

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Уфимский университет науки и технологий»**

**Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100										
90										
80										
70										
60										
50										
40										
30										
20										
10										
0										

**«ДВУХСЛОЙНАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ**  
**РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН»**

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

к курсовой работе по дисциплине

«Теория разностных схем»

**3952.336211.000 ПЗ**

Группа МКН-316	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Яковлев О.В.			
Консультант	Ямилева А.М.			
Принял	Лукашук В.О.			

Уфа 2023

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уфимский университет науки и технологий»  
Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**ЗАДАНИЕ**  
на курсовую работу по дисциплине  
**«Теория разностных схем»**

Студент: Яковлев Олег Витальевич

Группа: МКН-316

Консультант: Ямилева Альфия Маратовна

**1. Тема курсовой работы**

Двухслойная акустическая схема для задачи распространения волн.

**2. Основное содержание**

- 2.1. Изучить литературу по теме "Двухслойная акустическая схема для задачи распространения волн"
- 2.2. Разработать программу для численного решения волнового уравнения в неоднородной среде.
- 2.3. Проанализировать поведение волны на границе сред с разной акустической плотностью.
- 2.4. Оформить пояснительную записку к курсовой работе.

**3. Требования к оформлению материалов работы**

**3.1. Требования к оформлению пояснительной записки**

Пояснительная записка к курсовой работе должна быть оформлена в соответствии с требованиями ГОСТ и содержать

- титульный лист,
- задание на курсовую работу,
- содержание,

- введение,
- заключение,
- список литературы,
- приложение, содержащее листинг разработанной программы, если таковая имеется.

Дата выдачи задания

"\_\_" \_\_\_\_\_ 202\_ г.

Дата окончания работы

"\_\_" \_\_\_\_\_ 202\_ г.

Консультант \_\_\_\_\_ Ямилева А.М.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	5
1. Двухслойная акустическая схема . . . . .	6
1.1. Одномерная акустическая схема для плоских акустических волн	6
1.2. Двухмерная акустическая схема. Метод FDTD . . . . .	7
2. Неотражающие граничные условия. PML . . . . .	9
2.1. Аналитическое продолжение решения . . . . .	9
2.2. PML для двухмерных скалярных волн . . . . .	10
3. Расчет и анализ результатов . . . . .	11
3.1. Сходимость численного решения . . . . .	11
3.2. Поведение волн на границе сред с разной скоростью звука . .	12
3.3. Задача обнаружения объекта внутри вычислительной области	13
Заключение . . . . .	16
Список литературы . . . . .	17
Приложение А . . . . .	18

## ВВЕДЕНИЕ

К гиперболическим уравнениям приводят задачи колебания струны, движения сжимаемого газа, распространения возмущения электромагнитных полей и многие другие. Задачи численного моделирования распространения акустических волн неоднородной среде часто возникает при геологоразведке различных месторождений полезных ископаемых. Актуальность этой курсовой работы заключается в применении численных методов моделирования волновых процессов для решения задач геологоразведки определения местоположения месторождений полезных ископаемых.

Для задач акустики нередко оказывается более удобно для численного решения перейти к акустической системе, чем решать волновое уравнение. В частности она позволяет построить неравномерную сетку по времени и учесть неоднородность среды при распространении звуковых волн. Также, двухслойная акустическая схема упрощает использование PML-слоя, моделирующего идеальные неотражающие граничные условия на границе вычислительной области. Новизна данной курсовой работы заключается в применении PML-слоя для решения задачи акустики.

Целью данной курсовой работы является изучение распространения акустических волн в неоднородной среде. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Изучить литературу по теме "Двухслойная акустическая схема для задачи распространения волн"
2. Разработать программу для численного решения волнового уравнения в неоднородной среде.
3. Проанализировать поведение волны на границе сред с разной акустической плотностью.

## 1. ДВУХСЛОЙНАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ СХЕМА

### 1.1. Одномерная акустическая схема для плоских акустических волн

Плоские акустические волны описывает уравнение малых колебаний струны при наличии внешнего силового поля  $f$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + f(x, t) \\ P|_{t=0} = \mu_1(x) \\ \frac{\partial P}{\partial t}|_{t=0} = \mu_2(x) \\ P|_{x=0} = \mu_3(t) \\ P|_{x=a} = \mu_4(t) \end{cases} \quad (1)$$

Заменяем уравнение 1 второго порядка системой уравнений первого порядка. Введем потенциалы скоростей и правой части.

$$V(x, t) = \int_0^x \frac{\partial P(\xi, t)}{\partial t} d\xi$$
$$F(x, t) = \int_0^x f(\xi, t) d\xi$$

Тогда функции  $P(x, t), V(x, t)$  удовлетворяют системе уравнений 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} = c^2 \frac{\partial P}{\partial x} + F(x, t) \\ P|_{t=0} = \mu_1(x) \\ V|_{t=0} = \int_0^x \mu_2(\xi) d\xi \\ P|_{x=0} = \mu_3(t) \\ P|_{x=a} = \mu_4(t) \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим значения скоростей и давления в узлах равномерной про-

пространственной и временной сеток сеточных функций

$$\begin{aligned}\omega_h &= \{ih, i = \overline{0..N}\} \\ \omega_\tau &= \{i\tau, i = \overline{0..M}, \tau = \frac{T}{M}\} \\ y_i &= P(x_i, t), x_i \in \omega_h \\ \hat{y}_i &= P(x_i, t + \tau), x_i \in \omega_h \\ z_i &= V\left(x_i + \frac{h}{2}, t\right), i \leq N - 1, x_i \in \omega_h \\ \hat{z}_i &= V\left(x_i + \frac{h}{2}, t + \tau\right), i \leq N - 1, x_i \in \omega_h\end{aligned}$$

Составим явную акустическую схему, используя шаблон, изображенный на рисунке 1.

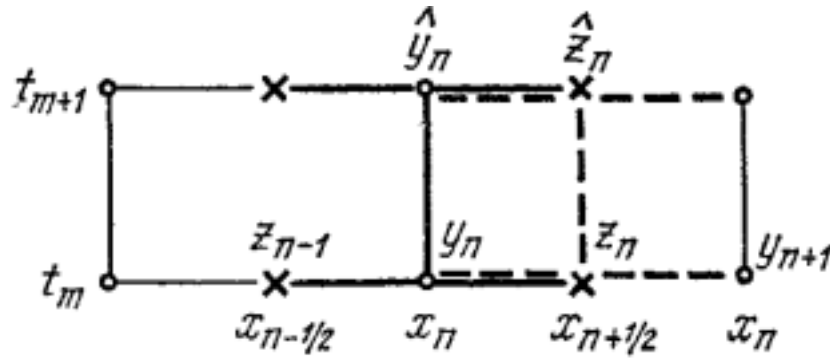


Рис. 1 – шаблон одномерной акустической схемы

$$\begin{aligned}\frac{\hat{z}_i - z_i}{\tau} &= \frac{c^2}{h}(y_{i+1} - y_i) + F_{i+1/2}^{m+1/2}, 0 \leq i \leq N - 1 \\ \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} &= \frac{1}{h}(\hat{z}_i - \hat{z}_{i-1}), 1 \leq i \leq N - 1\end{aligned}\tag{3}$$

При выполнении условия Куранта  $c\tau < h$  акустическая схема 3 сходится со скоростью  $O(h^2 + \tau^2)$  [1]

## 1.2. Двухмерная акустическая схема. Метод FDTD

Аналогично одномерному случаю, сведем волновое уравнение второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Главные акустические дифференциальные уравнения для двух измерений

имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = -c^2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (4)$$

Для того чтобы вычислить значения в следующий момент времени, сместим сетки компонент  $V_x$  и  $V_y$  векторов скоростей относительно сетки давлений  $P$  на полшага вдоль соответствующей оси по пространству и на полшага по времени[2]. В результате узлы сетки будут расположены так, как изображено на рисунке 2.

