Министерство науки и высшего образования РФ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100										
90										
80										
70										
60										
50										
40										
30										
20										
10										
0										

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЕЖЕННОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе по дисциплине

«Численные методы»

3952.335213.000 ПЗ

Группа	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
MKH-316				
Студент	Яковлев О.В.			
Консультант	Маякова С.А.			
Принял	Лукащук В.О.			

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Численные методы»

Студент: Яковлев Олег Витальевич Группа: МКН-316

Консультант: Маякова Светлана Алексеевна

1. Тема курсовой работы

Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов.

2. Основное содержание

- 2.1. Изучить литературу по теме "Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов"
- 2.2. Разработать программу для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямого и итерационного методов.
- 2.3. Сравненить зависимость производительности программы при решении СЛАУ от размера матрицы для каждого из методов.
- 2.4. Оформить пояснительную записку к курсовой работе.

3. Требования к оформлению материалов работы

3.1. Требования к оформлению пояснительной записки

Пояснительная	записка	К	курсовой	работе	должна	быть	оформлена	В
соответствии с тре	бованиям	ΙИ	ГОСТ и со,	держать				

- титульный лист,
- задание на курсовую работу,
- содержание,
- введение,
- заключение,
- список литературы,
- приложение, содержащее листинг разработанной программы, если таковая имеется.

Дата выдач	и задания	Дата окончания работы				
""	202_ г.	""202_ г.				
Консультант		Маякова С.А.				

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Хранение и обработка разреженных матриц	6
2. Решение СЛАУ при помощи метода LU-разложения	6
3. Метод бисопряженных градиентов	7
4. Генерация симметричной матрицы с диагональным преобладанием	8
5. Результаты	9
5.1. Разработка структуры классов программной реализации	9
5.2. Анализ производительности программной реализации	9
Заключение	12
Список литературы	13
Приложение А	14

ВВЕДЕНИЕ

Часто в процессе решения дифференциальных уравнений возникает задача решения системы линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей обладающей диагональным преобладанием. Развитие вычислительной техники и вызванный этим процессом переход к более сложным (трехмерным, в произвольных геометрических областях) моделям в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных, привел к необходимости решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений.

Целью данной курсовой работы является изучение способов решения СЛАУ с разреженной матрицей. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

- 1. Изучить литературу по теме "Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов"
- 2. Разработать программу для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямых и итерационных методов.
- 3. Сравнить производительности программы при решении СЛАУ для каждого из методов.

1. ХРАНЕНИЕ И ОБРАБОТКА РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

Распространенным способом хранения несимметричных разряженных матриц произвольной структуры является CSR. В нем разреженная матрица A хранится с использованием следующих массивов:

- value, который содержит значения всех ненулевых элементов матрииы.
- cols, который содержит номера столбцов, в которых стоит каждый ненулевой элемент.
- rows, который содержит индекс начала строки в массивах values и cols.

Умножение матрицы, хранимой в таком формате, реализуется с помощью перебора элементов массива values, которые умножаются на элементы вектора x с индексом из соответствующего элемента массива cols.[2]

2. РЕШЕНИЕ СЛАУ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА LU-РАЗЛОЖЕНИЯ

LU-разложение — это представление матрицы A в виде произведения двух матриц, A = LU, где $L = (l_{ij})$ — нижняя треугольная матрица, а $U = (u_{ij})$ — верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Элементы l_{ij} , $u_{i,j}$ определим из условия

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

где матрицы L и U имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Перемножив матрицы, получаем формулы для элементов матриц L и U.

$$l_{i1} = a_{i1}$$

$$u_{1i} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$i \ge j > 1$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right)$$

$$1 < i < j$$

Далее, СЛАУ можно представить в виде LUx = b. Решить систему можно разделив ее на две системы, имеющие треугольные матрицы.

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Эти системы можно решить с помощью процедур прямого и обратного хода.[3]

3. МЕТОД БИСОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Системы векторов $\{x\}_{i=1}^m$ и $\{y\}_{i=1}^m$ называются биортогональными, если скалярное произведение (x_i, y_i) обращается в ноль при $i \neq j$.

