生生函数的运算与组合计数问题

April 3, 2020

生成函数是啥

- 想必大家已经很熟练了
- 对于数列 $\{a_i\}$，我们定义它的普通生成函数 (OGF) 和指数生成函数 (EGF) 分别为

$$A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$$

$$\hat{A}(x) = \sum_{i\geq 0} a_i \frac{x^i}{i!}$$

生成函数是啥

- 想必大家已经很熟练了
- 对于数列 $\{a_i\}$，我们定义它的普通生成函数 (OGF) 和指数生成函数 (EGF) 分别为

$$A(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$$

$$\hat{A}(x) = \sum_{i \geq 0} a_i \frac{x^i}{i!}$$

- 普通生成函数解决无标号问题，指数生成函数解决有标号问题

生成函数是啥

- 两个普通生成函数的乘积 $A(x) \times B(x)$ 可以理解为，从 A 中选择一个元素，再从 B 中选取一个元素，然后再将它们拼接起来

生成函数是啥

- 两个普通生成函数的乘积 $A(x) \times B(x)$ 可以理解为，从 A 中选择一个元素，再从 B 中选取一个元素，然后再将它们拼接起来
- 比如说，有两个不相同的骰子，问有多少种方式使得两个骰子朝上的点数之和为 8

生成函数是啥

- 两个普通生成函数的乘积 $A(x)\times B(x)$ 可以理解为，从 A 中选择一个元素，再从 B 中选取一个元素，然后再将它们拼接起来
- 比如说，有两个不相同的骰子，问有多少种方式使得两个骰子朝上的点数之和为 8
- 答案的生成函数为 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$

生成函数是啥

- 两个指数生成函数的乘积 $\hat{A}(x) \times \hat{B}(x)$ 可以理解为，$\hat{A}$ 中的元素内部已经分配好了编号，$\hat{B}$ 中的元素也已经分配好了编号。现在要将这两个序列中的元素组合起来，并且重新分配编号，且不能改变 $\hat{A}, \hat{B}$ 中编号大小的相对顺序

生成函数是啥

- 两个指数生成函数的乘积 $\hat{A}(x) \times \hat{B}(x)$ 可以理解为，$\hat{A}$ 中的元素内部已经分配好了编号，$\hat{B}$ 中的元素也已经分配好了编号。现在要将这两个序列中的元素组合起来，并且重新分配编号，且不能改变 $\hat{A}, \hat{B}$ 中编号大小的相对顺序

$$\hat{C}(x) = \hat{A}(x) \times \hat{B}(x)$$

$$\frac{C_n}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{A_i}{i!} \times \frac{B_j}{j!}$$

$$C_n = \sum_{i+j=n} A_i \times B_j \times \binom{i+j}{i}$$

非常小的练习（我找不到题了）

- 为了保证大家都在线，这里有两个简单的小练习
- 设 a_n 表示将 n 个完全相同的球放入编号为 $1 \sim 5$ 的篮子的方案数，其中编号为 $1, 2$ 的篮子中的球数必须是偶数，剩下的三个篮子每个篮子中的球数必须介于 $3 \sim 5$ 之间，求 a_n 的 OGF
- 设 a_n 表示将 n 个不同的球放入 k 个不同的盒子的方案数，盒子可以是空的，求 a_n 的 EGF

非常重要的展开式

- 二项式定理
- $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$
- $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=-\ln(1-x)$
- $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\exp(x)$

多项式求逆

问题

已知 $A(x) \times B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$，给出 $A(x)$，求 $B(x)$
保证 $A_0 \neq 0$

多项式求逆

问题

已知 $A(x) \times B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$，给出 $A(x)$，求 $B(x)$

保证 $A_0 \neq 0$

- 假设已经求出了 $B'(x)$ 满足 $A(x) \times B'(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

多项式求逆

问题

已知 $A(x) \times B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$，给出 $A(x)$，求 $B(x)$
保证 $A_0 \neq 0$

- 假设已经求出了 $B'(x)$ 满足 $A(x) \times B'(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

$$
\begin{aligned}
A(x) \times B(x) &\equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}} \\
\Rightarrow B(x) &\equiv B'(x) \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}
\end{aligned}
$$