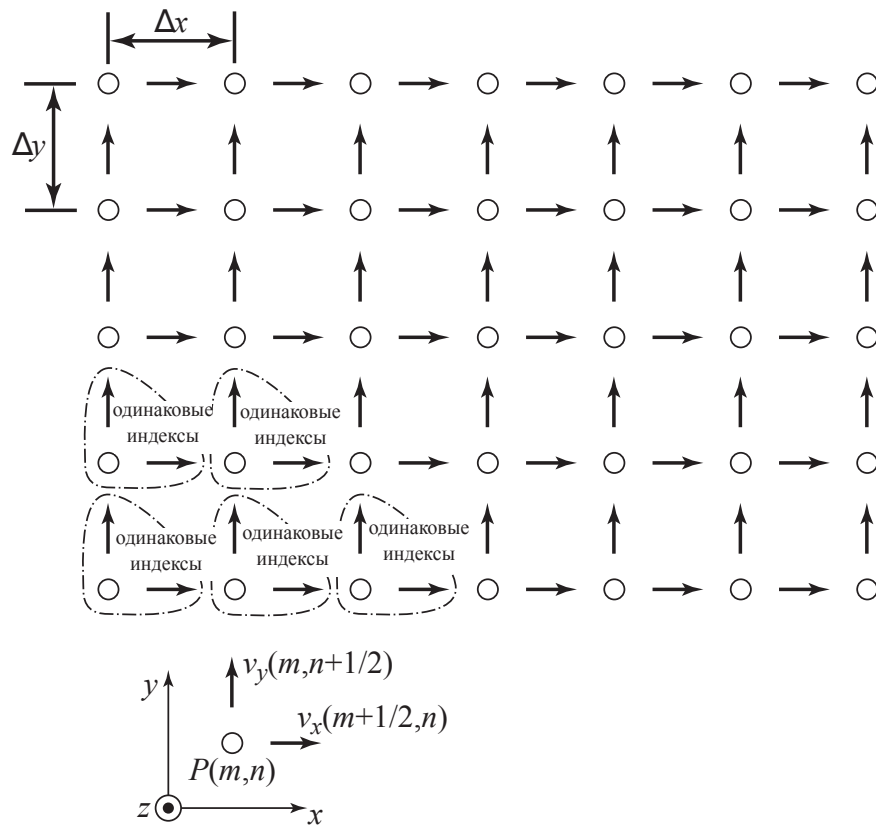


Рис. 2 – Расположение узлов в двухмерной сетке

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= P(m\Delta_x, n\Delta_y, q\Delta_t) = P^q[m, n], \\ V_x(x, y, t) &= V_x([m + 1/2]\Delta_x, n\Delta_y, [q + 1/2]\Delta_t) = V_x^{q+1/2}[m, n], \\ V_y(x, y, t) &= V_y(m\Delta_x, [n + 1/2]\Delta_y, [q + 1/2]\Delta_t) = V_y^{q+1/2}[m, n] \end{aligned}$$

Заменим в системе 4 производные на разностные аналоги. Тогда давление



в следующий момент времени вычисляется по формуле

$$P^q[m, n] = P^{q-1}[m, n] - \rho c_a^2 \frac{\Delta t}{\delta} \left( V_x^{q-1/2}[m, n] - V_x^{q-1/2}[m-1, n] + \right. \\ \left. V_y^{q-1/2}[m, n] - V_y^{q-1/2}[m, n-1] + \right) \\ V_x^{q+1/2}[m, n] = V_x^{q-1/2}[m, n] - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\delta} (P^q[m+1, n] - P^q[m, n])$$

Скорость на следующем временном шаге можно вычислить по формулам

$$V_x^{q+1/2}[m, n] = V_x^{q-1/2}[m, n] - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\delta} (P^q[m+1, n] - P^q[m, n]) \\ V_y^{q+1/2}[m, n] = V_y^{q-1/2}[m, n] - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\delta} (P^q[m, n+1] - P^q[m, n])$$

## 2. НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. PML

### 2.1. Аналитическое продолжение решения

Решением волнового уравнения является осциллирующая аналитическая функция. Следовательно, решение можно аналитически продолжить для всей комплексной плоскости (Рисунок 3). Однако, если функцию вычислять не вдоль действительной оси, а добавить линейно растущую мнимую часть при  $\text{Re } x > 5$ , то решение будет экспоненциально затухающее в этой области. То есть, при  $\text{Re } x > 5$  функция ведет себя как колебания в поглощающей среде. [3]

