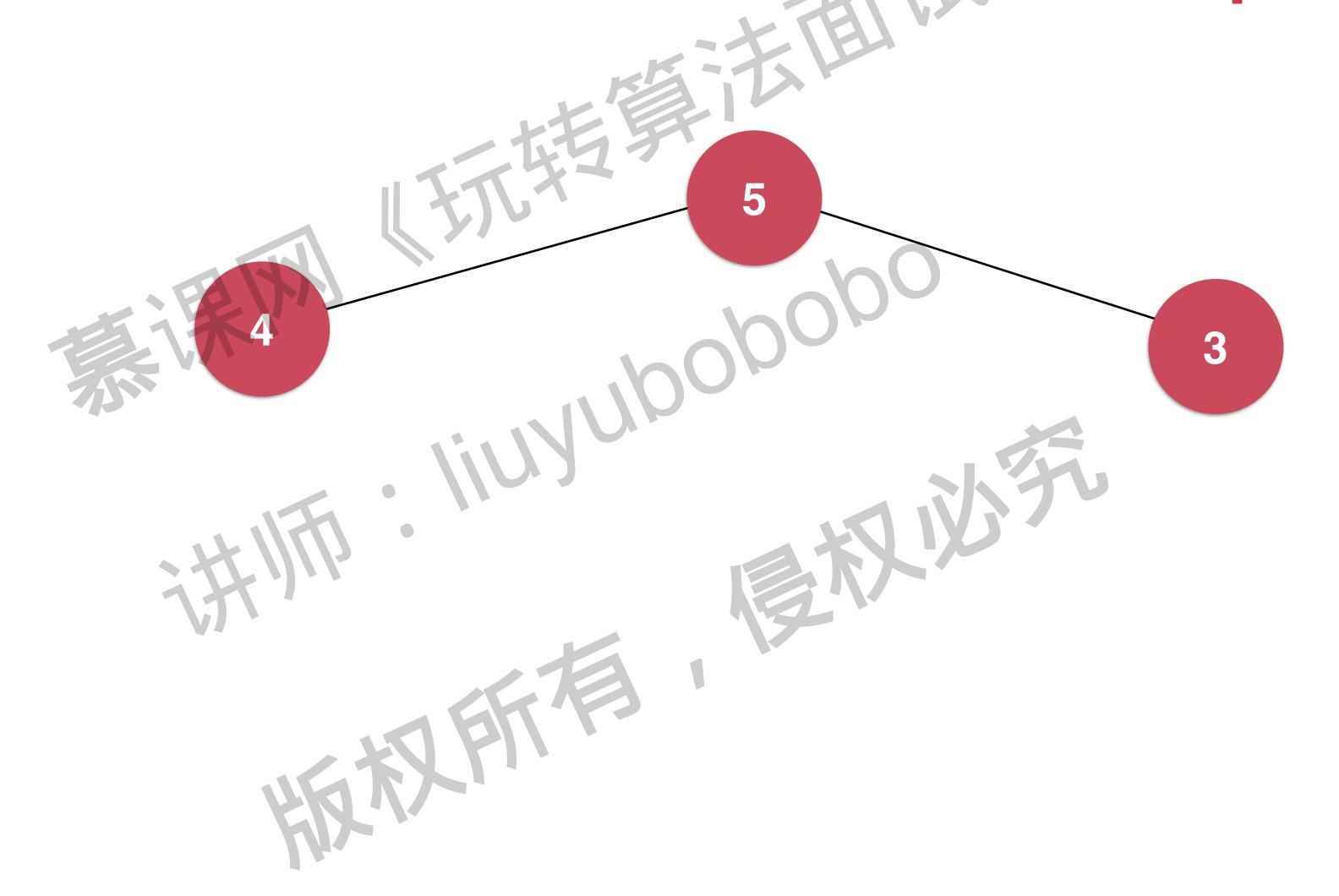
想玩儿转算法面试 liuyubobobo

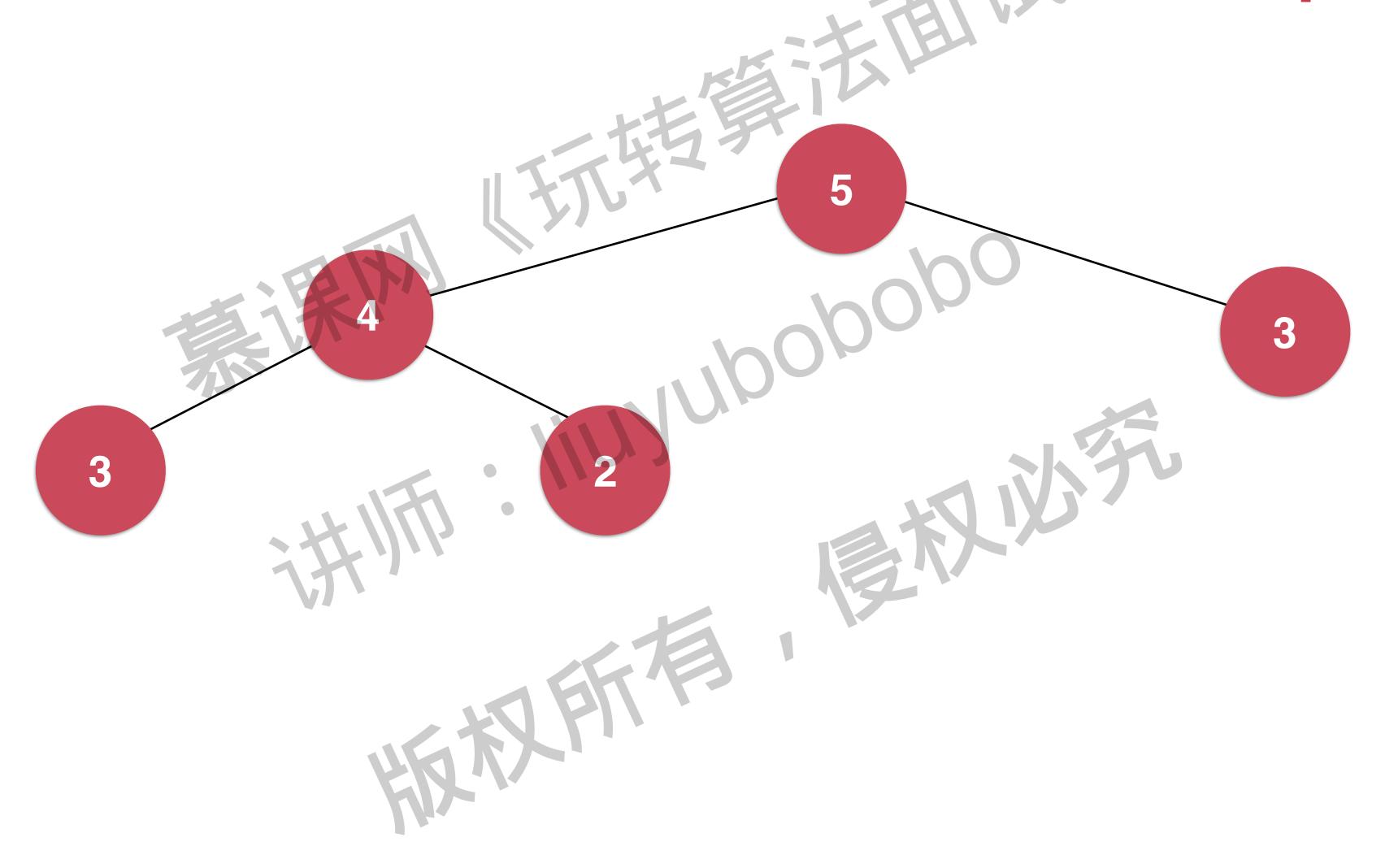
课课网《无柱 洪师。高规划统 慧·什么是动态规划? 版权所有

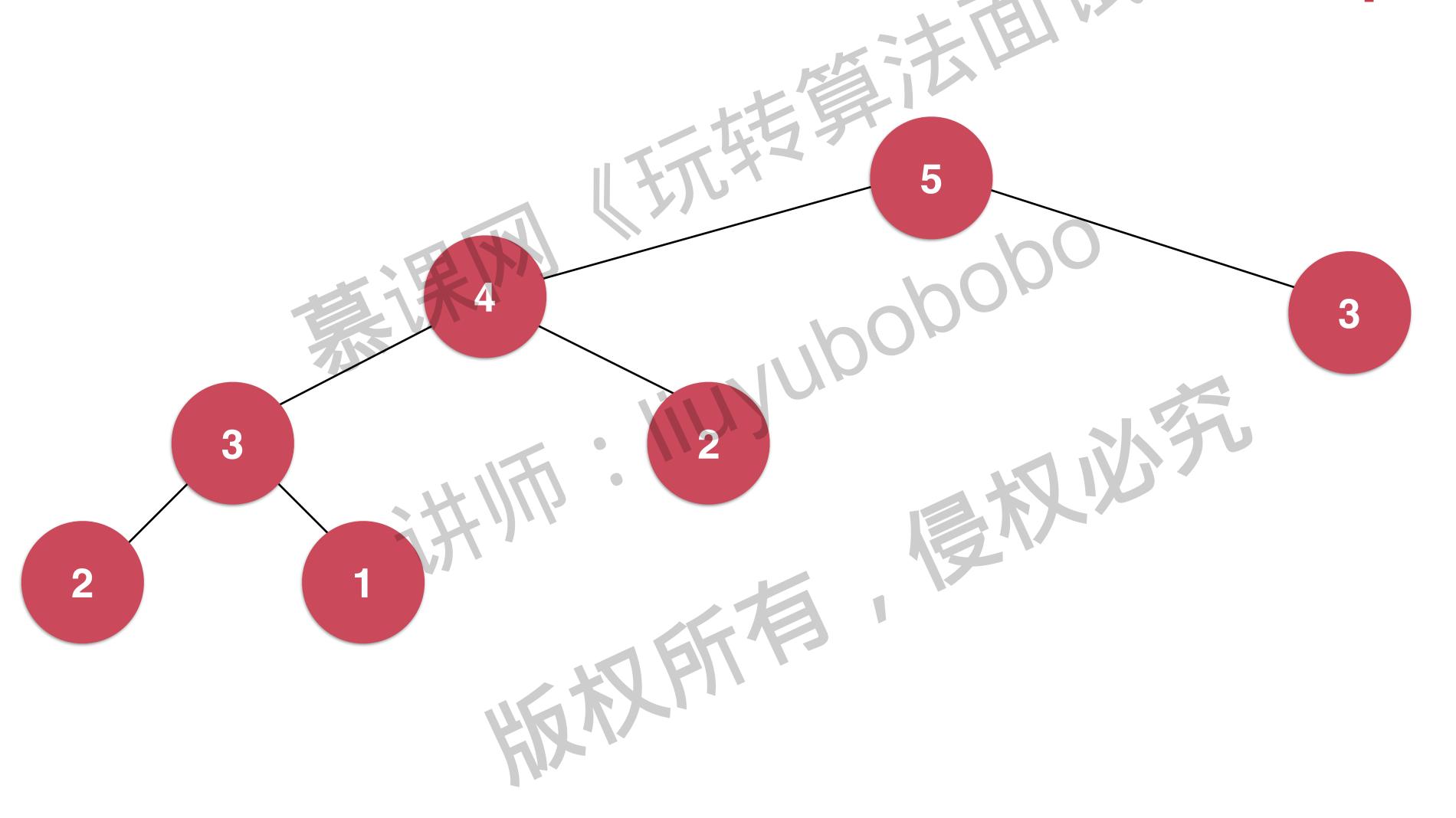
```
F(0)=1, F(1)=1, F(n)=F(n-1)+F(n-2)

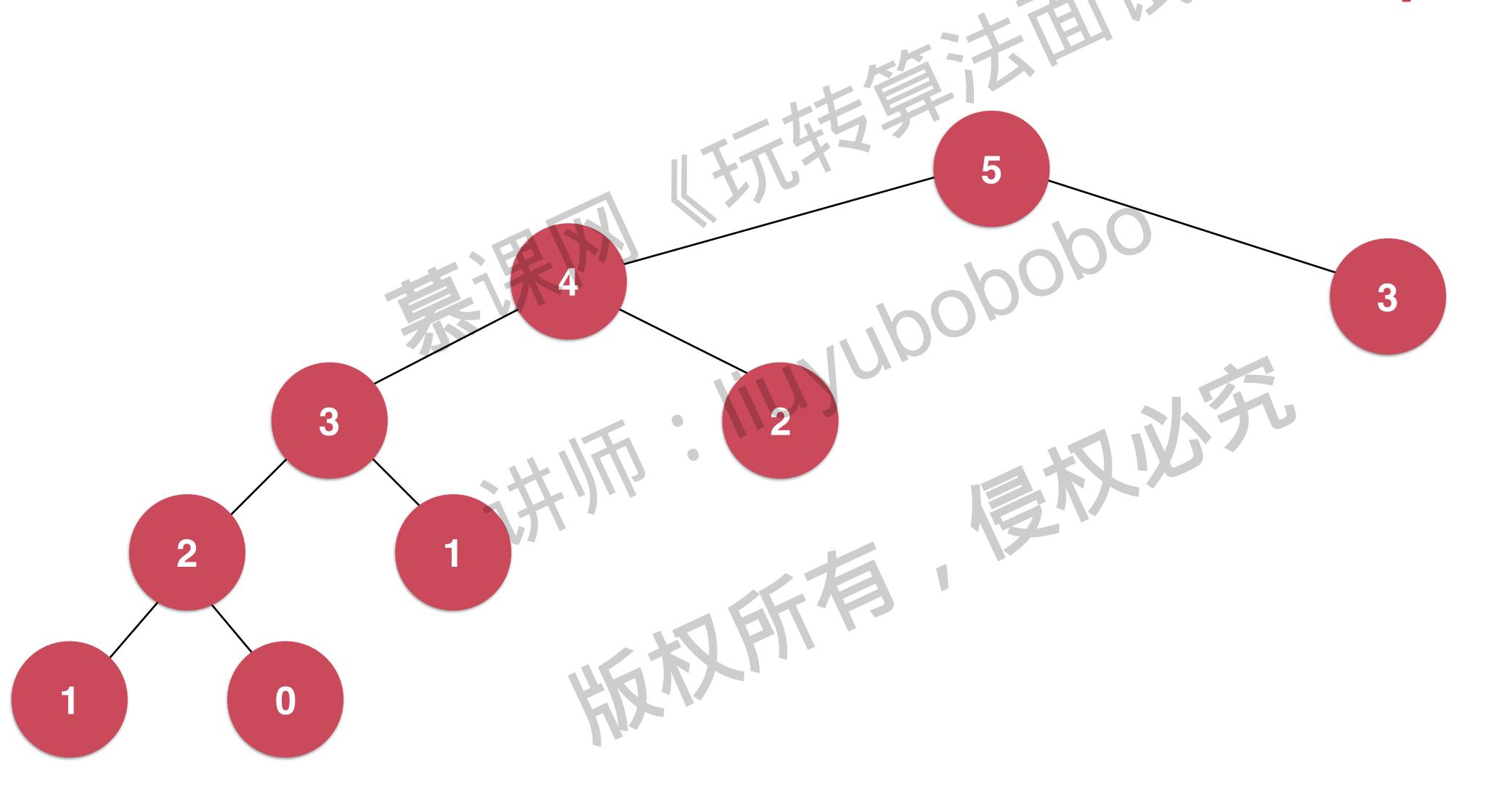
int fib( int h ){
          return fib(n-1) + fib(n-2);
```

