СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники и вызванный этим процессом переход к более сложным (трехмерным, в произвольных геометрических областях) моделям в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных и их дискретным аналогам на неструктурированных сетках, привел к необходимости решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами нерегулярной структуры.

Целью данной курсовой работы является изучение способов решения СЛАУ с разреженной матрицей. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Изучить литературу по теме

2. Разработать программу для решения СЛАУ с разреженной матрицей.

1. ХРАНЕНИЕ И ОБРАБОТКА РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

Распространенным способом хранения несимметричных разряженных матриц произвольной структуры является CSR. В нем разреженная матрица A хранится с использованием следующих массивов:

- `value`, который содержит значения всех ненулевых элементов матрицы.
- `cols`, который содержит номера столбцов, в которых стоит каждый ненулевой элемент.
- `rows`, который содержит индекс начала строки в массивах `values` и `cols`.

Умножение матрицы, хранимой в таком формате, реализуется с помощью перебора элементов массива `values`, которые умножаются на элементы вектора x с индексом из соответствующего элемента массива `cols`.

2. РЕШЕНИЕ СЛАУ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА LU-РАЗЛОЖЕНИЯ

LU-разложение – это представление матрицы A в виде произведения двух матриц, $A = LU$, где $L = (l_{ij})$ – нижняя треугольная матрица, а $U = (u_{ij})$ – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Элементы l_{ij}, $u_{i,j}$ определим из условия

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = a_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

где матрицы L и U имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Перемножив матрицы, получаем формулы для элементов матриц L и U.

$$\begin{aligned}
l_{i1} &= a_{i1} \\
u_{1i} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}} \\
l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} && i \geq j > 1 \\
u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right) && 1 < i < j
\end{aligned}$$

Далее, СЛАУ можно представить в виде $LUx = b$. Решить систему можно разделив ее на две системы, имеющие треугольные матрицы.

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Эти системы можно решить с помощью процедур прямого и обратного хода.

3. МЕТОД БИСОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Системы векторов $\{x\}_{i=1}^{m}$ и $\{y\}_{i=1}^{m}$ называются биортогональными, если скалярное произведение (x_i, y_i) обращается в ноль при $i \neq j$.

Пусть векторы v_1 и w_1 таковы, что $(v1, w1) \neq 0$ и пусть системы векторов $\{y\}_{i=1}^{m}$ и $\{w\}_{i=1}^{m}$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
v_{i+1} &= Av_i - \alpha_i v_i - \beta_i v_{i-1} && v_0 = 0 \\
w_{i+1} &= A^T w_i - \alpha_i w_i - \beta_i w_{i-1} && w_0 = 0 \\
\alpha_i &= \frac{(Av_i, w_i)}{(v_i, w_i)} \\
\beta_i &= \frac{(v_i, w_i)}{(v_{i-1}, w_{i-1})} && \beta_1 = 0
\end{aligned}$$

тогда системы $\{y\}_{i=1}^{m}$ и $\{w\}_{i=1}^{m}$ биортогональны и каждая из них линейно независима и образует базис в $K_m(v_1, A)$ и $K_m(w_1, A^T)$ соответственно.

Аналогично методу полной ортогонализации решение системы будет уточняться по формуле

$$x_m = x_0 + \beta V_m T_m^{-1} e_1$$

запишем LU-разложение для матрицы T_m

$$T_m = L_m U_m$$

Пусть $P_m = V_m U_m^{-1}$. Тогда x_m имеет вид

$$x_m = x_0 + \beta P_m L_m^{-1} e_1$$

Аналогично определим $\bar{P}_m$

$$\bar{P}_m = W_m (L_m^T)^{-1}$$

Тогда имеет место

$$\bar{P}_m^T A P_m = I_m D_m$$

где $D_m = (d_{ii}) = (v_i, w_i)$.

Таким образом, имеет место алгоритм

Выбрать начальное приближение x_0
$r_0 \leftarrow b - Ax_0$
Выбрать вектор $\tilde{r}_0$, такой что $(r_0, \tilde{r}_0) \neq 0$
$p_0 \leftarrow r_0$
$\tilde{p}_0 \leftarrow \tilde{r}_0$
Цикл j=1,2,... **выполнять**
    $\alpha_j \leftarrow \frac{(r_j, \tilde{r}_j)}{(Ap_j, \tilde{p}_j)}$
    $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$
    $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$
    $\tilde{r}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_j - \alpha_j A^T \tilde{p}_j$
    $\beta_j \leftarrow \frac{(r_{j+1}, \tilde{r}_{j+1})}{(r_j, \tilde{r}_j)}$
    $p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_j p_j$
    $\tilde{p}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_{j+1} + \beta_j \tilde{p}_j$
Конец цикла

---

4. ГЕНЕРАЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

Сперва для элементов матрицы, не лежащих на главной диагонали, генерируются случайные действительные числа из интервала $[-1; 1]$. Далее считается сумма модулей этих элементов.

$$a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Значение этой суммы является значением элемента на главной диагонали данной строки матрицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