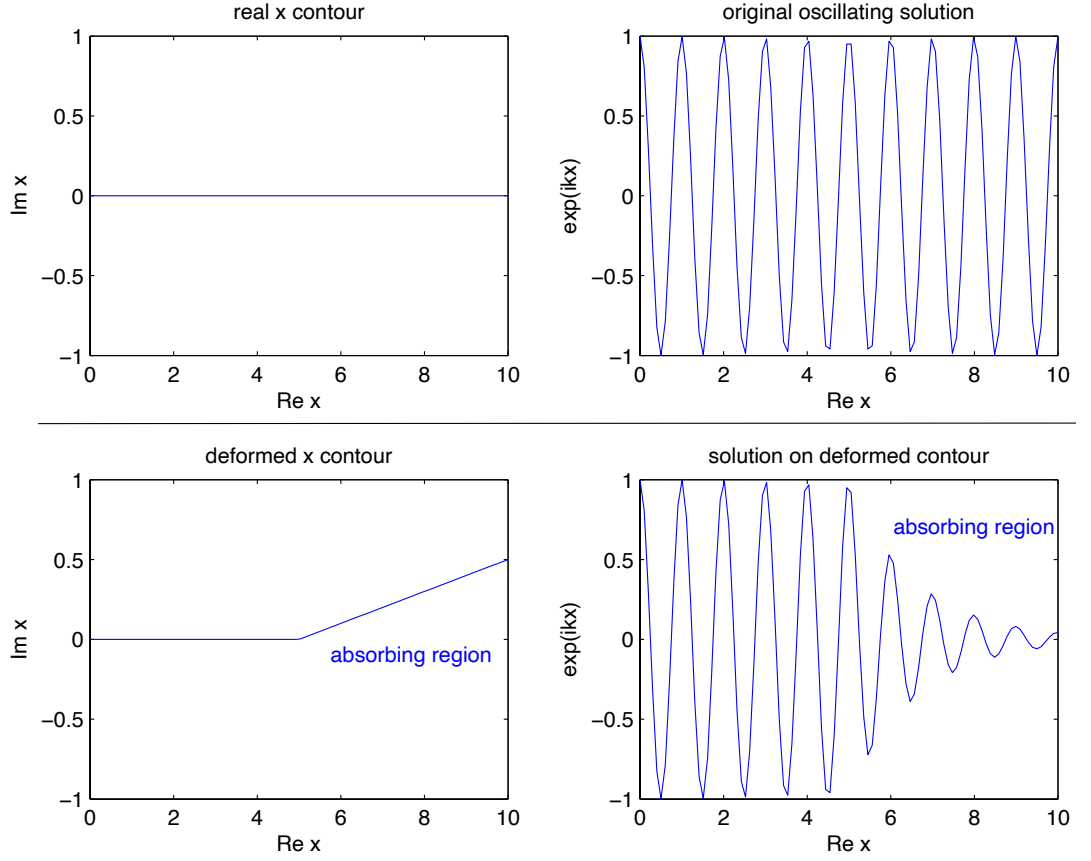


Рис. 3 – *Сверху*: действительная часть осциллирующего решения (справа), значения  $x$  вдоль действительной оси комплексной плоскости  $x$  (слева). *Снизу*: искривленный контур (слева), экспоненциально затухающее решение (справа).

При этом решение в области  $\text{Re } x < 5$  не изменилось, то есть слой PML ведет себя как неотражающая поглощающая среда.

## 2.2. PML для двухмерных скалярных волн

Пусть решение  $P(x, y, t)$  зависит от времени как  $e^{-i\omega t}$ . Подставляя в систему 4, получим систему 5.

$$\begin{cases} -i\omega P = -c^2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \\ -i\omega V_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ -i\omega V_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (5)$$

Применяя PML-преобразование  $\frac{\partial}{\partial x} \mapsto \frac{1}{1+i\frac{\sigma_x}{\omega}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ , получим

$$\begin{cases} -i\omega P + \sigma_x P = -c^2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \left( 1 + i\frac{\sigma_x}{\omega} \right) \right) \\ -i\omega V_x + \sigma_x V_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ -i\omega V_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (6)$$

При обратном преобразовании Фурье, выражение  $\frac{i}{\omega} \sigma_x \frac{\partial V_y}{\partial y}$  перейдет в интеграл другой величины. Обозначим его за  $\Psi$ . Тогда к системе добавляется еще одно уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -c^2 \sigma_x \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (7)$$

Итоговая система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = -c^2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) - \sigma_x P + \Psi \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \sigma_x V_x \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -c^2 \sigma_x \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{cases} \quad (8)$$

### 3. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

#### 3.1. Сходимость численного решения

Для проверки правильности составленной разностной схемы была выбрана задача 9 колебания прямоугольной мембраны с нулевыми граничными условиями.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ P|_{x=0} = 0 \\ P|_{x=1} = 0 \\ P|_{y=0} = 0 \\ P|_{y=1} = 0 \\ P|_{t=0} = \sin \pi x \sin \pi y \\ \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Решением данной задачи является функция  $P(x, y, t) = \cos \sqrt{2\pi t} \sin \pi x \sin \pi y$

Вычислим норму ошибки  $\|E\| = \max_{x_i, y_j \in \omega_h, t_k \in \omega_\tau} |P_{i,j}^k - P(x_i, y_j, t_k)|$  для численного решения. Норма ошибки в зависимости от количества узлов пространственной сетки представлен на рисунке 4.

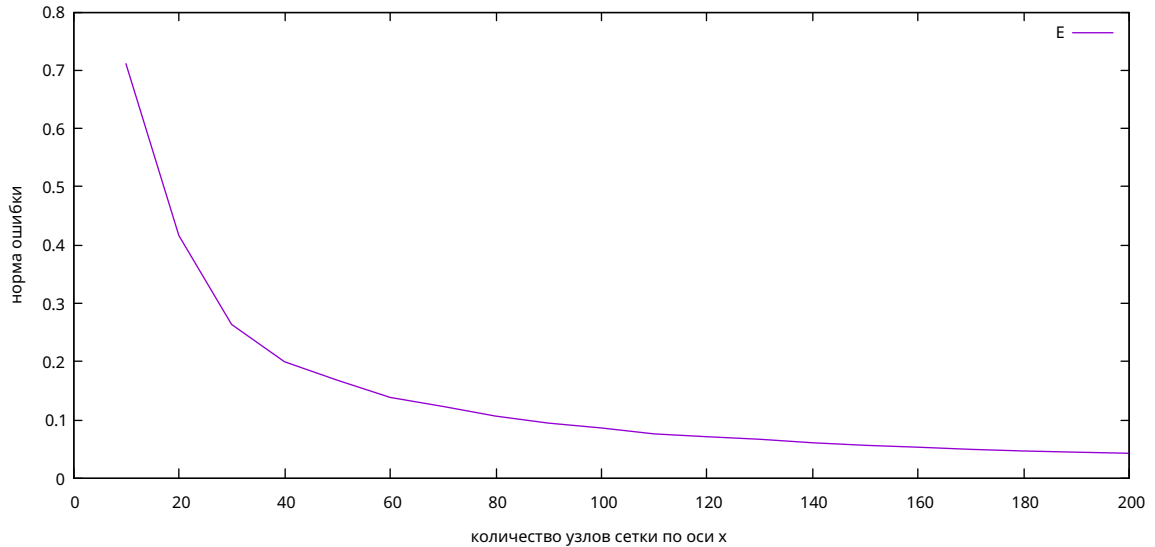


Рис. 4 – Зависимость нормы ошибки от количества узлов сетки по оси  $x$

### 3.2. Поведение волн на границе сред с разной скоростью звука

При переходе акустической волны в более акустически плотную среду часть колебаний отражается от границы раздела сред. На рисунке 5а показано отражение волн, распространяющихся в среде со скоростью звука  $C_1 = 1$ , от границы со средой с меньшей скоростью звука  $C_2 = 0.38$ .

