Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100										
90										
80										
70										
60										
50										
40										
30										
20										
10										
0										

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЕЖЕННОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе по дисциплине

«Численные методы»

3952.335213.000 ПЗ

Группа МКН-316	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Яковлев О.В.			
Консультант	Маякова С.А.			
Принял	Лукащук В.О.			

Уфа 2022

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Численные методы»

Студент: Яковлев Олег Витальевич Группа: МКН-316

Консультант: Маякова Светлана Алексеевна

1. Тема курсовой работы

Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов.

2. Основное содержание

2.1. Изучить литературу по теме "Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов"
2.2. Разработать программу для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямого и итерационного методов.
2.3. Сравненить зависимость производительности программы при решении СЛАУ от размера матрицы для каждого из методов.
2.4. Оформить пояснительную записку к курсовой работе.

3. Требования к оформлению материалов работы

3.1. Требования к оформлению пояснительной записки

Пояснительная записка к курсовой работе должна быть оформлена в соответствии с требованиями ГОСТ и содержать

- титульный лист,
- задание на курсовую работу,
- содержание,
- введение,
- заключение,
- список литературы,
- приложение, содержащее листинг разработанной программы, если таковая имеется.

Дата выдачи задания   Дата окончания работы

"__" ________ 202_ г.   "__" __________ 202_ г.

Консультант __________________ Маякова С.А.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники и вызванный этим процессом переход к более сложным (трехмерным, в произвольных геометрических областях) моделям в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных и их дискретным аналогам на неструктурированных сетках, привел к необходимости решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами нерегулярной структуры.

Целью данной курсовой работы является изучение способов решения СЛАУ с разреженной матрицей. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Изучить литературу по теме "Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов"

2. Разработать программу для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямых и итерационных методов.

3. Сравнение производительности программы при решении СЛАУ для каждого из методов.

1. ХРАНЕНИЕ И ОБРАБОТКА РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

Распространенным способом хранения несимметричных разряженных матриц произвольной структуры является CSR. В нем разреженная матрица A хранится с использованием следующих массивов:

- `value`, который содержит значения всех ненулевых элементов матрицы.
- `cols`, который содержит номера столбцов, в которых стоит каждый ненулевой элемент.
- `rows`, который содержит индекс начала строки в массивах `values` и `cols`.

Умножение матрицы, хранимой в таком формате, реализуется с помощью перебора элементов массива `values`, которые умножаются на элементы вектора x с индексом из соответствующего элемента массива `cols`.[2]

2. РЕШЕНИЕ СЛАУ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА LU-РАЗЛОЖЕНИЯ

LU-разложение – это представление матрицы A в виде произведения двух матриц, $A = LU$, где $L = (l_{ij})$ – нижняя треугольная матрица, а $U = (u_{ij})$ – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Элементы l_{ij}, $u_{i,j}$ определим из условия

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

где матрицы L и U имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Перемножив матрицы, получаем формулы для элементов матриц L и U.

$$
\begin{aligned}
l_{i1} &= a_{i1} \\
u_{1i} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}} \\
l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} && i \geq j > 1 \\
u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) && 1 < i < j
\end{aligned}
$$

Далее, СЛАУ можно представить в виде $LUx = b$. Решить систему можно разделив ее на две системы, имеющие треугольные матрицы.

$$
\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}
$$

Эти системы можно решить с помощью процедур прямого и обратного хода.[3]

3. МЕТОД БИСОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Системы векторов $\{x\}_{i=1}^{m}$ и $\{y\}_{i=1}^{m}$ называются биортогональными, если скалярное произведение (x_i, y_i) обращается в ноль при $i \neq j$.

Пусть векторы v_1 и w_1 таковы, что $(v1, w1) \neq 0$ и пусть системы векторов $\{y\}_{i=1}^{m}$ и $\{w\}_{i=1}^{m}$ определяются соотношениями:

$$
\begin{aligned}
v_{i+1} &= Av_i - \alpha_i v_i - \beta_i v_{i-1} && v_0 = 0 \\
w_{i+1} &= A^T w_i - \alpha_i w_i - \beta_i w_{i-1} && w_0 = 0 \\
\alpha_i &= \frac{(Av_i, w_i)}{(v_i, w_i)} \\
\beta_i &= \frac{(v_i, w_i)}{(v_{i-1}, w_{i-1})} && \beta_1 = 0
\end{aligned}
$$

тогда системы $\{y\}_{i=1}^{m}$ и $\{w\}_{i=1}^{m}$ биортогональны и каждая из них линейно независима и образует базис в $K_m(v_1, A)$ и $K_m(w_1, A^T)$ соответственно.