多项式求逆

问题

已知 $A(x) \times B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$，给出 $A(x)$，求 $B(x)$
保证 $A_0 \neq 0$

- 假设已经求出了 $B'(x)$ 满足 $A(x) \times B'(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

$$A(x) \times B(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$$

$$\Rightarrow B(x) \equiv B'(x) \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$$

$$B(x)^2 - 2B(x)B'(x) + B'(x)^2 \equiv 0 \pmod{x^n}$$

多项式求逆

问题

已知 $A(x)\times B(x)\equiv 1 \pmod{x^n}$，给出 $A(x)$，求 $B(x)$
保证 $A_0\neq 0$

- 假设已经求出了 $B'(x)$ 满足 $A(x)\times B'(x)\equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}}$

$$
\begin{aligned}
A(x)\times B(x) &\equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}}\\
\Rightarrow B(x) &\equiv B'(x) \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}}\\
B(x)^2-2B(x)B'(x)+B'(x)^2 &\equiv 0 \pmod{x^n}\\
B(x)-2B'(x)+B'(x)^2A(x) &\equiv 0 \pmod{x^n}\\
2B'(x)-B'(x)^2A(x) &\equiv B(x) \pmod{x^n}
\end{aligned}
$$

多项式 $\ln$

问题

已知 $A(x) \equiv \ln B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

多项式 ln

问题

已知 $A(x) \equiv \ln B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

- 相信大家都没有忘记小学三年级教的求导和积分

多项式 ln

问题

已知 $A(x) \equiv \ln B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

- 相信大家都没有忘记小学三年级教的求导和积分

$$A'(x) = \frac{B'(x)}{B(x)}$$

多项式 ln

问题

已知 $A(x) \equiv \ln B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

- 相信大家都没有忘记小学三年级教的求导和积分

$$A'(x) = \frac{B'(x)}{B(x)}$$

- 对 $B(x)$ 求逆之后做一次 NTT，再积分回去即可科技为了你

关于泰勒展开

- 将多项式 $F(x)$ 展开为无穷级数的形式

关于泰勒展开

- 将多项式 $F(x)$ 展开为无穷级数的形式
- 每一个 $F(x)$，都有其唯一确定的导函数 $F'(x)$
- 比如 $F(x) = x^3 + 3$，我们可以得到 $F'(x) = 3x^2$

关于泰勒展开

- 将多项式 $F(x)$ 展开为无穷级数的形式
- 每一个 $F(x)$，都有其唯一确定的导函数 $F'(x)$
- 比如 $F(x) = x^3 + 3$，我们可以得到 $F'(x) = 3x^2$
- 但是我们不能逆用这个过程，因为有很多函数的导函数都是 $F'(x) = 3x^2$，具体来说，这类函数是 $F(x) = x^3 + C$

关于泰勒展开

- 将多项式 $F(x)$ 展开为无穷级数的形式
- 每一个 $F(x)$，都有其唯一确定的导函数 $F'(x)$
- 比如 $F(x) = x^3 + 3$，我们可以得到 $F'(x) = 3x^2$
- 但是我们不能逆用这个过程，因为有很多函数的导函数都是 $F'(x) = 3x^2$，具体来说，这类函数是 $F(x) = x^3 + C$
- 有一句话说得很好：原函数的信息 = 导函数的信息 + 初始值信息

关于泰勒展开

- 将多项式 $F(x)$ 展开为无穷级数的形式
- 每一个 $F(x)$，都有其唯一确定的导函数 $F'(x)$
- 比如 $F(x) = x^3 + 3$，我们可以得到 $F'(x) = 3x^2$
- 但是我们不能逆用这个过程，因为有很多函数的导函数都是 $F'(x) = 3x^2$，具体来说，这类函数是 $F(x) = x^3 + C$
- 有一句话说得很好：原函数的信息 $=$ 导函数的信息 $+$ 初始值信息

