容易发现第一次碰撞一定是两个最开始相邻的质子撞在一起，因此我们只需要考虑相邻两个质子的碰撞事件
- 将问题转化为求出碰撞时间 $\geq k$ 的概率
- 对每个位置维护一个 2×2 的矩阵代表 dp。即 $dp[i][j]$ 表示考虑前 i 个质子，所有碰撞事件的发生时刻都大于 k，最后一个质子朝向 j 的概率
- 对于一个限制 k，相当于我们 ban 掉了某些位置的某些转移，那么将对应矩阵的这个转移的系数置为 0 即可
- 线段树维护矩阵，需要支持单点修改、全局查询

CF1225G To Make 1

- 定义函数 $f(x)$，当 $k \mid x$ 时 $f(x) = f(\frac{x}{k})$，否则 $f(x) = x$
- 黑板上有 n 个数，每次你可以选择其中的两个数 a_1, a_2，从黑板上擦去这两个数，然后写下 $f(a_1 + a_2)$
- 问最终黑板上能否仅剩下 1 这一个数
- $n \leq 16, k, \sum a_i \leq 2000$，保证所有 a_i 都不能被 k 整除
- 要求构造方案

提示

- 如果存在一个非负整数序列 $\{b_i\}$，使得 $1 = \sum a_i k^{-b_i}$，那么原问题有解
- 否则一定无解

CF1225G To Make 1

- 假如我们找到了一个满足这个条件的序列，如何构造答案呢
- 令 $B = \max b_i$，将这个式子两边同时乘以 k^B

$$k^B = \sum a_i k^{B-b_i}$$

- 这个式子的每一项均是整数，考虑它们对 k 的整除性
- 等式左边显然可以被 k 整除，右边对于 $B \neq b_i$ 的每一项，它们也能被 k 整除
- 这意味着，$\sum\limits_{b_i=B} a_i$ 可以被 k 整除
- 而给出的 a_i 保证了每个 a_i 均不被 k 整除，故至少存在两个 $b_i = B$

CF1225G To Make 1

- 假设这两个取到最大值的位置分别为 i, j
- 将黑板上 a_i, a_j 这两个数擦去，写下 $f(a_i + a_j)$
- 同时更新 b_i，这时我们认为 j 这个位置已经不存在了
- 容易发现得到的这些数仍然没有一个数能被 k 整除，因此我们可以不断重复这个找最大值的过程，直到只剩下一个数
- 在整个过程中等式始终成立，因此最后得到的数一定是 1

CF1225G To Make 1

- 那么我们只需要找到这样一个序列 b 就可以了
- 设 $dp[s][j]$ 表示已经考虑了 s 集合中的数，是否存在一个序列 b 使得 $\sum\limits_{i\in s} a_i k^{-b_i} = j$
- 转移有两种：在当前集合中加入一个数，并将其 b_i 设为 0；将当前集合中的所有 b_i 都减去 1
- 可以通过 dp 值倒推出序列 b
- 需要使用 bitset 优化，复杂度 $O(\frac{2^n \sum a_i}{w})$

ZJOI2019 开关

- 有 n 个开关，一开始所有开关都是关上的
- 给定一个状态 s，你要使得第 i 个开关到达状态 s_i
- 每个开关都有一个权值 p_i，每一轮会选择一个开关，翻转这个开关的状态。第 i 个开关被选择的概率是 $\frac{p_i}{\sum p_j}$
- 问期望多少轮之后所有开关均达到目标状态
- $n \leq 100, \sum p_i \leq 2000$