Аналогично методу полной ортогонализации решение системы будет уточняться по формуле

$$
x_m = x_0 + \beta V_m T_m^{-1} e_1
$$

запишем LU-разложение для матрицы T_m

$$
T_m = L_m U_m
$$

Пусть $P_m = V_m U_m^{-1}$. Тогда x_m имеет вид

$$x_m = x_0 + \beta P_m L_m^{-1} e_1$$

Аналогично определим $\bar{P}_m$

$$\bar{P}_m = W_m (L_m^T)^{-1}$$

Тогда имеет место

$$\bar{P}_m^T A P_m = I_m D_m$$

где $D_m = (d_{ii}) = (v_i, w_i)$.

Таким образом, можно составить алгоритм 1 решения СЛАУ с помощью метода бисопряженных градиентов. [1]

Algorithm 1 Метод бисопряженных градиентов

Выбрать начальное приближение x_0
$r_0 \leftarrow b - Ax_0$
Выбрать вектор $\tilde{r}_0$, такой что $(r_0, \tilde{r_0}) \neq 0$
$p_0 \leftarrow r_0$
$\tilde{p}_0 \leftarrow \tilde{r}_0$
Цикл j=1,2,. . . **выполнять**
  $\alpha_j \leftarrow \frac{(r_j, \tilde{r}_j)}{(Ap_j, \tilde{p}_j)}$
  $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$
  $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$
  $\tilde{r}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_j - \alpha_j A^T \tilde{p}_j$
  $\beta_j \leftarrow \frac{(r_{j+1}, \tilde{r}_{j+1})}{(r_j, \tilde{r}_j)}$
  $p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_j p_j$
  $\tilde{p}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_{j+1} + \beta_j \tilde{p}_j$
Конец цикла

При решении СЛАУ с помощью итерационных методов, необходимо также знать достаточные условия сходимости данных методов. Одним из таких условий может быть диагональное преобладание матрицы системы.

4. ГЕНЕРАЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

Сперва для элементов матрицы, не лежащих на главной диагонали, генерируются случайные действительные числа из интервала $[-1; 1]$. Далее считается сумма модулей этих элементов.

$$a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Значение этой суммы является значением элемента на главной диагонали данной строки матрицы.

Далее необходимо сделать матрицу симметричной. Для этого элементам, расположенным ниже главной диагонали присваиваем те же значения, что и у соответствующих элементов выше главной диагонали.

$$a_{ij} := a_{ji} \quad j < i$$

5. АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ.

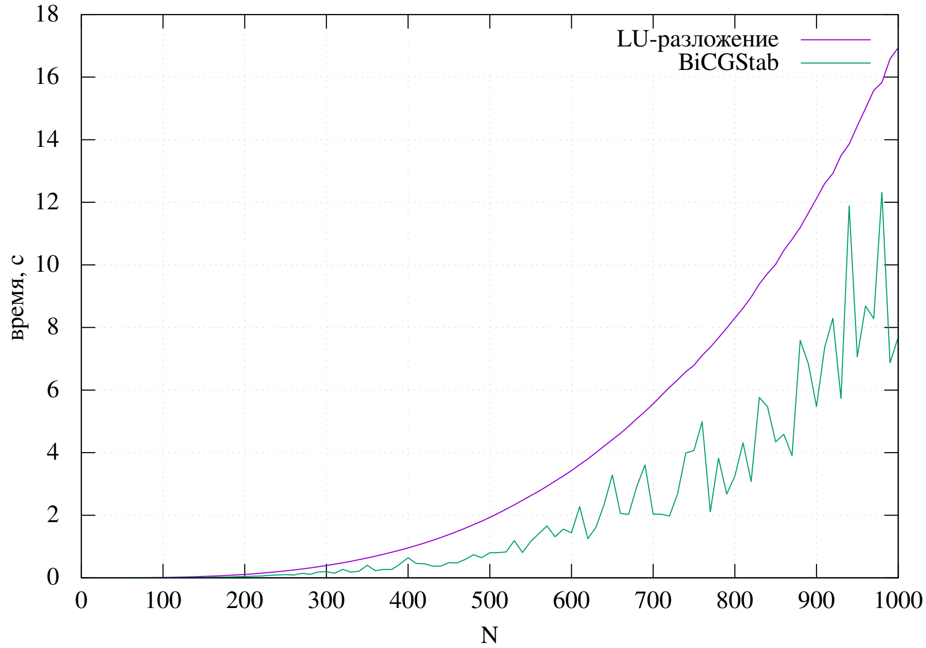

Рис. 1: Зависимость времени выполнения программы от размера матрицы.

