Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100										
90										
80										
70										
60										
50										
40										
30										
20										
10										
0										

ИНТЕГРАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе по дисциплине

«Методы оптимизации»

3952.337208.000 ПЗ

Группа МКН-416	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Яковлев О. В.			
Консультант	Ямилева А. М.			
Принял	Лукащук В.О.			

Уфа 2023

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Методы оптимизации»

Студент: Яковлев Олег Витальевич Группа: МКН-416

Консультант: Ямилева Альфия Маратовна

1. Тема курсовой работы

Интегральное моделирование волнового поля на поверхности наблюдений.

2. Основное содержание

2.1. Изучить метод моделирования распространения волнового поля при помощи демиграции Кирхгофа
2.2. Разработать программу для численного решения уравнения Гельмгольца.
2.3. Проанализировать поведение волны на границах сред с различной акустической плотностью.
2.4. Оформить пояснительную записку к курсовой работе.

3. Требования к оформлению материалов работы

3.1. Требования к оформлению пояснительной записки

Пояснительная записка к курсовой работе должна быть оформлена в соответствии с требованиями ГОСТ и содержать

- титульный лист,
- задание на курсовую работу,
- содержание,
- введение,

- заключение,
- список литературы,
- приложение, содержащее листинг разработанной программы, если таковая имеется.

Дата выдачи задания   Дата окончания работы

"__" ________ 202_ г.   "__" __________ 202_ г.

Консультант ___________________ Ямилева А. М.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

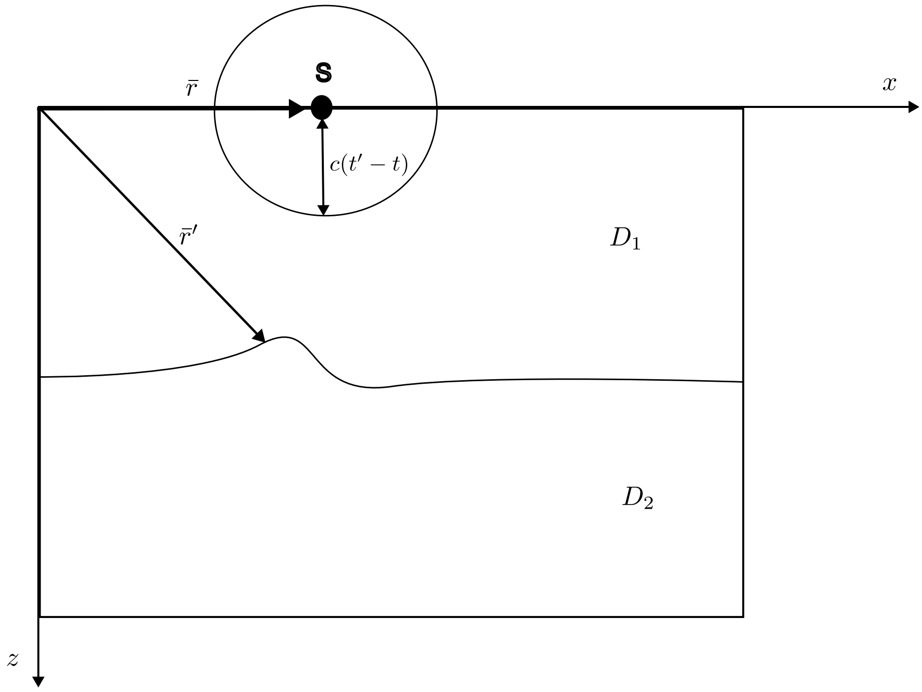

Рис. 1 – Модель среды

Рассмотрим задачу нахождения значения скалярного волнового поля на поверхности наблюдения. Допустим задана поверхность, ограничивающая некоторую область пространства $D = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$, изображённую на рисунке 1. Область пространства D разделена на слои D_1 и D_2, с постоянной скоростью звука c_1 и c_2 соответственно. На границе находятся точечные источники колебаний S, которые возбуждают акустическую волну.

Необходимо по данным характеристикам источников найти значение отражённого волнового поля на поверхности наблюдения $z = 0$.

2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Конечно, решение данной задачи можно получить при помощи решения дифференциального волнового уравнения 1.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -F(x, y, z, t) \tag{1}$$

Однако, для волнового уравнения с произвольной правой частью $F(x, y, z, t)$ можно записать формулу представления решения в аналитическом виде при помощи функции Грина, введя вектор $\bar{r} = (x, y, z)$.

$$P(\bar{r}', t') = \iiint\limits_{D_1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\bar{r}, t) G(\bar{r}', t' | \bar{r}, t)\, dt\, dv \tag{2}$$

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Рассмотрим мгновенный точечный источник колебаний в трёхмерном пространстве. Тогда правая часть уравнения 1 будет иметь вид [1]

$$F(x, y, z, t) = \delta(t - t')\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \tag{3}$$

Где $\delta(x)$ – это дельта-функция Дирака.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Решением уравнения 1 с правой частью 3 является функция Грина для волнового уравнения в трёхмерном пространстве.

Пусть источник колебаний находится в начале координат и время импульса $t' = 0$.

