

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Уфимский университет науки и технологий»**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100										
90										
80										
70										
60										
50										
40										
30										
20										
10										
0										

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С**  
**РАЗРЕЖЕННОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

к курсовой работе по дисциплине

«Численные методы»

**3952.335213.000 ПЗ**

Группа МКН-316	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Яковлев О.В.			
Консультант	Маякова С.А.			
Принял	Лукашук В.О.			

Уфа 2022

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

## **ЗАДАНИЕ**

на курсовую работу по дисциплине

**«Численные методы»**

Студент: Яковлев Олег Витальевич

Группа: МКН-316

Консультант: Маякова Светлана Алексеевна

### **1. Тема курсовой работы**

Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов.

### **2. Основное содержание**

2.1. Изучить литературу по теме "Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов"

2.2. Разработать программу для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямого и итерационного методов.

2.3. Сравнить зависимость производительности программы при решении СЛАУ от размера матрицы для каждого из методов.

2.4. Оформить пояснительную записку к курсовой работе.

### **3. Требования к оформлению материалов работы**

3.1. Требования к оформлению пояснительной записки

Пояснительная записка к курсовой работе должна быть оформлена в соответствии с требованиями ГОСТ и содержать

- титульный лист,
- задание на курсовую работу,
- содержание,
- введение,
- заключение,
- список литературы,
- приложение, содержащее листинг разработанной программы, если таковая имеется.

Дата выдачи задания

"\_\_" \_\_\_\_\_ 202\_\_ г.

Дата окончания работы

"\_\_" \_\_\_\_\_ 202\_\_ г.

Консультант \_\_\_\_\_ Маякова С.А.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	5
1. Хранение и обработка разреженных матриц . . . . .	6
2. Решение СЛАУ при помощи метода LU-разложения . . . . .	6
3. Метод бисопряженных градиентов . . . . .	7
4. Генерация симметричной матрицы с диагональным преобладанием	8
5. Результаты . . . . .	9
5.1. Разработка структуры классов программной реализации . . . .	9
5.2. Анализ производительности программной реализации. . . . .	9
Заключение . . . . .	11
Список литературы . . . . .	12

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники и вызванный этим процессом переход к более сложным (трехмерным, в произвольных геометрических областях) моделям в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных и их дискретным аналогам на неструктурированных сетках, привел к необходимости решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами нерегулярной структуры.

Целью данной курсовой работы является изучение способов решения СЛАУ с разреженной матрицей. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Изучить литературу по теме "Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов"
2. Разработать программу для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямых и итерационных методов.
3. Сравнить производительности программы при решении СЛАУ для каждого из методов.

## 1. ХРАНЕНИЕ И ОБРАБОТКА РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

Распространенным способом хранения несимметричных разреженных матриц произвольной структуры является CSR. В нем разреженная матрица  $A$  хранится с использованием следующих массивов:

- `value`, который содержит значения всех ненулевых элементов матрицы.
- `cols`, который содержит номера столбцов, в которых стоит каждый ненулевой элемент.
- `rows`, который содержит индекс начала строки в массивах `values` и `cols`.

Умножение матрицы, хранимой в таком формате, реализуется с помощью перебора элементов массива `values`, которые умножаются на элементы вектора  $x$  с индексом из соответствующего элемента массива `cols`. [2]

## 2. РЕШЕНИЕ СЛАУ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА LU-РАЗЛОЖЕНИЯ

LU-разложение – это представление матрицы  $A$  в виде произведения двух матриц,  $A = LU$ , где  $L = (l_{ij})$  – нижняя треугольная матрица, а  $U = (u_{ij})$  – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Элементы  $l_{ij}$ ,  $u_{ij}$  определим из условия

$$\sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

где матрицы  $L$  и  $U$  имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Перемножив матрицы, получаем формулы для элементов матриц  $L$  и  $U$ .

$$\begin{aligned}
 l_{i1} &= a_{i1} \\
 u_{1i} &= \frac{a_{1i}}{l_{11}} \\
 l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} & i \geq j > 1 \\
 u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) & 1 < i < j
 \end{aligned}$$

Далее, СЛАУ можно представить в виде  $LUx = b$ . Решить систему можно разделив ее на две системы, имеющие треугольные матрицы.

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Эти системы можно решить с помощью процедур прямого и обратного хода.[3]

### 3. МЕТОД БИСОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Системы векторов  $\{x\}_{i=1}^m$  и  $\{y\}_{i=1}^m$  называются биортогональными, если скалярное произведение  $(x_i, y_i)$  обращается в ноль при  $i \neq j$ .