При решении СЛАУ малой размерности ($N \approx 10$), прямые могут оказаться быстрее. Однако, при решении СЛАУ с матрицей больших размерностей, эффективны итерационные методы.

На рисунке 1 изображен график зависимости времени решения СЛАУ с разреженной матрицей (матрица заполнена на 20%, $\varepsilon = 10^{-5}$) при помощи прямого метода LU-разложения матрицы системы и при помощи итерационного стабилизированного метода бисопряженных градиентов(BiCGStab). График показывает, что скорость сходимости итерационного метода сильно зависит от коэффициентов матрицы системы. Поэтому решение систем с матрицей, обладающих сильным диагональным преобладанием происходит приблизительно в 2 раза быстрее. Время решения СЛАУ с помощью метода LU-разложения не зависит от диагонального преобладания матрицы системы.

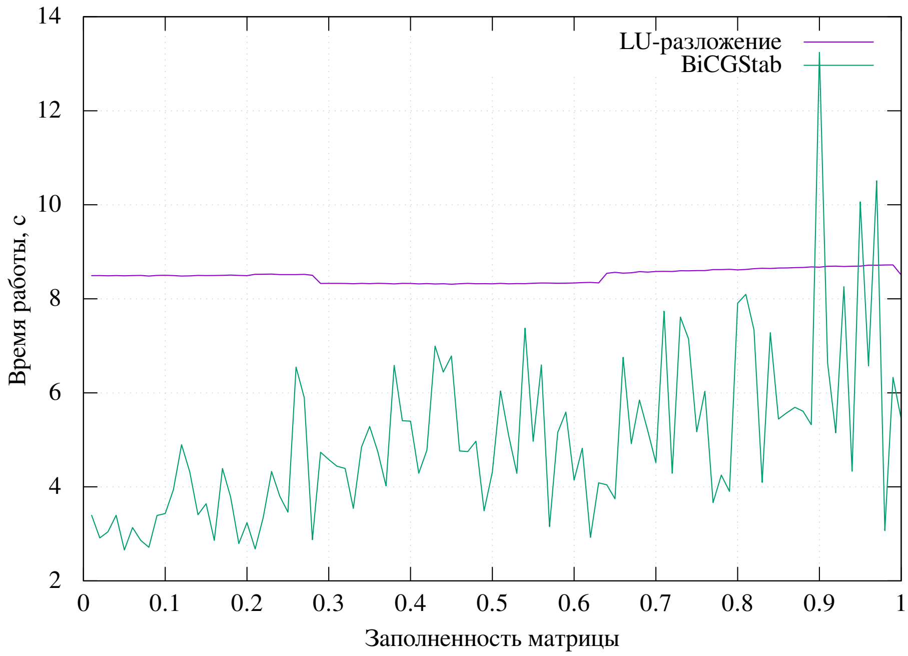

Рис. 2: Зависимость времени выполнения программы от заполненности матрицы.

Также время решения системы может зависеть от разреженности матрицы. На рисунке 2 изображен график зависимости времени решения СЛАУ($N = 800$, $\varepsilon = 10^{-5}$) методами LU-разложения и BiCGStab от заполненности матрицы(отношения количества ненулевых коэффициентов матрицы к общему их количеству). На графике видно, что при увеличении заполненности время решения СЛАУ с помощью итерационного метода тоже увеличивается. Поэтому для систем небольшой размерности с плотно заполненной матрицей можно применять прямые методы решения СЛАУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — Second. — SIAM, 2003. — ISBN 978-0-89871-534-7. — URL: `https://www-users.cse.umn.edu/~saad/IterMethBook_2ndEd.pdf`.
2. *Баландин М. Ю.*, *Шурина Э. П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. — 70 с.
3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М. : Издательство «Наука», 1978.