Так как правая часть уравнения равна 0 везде, кроме точки $O(0, 0, 0)$, поэтому G удовлетворяет уравнению 5 всюду, кроме начала координат

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Учитывая сферическую симметрию функции Грина, перейдём в уравнении 5 к сферической системе координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Воспользовавшись равенством $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG)$ преобразуем уравнение 6:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rG) = 0. \tag{7}$$

Таким образом мы смогли свести уравнение к одномерному волновому уравнению относительно $F(r, t) = rG$. При помощи замены переменных $\xi = t - \frac{r}{c}, \eta = t + \frac{r}{c}$ к простому виду:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}F = 0 \tag{8}$$

Интегрируя уравнение 8, выразим значение функции Грина из решения дифференциального уравнения:

$$G(x, y, z, t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}g\left(t + \frac{r}{c}\right), \tag{9}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Первое слагаемое выражения 9 описывает сферическую волну, распространяющуюся от начала координат в бесконечность., а второе слагаемое – сферическую волну из бесконечности к началу координат. Поскольку, по условиям задачи, источником колебания является единственный источник, то функцию g примем равной нулю. Чтобы найти функцию f подставим решение 9 в уравнение 1.

$$\Delta\left[\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]=-\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{10}$$

Используя равенство $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, можно привести уравнение 10 к виду

$$-4\pi f(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t), \tag{11}$$

откуда можно выразить значение функции Грина:

$$G(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right), \tag{12}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

При выводе формулы 12 использовалось предположение, что источник находится в начале координат и посылает импульс в момент времени $t'=0$. При переходе к произвольному положению источника формула для функции Грина имеет вид

$$G(\bar{r}',t'|\bar{r},t)=\frac{1}{4\pi|\bar{r}'-\bar{r}|}\delta\left(t'-t-\frac{|\bar{r}'-\bar{r}|}{c}\right) \tag{13}$$

Такая функция Грина называется запаздывающей функцией Грина, так как эффект, наблюдаемый в точке $\bar{r}'$ в более поздний момент времени t' вызывается возмущением, которое произошло в точке $\bar{r}$ в более ранний момент времени t.

4. ФОРМУЛА КИРХГОФА

Для вычисления значения отражённого волнового поля на поверхности наблюдения необходимо рассмотреть как связано значение поля на отражающей границе и значения поля в других точках области, которую ограничивает эта поверхность.

Рассмотрим некоторую ограниченную область пространства D, в пределах которой задано скалярное волновое поле, удовлетворяющее уравнению 14. Положим, что граница S области D является кусочно-гладкой.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0. \tag{14}$$

Так как область D ограничена и имеет кусочно-гладкую границу, тогда по теореме Остроградского-Гаусса справедливо соотношение

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dv = \iint_S F \cdot n \, ds \tag{15}$$

Для любых гладких функций u и v справедливо соотношение

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v. \tag{16}$$

Симметрично можно записать:

$$\operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) = v\Delta u + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u. \tag{17}$$

Путём вычитания из уравнения 16 уравнения 17 получим

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) = u\Delta v - v\Delta u \tag{18}$$

Положим

$$u(x, y, z, t) = \ P(x, y, z, t), \tag{19}$$
$$v(x, y, z, t) = \ G(x, y, z, t), \tag{20}$$

тогда

$$\Delta u = \ \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial P}{\partial t}, \tag{21}$$
$$\Delta v = \ \delta(r' - r)\delta(t' - t) + \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2 G(r'-r, t'-t)}{\partial t^2}. \tag{22}$$

Проинтегрируем уравнение 18 по времени

$$\operatorname{div} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [P \operatorname{grad} G - G \operatorname{grad} P] \, dt = P\delta(r - r') + \frac{1}{c^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[P \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right] dt. \tag{23}$$

Интегрированием по частям можно показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[P \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right] dt = 0.$$

Введём обозначение

$$F(x, y, z, t') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [P \operatorname{grad} G - G \operatorname{grad} P] \, dt$$

Тогда из уравнений 23 и 15 следует

$$\iiint\limits_{D} P\delta(r - r')\, dv = \iint\limits_{S} F \cdot n\, ds \tag{24}$$

Таким образом,

$$P(r', t') = \iint\limits_{\partial D} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [G(r', t'|r, t)\partial_n P(r, t) - P(r, t)\partial_n G(r', t'|r, t)]\, dt\, ds \tag{25}$$

Это соотношение носит название интегральной формулы Кирхгофа. Интегральная формула Кирхгофа показывает, как можно восстановить волновое поле внутри области, ограниченной некоторой поверхностью, по значениям этого поля (и его нормальной производной) на границе области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сейсмическая и электромагнитная миграция / M. S. Zhdanov [и др.]. — 1988.

ПЛАН-ГРАФИК

выполнения курсовой работы

обучающегося Яковлева О.В.

Наименование этапа работ	Трудоемкость выполнения, час.	Процент к общей трудоемкости выполнения	Срок предъявления консультанту
Получение и согласование задания	0,3	0,8	4 неделя
Знакомство с литературой по теме курсовой работы	2,7	7,5	5 неделя
Вывод матричного уравнения моделирования по Кирхгофу	7	19,44	6 неделя
Разработка программы для численного моделирования	12	33,33	8 неделя
Проведение вычислительных экспериментов	7	19,44	11 неделя
Анализ результатов вычислительных экспериментов	4	11,11	12 неделя
Составление и оформление пояснительной записки и подготовка к защите	2,7	7,5	13 неделя
Защита	0,3	0,8	14 неделя
Итого	36	100	-