Пусть векторы  $v_1$  и  $w_1$  таковы, что  $(v_1, w_1) \neq 0$  и пусть системы векторов  $\{y\}_{i=1}^m$  и  $\{w\}_{i=1}^m$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
 v_{i+1} &= Av_i - \alpha_i v_i - \beta_i v_{i-1} & v_0 &= 0 \\
 w_{i+1} &= A^T w_i - \alpha_i w_i - \beta_i w_{i-1} & w_0 &= 0 \\
 \alpha_i &= \frac{(Av_i, w_i)}{(v_i, w_i)} \\
 \beta_i &= \frac{(v_i, w_i)}{(v_{i-1}, w_{i-1})} & \beta_1 &= 0
 \end{aligned}$$

тогда системы  $\{y\}_{i=1}^m$  и  $\{w\}_{i=1}^m$  биортогональны и каждая из них линейно независима и образует базис в  $K_m(v_1, A)$  и  $K_m(w_1, A^T)$  соответственно.

Аналогично методу полной ортогонализации решение системы будет уточняться по формуле

$$x_m = x_0 + \beta V_m T_m^{-1} e_1$$

запишем LU-разложение для матрицы  $T_m$

$$T_m = L_m U_m$$

Пусть  $P_m = V_m U_m^{-1}$ . Тогда  $x_m$  имеет вид

$$x_m = x_0 + \beta P_m L_m^{-1} e_1$$

Аналогично определим  $\bar{P}_m$

$$\bar{P}_m = W_m (L_m^T)^{-1}$$

Тогда имеет место

$$\bar{P}_m^T A P_m = I_m D_m$$

где  $D_m = (d_{ii}) = (v_i, w_i)$ .

Таким образом, можно составить алгоритм 1 решения СЛАУ с помощью метода бисопряженных градиентов. [1]

---

**Algorithm 1** Метод бисопряженных градиентов

---

Выбрать начальное приближение  $x_0$

$$r_0 \leftarrow b - Ax_0$$

Выбрать вектор  $\tilde{r}_0$ , такой что  $(r_0, \tilde{r}_0) \neq 0$

$$p_0 \leftarrow r_0$$

$$\tilde{p}_0 \leftarrow \tilde{r}_0$$

**Цикл  $j=1, 2, \dots$  выполнять**

$$\alpha_j \leftarrow \frac{(r_j, \tilde{r}_j)}{(Ap_j, \tilde{p}_j)}$$

$$x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$$

$$r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$$

$$\tilde{r}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_j - \alpha_j A^T \tilde{p}_j$$

$$\beta_j \leftarrow \frac{(r_{j+1}, \tilde{r}_{j+1})}{(r_j, \tilde{r}_j)}$$

$$p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_j p_j$$

$$\tilde{p}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_{j+1} + \beta_j \tilde{p}_j$$

**Конец цикла**

---

При решении СЛАУ с помощью итерационных методов, необходимо также знать достаточные условия сходимости данных методов. Одним из таких условий может быть диагональное преобладание матрицы системы.

#### 4. ГЕНЕРАЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

Сперва для элементов матрицы, не лежащих на главной диагонали, генерируются случайные действительные числа из интервала  $[-1; 1]$ . Далее считается сумма модулей этих элементов.

$$a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$



Значение этой суммы является значением элемента на главной диагонали данной строки матрицы.

Далее необходимо сделать матрицу симметричной. Для этого элементам, расположенным ниже главной диагонали присваиваем те же значения, что и у соответствующих элементов выше главной диагонали.

$$a_{ij} := a_{ji} \quad j < i$$

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 5.1. Разработка структуры классов программной реализации

В ходе выполнения курсовой работы была разработан класс `compressed_matrix` для работы с разреженными матрицами.