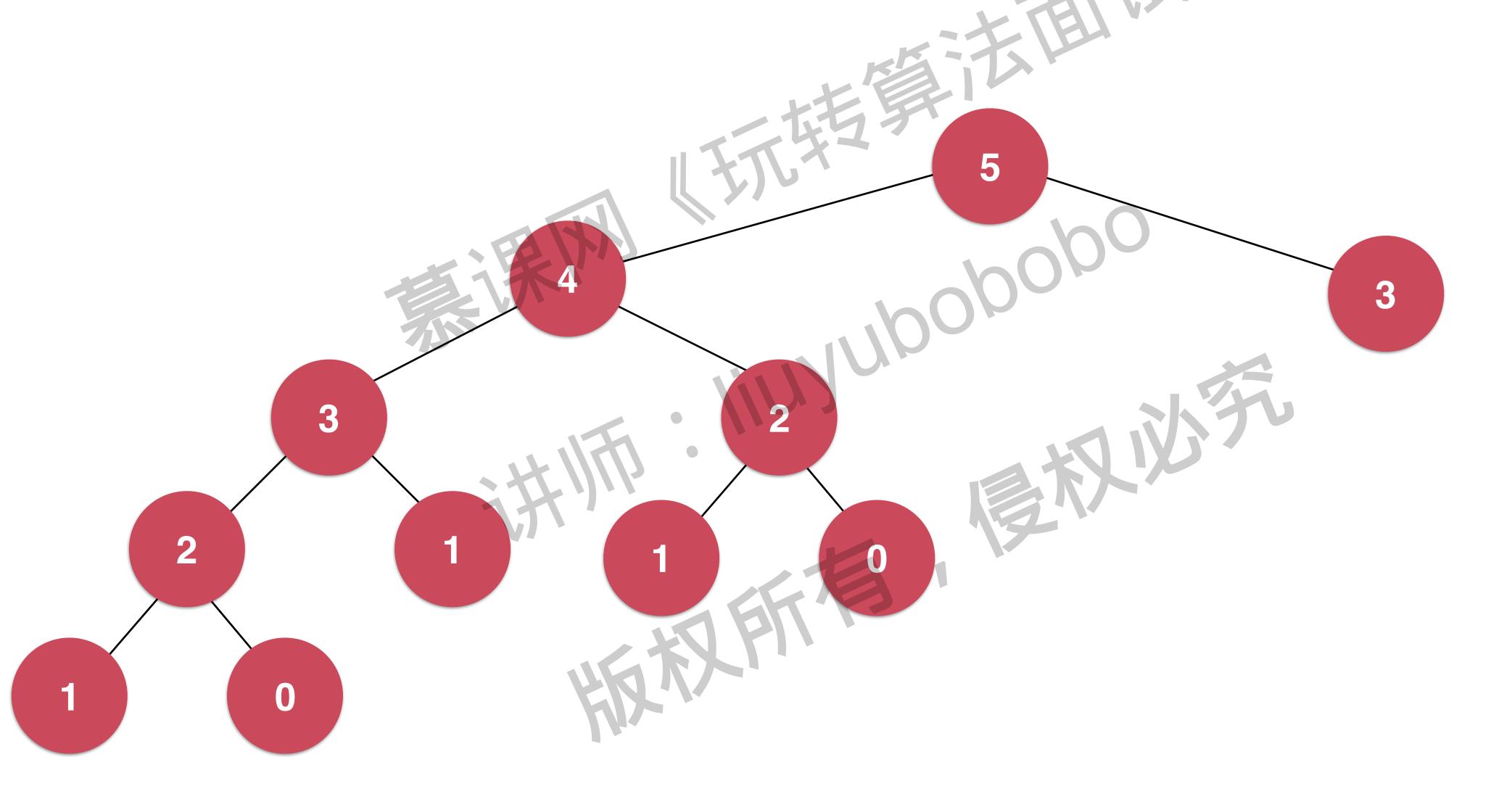
实践:递归实现fib的时间效率

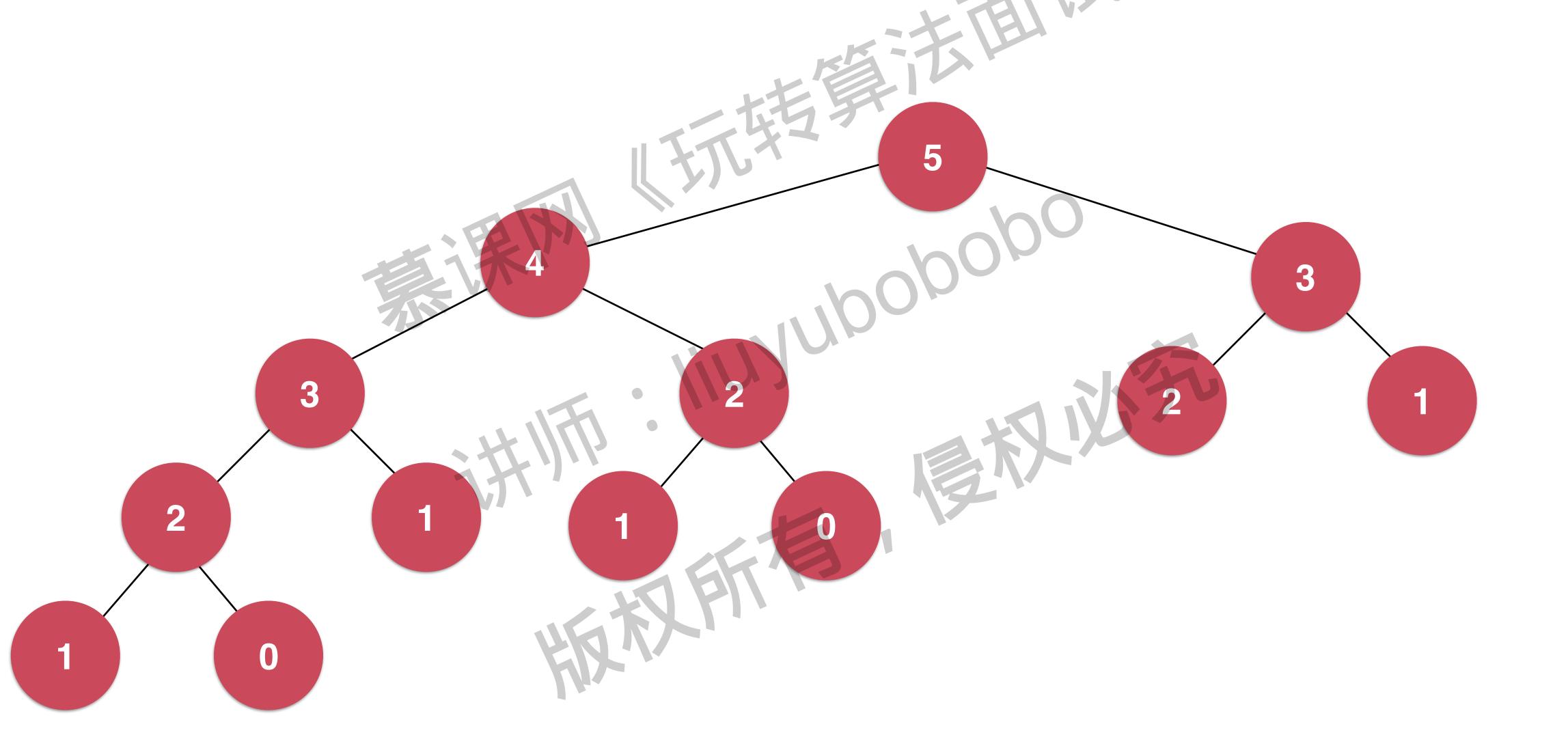


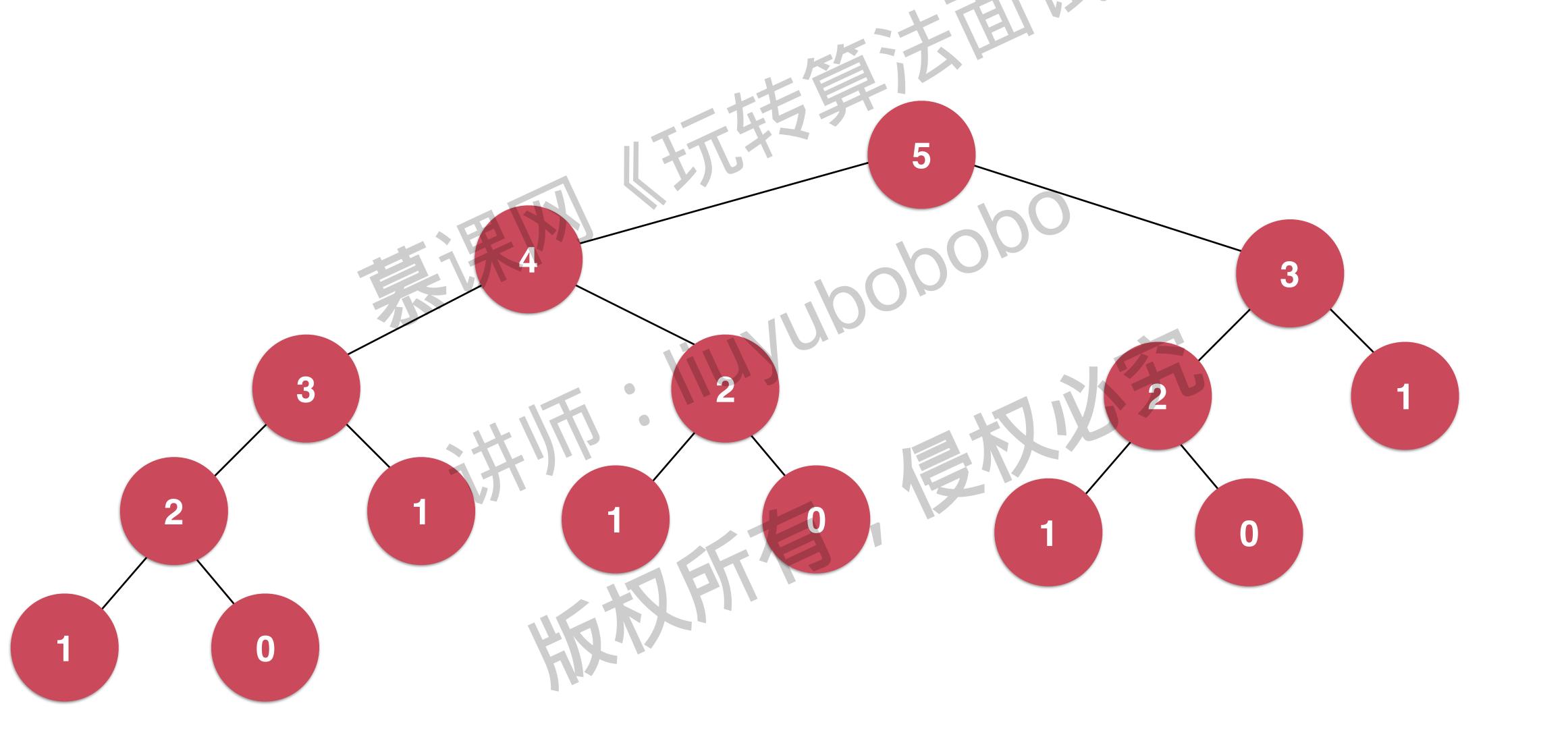


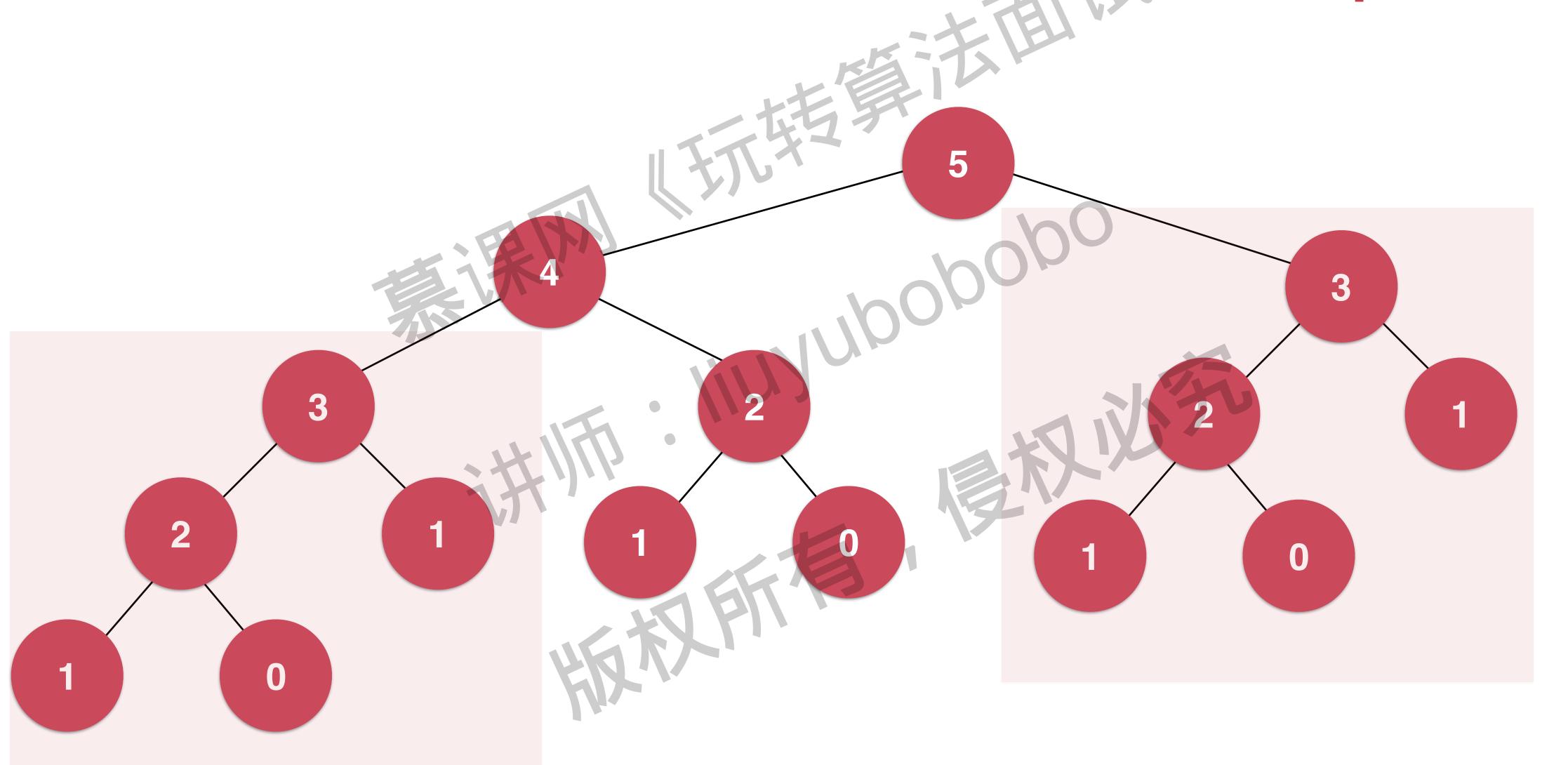


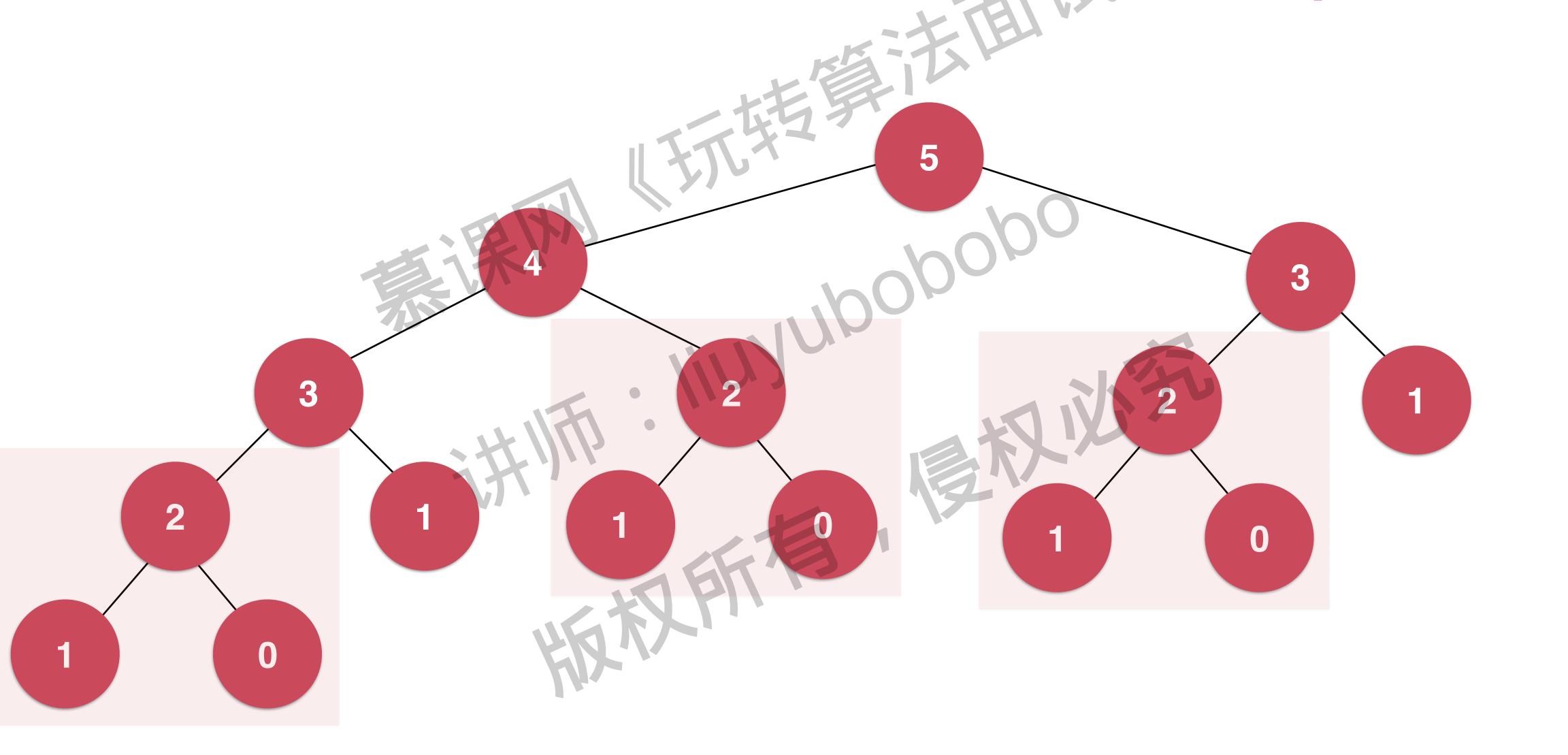






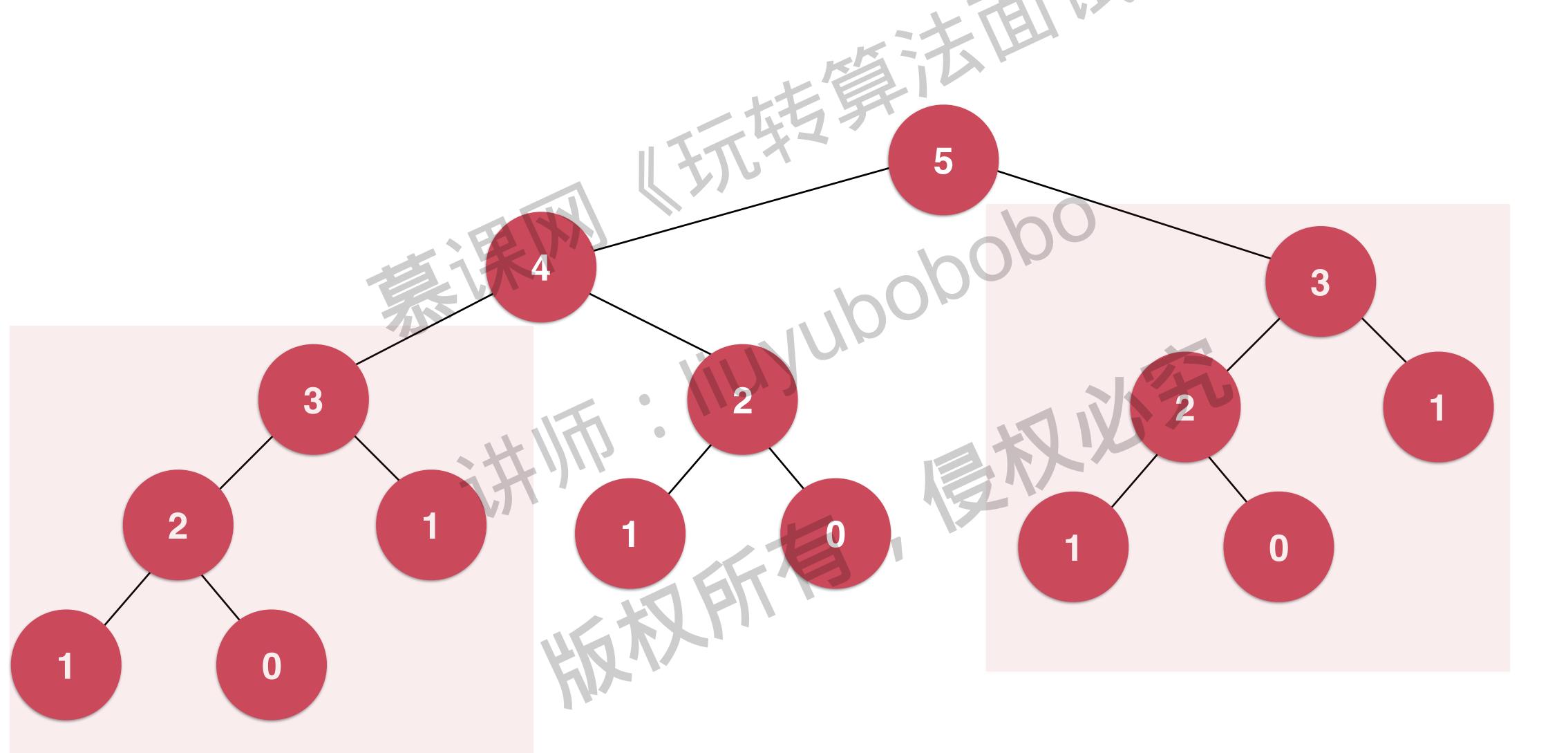






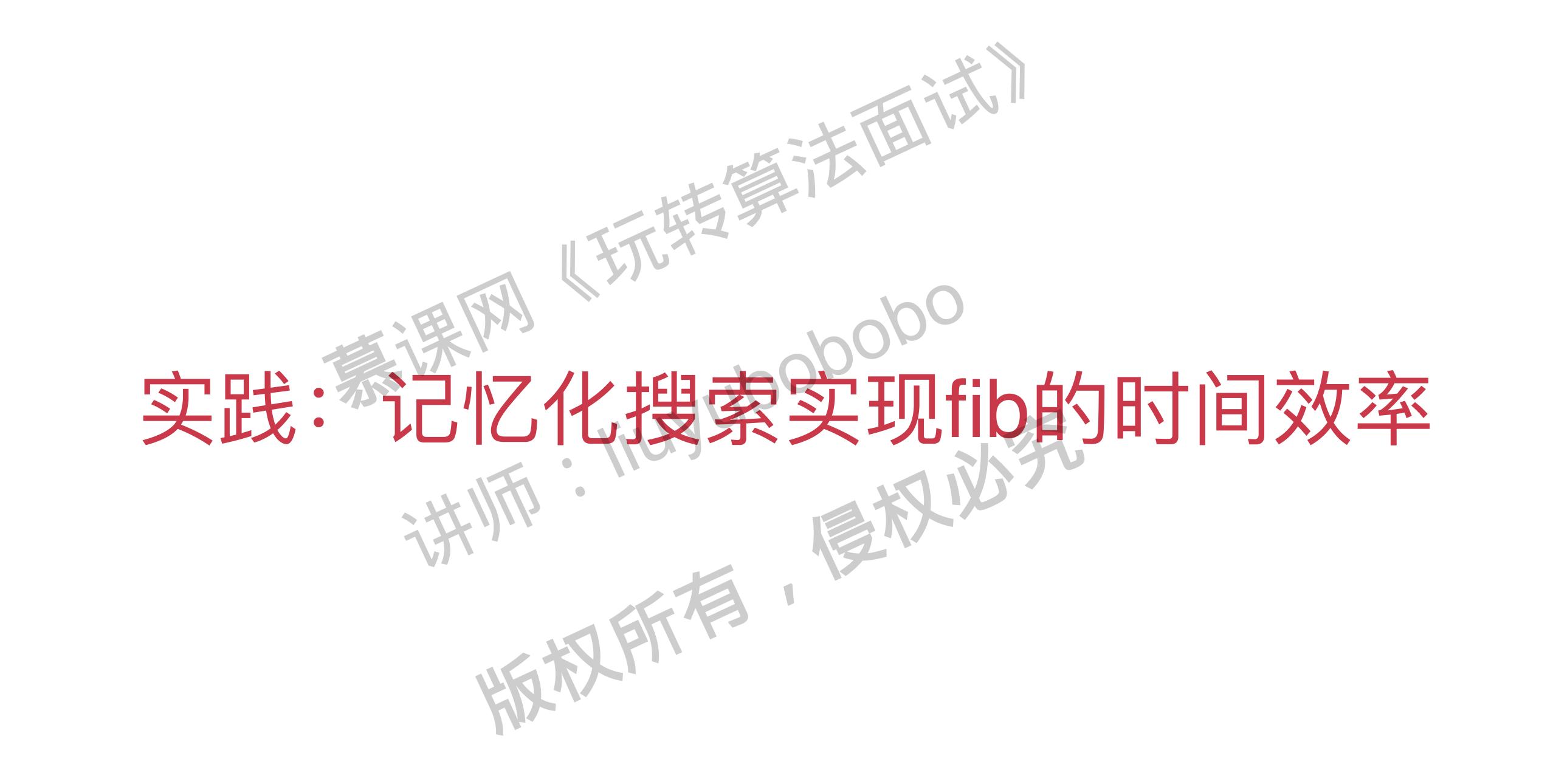
实践:递归实现fib的调用次数

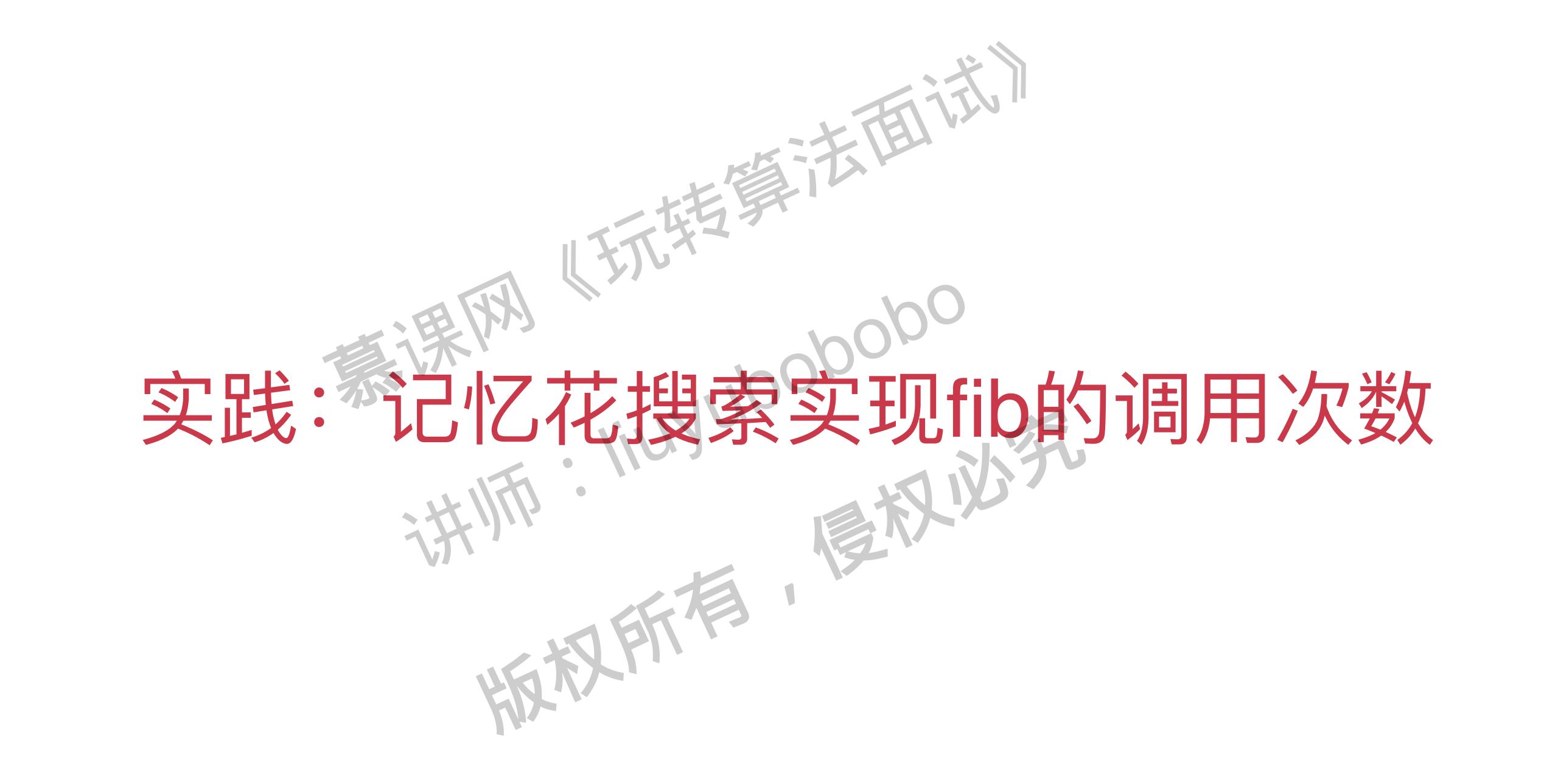
#### 重叠子问题。



#### 记忆化搜索

```
vector<int> memo;
int fib( int n ){
        return 0
        memo[n]