ZJOI2019 开关

- 令 $P = \sum p_i$，然后让每个 p 都除以 P
- 枚举最后每个开关被操作了多少次，由于最终还要涉及排列每个开关，因此需要使用 EGF
- 对于一个开关，它操作奇数次的 EGF 是 $\hat{A}(x) = \frac{e^{p_i x} - e^{-p_i x}}{2}$，操作偶数次的 EGF 是 $\hat{B}(x) = \frac{e^{p_i x} + e^{-p_i x}}{2}$
- 那么可以得到每个开关达到目标状态概率的 EGF 就是

$$\hat{F}(x) = \prod_{i \in s} \hat{A}(x) \prod_{i \notin s} \hat{B}(x)$$

ZJOI2019 开关

- 但是这样的话 x^i 的系数表示在第 i 轮，所有开关均达到状态的概率，而非第一次到达状态的概率
- 我们记 $F(x)$ 为 $\hat{F}(x)$ 的 OGF，$f(x)$ 是答案的 OGF，$\hat{G}(x)$ 为每个开关操作偶数次的 EGF，$G(x)$ 为 $\hat{G}(x)$ 的 OGF
- 显然有

$$F_n = \sum_{i=0}^{n} f_i G_{n-i} \Rightarrow F(x) = f(x)\,G(x)$$

$$f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

ZJOI2019 开关

- 记 $\hat{F}(x) = \sum_{i=-P}^{P} a_i e^{i/P}, \hat{G}(x) = \sum_{i=-P}^{P} b_i e^{i/P}$
- a_i, b_i 都可以用简单的背包求出
- 可以发现 $F(x) = \sum \frac{a_i}{1-\frac{i}{P}x}$, $G(x)$ 同理
- 答案为 $\sum i \times f_i = f'(1)$

$$f'(1) = \left(\frac{F(1)}{G(1)}\right)' = \frac{F'(1)G(1) - F(1)G'(1)}{G(1)^2}$$

- 可惜这个式子算不得，因为当 $i = P, x = 1$ 的时候，你计算 $\frac{a_i}{1-ix}$ 就炸了

- 将 F, G 都乘上 $\prod(1-\frac{i}{P}x)$，接下来我们讨论 F 的变化

$$F_1(x) = \sum_i a_i \prod_{j\neq i}(1-\frac{j}{P}x)$$

$$F_1(1) = a_P \prod_{j\neq P}(1-\frac{j}{P})$$

$$F_1'(x) = \sum_i a_i \sum_{j\neq i} -\frac{j}{P} \prod_{k\neq i, k\neq j}(1-\frac{k}{P}x)$$

$$F_1'(1) = -\sum_{i\neq P} \frac{a_i}{1-\frac{i}{P}} \prod_{j\neq P}(1-\frac{j}{P})$$

$$- a_P \sum_{i\neq P} \frac{\frac{i}{P}}{1-\frac{i}{P}} \prod_{j\neq P}(1-\frac{j}{P})$$

ZJOI2019 开关

- 设 $t=\prod\limits_{i\neq P}(1-\frac{i}{P})$

$$F_1'(1)=-t\sum_{i\neq P}\frac{a_i+a_P\frac{i}{P}}{1-\frac{i}{P}}$$
$$F_1(1)=a_Pt$$

- 然后我们就可以开始愉快地求导了

$$\left(\frac{F(1)}{G(1)}\right)'=\frac{F_1'(1)G_1(1)-F_1(1)G_1'(1)}{G_1(1)^2}$$
$$=\frac{-b_Pt^2\sum_{i\neq P}\frac{a_i+a_P\frac{i}{P}}{1-\frac{i}{P}}+a_Pt^2\sum_{i\neq P}\frac{b_i+b_P\frac{i}{P}}{1-\frac{i}{P}}}{a_P^2t^2}$$

ZJOI2019 开关

- 观察 a_i, b_i 的定义，可以发现 $a_P = b_P = \frac{1}{2^n}$
- 于是式子可以进一步化简，可以发现分子分式中的 a_P, b_P 可以全部抵消

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \frac{a_P t^2 \sum_{i \neq P} \frac{b_i - a_i}{1 - \frac{i}{P}}}{a_P^2 t^2} \\
&= a_P \sum_{i \neq P} \frac{b_i - a_i}{1 - \frac{i}{p}}
\end{aligned}
$$