关于泰勒展开

- 我们选择一个点 x_0 来获取 $F(x)$ 的初始值信息，我们将 x_0 称为展开点

关于泰勒展开

- 我们选择一个点 x_0 来获取 $F(x)$ 的初始值信息，我们将 x_0 称为展开点
- 接下来考虑 $x_0 = 0$ 的情况

关于泰勒展开

- 我们选择一个点 x_0 来获取 $F(x)$ 的初始值信息，我们将 x_0 称为展开点
- 接下来考虑 $x_0=0$ 的情况

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x F'(x)\,\mathrm{d}x + F(0) \\
&= \int_0^x \left[\int_0^x F''(x)\,\mathrm{d}x + F'(0)\right]\mathrm{d}x + F(0) \\
&= \int_0^x \int_0^x F''(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + \int_0^x F'(0)\,\mathrm{d}x + F(0)
\end{aligned}
$$

多来几项

- 可以发现最终 $F(x)$ 被展开成了如下的形式

多来几项

- 可以发现最终 $F(x)$ 被展开成了如下的形式

$$
\begin{aligned}
F(x) &= F(0) + \int_0^x F'(0)\,\mathrm{d}x + \int_0^x \int_0^x F''(0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + \cdots \\
&= F(0) + \frac{F'(0)x}{1} + \frac{F''(0)x^2}{1\times 2} + \cdots \\
&= \sum_{i\geq 0} \frac{F^{(i)}(0)x^i}{i!}
\end{aligned}
$$

更一般的情况

- 假如展开点不是 0，而是 a，该怎么办

更一般的情况

- 假如展开点不是 0，而是 a，该怎么办

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_a^x F'(x)\,\mathrm{d}x + F(a) \\
&= F(a) + \int_a^x F'(a)\,\mathrm{d}x + \int_a^x \int_a^x F''(a)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x + \cdots
\end{aligned}
$$

更一般的情况

- 假如展开点不是 0，而是 a，该怎么办

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x F'(x)\,\mathrm{d}x + F(a) \\ &= F(a) + \int_a^x F'(a)\,\mathrm{d}x + \int_a^x \int_a^x F''(a)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x + \cdots \end{aligned}$$

- 令 $u = x - a$，应用换元积分

更一般的情况

- 假如展开点不是 0，而是 a，该怎么办

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x F'(x)\,\mathrm{d}x + F(a) \\ &= F(a) + \int_a^x F'(a)\,\mathrm{d}x + \int_a^x \int_a^x F''(a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + \cdots \end{aligned}$$

- 令 $u = x - a$，应用换元积分

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + \int_0^u F'(a)\,\mathrm{d}u + \int_0^u \int_0^u F''(a)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u + \cdots \\ &= \sum_{i\geq 0} \frac{F^{(i)}(a)u^i}{i!} = \sum_{i\geq 0} \frac{F^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!} \end{aligned}$$

牛顿迭代

问题

已知 $G[F(x)] \equiv 0 \pmod{x^n}$，给出 $G(x)$，求 $F(x)$

牛顿迭代

问题

已知 $G[F(x)] \equiv 0 \pmod{x^n}$，给出 $G(x)$，求 $F(x)$

- 记 $F_t(x)$ 表示经过 t 次迭代之后的 $F(x)$，满足

$$G[F_t(x)] \equiv 0 \pmod{x^{2^t}}$$

牛顿迭代

问题

已知 $G[F(x)] \equiv 0 \pmod{x^n}$，给出 $G(x)$，求 $F(x)$

- 记 $F_t(x)$ 表示经过 t 次迭代之后的 $F(x)$，满足

$$G[F_t(x)] \equiv 0 \pmod{x^{2^t}}$$

- 考虑泰勒展开公式，对于函数 $H(x)$，选择展开点 x_0，那么有

$$H(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{H^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

牛顿迭代

- 考虑将 $G[F_{t+1}(x)]$ 从 $F_t(x)$ 处展开

牛顿迭代

- 考虑将 $G[F_{t+1}(x)]$ 从 $F_t(x)$ 处展开

$$
\begin{aligned}
G[F_{t+1}(x)] &= \sum_{i\geq 0} \frac{G^{(i)}[F_t(x)]}{i!}[F_{t+1}(x) - F_t(x)]^i \\
&= G[F_t(x)] + G'[F_t(x)] \times [F_{t+1}(x) - F_t(x)] + \sum_{i\geq 2} \cdots
\end{aligned}
$$