Пусть векторы v_1 и w_1 таковы, что $(v_1, w_1) \neq 0$ и пусть системы векторов $\{y\}_{i=1}^m$ и $\{w\}_{i=1}^m$ определяются соотношениями:

$$v_{i+1} = Av_i - \alpha_i v_i - \beta_i v_{i-1}$$

$$v_0 = 0$$

$$w_{i+1} = A^T w_i - \alpha_i w_i - \beta_i w_{i-1}$$

$$w_0 = 0$$

$$\alpha_i = \frac{(Av_i, w_i)}{(v_i, w_i)}$$

$$\beta_i = \frac{(v_i, w_i)}{(v_{i-1}, w_{i-1})}$$

$$\beta_1 = 0$$

тогда системы $\{y\}_{i=1}^m$ и $\{w\}_{i=1}^m$ биортогональны и каждая из них линейно независима и образует базис в $K_m(v_1,A)$ и $K_m(w_1,A^T)$ соответственно.

Аналогично методу полной ортогонализации решение системы будет уточняться по формуле

$$x_m = x_0 + \beta V_m T_m^{-1} e_1$$

запишем LU-разложение для матрицы T_m

$$T_m = L_m U_m$$

Пусть $P_m = V_m U_m^{-1}$. Тогда x_m имеет вид

$$x_m = x_0 + \beta P_m L_m^{-1} e_1$$

Аналогично определим \bar{P}_m

$$\bar{P}_m = W_m (L_m^T)^{-1}$$

Тогда имеет место

$$\bar{P}_m^T A P_m = I_m D_m$$

где
$$D_m = (d_{ii}) = (v_i, w_i)$$
.

Таким образом, можно составить алгоритм 1 решения СЛАУ с помощью метода бисопряженных градиентов. [1]

Algorithm 1 Метод бисопряженных градиентов

Выбрать начальное приближение x_0

$$r_0 \leftarrow b - Ax_0$$

Выбрать вектор \tilde{r}_0 , такой что $(r_0, \tilde{r}_0) \neq 0$

$$p_0 \leftarrow r_0$$

$$\tilde{p}_0 \leftarrow \tilde{r}_0$$

Цикл
$$j=1,2,...$$
 выполнять

$$\alpha_{j} \leftarrow \frac{(r_{j},\tilde{r}_{j})}{(Ap_{j},\tilde{p}_{j})}$$

$$x_{j+1} \leftarrow x_{j} + \alpha_{j}p_{j}$$

$$r_{j+1} \leftarrow r_{j} - \alpha_{j}Ap_{j}$$

$$\tilde{r}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_{j} - \alpha_{j}A^{T}\tilde{p}_{j}$$

$$\beta_{j} \leftarrow \frac{(r_{j+1},\tilde{r}_{j+1})}{(r_{j},\tilde{r}_{j})}$$

$$p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_{j}p_{j}$$

$$\tilde{p}_{j+1} \leftarrow \tilde{r}_{j+1} + \beta_{j}\tilde{p}_{j}$$

Конец цикла

При решении СЛАУ с помощью итерационных методов, необходимо также знать достаточные условия сходимости данных методов. Одним из таких условий может быть диагональное преобладание матрицы системы.

ГЕНЕРАЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ С 4. ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

Сперва для элементов матрицы, не лежащих на главной диагонали, генерируются случайные действительные числа из интервала [-1; 1]. Далее считается сумма модулей этих элементов.

$$a_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Значение этой суммы является значением элемента на главной диагонали данной строки матрицы.

Далее необходимо сделать матрицу симметричной. Для этого элементам, расположенным ниже главной диагонали присваиваем те же значения, что и у соответствующих элементов выше главной диагонали.

$$a_{ij} := a_{ji} \quad j < i$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Разработка структуры классов программной реализации

В ходе выполнения курсовой работы был разработан класс для работы с разреженными матрицами compressed_matrix. Класс реализует описанный ранее способ хранения разреженной матрицы CSR и методы для работы с разреженными матрицами:

- LU_decomposition LU-разложение матрицы
- solve_L прямой ход метода Гаусса для решения СЛАУ с нижней треугольной матрицей
- solve_U обратный ход метода Гаусса для решения СЛАУ с верхней треугольной матрицей
- solve_BiCGStab решение СЛАУ с помощью метода бисопряженных градиентов
- check проверяет, что вектор решения удовлетворяет СЛАУ.