       memo[n] = fib(n-1) + fib(n-2);
    return memo[n];
```





#### 记忆化搜索 - 自上向下的解决问题

```
vector<int> memo;
int fib( int n ){
    if( memo[n]
       memo[n] = fib(n-1) + fib(n-2);
    return memo[n];
```

#### 动态规划 - 自下向上的解决问题

```
int fib( int n ){
    vector<int> memo(n+1, -1);
  memo[0] = 0;
memo[1] = 1;
for( int i = 2 ; i <= n ; i ++ )
memo[i] = memo[i-1] + memo[i-2];</pre>
      return memo[n];
```



#### 动态规划

dynamic programming (also known as dynamic optimization) is a method for solving a complex problem by breaking it down into a collection of simpler subproblems, solving each of those subproblems just once, and storing their solutions – ideally, using a memory-based data structure.

将原问题拆解成若干子问题,同时保存子问题的答案,使得每个子问题只求解一次,最终获得原问题的答案。

#### 动态规划

记忆化搜索 自顶向下的解决问题 递归问题 动态规划 自底向上的解决问题 第一个动态规划问题

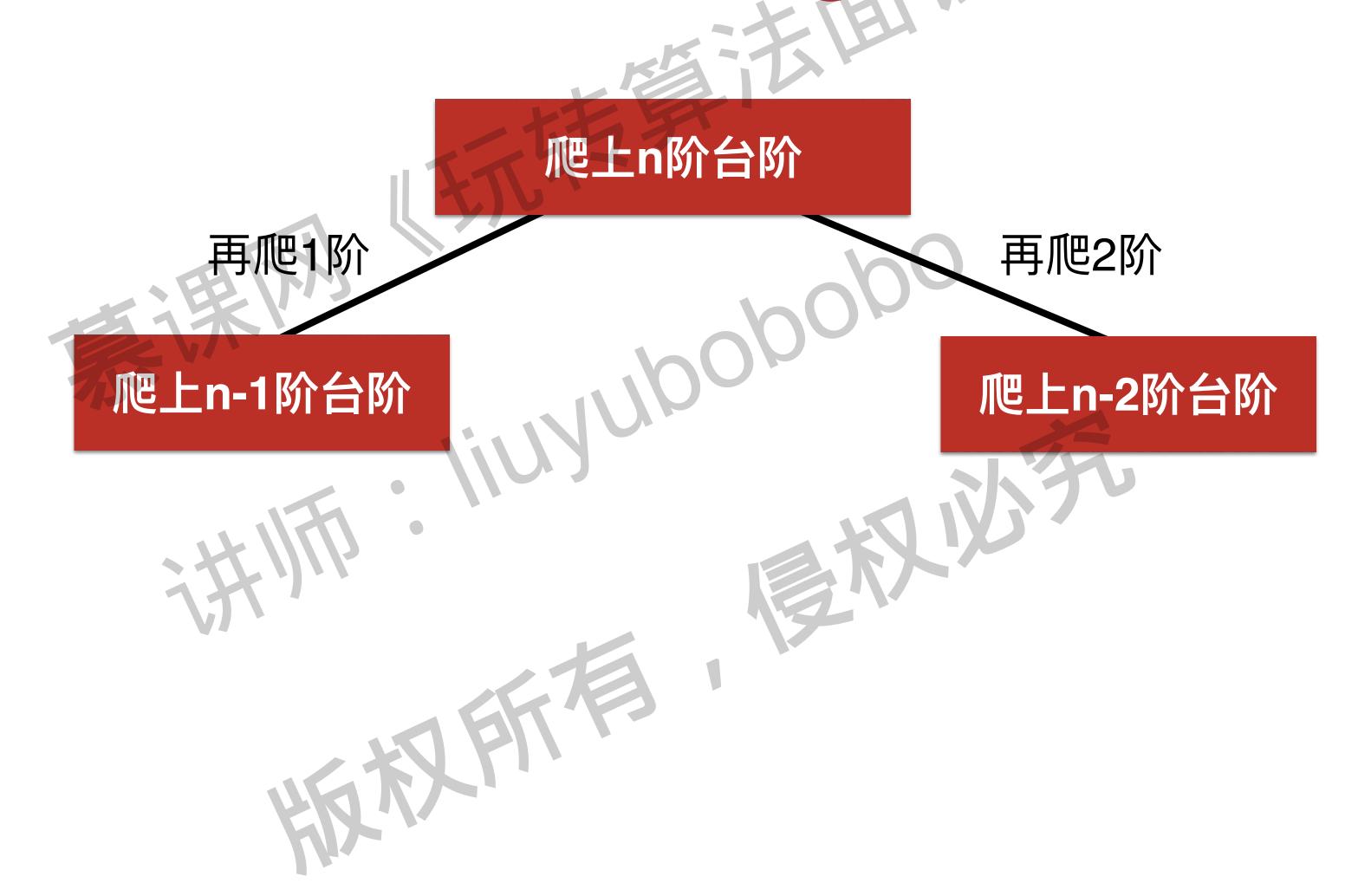


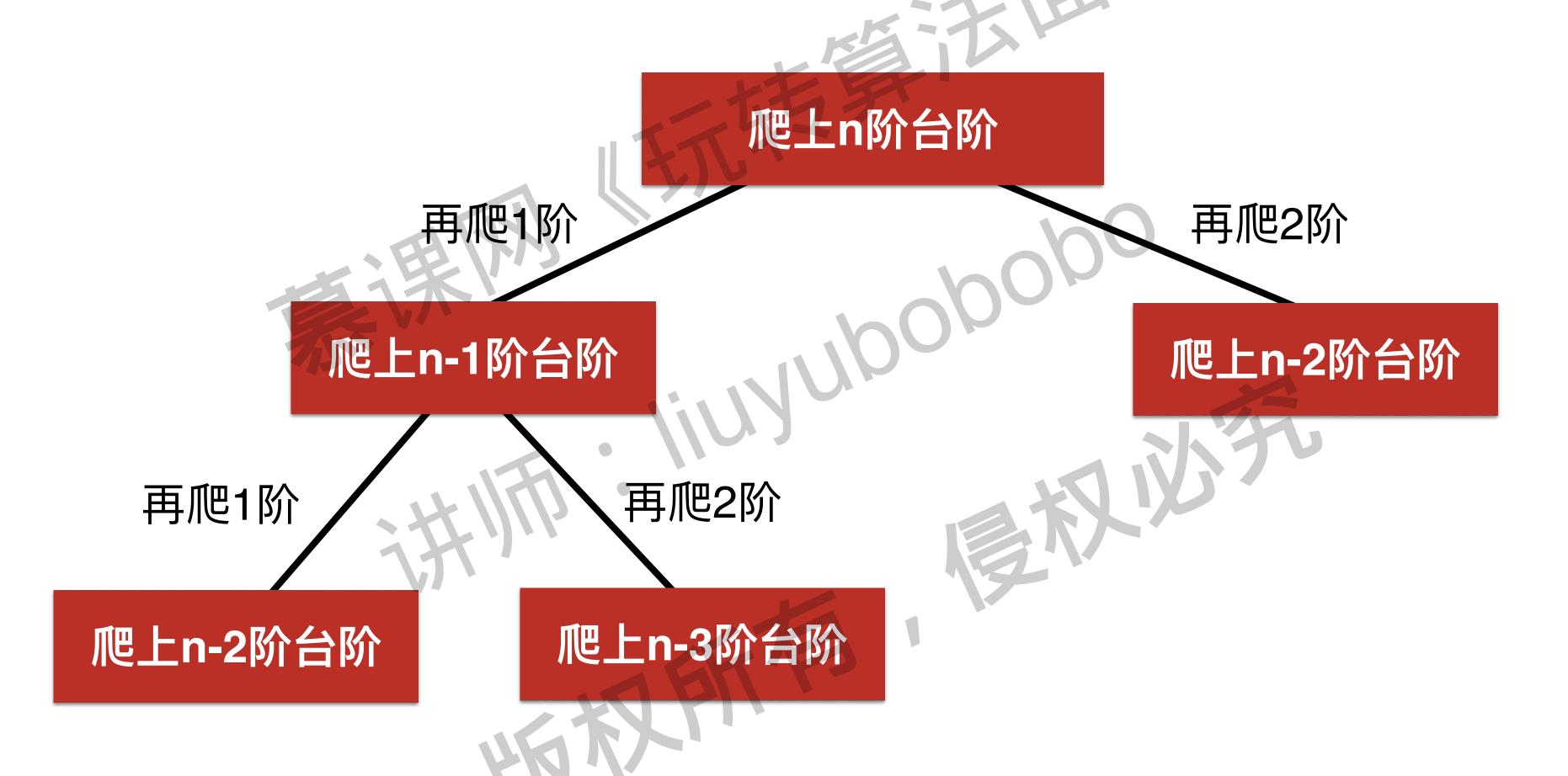


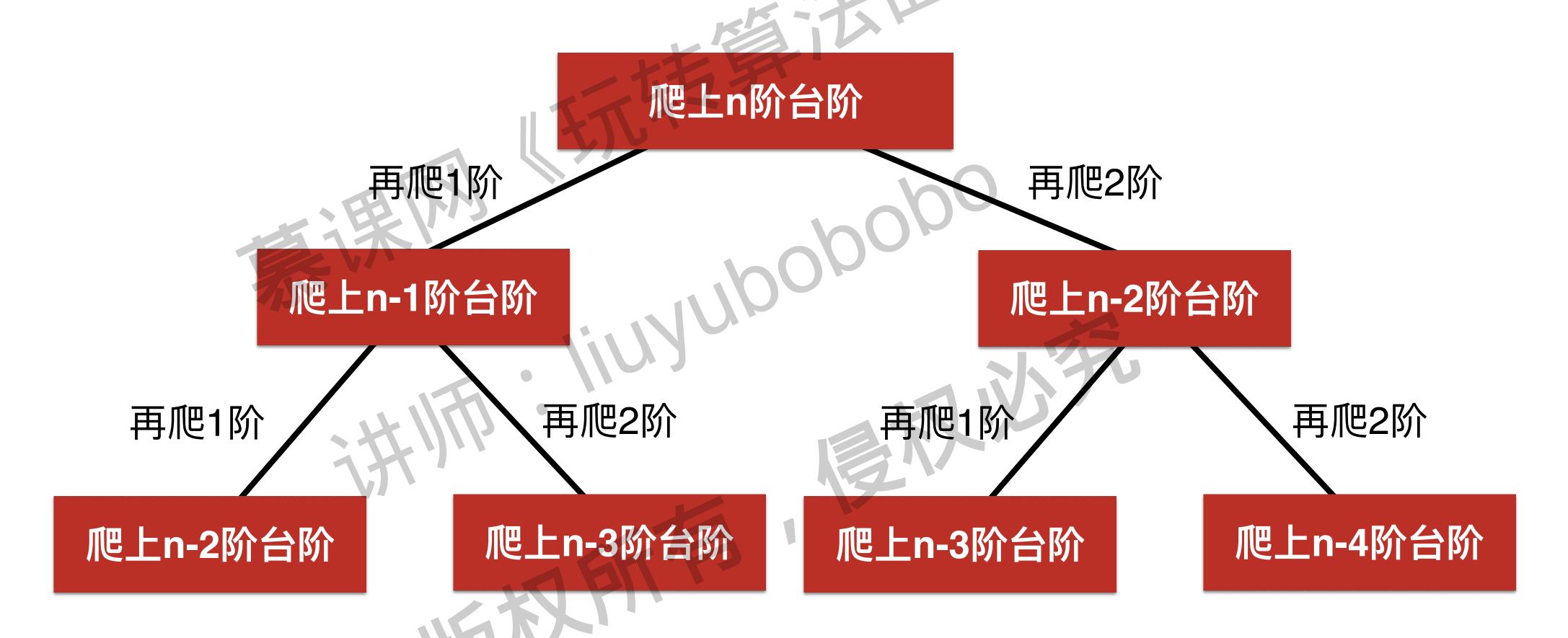
有一个楼梯,总共有n阶台阶。每一次,可以上一个台阶,也可以上

两个台阶。问,爬上这样的一个楼梯,一共有多少不同的方法?