### 5.2. Анализ производительности программной реализации.

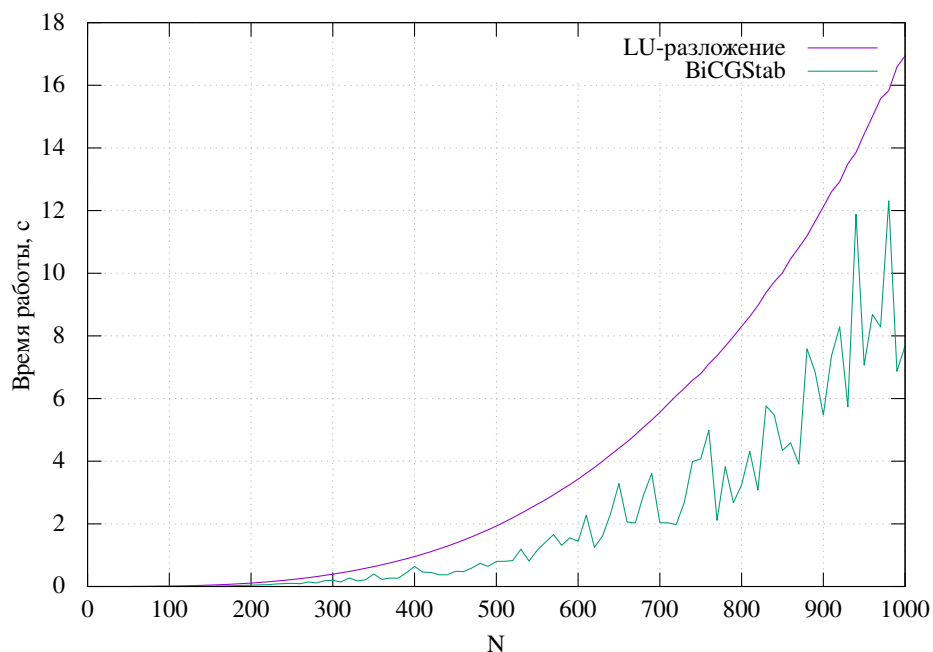


Рис. 1: Зависимость времени выполнения программы от размера матрицы.

При решении СЛАУ малой размерности ( $N \approx 10$ ), прямые могут оказаться быстрее. Однако, при решении СЛАУ с матрицей больших размерностей, эффективны итерационные методы.

На рисунке 1 изображен график зависимости времени решения СЛАУ с разреженной матрицей (матрица заполнена на 20%,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ) при помощи прямого метода LU-разложения матрицы системы и при помощи итерационного стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab). График показывает, что скорость сходимости итерацион-

ного метода сильно зависит от коэффициентов матрицы системы. Поэтому решение систем с матрицей, обладающих сильным диагональным преобладанием происходит приблизительно в 2 раза быстрее. Время решения СЛАУ с помощью метода LU-разложения не зависит от диагонального преобладания матрицы системы.

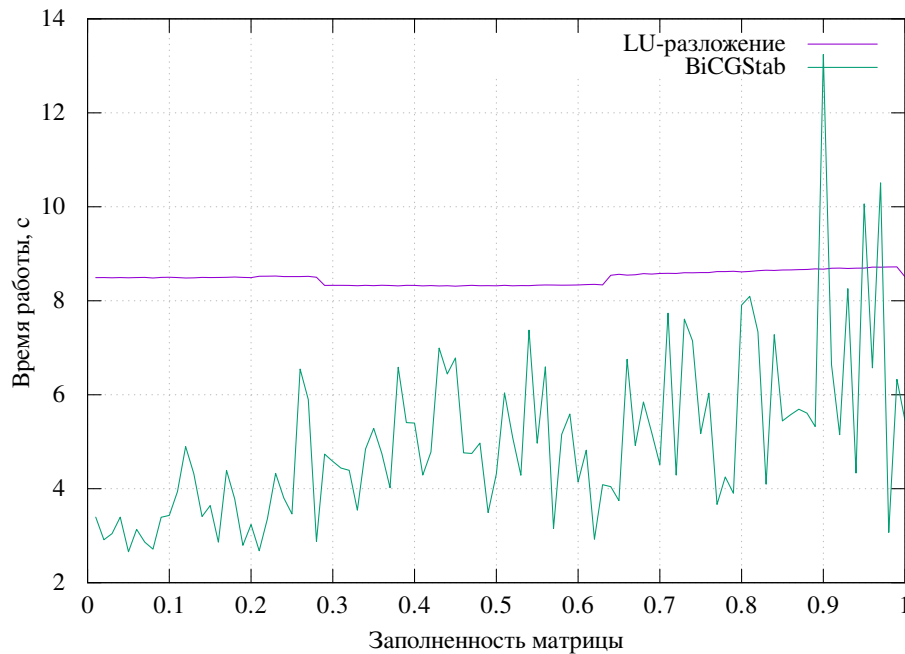


Рис. 2: Зависимость времени выполнения программы от заполненности матрицы.

Также время решения системы может зависеть от разреженности матрицы. На рисунке 2 изображен график зависимости времени решения СЛАУ( $N = 800$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ) методами LU-разложения и BiCGStab от заполненности матрицы(отношения количества ненулевых коэффициентов матрицы к общему их количеству). На графике видно, что при увеличении заполненности время решения СЛАУ с помощью итерационного метода тоже увеличивается. Поэтому для систем небольшой размерности с плотно заполненной матрицей можно применять прямые методы решения СЛАУ.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В ходе выполнения курсовой работы была изучена литература по теме «Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов». Далее была разработана программа для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямых и итерационных методов. Наконец было произведено сравнение производительности программы при решении СЛАУ для каждого из методов. Таким образом были изучены способы решения СЛАУ с разреженной матрицей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — Second. — SIAM, 2003. — ISBN 978-0-89871-534-7. — URL: [https://www-users.cse.umn.edu/~saad/IterMethBook\\_2ndEd.pdf](https://www-users.cse.umn.edu/~saad/IterMethBook_2ndEd.pdf).
2. *Баландин М. Ю., Шурина Э. П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. — 70 с.
3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М. : Издательство «Наука», 1978.