5.2. Анализ производительности программной реализации.

При решении СЛАУ малой размерности ($N \approx 10$), прямые могут оказаться быстрее. Однако, при решении СЛАУ с матрицей больших размерностей, эффективны итерационные методы.

На рисунке 1 изображен график зависимости времени решения СЛАУ с разреженной матрицей (матрица заполнена на 20%, $\varepsilon=10^{-5}$) при помощи прямого метода LU-разложения матрицы системы и при помощи итерационного стабилизированного метода бисопряженных градиентов(BiCGStab). График показывает, что скорость сходимости итерационного метода сильно зависит от коэффициентов матрицы системы. Поэтому решение систем с матрицей, обладающих сильным диагональным преобладанием происходит приблизительно в 2 раза быстрее. Время решения СЛАУ с помощью метода LU-разложения не зависит от диагонального преобладания матрицы системы.

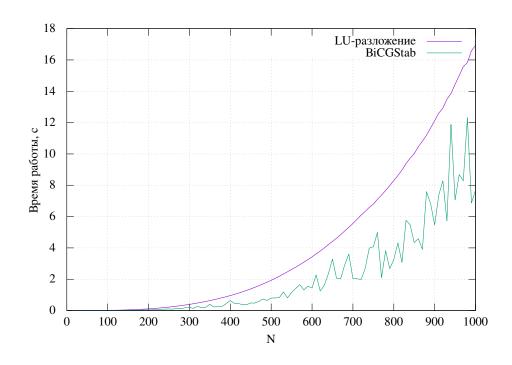


Рис. 1: Зависимость времени выполнения программы от размера матрицы.

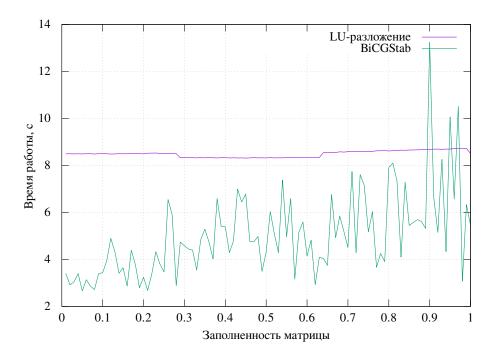


Рис. 2: Зависимость времени выполнения программы от заполненности матрицы.

Также время решения системы может зависеть от разреженности матрицы. На рисунке 2 изображен график зависимости времени решения СЛАУ($N=800,\ \varepsilon=10^{-5}$) методами LU-разложения и BiCGStab от за-

полненности матрицы(отношения количества ненулевых коэффициентов матрицы к общему их количеству). На графике видно, что при увеличении заполненности время решения СЛАУ с помощью итерационного метода тоже увеличивается. Поэтому для систем небольшой размерности с плотно заполненной матрицей можно применять прямые методы решения СЛАУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсовой работы была изучена литература по теме «Численное решение систем линейных уравнений с разреженной матрицей коэффициентов». Далее была разработана программа для решения СЛАУ с разреженной матрицей с помощью прямых и итерационных методов. Наконец было произведено сравнение производительности программы при решении СЛАУ для каждого из методов.

В ходе сравнения было показано, что при решении СЛАУ большой размерности в 2 раза большую производительность показывают итерационные методы по сравнению с прямыми методами. Время решения СЛАУ с помощью метода LU-разложения не зависит от диагонального преобладания матрицы системы. При увеличении заполненности время решения СЛАУ с помощью итерационного метода тоже увеличивается.