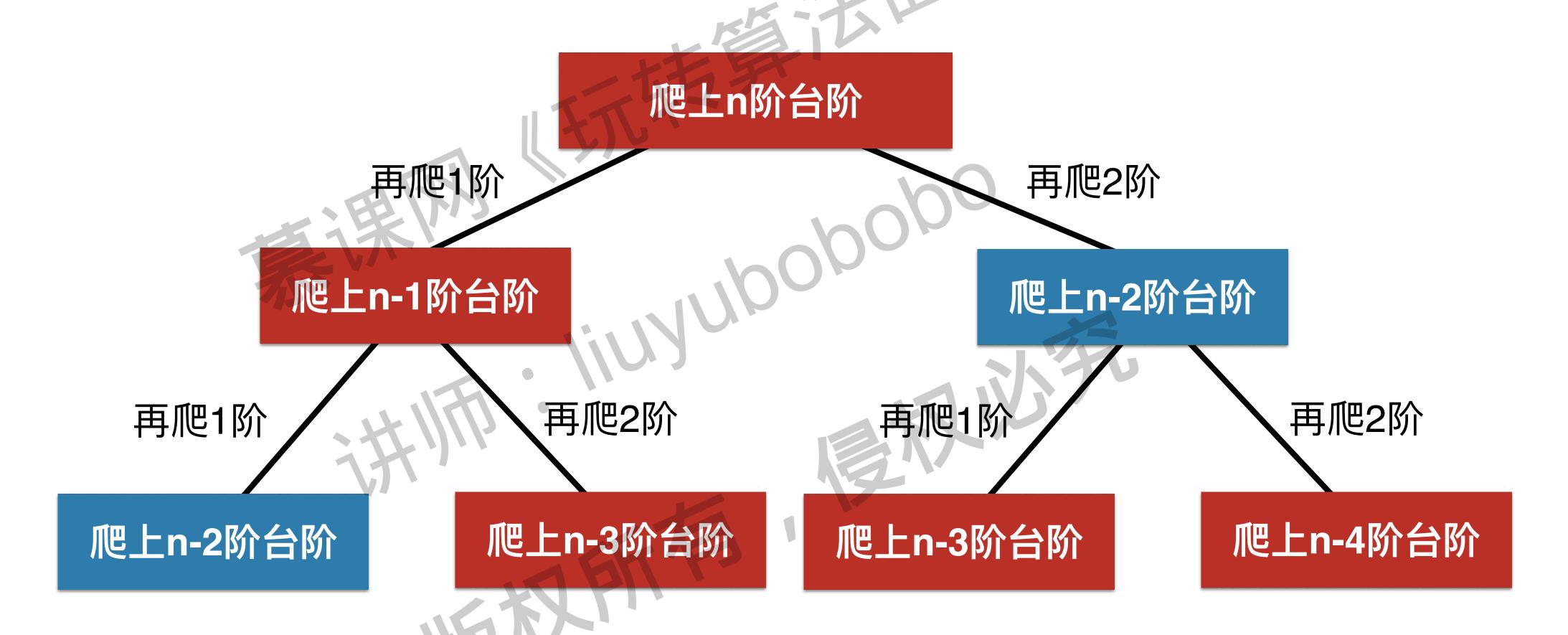
- 如 n = 3,可以爬上这个楼梯的方法有: [1,1,1],[1,2],[2,1]
- 所以答案为3

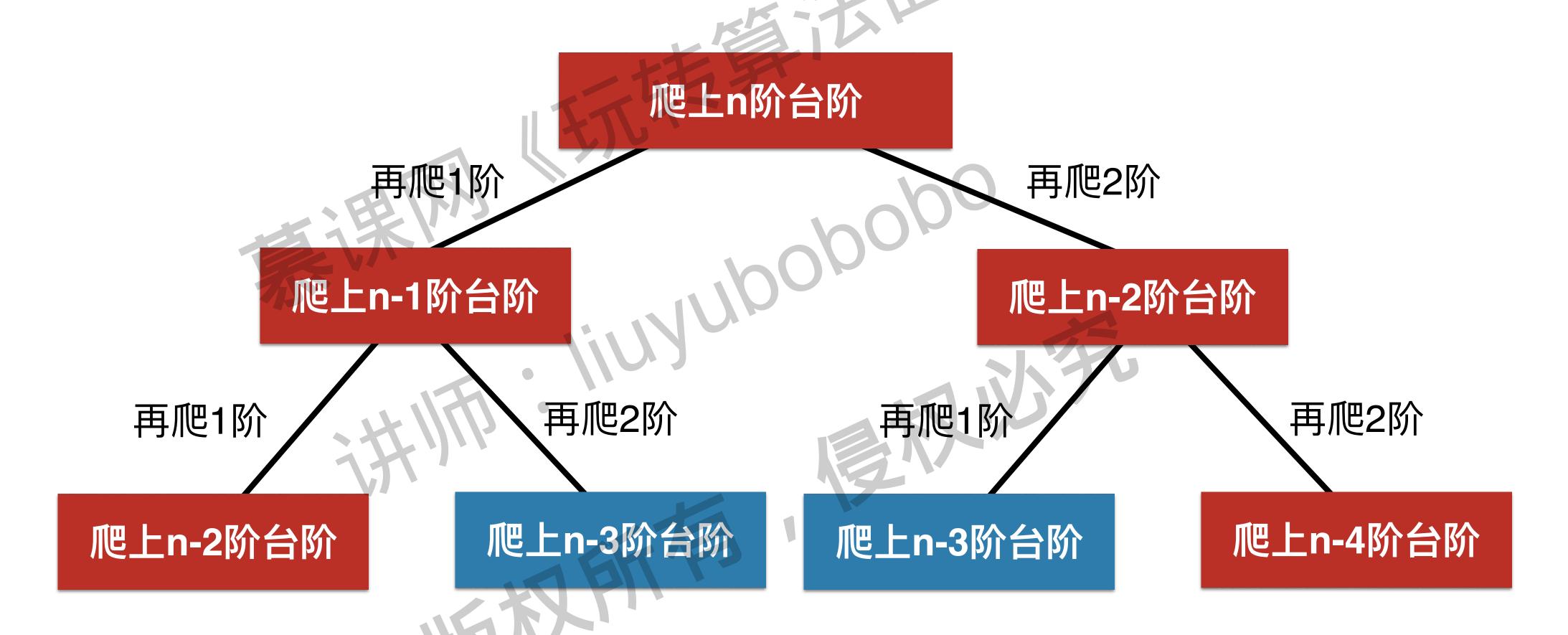






实践: 使用递归解决问题





实践: 使用记忆化搜索

实践:使用动态规划

#### 120. Triangle

给定一个三角形的数字阵列,选择一条自顶向下的路径,使得沿途的所有数字之和最小。(每一步只能移动到相邻的格子中。)

- 如右图所示的三角形阵列
- 其最小路径和为11
- -(2+3+5+1=11)

```
[2],
[3,4],
[6,5,7],
[4,1,8,3]
```

#### 64. Minimum Path Sum

给出一个m\*n的矩阵,其中每一个格子包含一个非负整数。寻找

一条从左上角到右下角的路径,使得沿路的数字和最小。

- 每一步只能右移或者下移。

发现重叠子问题 版权所有

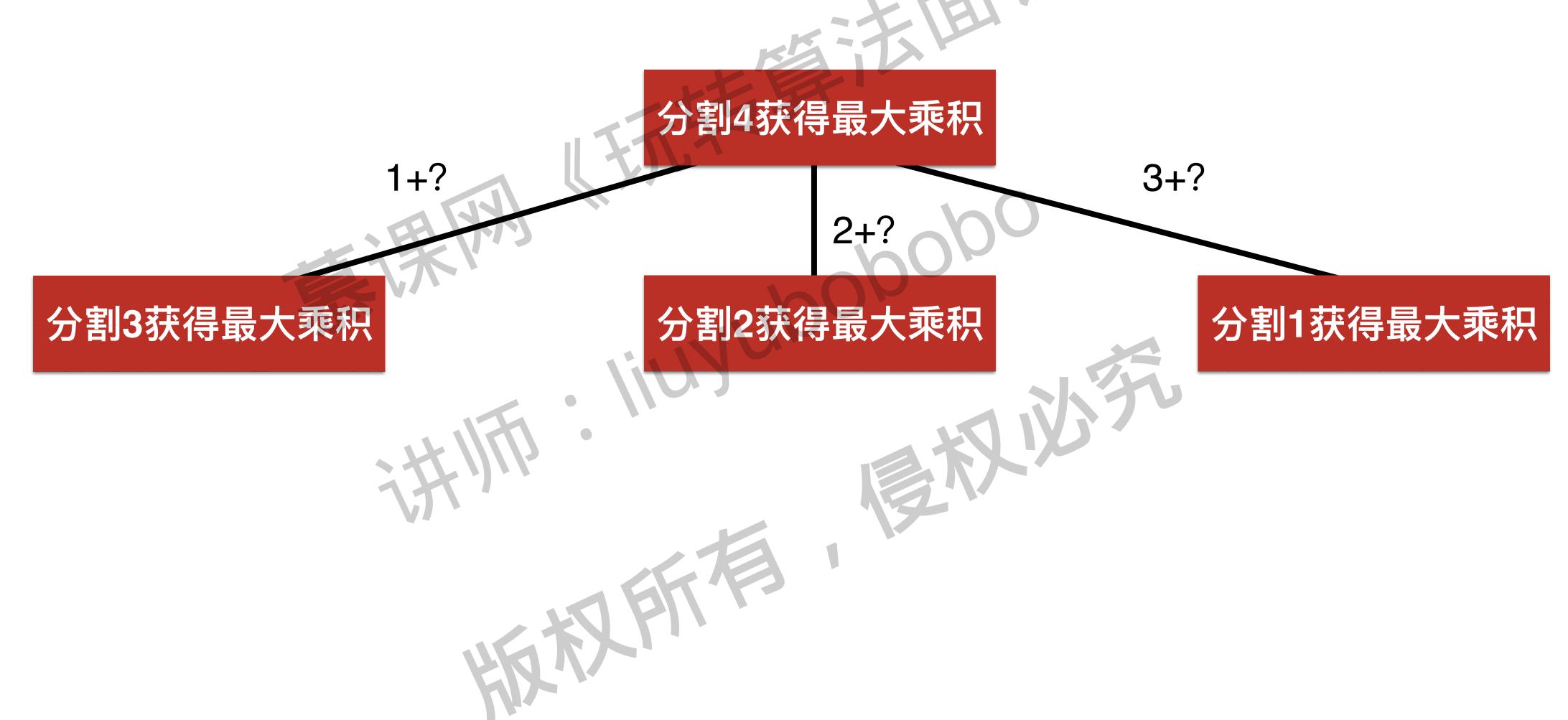
给定一个正数n,可以将其分割成多个数字的和,若要让这些数字的乘积最大,求分割的方法(至少要分成两个数)。算法返回这个最大的乘积。

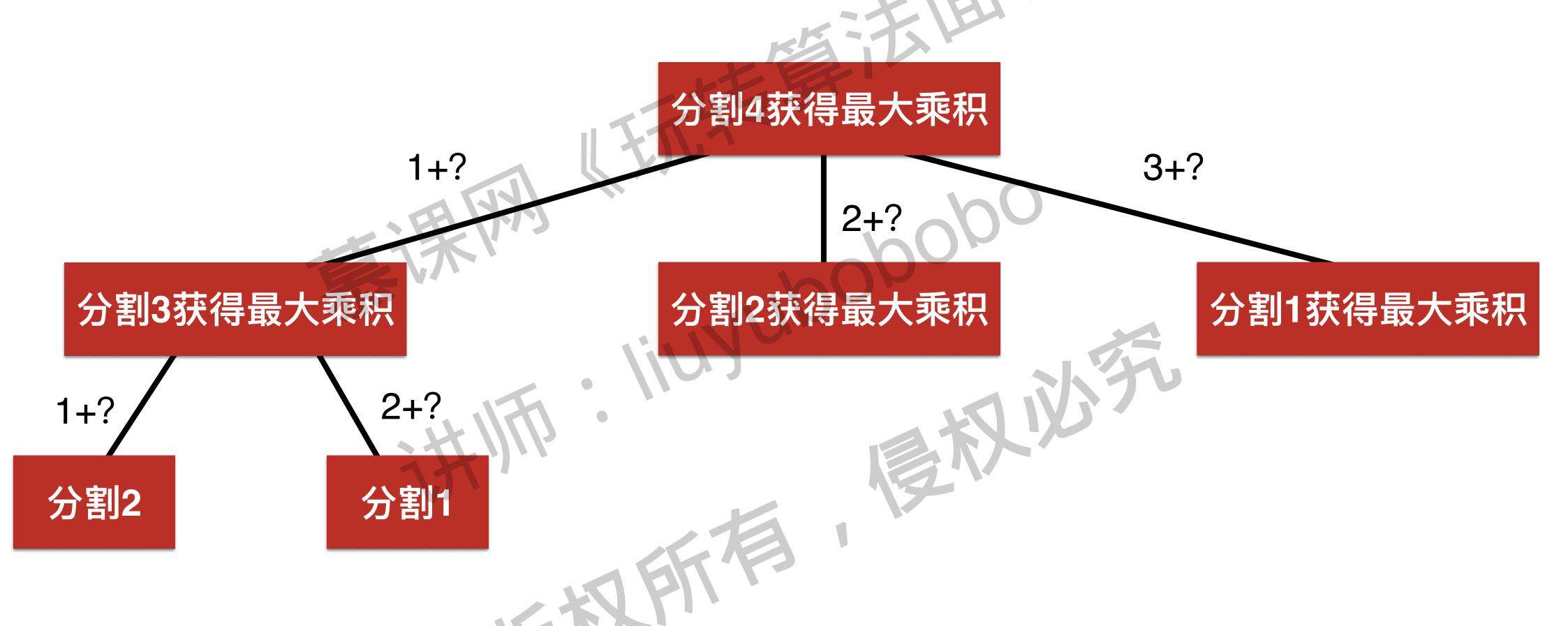
- 如 n = 2, 则返回1 (2=1+1)
- 如 n = 10, 则返回36 (10 = 3 + 3 + 4)