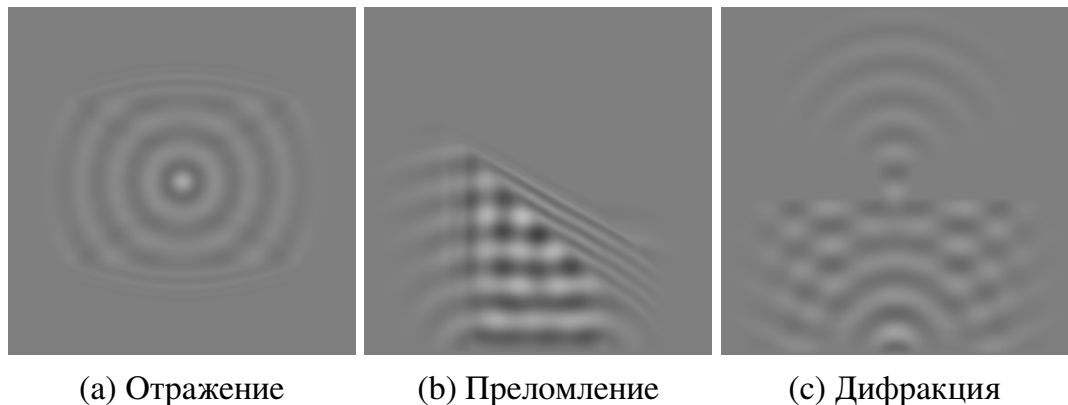


Рис. 5

Также, при попадании волны в более акустически плотную среду под углом к границе раздела сред происходит преломление, изображенное на рисунке 5б. При прохождении волны между границами абсолютно акустически непроницаемых сред, возникает дифракция волн (рисунок 5с).



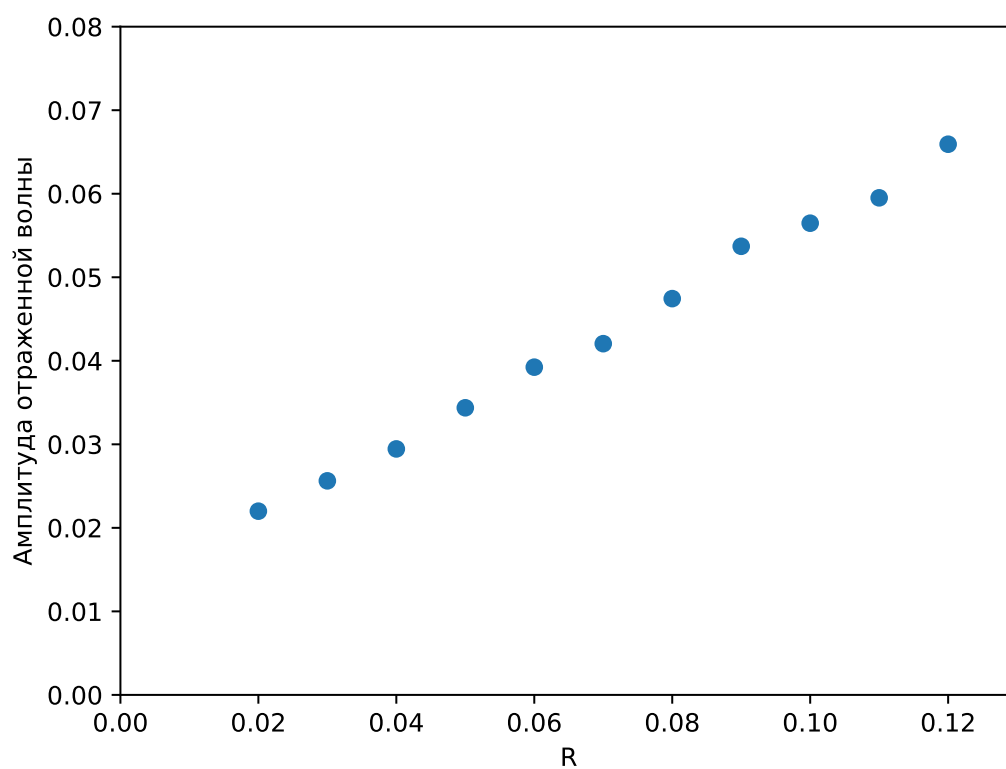
Рис. 6 – Отражение от круга радиусом  $R = \frac{1}{300}$

На левой и правой границах вычислительных областей, изображенных на рисунке 5, расположены неотражающие слои PML с  $\sigma_x = e^{8|x-0.5|}$ . Большая часть колебаний при попадании в область PML поглощаются. Так после отражения от левой границы волны с начальной амплитудой  $A_P = 0.1$  амплитуда отраженных колебаний уменьшается до  $A_P = 0.004$ .

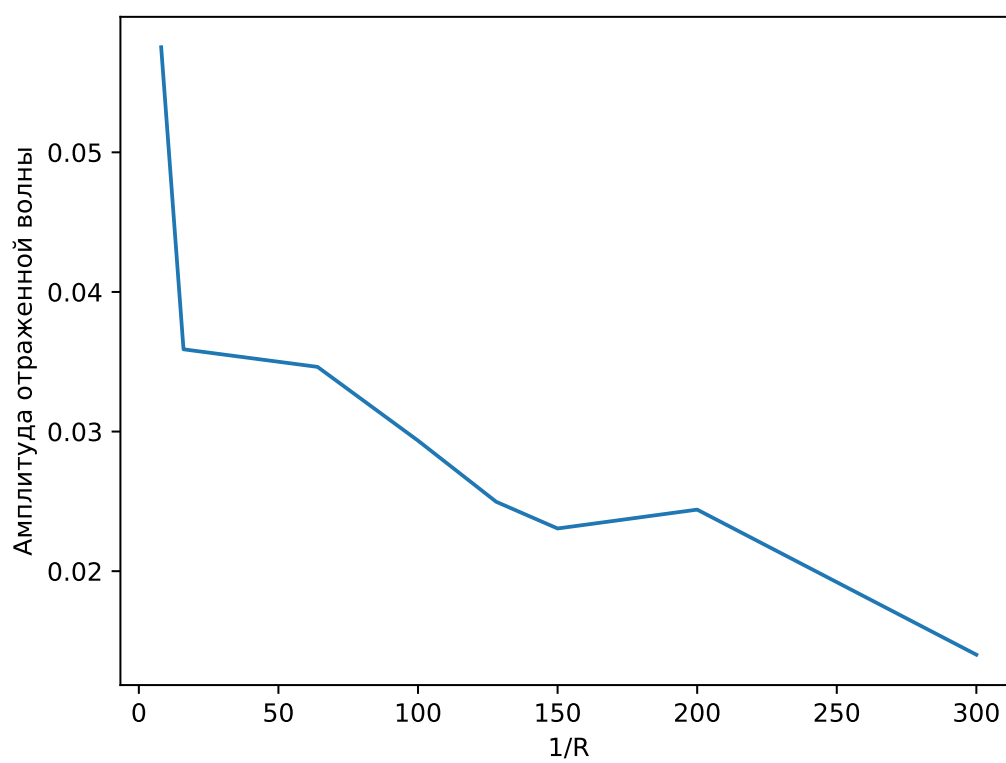
### 3.3. Задача обнаружения объекта внутри вычислительной области

В задачах сейсморазведки зачастую необходимо обнаружить область со скоростью звука, отличающейся от скорости звука в среде. Пусть в центре вычислительной области находится круг радиуса  $R$  с со скоростью звука  $C_2 = \frac{1}{4}$  в среде со скоростью звука  $C_1 = \frac{1}{2}$ . Сенсоры расположены вокруг объекта. Источник колебаний расположен в середине нижней границы вычислительной области. Измерим значения давления на датчике, расположенным в точке  $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$  (отмечен красной точкой на рисунке 6).