Таким образом были изучены способы решения СЛАУ с разреженной матрицей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Second. SIAM, 2003. ISBN 978-0-89871-534-7. URL: https://www-users.cse.umn.edu/~saad/IterMethBook_2ndEd.pdf.
- 2. *Баландин М. Ю.*, *Шурина* Э. *П*. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.
- 3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М. : Издательство «Наука», 1978.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программы

main.cpp

```
#include <fstream>
#include <iostream>
#include "compressed_matrix.hpp"
#include <ctime>
int main(){
    compressed_matrix m(5);
    compressed_matrix L(5);
    compressed_matrix U(5);
    int N = 1000;
    std::vector < double > x(N,0),y(N),b(N);
    double q = 0.20;
    m = compressed_matrix(N);
    b = std::vector < double > (N,1);
    m.generate(1338,q);
    L = compressed_matrix(N);
    U = compressed_matrix(N);
    auto lu_start = clock();
    m.LU_decomposition(L,U);
    L.solve_L(b,y);
    U.solve_U(y,x);
    auto lu_end = clock();
    std::cout << "LU_{\sqcup}time:" << (lu_end -
       lu_start*1.0)/CLOCKS_PER_SEC << std::endl;</pre>
    if (m.check(b,x))
        std::cout << "[OK] " << std::endl;
        std::cout << "[FAIL] " << std::endl;
    x = std::vector < double > (N,0);
    auto bcg_start = clock();
    double r = m.BiCGStab_solve(b,x,10000);
    auto bcg_end = clock();
    std::cout << "BiCGStab time: " << (bcg_end -
        bcg_start*1.0)/CLOCKS_PER_SEC << std::endl;</pre>
    std::cout << "Residue unorm: " << r << std::endl;
    if(m.check(b,x))
        std::cout << "[OK] " << std::endl;
        std::cout << "[FAIL] " << std::endl;
}
                             compressed_matrix.hpp
#pragma once
#include <vector>
#include <string>
class compressed_matrix{
    protected:
        std::vector<int> rows;
        std::vector<int> cols;
        std::vector<double> value;
        void set_init(int i,int j, double v);
                 void set_size(int n);
```

```
virtual double mul_sub(const compressed_matrix& other,int i,int
            j, int k);
    public:
        compressed_matrix(int n);
                void read( const std::string & filename);
        void generate(int seed, double chance=0.5);
        virtual ~compressed_matrix();
        int row_num() const;
        int elem_num() const;
        void print_matrix();
        double get(int i,int j) const ;
                \verb"void LU_decomposition" (compressed_matrix"
                    &L,compressed_matrix &U);
        void ILU_decomposition(compressed_matrix &L,compressed_matrix &U);
                void solve_L(const std::vector < double > &b,
                    std::vector<double>& y);
                void solve_U(const std::vector<double> &y,
                    std::vector < double > &x);
        \verb|std::vector<double>| operator*(const std::vector<double>| \& vec)| const ; |
        std::vector<double> T_prod(const std::vector<double>& vec)const ;
                double BiCGStab_solve(const std::vector < double > &b,
                    std::vector<double>& x,int n = 1000);
        bool check(std::vector<double> b, std::vector<double> x);
};
                            compressed_matrix.cpp
#include "compressed_matrix.hpp"
#include <limits.h>
#include <utility>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
compressed_matrix::compressed_matrix(int n){
    set_size(n);
void compressed_matrix::set_size(int n){
        rows.clear();
        rows.resize(n+1,n*n);
    rows[0] = 0;
        cols.clear();
        value.clear();
}
int compressed_matrix::elem_num()const{
    return value.size();
int compressed_matrix::row_num()const{
    return rows.size()-1;
void compressed_matrix::print_matrix(){
    std::cout << "[";
        for(int i = 0;i<row_num();i++){
                auto begin = rows[i];