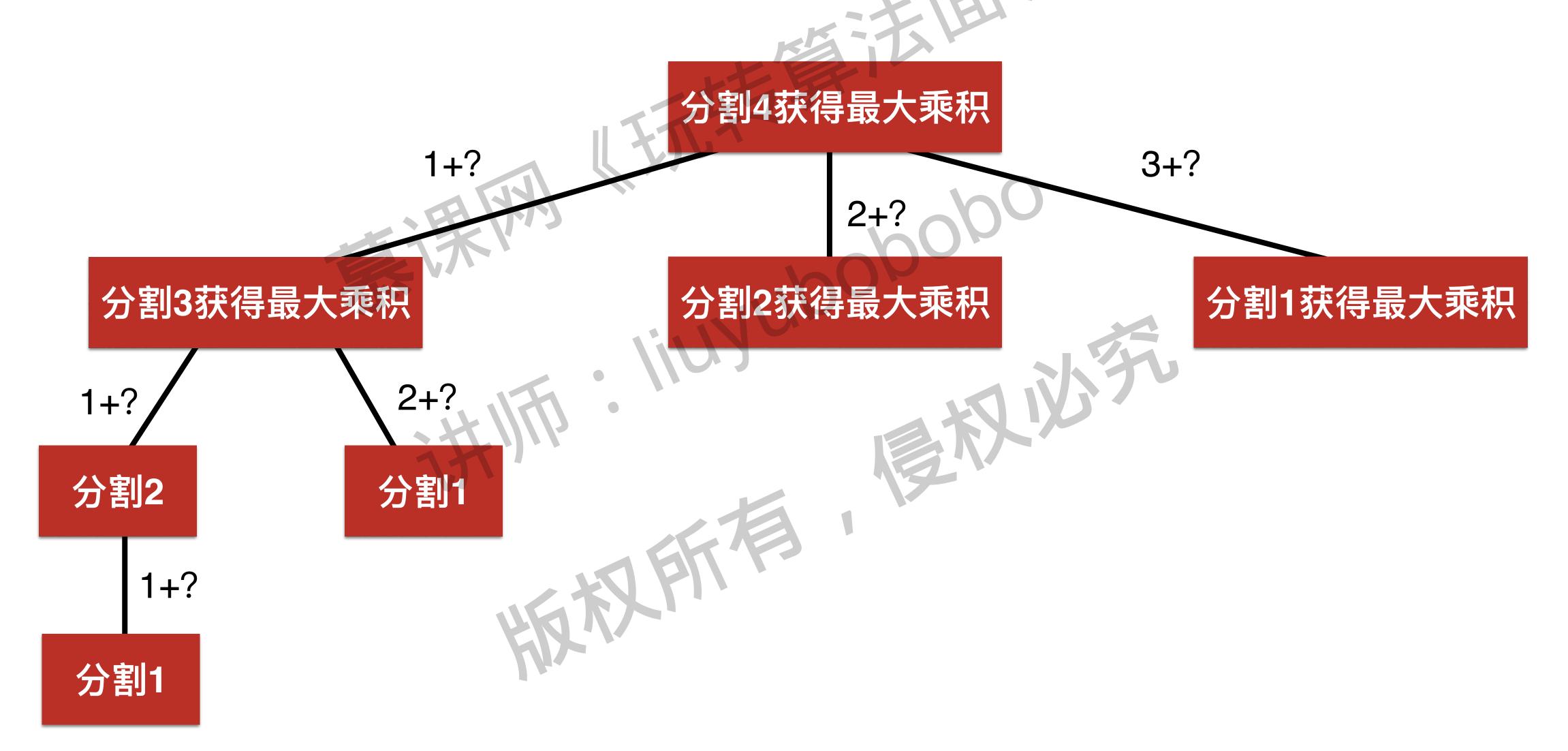
给定一个正数n,可以将其分割成多个数字的和,若要让这些数字的乘机最大,求分割的方法(至少要分成两个数)。算法返回这个最大的乘积。

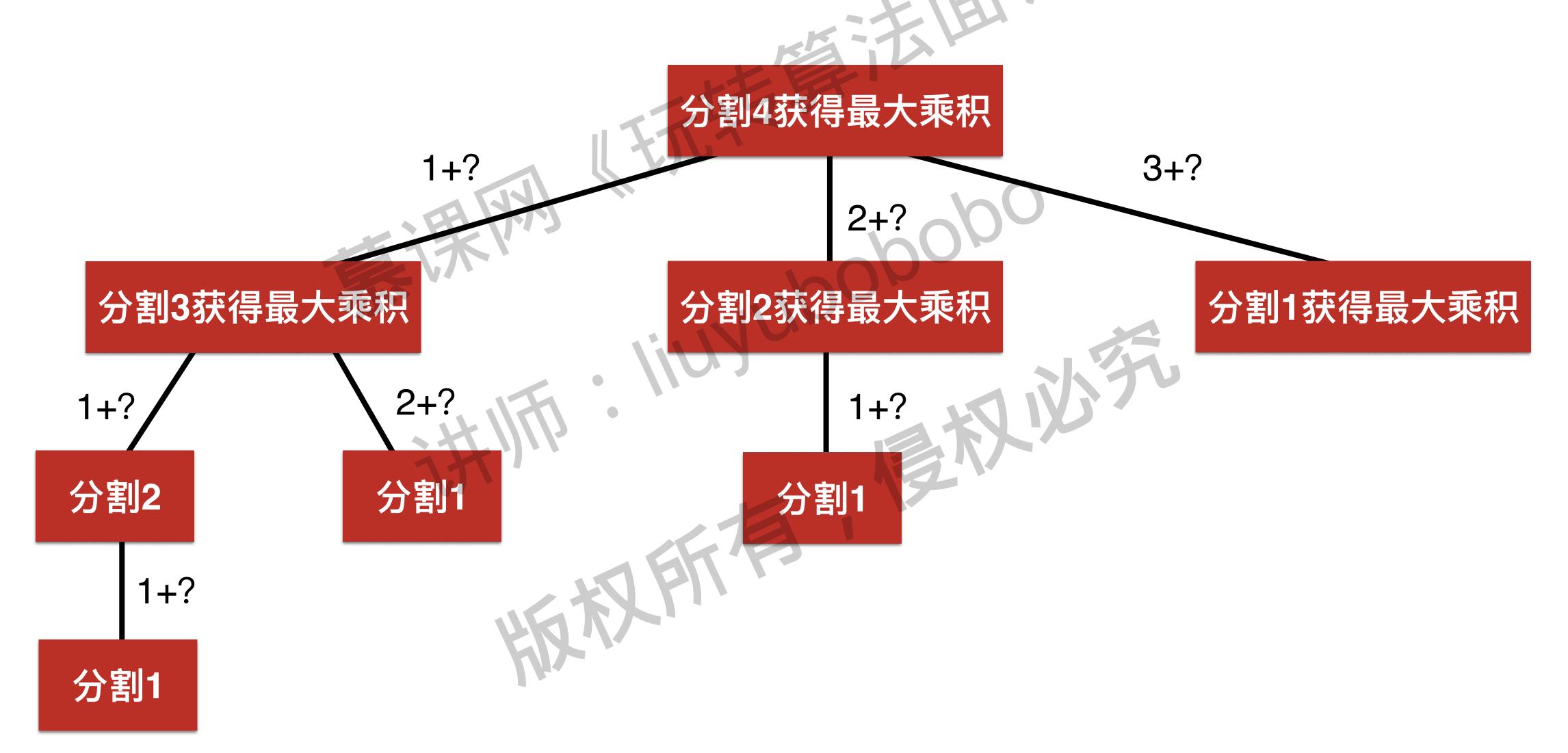
暴力解法:回溯遍历将一个数做分割的所有可能性。O(2^n)