- 时间复杂度 $O(nP)$

CF715D Create a Maze

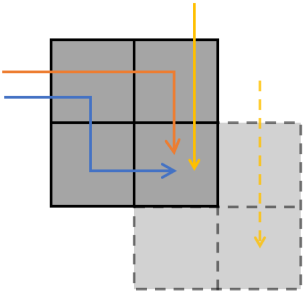
- 对于一个 $n \times m$ 的网格图，我们定义这张网格图的“难度”为从 $(1,1)$ 出发，走到 (n,m)，每次只能向右或者向下走的方案数
- 额外指定了 k 组障碍，每组障碍 $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$ 表示你不能从 (x_1,y_2) 这个格子走到 (x_2,y_2)，保证 (x_2,y_2) 是 (x_1,y_1) 的右边或者下面那个与其相邻的格子
- 你需要构造一张这样的网格图，并指定 k 组障碍，使得最终这张图的难度恰好为 T
- n,m,k 自己定，但必须保证 $n,m \le 50, k \le 300$
- $T \le 10^{18}$，保证有解

提示

- 进制

CF715D Create a Maze

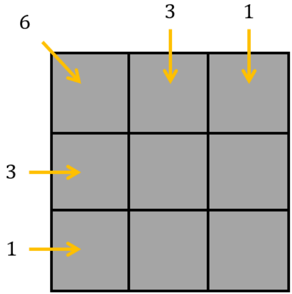
- 如果我们能将最后构造出来的网格图分成若干个部分，当进入到某个部分之后路径条数会 $\times 2$，同时我们可以选择此时是否要增加一条新的路径，那么对于任意的 T 一定能够构造出一种方案，即将 T 写成二进制
- 考虑这样一种方案



CF715D Create a Maze

- 将若干个这种 2×2 的块拼在一起，每一次都会让之前的路径数量 $\times 2$，同时我们又可以选择此时路径条数是否要加 1
- 但是需要的块数是 $\log T$ 级别的，而 n 只有 50
- 如果我们将每一块最大能够表示出的路径数量调大，就可以降低需要的网格大小

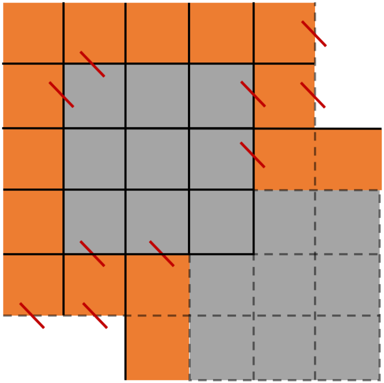
CF715D Create a Maze



- 将每一块的大小调到 3，那么一个块可以表示 6 条路径，也能表示 $1 \sim 5$ 的路径，对应 6 进制
- 需要的行数为 $2 + 2 \times \log_6 T = 48$

CF715D Create a Maze

- 在每个块外面需要构造出一条路径，以便接入这个块中
- 我们把第一行和第一列单独拿出来构造这样一条路径



CF794G Replace All

- 给定两个仅包含 $AB?$ 的字符串 X, Y，其中 ? 表示这个位置可以是 A，也可以是 B
- 你需要统计 01 串有序对 (S, T) 的数量，使得将 X, Y 中的 A 替换成 S，B 替换成 T 之后，X, Y 相同，并且满足 $|S|, |T| \leq n$ 且 S, T 均不能是空串
- 答案为所有可能 X, Y 串对应的 (S, T) 串的数量之和
- $|X|, |Y|, n \leq 3 \times 10^5$，对 $10^9 + 7$ 取模

CF794G Replace All

- 我们首先考虑如果没有问号该怎么做
- 如果 X, Y 相同，那么显然他们起不到任何限制的作用，我们特判掉这种情况
- 定义两个字符串 s, t 互质当且仅当：
  - $s = t$，或 t 与 s 互质
  - s 是 t 的前缀，且 $s \perp t - s$
- 类似于辗转相除法，可以发现两个字符串互质当且仅当他们存在公共周期

CF794G Replace All

引理 1

若 X, Y 不同，$S \perp T$ 是 (S, T) 合法的必要条件

CF794G Replace All

- 我们找到 X, Y 的最长公共前缀，显然这个前缀无法起到任何限制作用
- 将这个前缀去掉，此时 X 的第一个字符与 Y 的第一个字符一定不同，一个是 A，另一个是 B
- 我们假设 $|S| \leq |T|$
- 如果 X, Y 在被替换之后相同，那么此时 T 一定是 S 的前缀
- 将 T 改写为 $S + x$，此时 X, Y 串中全部都是 S, x 两种串，这是原问题的一个子问题
- 这个递归的过程就是前面提到的辗转相除，因此 $S \perp T$