                auto end = rows[i+1];
        std::cout << "[";
                 for(int j = 0; j < row_num(); j++) {
                         double a = 0;
                         if(begin<end&&begin<row_num()*row_num()&&j ==</pre>
                             cols[begin]){
                                 a = value[begin];
                                 begin++;
```

```
}
                         std::cout <<a<<", _ ";
                 std::cout <<"], " << std::endl;
    std::cout << "] ";
}
void compressed_matrix::set_init(int i, int j, double v){
    rows[i] = std::min(rows[i],(int)value.size());
        value.push_back(v);
        cols.push_back(j);
void compressed_matrix::read(const std::string &filename){
        using namespace std;
        ifstream mat_file(filename);
        int n,k;
        mat_file>> k>> n;
        set_size(k);
        for(int i=0;i<n;i++){
                int ii,jj,v;
                mat_file >> ii>>jj>>v;
                set_init(ii,jj,v);
        }
double compressed_matrix::get(int i,int j) const{
    if(rows[i]>=cols.size())
        return 0.0;
    auto it = std::lower_bound(cols.begin()+rows[i],
            cols.begin()+std::min(rows[i+1],(int)cols.size()),j);
    if(it!=cols.end()&&*it == j){
        return value[it - cols.begin()];
    return 0.0;
double compressed_matrix::mul_sub(const compressed_matrix& other,int i,int
   j, int k) {
    double sum = 0.0;
    for(int t=0;t<k;t++){
        auto a = get(i,t);
        auto b = other.get(t,j);
        sum += a*b;
    };
    return sum;
void compressed_matrix::LU_decomposition(compressed_matrix &L,
   compressed_matrix &U){
    L.set_size(row_num());
    U.set_size(row_num());
    for(int i=0;i<row_num();i++){</pre>
        for(int j=0; j < row_num(); j++) {</pre>
            if(i<=j){
                 double t = (get(i,j)-L.mul_sub(U,i,j,i));
                U.set_init(i,j,t);
                 if(i==j)
                     L.set_init(i,j,1);
                 double t = (get(i,j)-L.mul_sub(U,i,j,j))/U.get(j,j);
                L.set_init(i,j,t);
            }
       }
    }
```

```
}
void compressed_matrix::ILU_decomposition(compressed_matrix &L,
    compressed_matrix &U){
    L.set_size(row_num());
    U.set_size(row_num());
    for(int i=0;i<row_num();i++){</pre>
        bool diag = false;
        for(int r=rows[i];r<std::min(rows[i+1],(int)cols.size());r++){</pre>
             int j = cols[r];
             double v= value[r];
             if(i<=j){
                 double t = (v-L.mul_sub(U,i,j,i));
                 U.set_init(i,j,t);
                 if(!diag){
                     L.set_init(i,i,1);
                     diag = true;
                 }
            }else{
                 double t = (v-L.mul_sub(U,i,j,j))/U.get(j,j);
                 L.set_init(i,j,t);
        }
        if(!diag){
             L.set_init(i,i,1);
             diag = true;
        }
    }
}
void compressed_matrix::solve_L(const std::vector<double> &b,
    std::vector<double> &y){
    y = std::vector<double>(b);
    for(int i=0;i<row_num();i++){</pre>
        y[i]/=get(i,i);
        for(int j=i+1; j<row_num(); j++){</pre>
            y[j]-=get(j,i)*y[i];
        }
    }
}
void compressed_matrix::solve_U(const std::vector<double> &y,
    std::vector < double > &x){
    x = std::vector<double>(y);
    for(int i=row_num()-1;i>=0;i--){
        x[i]/=get(i,i);
        for(int j=i-1; j>=0; j--){
             x[j] -= get(j,i) *x[i];
        }
    }
}
std::vector<double> compressed_matrix::operator*(const std::vector<double>&
   vec)const {
    std::vector<double> res(row_num(),0);
    for(int i=0;i<res.size();i++){</pre>
        for(int j=rows[i];j<std::min(rows[i+1],(int)cols.size());j++){</pre>
            res[i]+= value[j] * vec[cols[j]];
        }
    }
    return res;
}