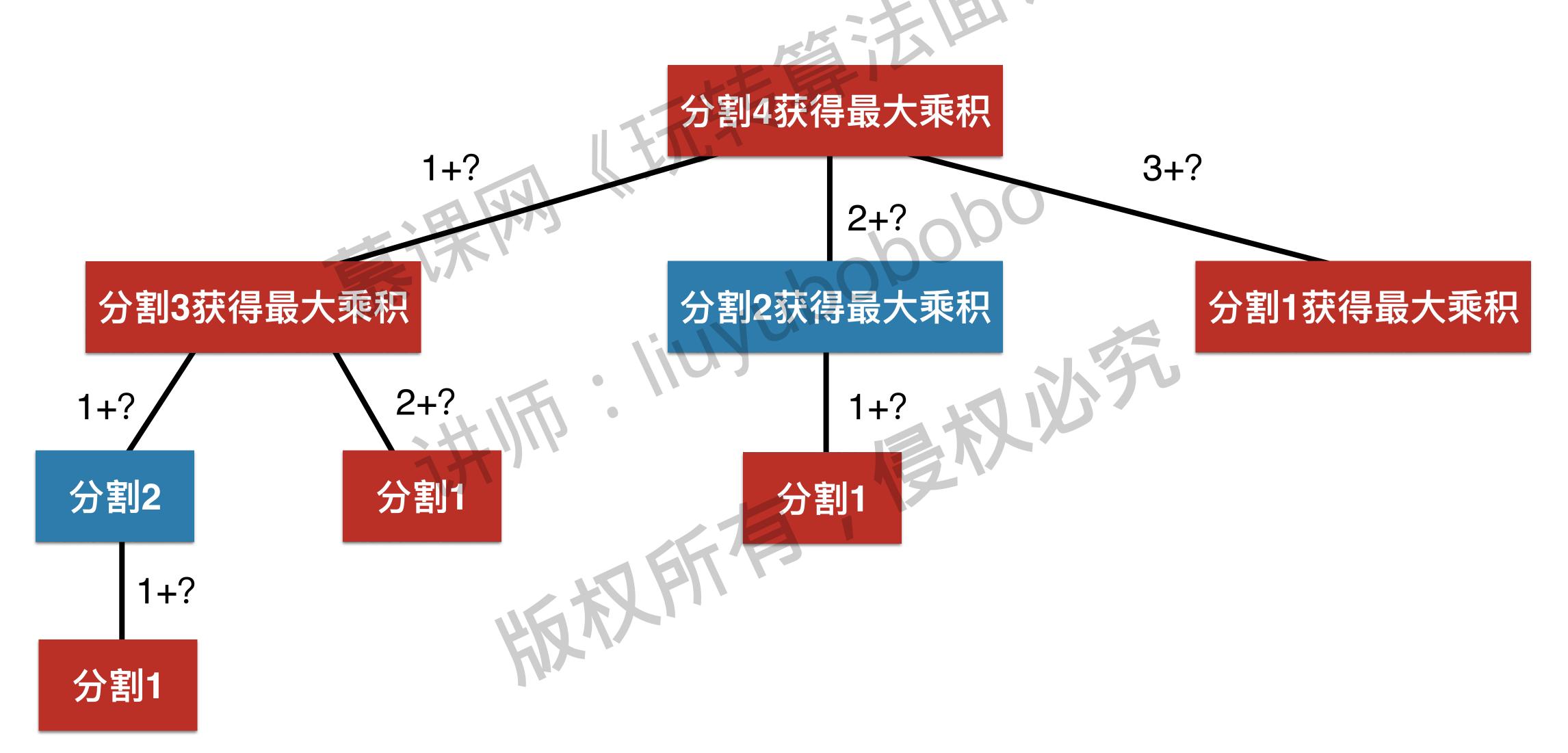


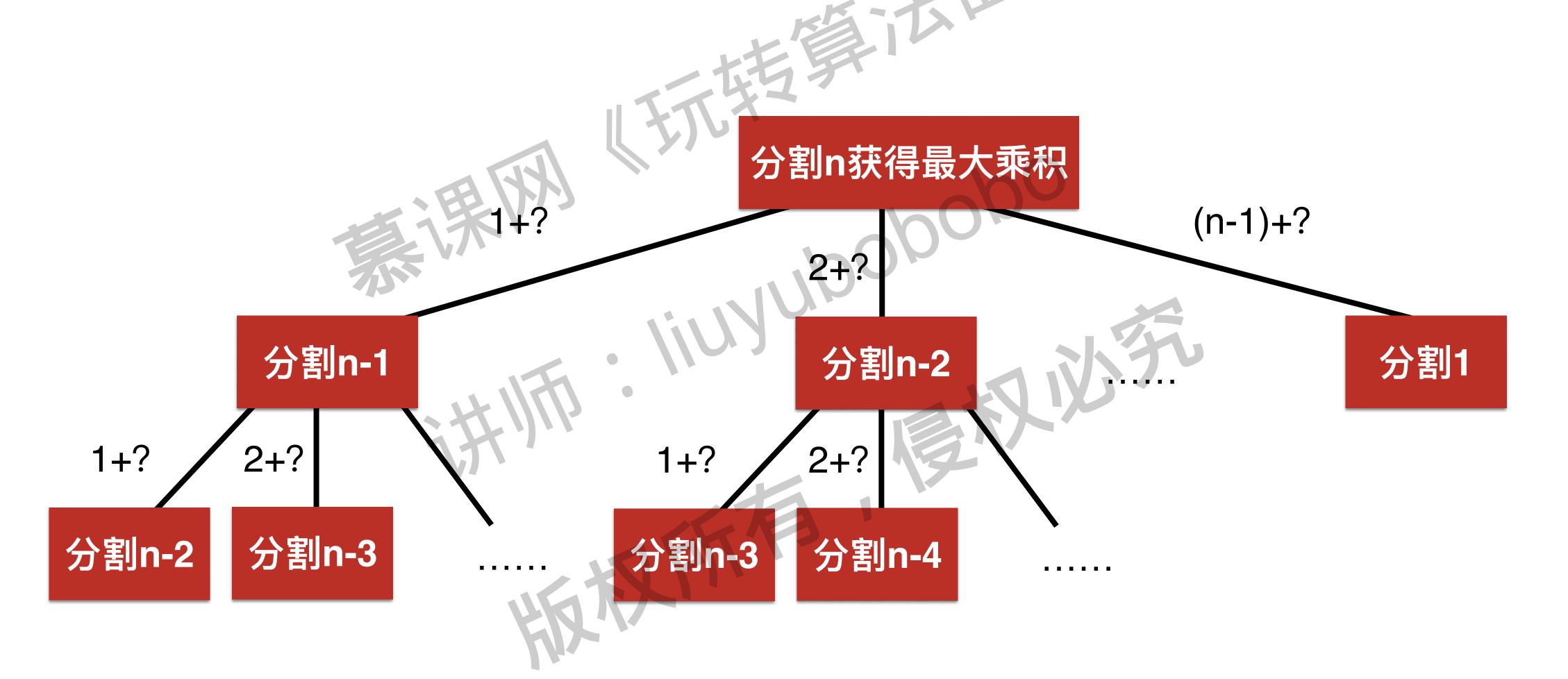


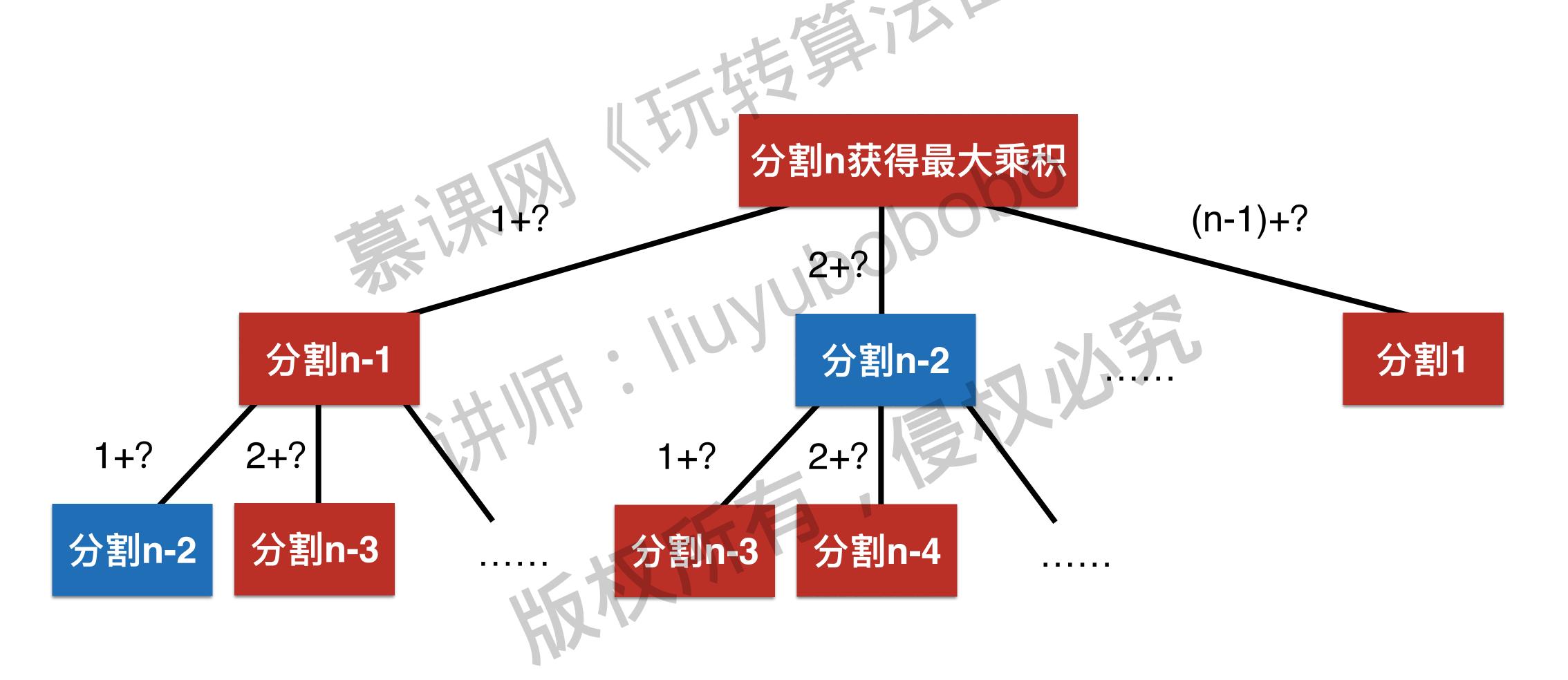


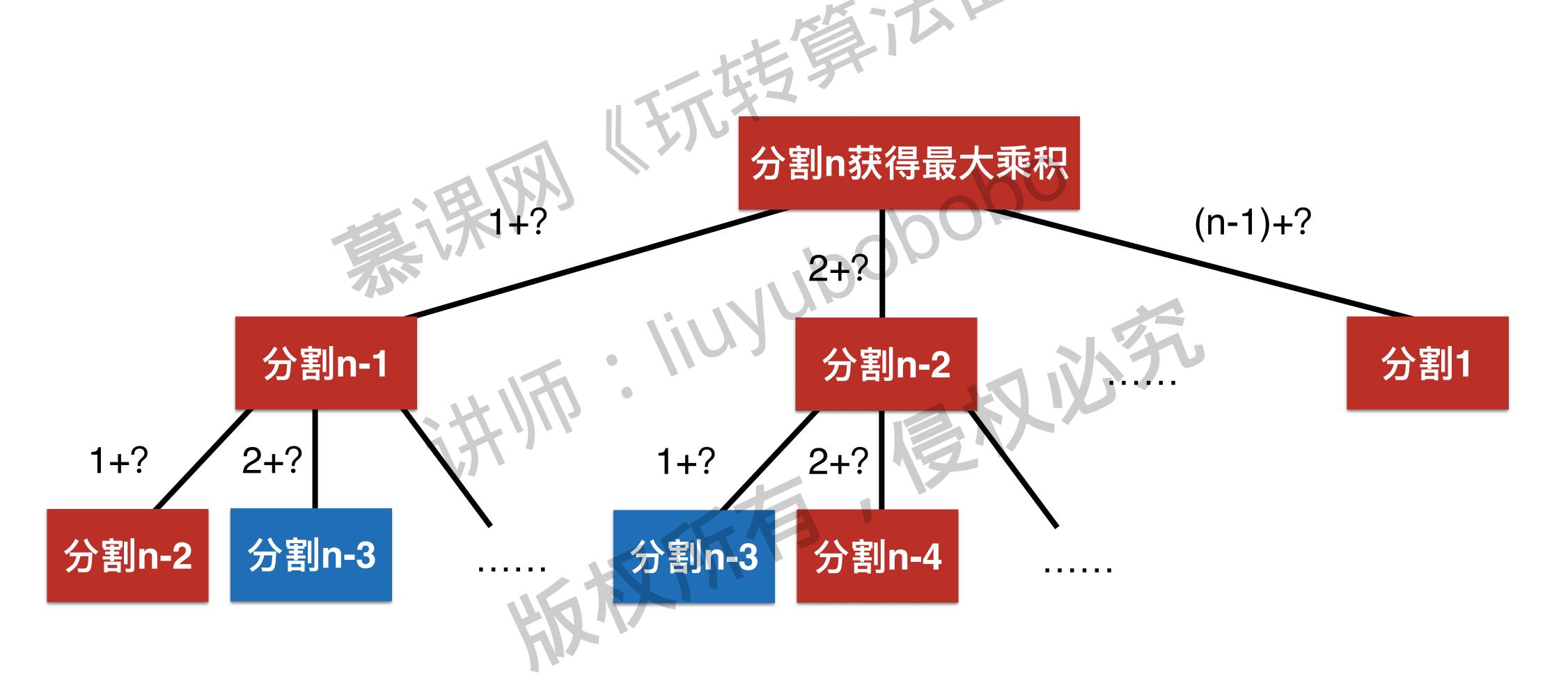






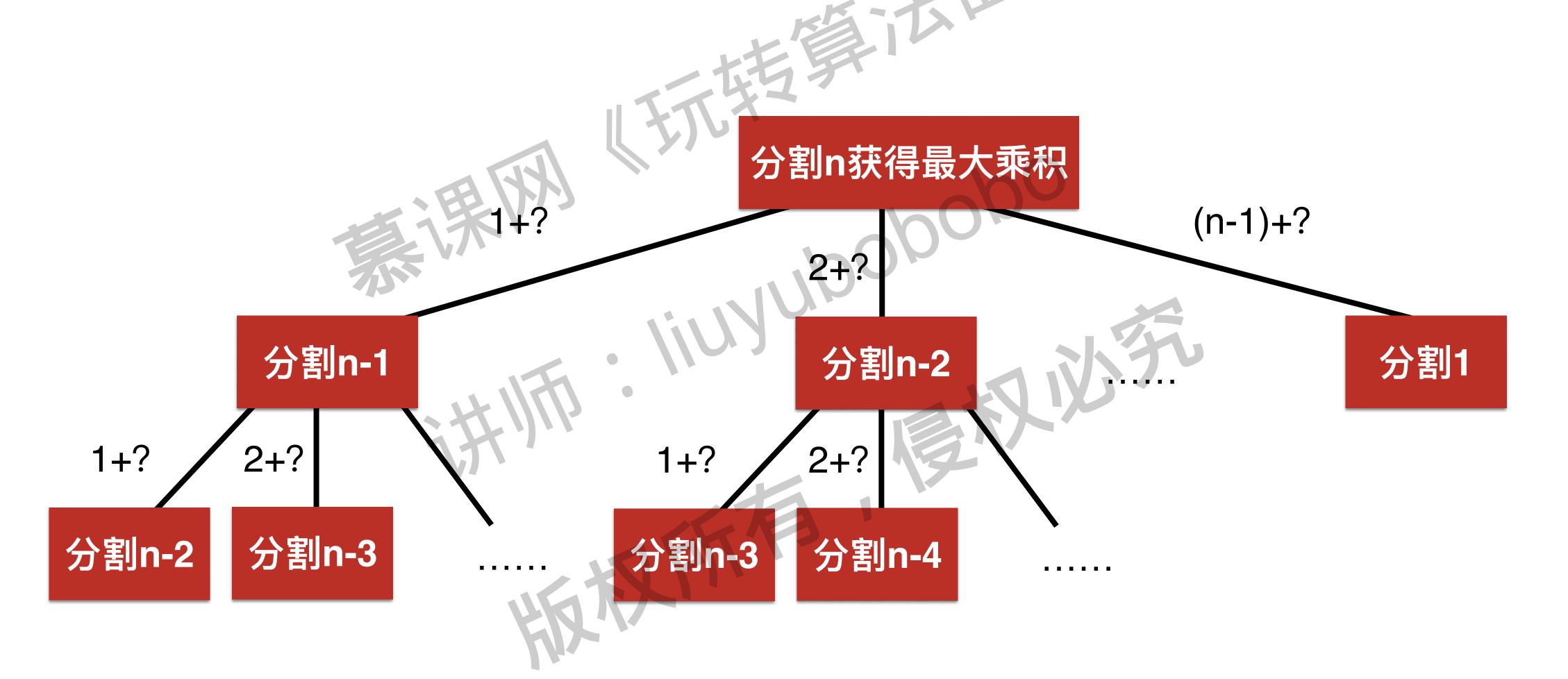






# 最优子结构

通过求子问题的最优解,可以获得原问题的最优解。



### 动态规划

记忆化搜索 自顶向下的解决问题 递归问题 动态规划 自底向上的解决问题

### 动态规划。

记忆化搜索 自顶向下的解决问题 递归问题 动态规划 自底向上的解决问题 实践: 使用递归解决343



实践:使用动态规划解决343

慧·思知 时间复杂度分析 版权所有

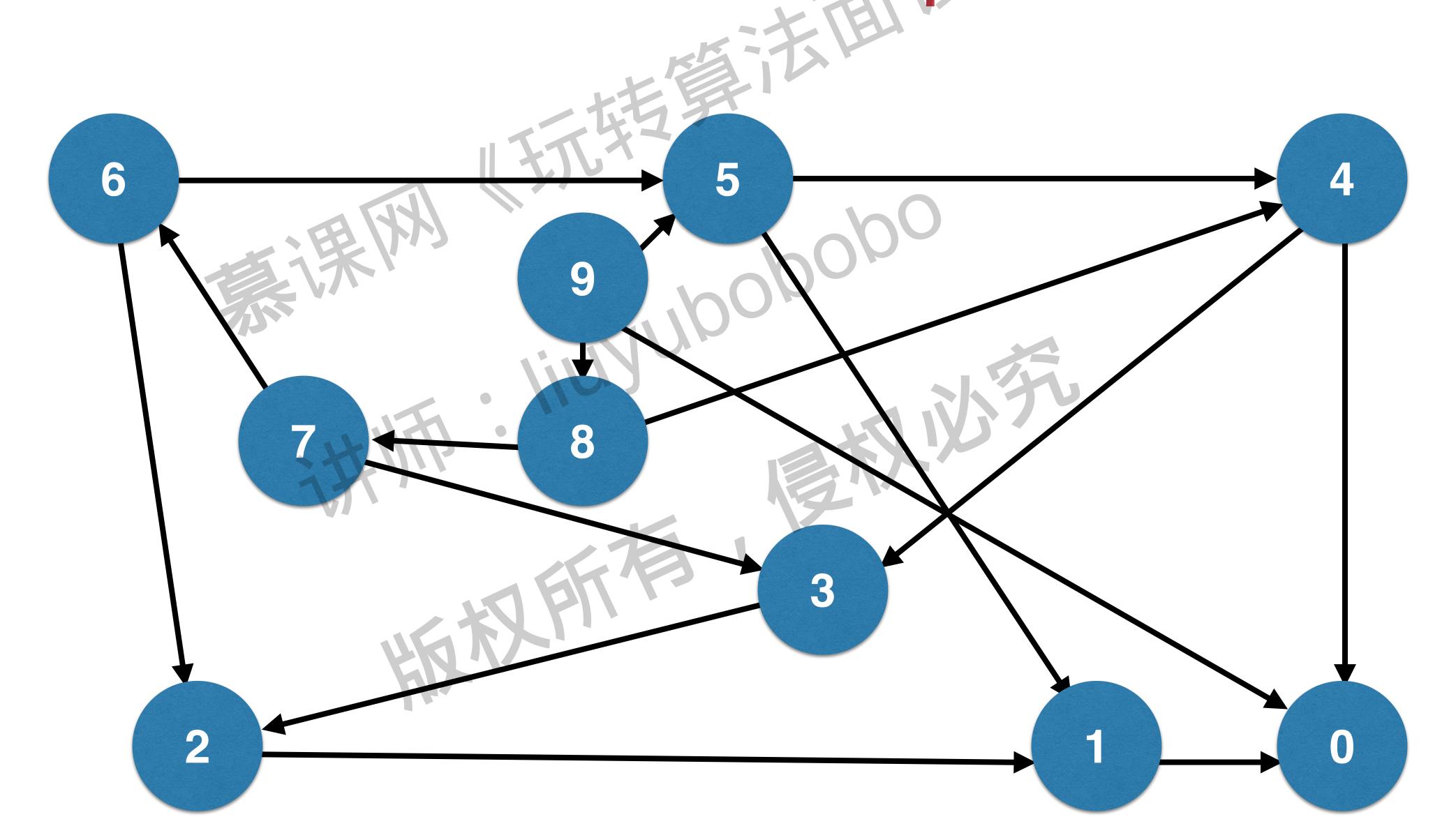
### 279. Perfect Squares

### Google

给出一个正整数n,寻找最少的完全平方数,使他们的和为n。

- 完全平方数: 1,4,9,16...
- -12 = 4 + 4 + 4
- -13 = 4 + 9

## 279. Perfect Squares



### 91. Decode Ways

#### facebook





一个字符串,包含A-Z的字母。每一个字符可以和1-26的数字对

应,如A->1;B->2;...;Z->26 ...给出一个数字字符串,问我

们有多少种方法可以解析这个数字字符串?