牛顿迭代

- 考虑将 $G[F_{t+1}(x)]$ 从 $F_t(x)$ 处展开

$$
\begin{aligned}
G[F_{t+1}(x)] &= \sum_{i\geq 0} \frac{G^{(i)}[F_t(x)]}{i!}[F_{t+1}(x) - F_t(x)]^i \\
&= G[F_t(x)] + G'[F_t(x)] \times [F_{t+1}(x) - F_t(x)] + \sum_{i\geq 2} \cdots \\
0 &\equiv G[F_t(x)] + G'[F_t(x)] \times [F_{t+1}(x) - F_t(x)] \pmod{x^{2^{t+1}}} \\
F_{t+1}(x) &\equiv F_t(x) - \frac{G[F_t(x)]}{G'[F_t(x)]} \pmod{x^{2^{t+1}}}
\end{aligned}
$$

牛顿迭代

- 考虑将 $G[F_{t+1}(x)]$ 从 $F_t(x)$ 处展开

$$
\begin{aligned}
G[F_{t+1}(x)] &= \sum_{i\geq 0}\frac{G^{(i)}[F_t(x)]}{i!}[F_{t+1}(x)-F_t(x)]^i \\
&= G[F_t(x)] + G'[F_t(x)]\times[F_{t+1}(x)-F_t(x)] + \sum_{i\geq 2}\cdots \\
0 &\equiv G[F_t(x)] + G'[F_t(x)]\times[F_{t+1}(x)-F_t(x)] \pmod{x^{2^{t+1}}} \\
F_{t+1}(x) &\equiv F_t(x) - \frac{G[F_t(x)]}{G'[F_t(x)]} \pmod{x^{2^{t+1}}}
\end{aligned}
$$

- 注意这里的 $G'[F_t(x)]$ 是先求出 $G'(x)$，再代入 $F_t(x)$，并非对 $G[F_t(x)]$ 求导

多项式 exp

问题

已知 $A(x) \equiv \exp B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

多项式 exp

问题

已知 $A(x) \equiv \exp B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

- 构造函数 $G(x)$ 满足 $G[A(x)] = 0$

多项式 exp

问题

已知 $A(x) \equiv \exp B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

- 构造函数 $G(x)$ 满足 $G[A(x)] = 0$
- $G[A(x)] = \ln A(x) - B(x)$

多项式 exp

问题

已知 $A(x) \equiv \exp B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

- 构造函数 $G(x)$ 满足 $G[A(x)] = 0$
- $G[A(x)] = \ln A(x) - B(x)$
- 应用牛顿迭代公式，可以得到

多项式 exp

问题

已知 $A(x) \equiv \exp B(x) \pmod{x^n}$，给出 $B(x)$，求 $A(x)$

- 构造函数 $G(x)$ 满足 $G[A(x)] = 0$
- $G[A(x)] = \ln A(x) - B(x)$
- 应用牛顿迭代公式，可以得到

$$
\begin{aligned}
G'[A(x)] &= \frac{1}{A(x)} \\
F_{t+1}(x) &\equiv F_t(x) - \frac{G[F_t(x)]}{G'[F_t(x)]} \pmod{x^{2^{t+1}}} \\
&\equiv F_t(x)[1 - \ln F_t(x) + B(x)] \pmod{x^{2^{t+1}}}
\end{aligned}
$$

来 k 道题

经典问题

有若干种颜色不同的骨牌，其中大小为 $1\times i$ 的骨牌共有 a_i 种，每种骨牌数量无限，问恰好填满 $1\times n$ 的格子的方法。颜色相同的骨牌之间没有区别

$$a_i, n \le 10^5$$

经典问题

- 设 a 的 OGF 为 $A(x)$，可以看出答案的 OGF 为

$$\sum_{i\geq 0} A(x)^i = \frac{1}{1-A(x)}$$

- 非常良心

另一道经典问题

论文中的题

给定集合 S 和正整数 n，求有多少个 n 阶置换 p，满足 p 分解之和每一个轮换的大小都在 S 内

$$n \leq 10^5$$

论文中的题

- 置换与分解出的轮换一一对应

论文中的题

- 置换与分解出的轮换一一对应
- 假设原置换分解出的一个轮换长度为 n，那么这个轮换中的元素一共有 $(n-1)!$ 种排列方式

论文中的题

- 置换与分解出的轮换一一对应
- 假设原置换分解出的一个轮换长度为 n，那么这个轮换中的元素一共有 $(n-1)!$ 种排列方式
- 原置换由若干个这样的轮换组成，且轮换与轮换之间是无序的