С уменьшением радиуса круга амплитуда отраженной волны убывает (рисунок 7b). Так как волна отражается от границ вычислительной области, что вызывает интерференцию с отраженной волной, то существует минимальный радиус круга, который может обнаружить датчик. Его можно определить при помощи вычислительных экспериментов. Наименьший радиус круга приблизительно равен  $R_{\min} \approx \frac{1}{300}$  при шаге сетки по пространству  $h_x = h_y = \frac{1}{400}$ . Зависимость значения датчика давления от времени представлена на рисунке 8а.

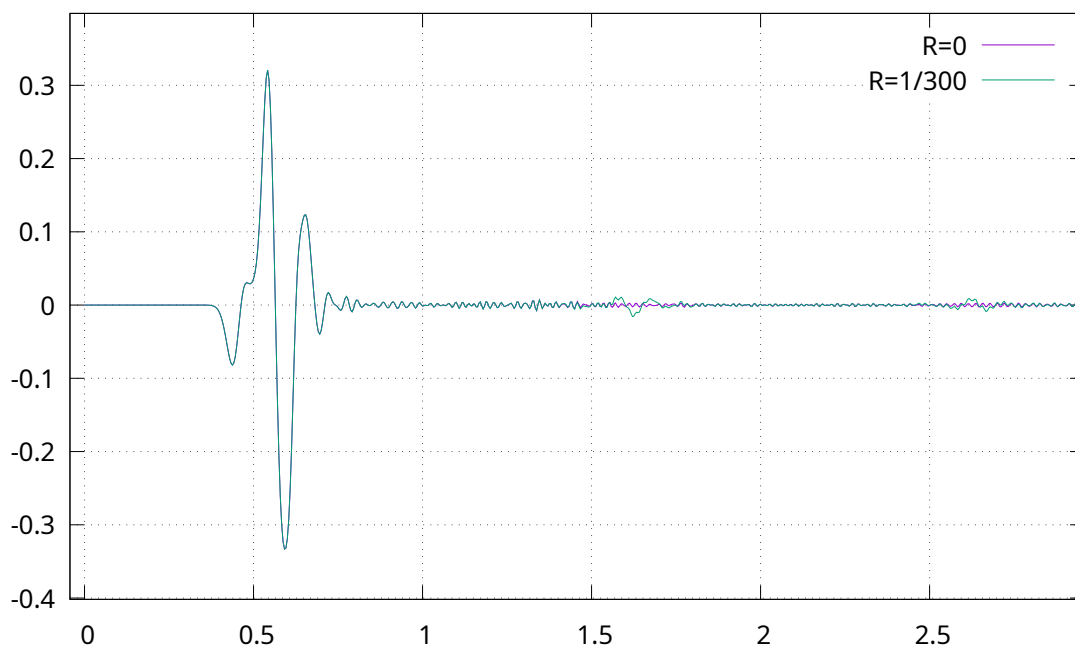


(a) Зависимость амплитуды отраженной волны от радиуса круга

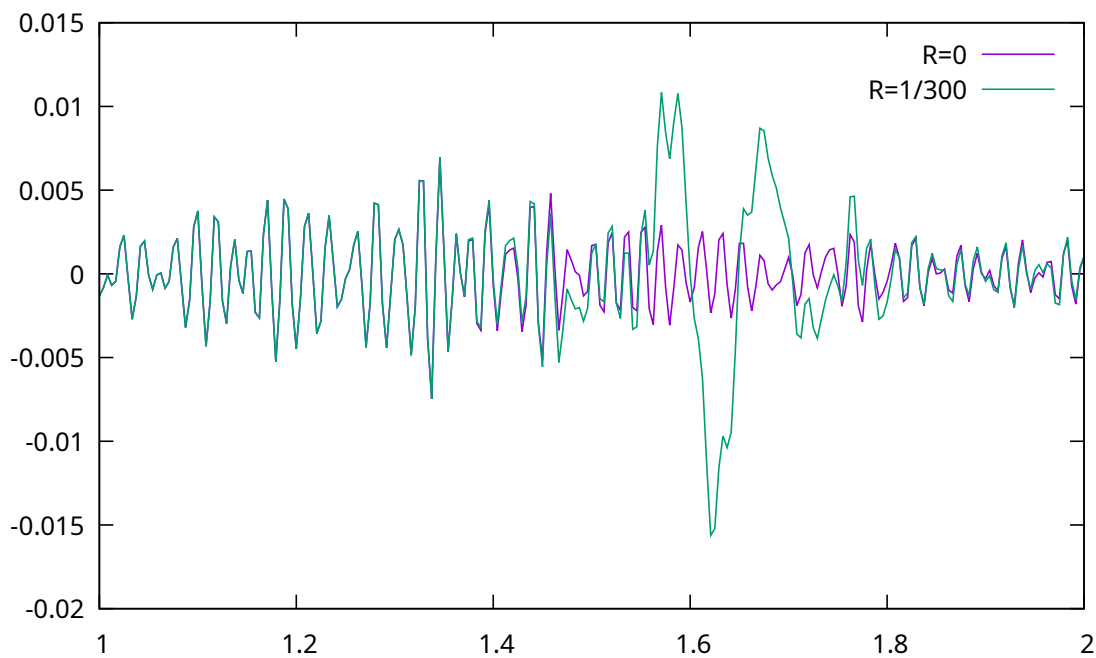


(b) Зависимость амплитуды от величины, обратной радиусу круга

Рис. 7



(а) Показания датчика давления, расположенного в точке  $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$ , для круга  $R = \frac{1}{300}$  и без круга  $R = 0$



(b) График 8а для  $x \in [1; 2]$

Рис. 8

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсовой работы была изучена литература о двух-слойных акустических схемах для задачи распространения волн. Была выведена двухслойная акустическая разностная схема с слоем PML, моделирующим неотражающие граничные условия на границе вычислительной области.

Далее была разработана и протестирована программа для численного решения волнового уравнения в неоднородной среде. Показано, что при увеличении количества узлов сетки норма ошибки уменьшается.

Было проанализировано поведение волны на границе сред с неоднородной акустической плотностью. Продемонстрированы моделирования физических явлений отражения волн от границы сред с разной скоростью звука, преломление волн при попадании в среду с меньшей скоростью звука и дифракция волн между границами абсолютно акустически плотных сред. В результате вычислительных экспериментов получена амплитуда  $A_P = 0.004$  волны с начальной амплитудой  $A_{P0} = 0.1$ , отраженной от поглощающего слоя PML. Оценен минимальный радиус  $R_{\min} \approx \frac{1}{300}$  объекта, который можно обнаружить при помощи датчиков отраженных волн для сетки с шагом  $h_x = h_y = \frac{1}{400}$ .