std::vector <double > operator + (const std::vector < double > &a, const
```

```
std::vector<double> &b){
    std::vector < double > c(a.size());
    for(int i=0;i<a.size();i++){
        c[i]=a[i]+b[i];
    }
    return c;
}
std::vector<double> operator*(double a, const std::vector<double> &b){
    std::vector<double> res(b);
    for(double &bi : res)
        bi*=a;
    return res;
}
std::vector < double > operator - (const std::vector < double > &a, const
   std::vector < double > &b) {
    std::vector<double> c(a.size());
    for(int i=0;i<a.size();i++){</pre>
        c[i]=a[i]-b[i];
    return c;
}
double operator*(const std::vector<double> &a, const std::vector<double>
   &b){
    double sum=0.0;
    for(int i=0;i<a.size();i++){
        sum+=a[i]*b[i];
    }
    return sum;
std::vector<double> operator/(std::vector<double> &a, double b){
    std::vector<double> c(a.size());
    for(int i=0;i<a.size();i++){</pre>
        c[i]=a[i]/b;
    return c;
}
double norm(const std::vector<double> &x){
    double sum = 0;
    for(double s:x)
        sum += s*s;
    return sqrt(sum);
}
std::vector<double> compressed_matrix::T_prod(const std::vector<double>
   &vec)const {
    std::vector < double > res(vec.size(),0);
    for(int i=0;i<vec.size();i++){
        for(int k =0; k < row_num(); k++) {
            res[i]+=get(k,i)*vec[k];
        }
    return res;
}
double compressed_matrix::BiCGStab_solve(const std::vector<double> &b,
   std::vector < double > & x, int m) {
    const compressed_matrix &A = *this;
    std::vector <double > r0 = b - A*x;
    std::vector<double> r0_ = r0;
    std::vector<double> p0 = r0;
    std::vector<double> p0_ = r0;
    for(int j=0; j < m; j++){
        double alpha = (r0*r0_{-})/((A*p0) * r0_{-});
```

```
std::vector<double> s = r0 - alpha * (A*p0);
        double omega = (A * s) * s/((A*s)*(A*s));
        x = x + alpha*p0 + omega * s;
        std::vector<double> r1 = s - omega * (A *s);
        double beta = (r1*r0_{-})/(r0*r0_{-})*alpha/omega;
        p0 = r1 + beta * (p0 - omega*(A*p0));
        r0 = r1;
        double rn = norm(r0);
        if(rn<1e-5){
             return rn;
    }
    return norm(r0);
}
double rnd(){
    return rand()*2.0/RAND_MAX - 1.0;
}
void compressed_matrix::generate(int seed,double chance){
    srand(seed);
    for(int i=0;i<row_num();i++){</pre>
        double sum = fabs(rnd())*10;
        for(int j=0; j < row_num(); j++) {</pre>
             if(i==j)
                 set_init(i,j,sum*2);
             else if(j<i){</pre>
                 set_init(i,j,get(j,i));
             }else{
                 if(sum > 0 & & fabs(rnd()) < chance) {</pre>
                     double val = sum*rnd();
                     sum -= fabs(val);
                     set_init(i,j,val);
                 }
            }
        }
    }
}
bool compressed_matrix::check(std::vector<double> b, std::vector<double> x){
    std::vector < double > r = (*this)*x - b;
    for(int i=0;i<r.size();i++){</pre>
        if(std::abs(r[i])>=1e-5)
             return false;
    }
    return true;
}
compressed_matrix: ~ compressed_matrix(){
}
```

ПЛАН-ГРАФИК

выполнения курсовой работы

обучающегося Яковлева О.В.

Наименование этапа работ	Трудоемкость выполнения, час.	Процент к общей трудоемкости выполнения	Срок предъявления консультанту
Получение и согласование задания	0,3	0,8	6 неделя
Знакомство с литературой по теме курсовой работы	2,7	7,5	7 неделя
Изучение способов хранения разреженных матриц	9	25	9 неделя
Изучение итерационных методов решения СЛАУ	9,5	26,389	11 неделя
Программная реализация методов решения СЛАУ с разреженной матрицей	10	27,778	13 неделя
Замер производительности и анализ результатов	7,5	20,833	15 неделя
Составление и оформление пояснительной записки и подготовка к защите	2,7	7,5	16 неделя
Защита	0,3	0,8	17 неделя
Итого	36	100	-