论文中的题

- 置换与分解出的轮换一一对应
- 假设原置换分解出的一个轮换长度为 n，那么这个轮换中的元素一共有 $(n-1)!$ 种排列方式
- 原置换由若干个这样的轮换组成，且轮换与轮换之间是无序的
- 写出一个轮换的 EGF

论文中的题

- 置换与分解出的轮换一一对应
- 假设原置换分解出的一个轮换长度为 n，那么这个轮换中的元素一共有 $(n-1)!$ 种排列方式
- 原置换由若干个这样的轮换组成，且轮换与轮换之间是无序的
- 写出一个轮换的 EGF

$$\hat{F}(x) = \sum_{i \in S} (i-1)! \frac{x^i}{i!}$$

论文中的题

- 枚举最终的置换是由多少个轮换组成的，由于轮换是无序的，因此要除以一个阶乘

论文中的题

- 枚举最终的置换是由多少个轮换组成的，由于轮换是无序的，因此要除以一个阶乘

$$\hat{G}(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{F(x)^i}{i!}$$

- 喜闻乐见的 exp

经典问题

论文中的题 *2

你有若干种不同的物品，其中体积为 i 的物品有 a_i 种，每种物品有无限个。求选取物品恰好装满容量为 n 的背包的方案数

$$n \leq 10^5$$

经典问题

- 设 $F(x)$ 是答案的 OGF，$G(x)$ 是 $\{a_i\}$ 的 OGF

经典问题

- 设 $F(x)$ 是答案的 OGF，$G(x)$ 是 $\{a_i\}$ 的 OGF

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \prod_{i=1}^{n}(1+x^i+x^{2i}+x^{3i}+\cdots)^{a_i} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{1-x^i})^{a_i} \\
&= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(1-x^i)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j\geq 1} \frac{x^{ij}}{j}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{j\geq 1} \frac{G(x^j)}{j}\right)
\end{aligned}
$$

一道奇妙的题

一道来自纪中的题

- n 个格子排成一行，你可以进行 m 次操作。
- 在第 i 次操作中，你可以选择两个下标 $l, r(l \leq r)$，然后将第 l 个到第 r 个格子都染成颜色 i，要求这 m 次操作之后所有格子都被染上了颜色
- 问最后可能出现的颜色序列一共有多少种

$$n, m \leq 10^6$$

一道奇妙的题

- 首先如何判断一个序列是否合法

一道奇妙的题

- 首先如何判断一个序列是否合法
- 最后一次加入的颜色必定在序列中出现。如果删去最后一次加入的颜色，那么倒数第二种颜色要么不出现，要么一定是连续的

一道奇妙的题

- 首先如何判断一个序列是否合法
- 最后一次加入的颜色必定在序列中出现。如果删去最后一次加入的颜色，那么倒数第二种颜色要么不出现，要么一定是连续的
- 设 $dp[i][j]$ 表示考虑了前 i 种颜色，共有 j 个格子被染过色的方案数