Таким образом было изучено распространение акустических волн в неоднородной среде.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М. : Издательство «Наука», 1978.
2. *Schneider J. B.* Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method. — 2010. — URL: [www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd](http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd).
3. *Johnson S. G.* Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs) // CoRR. — 2021. — T. abs/2108.05348. — arXiv: 2108.05348. — URL: <https://arxiv.org/abs/2108.05348>.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Листинг программы

#### problem.hpp

```
#pragma once
#include <vector>
typedef std::vector<std::vector<double>> grid;
double Pt0(double x,double y);
double Vxt0(double x,double y);
double Vyt0(double x,double y);
double F(double x, double y, double t);
double Csq(double x,double y);
double Sigma_x(double x);
void init();
void output_layer(int m,double t, const grid &P1, const grid &Vx,const grid
    &Vy);
void finished();
extern int M;
extern int N;
extern double Time;
```

#### waves.cpp

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <sys/stat.h>
#include <sys/types.h>
#include <fstream>
#include "problem.hpp"
using namespace std;
/*  $u_t = v_x$ 
 *  $v_t = c^2 u_x + F(x,t)$ 
 *  $u(x,0) = m1$ 
 *  $v(x,0) = \int m2(x) dx$ 
 *  $u(0,t) = m3(t)$ 
 *  $u(a,t) = m4(t)$ 
 */
int main(int argc,char *argv[]){
    if(argc>1){
        M = atol(argv[1]);
        N = sqrt(M);
    }
    if(argc>2){
        N = atol(argv[2]);
    }
    grid P_a(N,std::vector<double>(N,0));
    grid P_b(N,std::vector<double>(N,0));
    grid Vx_a(N,std::vector<double>(N,0));
    grid Vx_b(N,std::vector<double>(N,0));
    grid Vy_a(N,std::vector<double>(N,0));
    grid Vy_b(N,std::vector<double>(N,0));
    grid Psi_a(N,std::vector<double>(N,0));
    grid Psi_b(N,std::vector<double>(N,0));

    grid &P0 = P_a;
    grid &P1 = P_b;
    grid &Vx0 = Vx_a;
    grid &Vx1 = Vx_b;
```

```

grid &Vy0 = Vy_a;
grid &Vy1 = Vy_b;
grid &Psi0 = Psi_a;
grid &Psi1 = Psi_b;

double dt = Time/M;
double dx = 1.0/N;
double dy = dx;
init();
for(int j=0;j<N;j++){
    double y = j*dy;
    for(int i = 0; i < N; i++){
        double x = i*dx;
        P0[i][j] = Pt0(x,y);
        Vx0[i][j] = Vxt0(x,y);
        Vy0[i][j] = Vyt0(x,y);
    }
}
for(int m=0;m<M;m++){
    double t = m * dt;
    #pragma omp parallel for
    for(int j=0;j<N;j++){
        double y = j*dy;
        #pragma omp parallel for
        for(int i = 0; i < N; i++){
            double x = i*dx;
            if(i>=1&&j>=1&&i<N-1&&j<N-1){
                P1[i][j] = P0[i][j] - Csq(x,y) * dt*(
                    (Vx0[i][j]-Vx0[i-1][j])/dx
                    + (Vy0[i][j] - Vy0[i][j-1])/dy
                ) + dt*F(x,y,t) - dt * Sigma_x(x)*P0[i][j] +
                    dt*Psi0[i][j];
            }
            if(i<N-1&&j<N-1){
                Vx1[i][j] = Vx0[i][j] - dt/dx *( P1[i+1][j] - P1[i][j])
                    - dt*Sigma_x(x)*Vx0[i][j];
                Vy1[i][j] = Vy0[i][j] - dt/dy *( P1[i][j+1] - P1[i][j]);
            }
            if(i>=1&&j>=1&&i<N-1&&j<N-1){
                Psi1[i][j] = Psi0[i][j] - dt/dy * (Vy0[i][j] -
                    Vy0[i][j-1])*Csq(x,y)*Sigma_x(x);
            }
        }
    }

    std::swap(P0,P1);
    std::swap(Vx0,Vx1);
    std::swap(Vy0,Vy1);
    std::swap(Psi0,Psi1);
    output_layer(m, t, P1,Vx1,Vy1);
}
finished();

return 0;
}

```

## problem.cpp

```

#include "problem.hpp"
#include <cmath>
#include <vector>
#include <fstream>
#include <iostream>

```

```

#include <sys/stat.h>
#include <sys/types.h>
using namespace std;
double Pt0(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;

    if(x*x + y*y < 1.0/100)
        return 0;
    return 0;
}
double Vxt0(double x,double y){
    return 0;
}
double Vyt0(double x,double y){
    return 0;
}
double F(double x, double y, double t){
    x-=0.5;
    y-=0.5;
    double R = 1.0/20;
    if(x*x + y*y<R*R)
        return cos(M_PI*2*10*t+sqrt(x*x+y*y)/R*M_PI)*10;
    return 0;
}
double Csq(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;
    if(fabs(y)<0.25)
        return 1;
    // if(fabs(y)>0.25)
    // return 2;
    return 0.15;
}
double Sigma_x(double x){
    return (x<0.2||x>0.8)*exp(8*fabs(x-0.5));
}
void init(){
    int dir_status = mkdir("data", S_IRWXU | S_IRWXG | S_IROTH | S_IXOTH);
    if(dir_status != 0 && errno != EEXIST){
        cerr << "Failed to create data directory" <<endl;
        exit(1);
    }
}
typedef std::vector<std::vector<double>> grid;
#define NN 300
#define VLEN 30
#define VRATE 24
double Time = 1.0;
int M = NN*NN*Time; // Time
int N = NN; // X Y

void output_layer(int m,double t, const grid &P1,const grid &Vx,const grid
&Vy){
    int T=M/VLEN/VRATE;
    int print_T = 5*T;
    if(m%T)
        return;
    char fname[128];
    snprintf(fname,128, "data/%04d.pgm",m/T);
    if(m%print_T==0)
        fprintf(stderr, "[%d/%d] Computing image %s\033[OK\r",m/T,M/T,fname);
    std::ofstream data_stream(fname);
    if(!data_stream.is_open()){
        cerr <<"Can't open data file" <<endl;

```