CF794G Replace All

引理 2

X, Y 所对应的 (S, T) 数量仅与 A, B 的数量有关，与排列方式无关

CF794G Replace All

- $S \perp T$ 意味着 S, T 有公共周期，那么 $S + T = T + S$
- 以 X 串为例，如果两个相邻的位置为 BA，那么我们可以交换这两个位置使得最后得到的串不变
- 因此我们可以把 A 全部挪到前面去，把 B 全部堆到后面来
- 两个串的公共前缀以及公共后缀都是没有限制作用的，我们将他们去掉
- 此时一个串全是 A，另一个串全是 B

CF794G Replace All

- 设 c_A 表示 A 的个数，c_B 表示 B 的个数，接下来我们分类讨论

1. $c_A = 0, c_B = 0$

- 此时相当于要求 $S \perp T$，方案数为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^{\gcd(i,j)} = \sum_{d=1}^{n} 2^d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} [\gcd(i,j) = 1]$$

$$= \sum_{d=1}^{n} 2^d \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(l) \lfloor \frac{n}{dl} \rfloor^2$$

$$= \sum_{T=1}^{n} \lfloor \frac{n}{T} \rfloor^2 \sum_{d|T} 2^d \mu(\frac{T}{d})$$

CF794G Replace All

2. $c_A = 0$ 或 $c_B = 0$，且他们不同时为 0
   - 显然此时无解
3. $c_A \neq 0, c_B \neq 0$
   - 我们将 c_A, c_B 同时除以它们的 $\gcd$，不会影响答案
   - 此时 $c_A \perp c_B$，不妨设 $c_A \leq c_B$
   - 这意味着 S 有一个周期是 $\frac{|S|}{c_B}$，且 $|T| = |S| \times \frac{c_A}{c_B}$
   - 因此，我们只需要确定 S 串，T 串也随之确定了。S 串一个周期的长度至多为 $\lfloor \frac{n}{c_B} \rfloor$
   - 方案数为 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor \frac{n}{c_B} \rfloor} = 2^{\lfloor \frac{n}{c_B} \rfloor + 1} - 2$

CF794G Replace All

- 现在考虑有问号的情况
- 假设抛开问号不管，X 中 A 的数量减去 Y 中 A 的数量为 c'_A，B 同理。X 中问号的数量为 a，Y 中问号的数量为 b
- 假设在某一次给问号分配 A, B 的过程中，X 中有 i 个问号为 A，Y 中有 j 个问号为 A
- 此时我们可以得到

$$
\begin{aligned}
c_A &= c'_A + i - j \\
c_B &= c'_B + (a - i) - (b - j) \\
&= c'_B + (a - b) - (i - j)
\end{aligned}
$$

- 容易发现它们的取值只与 $i - j$ 有关，我们记此时的方案数为 $f(i - j)$

CF794G Replace All

- 枚举 X 中将多少个问号变成了 A， Y 中将多少个问号变成了 A
- 那么答案就等于

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b} f(i-j)\binom{a}{i}\binom{b}{j} &= \sum_{k=-b}^{a} f(k)\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}\binom{b}{i-k} \\
&= \sum_{k=-b}^{a} f(k)\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}\binom{b}{b-i+k} \\
&= \sum_{k=-b}^{a} f(k)\binom{a+b}{b+k}
\end{aligned}
$$

CF794G Replace All

- 但是这样有个小问题
- 如果在确定问号是啥之后，X, Y 两个串相同，此时我们是按照 $c_A = 0, c_B = 0$，即 $S \perp T$ 处理的，但是实际上此时 S, T 可以随便取
- 求出 $X = Y$ 的方案数，从答案里面减去我们按照 $c_A = 0, c_B = 0$ 计算的结果，再加上 $\left(2^{n+1} - 2\right)^2$ 即可
- 时间复杂度 $O(n \log n)$
- https://codeforces.com/contest/794/submission/71471572