一道奇妙的题

- 首先如何判断一个序列是否合法
- 最后一次加入的颜色必定在序列中出现。如果删去最后一次加入的颜色，那么倒数第二种颜色要么不出现，要么一定是连续的
- 设 $dp[i][j]$ 表示考虑了前 i 种颜色，共有 j 个格子被染过色的方案数

$$dp[i][j] = dp[i-1][j] + \sum_{k=0}^{j-1} dp[i-1][k] \times (k+1)$$

一道奇妙的题

- 看起来非常不可优化

一道奇妙的题

- 看起来非常不可优化
- 先把 $\sum$ 前面的那个当前颜色不染色的情况拿掉，即假设在最终的序列中每种颜色都出现了，最后乘一个组合数即可

一道奇妙的题

- 看起来非常不可优化
- 先把 $\sum$ 前面的那个当前颜色不染色的情况拿掉，即假设在最终的序列中每种颜色都出现了，最后乘一个组合数即可

$$
\begin{aligned}
dp[i][j] &= \sum_{k=0}^{j-1} dp[i-1][k] \times (k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{j-2} dp[i-1][k] \times (k+1) + dp[i-1][j-1] \times j \\
&= dp[i][j-1] + dp[i-1][j-1] \times j
\end{aligned}
$$

一道奇妙的题

- 将 dp 看作是在 $n \times m$ 的格子上走，这个网格有 n 行 m 列

一道奇妙的题

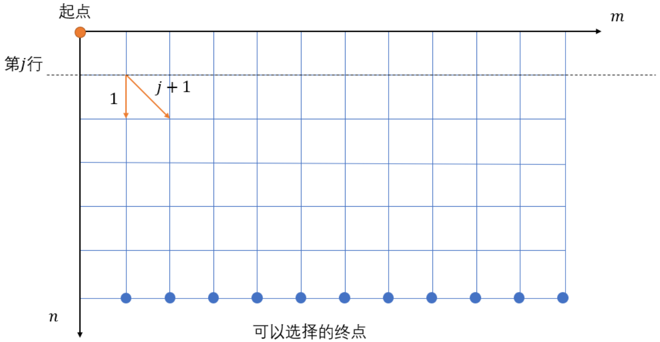
- 将 dp 看作是在 $n \times m$ 的格子上走，这个网格有 n 行 m 列
- 注意这里行相当于 dp 的第二维，列相当于 dp 的第一维

一道奇妙的题

- 将 dp 看作是在 $n \times m$ 的格子上走，这个网格有 n 行 m 列
- 注意这里行相当于 dp 的第二维，列相当于 dp 的第一维
- 那么相当于从 $(0,0)$ 出发，每次可以往下走一格，方案数为 1；或者往右下走一格，方案数为 $j+1$

一道奇妙的题

- 将 dp 看作是在 $n \times m$ 的格子上走，这个网格有 n 行 m 列
- 注意这里行相当于 dp 的第二维，列相当于 dp 的第一维
- 那么相当于从 $(0,0)$ 出发，每次可以往下走一格，方案数为 1；或者往右下走一格，方案数为 $j+1$



一道奇妙的题

- 我们需要分别求出，到达每个终点的所有路径的权值之和

一道奇妙的题

- 我们需要分别求出，到达每个终点的所有路径的权值之和
- 可以发现每一步都必然会导致所在的行 $+1$，因此我们考虑按行构造生成函数

一道奇妙的题

- 我们需要分别求出，到达每个终点的所有路径的权值之和
- 可以发现每一步都必然会导致所在的行 $+1$，因此我们考虑按行构造生成函数
- 我们用 x 的指数来代表当前所在的列数，每次我们要么使得当前的列不变，要么使得当前的列 $+1$

一道奇妙的题

- 我们需要分别求出，到达每个终点的所有路径的权值之和
- 可以发现每一步都必然会导致所在的行 $+1$，因此我们考虑按行构造生成函数
- 我们用 x 的指数来代表当前所在的列数，每次我们要么使得当前的列不变，要么使得当前的列 $+1$
- 因此 $F_i = dp[i][n]$ 的 OGF 为

$$F(x) = x\prod_{i=1}^{n-1}(1+(i+1)x)$$

- 注意第一步必定是由 $(0,0)$ 走到 $(1,1)$，因此这里要乘上 x

一道奇妙的题

- 很不幸，这个东西仍然不好求

一道奇妙的题

- 很不幸，这个东西仍然不好求
- 再将这个多项式转化一下

一道奇妙的题

- 很不幸，这个东西仍然不好求
- 再将这个多项式转化一下
- 由于总步数为 n，因此如果我们知道了向下走了多少步，那么我们也就知道了向右下走了多少步

一道奇妙的题

- 很不幸，这个东西仍然不好求
- 再将这个多项式转化一下
- 由于总步数为 n，因此如果我们知道了向下走了多少步，那么我们也就知道了向右下走了多少步
- 将向下走一步看作 x，那么最终多项式中 x^i 的系数就是原多项式中 x^{n-i} 的系数