```

        exit(1);
    }
    data_stream<<"P5"<<endl;
    data_stream<<N<<' ' <<N<<endl;
    data_stream<<255<<endl;
    for(int j=0;j<N;j++){
        for(int i=0;i<N;i++){
            char byte = fmax(fmin(((P1[i][j]+1)/2)*255,255),0);
            data_stream<< byte;
        }
    }
    //std::cout <<std::endl<<std::endl;
    data_stream.close();
}

void finished(){
}

```

## problem-detector.cpp

```

#include "problem.hpp"
#include <cmath>
#include <vector>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <sys/stat.h>
#include <sys/types.h>
using namespace std;
double Pt0(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;

    if(x*x + y*y < 1.0/100)
        return 0;
    return 0;
}
double Vxt0(double x,double y){
    return 0;
}
double Vyt0(double x,double y){
    return 0;
}
double F(double x, double y, double t){
    x-=0.5;
    y-=1.0;
    double R = 1.0/20;
    if(x*x + y*y<R*R && t < 0.1)
        return cos(M_PI*2*10*t+sqrt(x*x+y*y)/R*M_PI)*10*2;
    return 0;
}
#ifdef RR
#define RR 1.0/300
#endif
double Csq(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;
    double R = RR;//1.0/300;
    if(x*x+y*y<R*R)
        return 1.0/16;
    //    if(fabs(y)>0.25)
    //        return 2;
    return 0.25;
}
double Sigma_x(double x){

```

```

        return (x<1.0/8||x>7/8.0)*exp(8*fabs(x-0.5));
    }
    struct sensor{
        int i;
        int j;
    };
    std::vector<sensor> sensors;
    void mksensor(int i, int j){
        char fname[128];
        snprintf(fname,128, "sensor/sensor_%dx%d.data",i,j);
        sensors.push_back({i,j});
        ofstream sensor_f(fname);
        sensor_f.close();
    }
    void init(){
        int dir_status = mkdir("data", S_IRWXU | S_IRWXG | S_IROTH | S_IXOTH);
        cerr << "R_=" <<RR<<endl;
        if(dir_status != 0 && errno != EEXIST){
            cerr << "Failed to create data directory" <<endl;
            exit(1);
        }
        dir_status = mkdir("sensor", S_IRWXU | S_IRWXG | S_IROTH | S_IXOTH);
        if(dir_status != 0 && errno != EEXIST){
            cerr << "Failed to create sensor directory" <<endl;
            exit(1);
        }
        mksensor(N/2, N/4);
        mksensor(N/4, N/2);
        mksensor(N/8, N/2);
        mksensor(N/2,N*3/4);
    }
    typedef std::vector<std::vector<double>> grid;
    #define NN 300
    #define VLEN 30
    #define VRATE 24
    double Time = 3;
    int M = 2*NN*NN*Time; // Time
    int N = NN; // X Y

    void output_layer(int m,double t, const grid &P1,const grid &Vx,const grid
    &Vy){
        int T=M/VLEN/VRATE;
        int print_T = 5*T;
        if(m%T)
            return;
        char fname[128];
        snprintf(fname,128, "data/%04d.pgm",m/T);
        if(m%print_T==0)
            fprintf(stderr, "[%d/%d] Computing image %s\033[0K\r",m/T,M/T,fname);
        std::ofstream data_stream(fname);
        if(!data_stream.is_open()){
            cerr <<"Can't open data file" <<endl;
            exit(1);
        }
        data_stream<<"P5"<<endl;
        data_stream<<N<<' '<<N<<endl;
        data_stream<<255<<endl;
        for(int j=0;j<N;j++){
            for(int i=0;i<N;i++){
                char byte = fmax(fmin(((P1[i][j]+1)/2)*255,255),0);
                data_stream<< byte;
            }
        }
    }

```

```

//std::cout <<std::endl<<std::endl;
data_stream.close();
for(sensor &s: sensors){
    snprintf(fname,128, "sensor/sensor_%dx%d.data",s.i,s.j);
    std::ofstream sensor(fname,ios_base::app);
    sensor << t<<'_' << P1[s.i][s.j]<<'_' <<Vx[s.i][s.j]<<'_'
        <<Vy[s.i][s.j]<<endl;
    sensor.close();
}
}
void finished(){
}

```

## problem-diffraction.cpp

```

#include "problem.hpp"
#include <cmath>
#include <vector>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <sys/stat.h>
#include <sys/types.h>
using namespace std;
double Pt0(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;

    if(x*x + y*y < 1.0/100)
        return 0;
    return 0;
}
double Vxt0(double x,double y){
    return 0;
}
double Vyt0(double x,double y){
    return 0;
}
double F(double x, double y, double t){
    x-=0.5;
    y-=1.0;
    double R = 1.0/20;
    if(x*x + y*y<R*R)
        return cos(M_PI*2*10*t+sqrt(x*x+y*y)/R*M_PI)*10;
    return 0;
}
double Csq(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;
    if(fabs(y)<0.05 && fabs(x)>0.05)
        return 0.0;
    //    if(fabs(y)>0.25)
    //        return 2;
    return 1;
}
double Sigma_x(double x){
    return (x<0.2||x>0.8)*exp(8*fabs(x-0.5));
}
void init(){
    int dir_status = mkdir("data", S_IRWXU | S_IRWXG | S_IROTH | S_IXOTH);
    if(dir_status != 0 && errno != EEXIST){
        cerr << "Failed to create data directory" <<endl;
        exit(1);
    }
}

```

```

typedef std::vector<std::vector<double>> grid;
#define NN 300
#define VLEN 30
#define VRATE 24
double Time = 1.5;
int M = NN*NN*Time*Time; // Time
int N = NN; // X Y

void output_layer(int m,double t, const grid &P1,const grid &Vx,const grid
    &Vy){
    int T=M/VLEN/VRATE;
    int print_T = 5*T;
    if(m%T)
        return;
    char fname[128];
    snprintf(fname,128, "data/%04d.pgm",m/T);
    if(m%print_T==0)
        fprintf(stderr,"[%d/%d] Computing image\s\033[0K\r",m/T,M/T,fname);
    std::ofstream data_stream(fname);
    if(!data_stream.is_open()){
        cerr <<"Can't open data file" <<endl;
        exit(1);
    }
    data_stream<<"P5"<<endl;
    data_stream<<N<<' '<<N<<endl;
    data_stream<<255<<endl;
    for(int j=0;j<N;j++){
        for(int i=0;i<N;i++){
            char byte = fmax(fmin(((P1[i][j]+1)/2)*255,255),0);
            data_stream<< byte;
        }
    }
    //std::cout <<std::endl<<std::endl;
    data_stream.close();
}

void finished(){
}

```

## problem-refraction.cpp

```

#include "problem.hpp"
#include <cmath>
#include <vector>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <sys/stat.h>
#include <sys/types.h>
using namespace std;
double Pt0(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;

    if(x*x + y*y < 1.0/100)
        return 0;
    return 0;
}
double Vxt0(double x,double y){
    return 0;
}
double Vyt0(double x,double y){
    return 0;
}
double F(double x, double y, double t){

```



```

        x-=0.5;
        y-=1.0;
        /*double R = 1.0/20;
        if(x*x + y*y<R*R)
            return cos(M_PI*2*10*t+sqrt(x*x+y*y)/R*M_PI)*10;*/
    if(abs(y)<1.0/20&&abs(x)<4.0/20)
        return 10*cos(M_PI*2*10*t+fabs(y)*20*M_PI);
    return 0;
}
double Csq(double x,double y){
    x-=0.5;
    y-=0.5;
    if(fabs(-y+x)<0.1)
        return 0.15;
    //    if(fabs(y)>0.25)
    //        return 2;
    return 1;
}
double Sigma_x(double x){
    return (x<0.2||x>0.8)*exp(8*fabs(x-0.5));
}
void init(){
    int dir_status = mkdir("data", S_IRWXU | S_IRWXG | S_IROTH | S_IXOTH);
    if(dir_status != 0 && errno != EEXIST){
        cerr << "Failed to create data directory" <<endl;
        exit(1);
    }
}
typedef std::vector<std::vector<double>> grid;
#define NN 300
#define VLEN 30
#define VRATE 24
double Time = 2.0;
int M = NN*NN*Time; // Time
int N = NN; // X Y

void output_layer(int m,double t, const grid &P1,const grid &Vx,const grid
&Vy){
    int T=M/VLEN/VRATE;
    int print_T = 5*T;
    if(m%T)
        return;
    char fname[128];
    snprintf(fname,128, "data/%04d.pgm",m/T);
    if(m%print_T==0)
        fprintf(stderr, "[%d/%d] Computing image\s\033[0K\r",m/T,M/T,fname);
    std::ofstream data_stream(fname);
    if(!data_stream.is_open()){
        cerr <<"Can't open data file" <<endl;
        exit(1);
    }
    data_stream<<"P5"<<endl;
    data_stream<<N<<' '<<N<<endl;
    data_stream<<255<<endl;
    for(int j=0;j<N;j++){
        for(int i=0;i<N;i++){
            char byte = fmax(fmin(((P1[i][j]+1)/2)*255,255),0);
            data_stream<< byte;
        }
    }
    //std::cout <<std::endl<<std::endl;
    data_stream.close();
}
void finished(){

```

```
}
```

## problem-simple.cpp

```
#include "problem.hpp"
#include <cmath>
#include <vector>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <sys/stat.h>
#include <sys/types.h>
#include "problem.hpp"
#include <cmath>
using namespace std;
double Pt0(double x,double y){
    return sin(M_PI*x)*sin(M_PI*y);
}
double Vxt0(double x,double y){
    return 0;
}
double Vyt0(double x,double y){
    return 0;
}
double F(double x, double y, double t){
    return 0;
}
double Csq(double x,double y){
    return 1;
}
double Sigma_x(double x){
    return 0;
}
double P(double x,double y,double t){
    return cos(M_PI*M_SQRT2*t)*sin(M_PI*x)*sin(M_PI*y);
}
void init(){
    cerr << "Test_1" <<endl;
}
typedef std::vector<std::vector<double>> grid;
double max_diff = 0;
int M = 10000; // Time
int N = 100; // X Y
double Time = 1.0;
void output_layer(int m,double t, const grid &P1,const grid &Vx,const grid
    &Vy){
    double dt = 1.0/M;
    double dx = 1.0/N;
    double dy = dx;
    for(int j=0;j<N;j++){
        for(int i=0;i<N;i++){
            double diff = fabs(P1[i][j] - P(i*dx,j*dy,t) );
            max_diff = fmax(max_diff,diff);
        }
    }
    //std::cout <<std::endl<<std::endl;
    //if(m%100==0)
    //    fprintf(stderr,"[%d/%d] max_diff = %lf\033[0K\r",m,M,max_diff);
}
void finished(){
    printf("max_diff=%lf\n",max_diff);
}
```

## problem-analytic.cpp

```

#include "problem.hpp"
#include <cmath>
#include <vector>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <sys/stat.h>
#include <sys/types.h>
#include "problem.hpp"
#include <cmath>
using namespace std;
double Pt0(double x,double y){
    return sin(M_PI*x)*sin(M_PI*y);
}
double Vxt0(double x,double y){
    return 0;
}
double Vyt0(double x,double y){
    return 0;
}
double F(double x, double y, double t){
    return 0;
}
double Csq(double x,double y){
    return 1;
}
double Sigma_x(double x){
    return 0;
}
double P(double x,double y,double t){
    return cos(M_PI*M_SQRT2*t)*sin(M_PI*x)*sin(M_PI*y);
}
void init(){
    cerr << "Test_1" <<endl;
    int dir_status = mkdir("data", S_IRWXU | S_IRWXG | S_IROTH | S_IXOTH);
    if(dir_status != 0 && errno != EEXIST){
        cerr << "Failed to create data directory" <<endl;
        exit(1);
    }
}
typedef std::vector<std::vector<double>> grid;
double max_diff = 0;
int M = 10000; // Time
int N = 100; // X Y
double Time = 1.0;
void output_layer(int m,double t, const grid &P1,const grid &Vx,const grid
    &Vy){
    double dt = 1.0/M;
    double dx = 1.0/N;
    double dy = dx;
    for(int j=0;j<N;j++){
        for(int i=0;i<N;i++){
            double diff = fabs(P1[i][j] - P(i*dx,j*dy,t) );
            max_diff = fmax(max_diff,diff);
        }
    }
    //std::cout <<std::endl<<std::endl;
    int T=100;
    int print_T = 5*T;
    if(m%T)
        return;
    char fname[128];
    snprintf(fname,128, "data/%04d.pgm",m/T);
    if(m%print_T==0)

```

```

        fprintf(stderr, "[%d/%d] Computing image %s\033[0K\r", m/T, M/T, fname);
        std::ofstream data_stream(fname);
        if(!data_stream.is_open()){
            cerr << "\nCan't open data file" << endl;
            exit(1);
        }
        data_stream << "P5" << endl;
        data_stream << N << ' ' << N << endl;
        data_stream << 255 << endl;
        for(int j=0; j<N; j++){
            for(int i=0; i<N; i++){
                char byte = fmax(fmin(((P1[i][j]+1)/2)*255, 255), 0);
                data_stream << byte;
            }
        }
        //std::cout << std::endl << std::endl;
        data_stream.close();
        //if(m%100==0)
        //    fprintf(stderr, "[%d/%d] max_diff = %lf\033[0K\r", m, M, max_diff);
    }
    void finished(){
        printf("max_diff = %lf\n", max_diff);
    }
}

```

## ПЛАН-ГРАФИК

### выполнения курсовой работы

обучающегося Яковлева О. В.

Наименование этапа работ	Трудоемкость выполнения, час.	Процент к общей трудоемкости выполнения	Срок предъявления консультанту
Получение и согласование задания	0,3	0,8	28 неделя
Знакомство с литературой по теме курсовой работы	2,7	7,5	29 неделя
Вывод уравнений для неотражающего PML слоя	4,5	12,5	30 неделя
Разработка программы для численного решения волнового уравнения	9,5	26,39	32 неделя
Срание результата работы программы с аналитическим решением	3,6	10,0	34 неделя
Проведение расчетов и анализ результатов вычислительных экспериментов	8,4	23.33	36 неделя
Составление и оформление пояснительной записки и подготовка к защите	2,7	7,5	37 неделя
Защита	0,3	0,8	38 неделя
Итого	36	100	-