一道奇妙的题

- 很不幸，这个东西仍然不好求
- 再将这个多项式转化一下
- 由于总步数为 n，因此如果我们知道了向下走了多少步，那么我们也就知道了向右下走了多少步
- 将向下走一步看作 x，那么最终多项式中 x^i 的系数就是原多项式中 x^{n-i} 的系数

$$F_1(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (x + i + 1)$$

这种奇形怪状的东西是可以求的

- 记 $G_t(x) = \prod_{i=1}^{2^t}(x + i + 1)$

这种奇形怪状的东西是可以求的

- 记 $G_t(x) = \prod_{i=1}^{2^t}(x+i+1)$
- 如果我们能算出所有的 G，那么我们就可以用类似快速幂的方法算出原多项式

这种奇形怪状的东西是可以求的

- 记 $G_t(x) = \prod_{i=1}^{2^t}(x+i+1)$
- 如果我们能算出所有的 G，那么我们就可以用类似快速幂的方法算出原多项式

$$G_{t+1}(x) = G_t(x) \times G_t(x+2^t)$$

这种奇形怪状的东西是可以求的

- 记 $G_t(x) = \prod_{i=1}^{2^t}(x+i+1)$
- 如果我们能算出所有的 G，那么我们就可以用类似快速幂的方法算出原多项式

$$G_{t+1}(x) = G_t(x) \times G_t(x+2^t)$$

- 记 $a_i = [x^i]G_t(x), b = 2^t$

这种奇形怪状的东西是可以求的

- 记 $G_t(x) = \prod_{i=1}^{2^t}(x + i + 1)$
- 如果我们能算出所有的 G，那么我们就可以用类似快速幂的方法算出原多项式

$$G_{t+1}(x) = G_t(x) \times G_t(x + 2^t)$$

- 记 $a_i = [x^i]G_t(x), b = 2^t$

$$G_t(x + b) = \sum_{i \geq 0} a_i \times (x + b)^i$$

这种奇形怪状的东西是可以求的

- 记 $G_t(x) = \prod_{i=1}^{2^t}(x+i+1)$
- 如果我们能算出所有的 G，那么我们就可以用类似快速幂的方法算出原多项式

$$G_{t+1}(x) = G_t(x) \times G_t(x+2^t)$$

- 记 $a_i = [x^i]G_t(x), b = 2^t$

$$G_t(x+b) = \sum_{i\geq 0} a_i \times (x+b)^i$$

- 二项式定理展开

这一页是展开

$$
\begin{aligned}
G_t(x+b) &= \sum_{i\geq 0} a_i \times (x+b)^i \\
&= \sum_{i\geq 0} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j b^{i-j} \\
&= \sum_{j\geq 0} x^j \sum_{i\geq j} a_i b^{i-j} \frac{i!}{j!(i-j)!} \\
&= \sum_{j\geq 0} \frac{x^j}{j!} \sum_{i\geq j} (a_i i!) \times \frac{b^{i-j}}{(i-j)!}
\end{aligned}
$$

这一页是展开

$$
\begin{aligned}
G_t(x+b) &= \sum_{i\geq 0} a_i \times (x+b)^i \\
&= \sum_{i\geq 0} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j b^{i-j} \\
&= \sum_{j\geq 0} x^j \sum_{i\geq j} a_i b^{i-j} \frac{i!}{j!(i-j)!} \\
&= \sum_{j\geq 0} \frac{x^j}{j!} \sum_{i\geq j} (a_i i!) \times \frac{b^{i-j}}{(i-j)!}
\end{aligned}
$$

- 记 $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i i! x^{n-i}$, $B(x) = \sum_{i\geq 0} \frac{b^i}{i!} x^i$
- 第 j 项的 $\sum$ 为 $A(x) \times B(x)$ 的第 $n-j$ 项的系数