- 如给定12,我们可以将它解析成AB(1,2)或者L(12)
- 最终返回2

### 62. Unique Paths

### Bloomberg

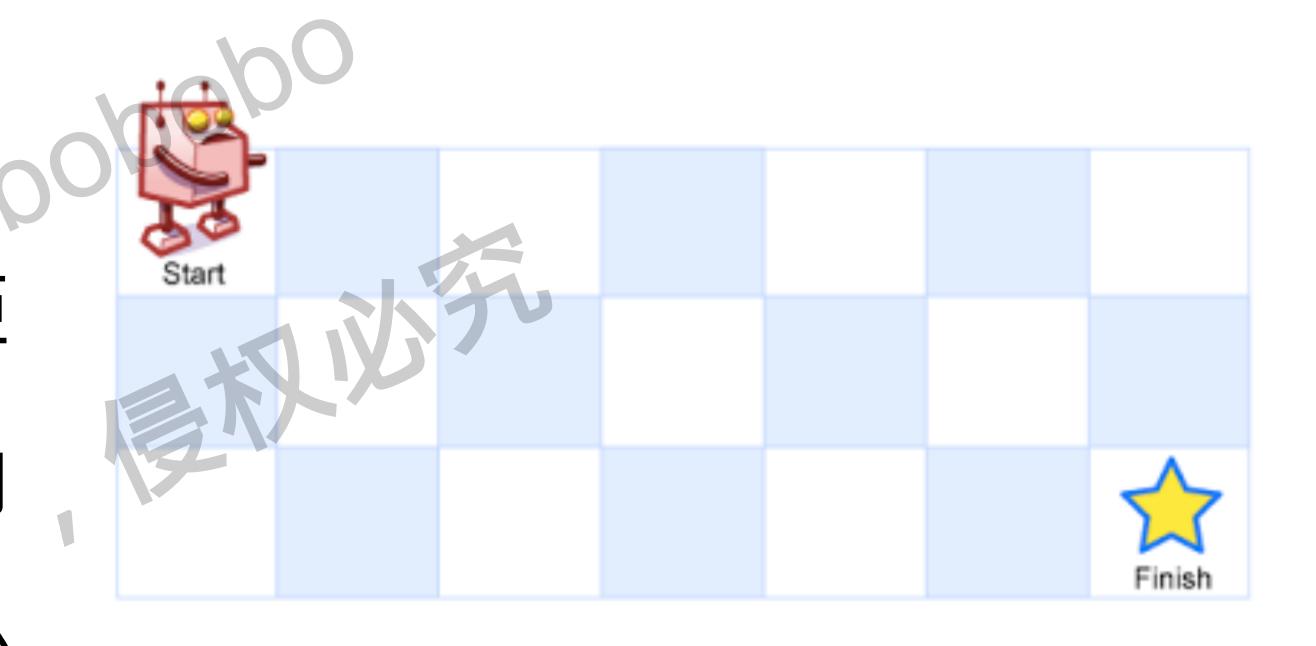
有一个机器人,从一个m\*n的矩

阵的左上角出发,要达到这个矩

阵的右下角。机器人每次只能向

右或者向下行进。问一共有多少

种不同的路径?



### 63. Unique Paths II

### Bloomberg

有一个机器人,从一个m\*n的矩阵的左

上角出发,矩阵中存在一些格子里有障

碍物。现在机器人要达到这个矩阵的右

下角。机器人每次只能向右或者向下行

进。问一共有多少种不同的路径?

```
[ [0,0,0], [0,1,0], [0,0,0]]
```

答案为2

状态的定义和状态的转移





你是一个专业的小偷,打算洗劫一条街的所有房子。每一个房子里 都有不同价值的宝物,但是,如果你选择偷窃连续的两栋房子,就 会触发报警系统。编程求出你最多可以偷窃价值多少的宝物?

- 如[3,4,1,2],则返回6[3,(4),1,(2)]
- 如[4,3,1,2],则返回6[(4),3,1,(2)]

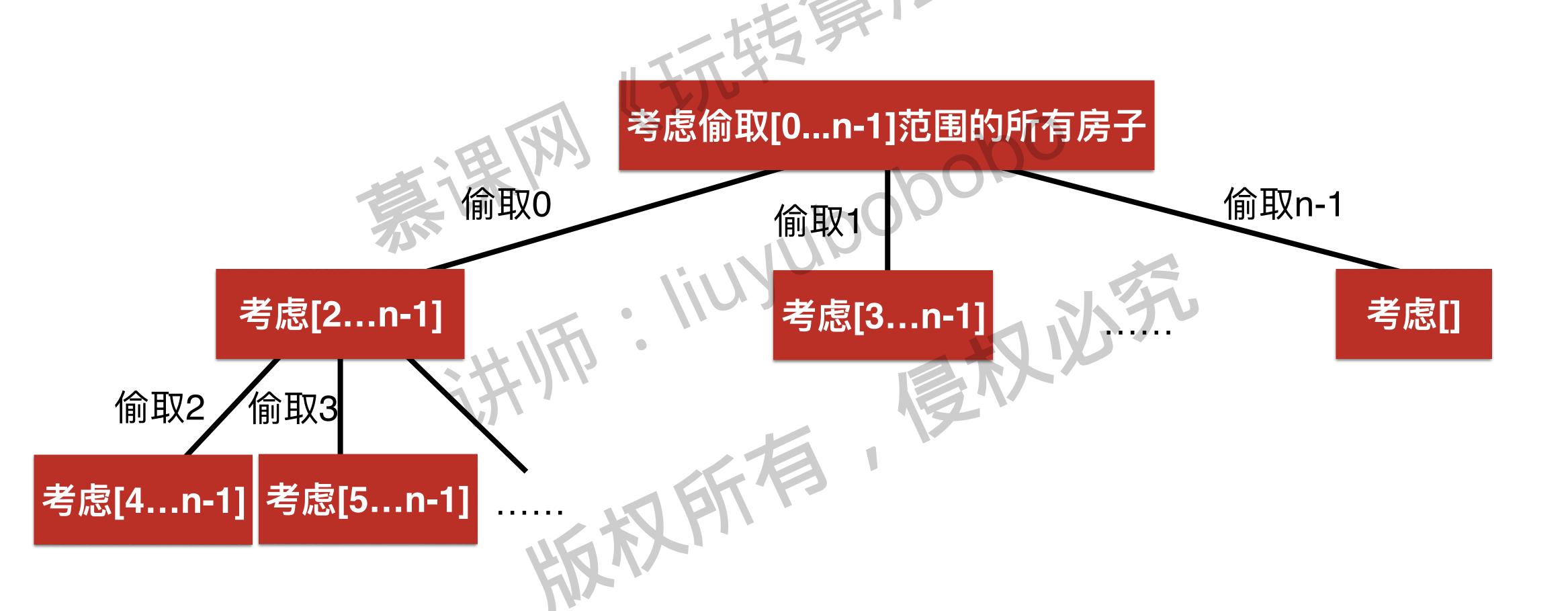


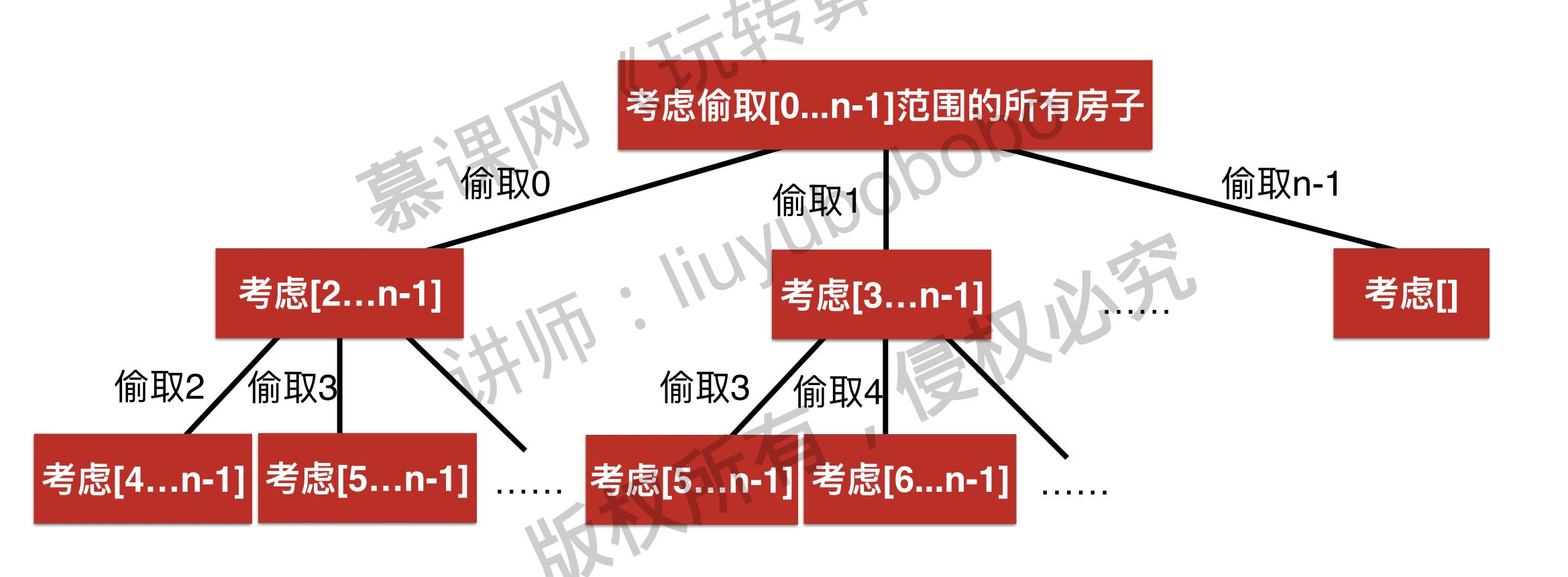


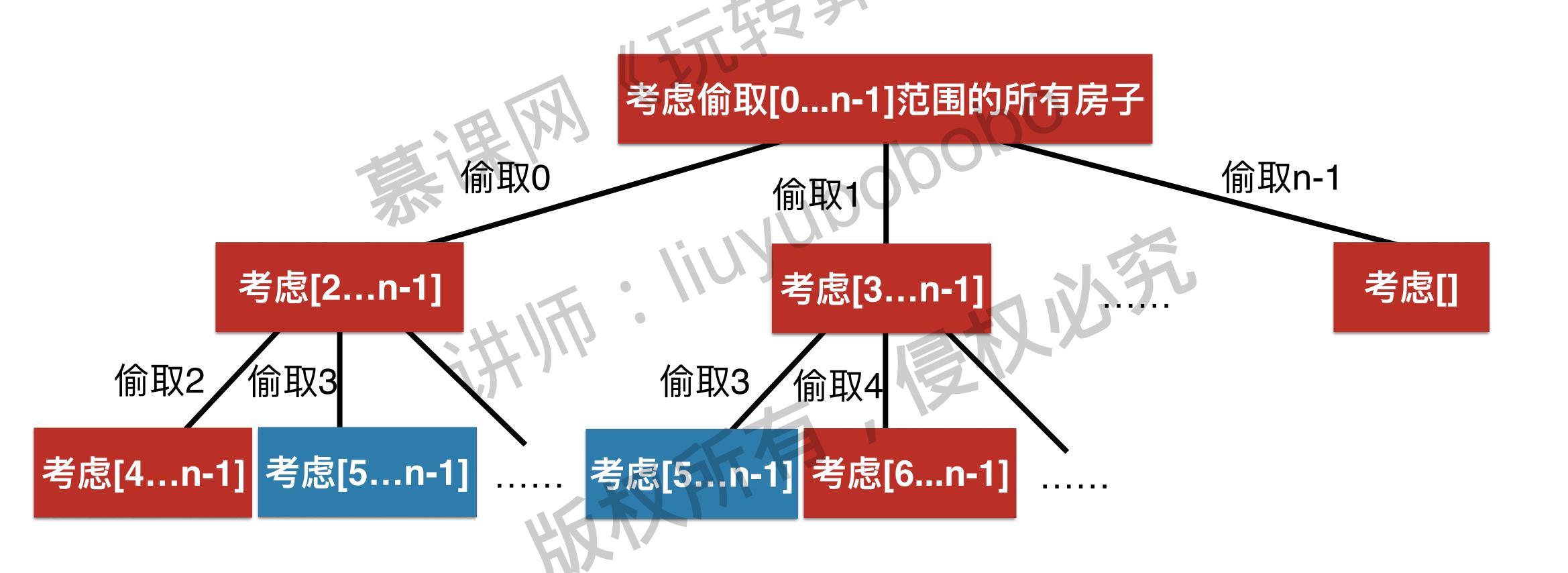
你是一个专业的小偷,打算洗劫一条街的所有房子。每一个房子里 都有不同价值的宝物,但是,如果你选择偷窃连续的两栋房子,就 会触发报警系统。编程求出你最多可以偷窃价值多少的宝物?

暴力解法:检查所有房子的组合,对每一个组合,检查是否有相邻 的房子,如果没有,记录其价值。找最大值。O((2^n)\*n)









注意其中对状态的定义:

考虑偷取 [x...n-1] 范围里的房子 (函数的定义)

根据对状态的定义,决定状态的转移:

 $f(0) = max\{ v(0) + f(2), v(1) + f(3), v(2) + f(4), ...,$   $v(n-3) + f(n-1), v(n-2), v(n-1) \}$  (状态转移方程)

实践: 使用递归解决198



实践:使用动态规划解决198

慧·思知 时间复杂度分析 版权所有

#### 198. House Robber

对状态的定义:

考虑偷取 [x...n-1] 范围里的房子(函数的定义)

改变对状态的定义

考虑偷取 [0...x] 范围里的房子(函数的定义)



#### 213. House Robber II



和 House Robber 一样,不过这次是在一个环形街道中。也就是说给定的数组中,最后一个元素和第一个元素为邻居。在不触碰警报的情况下,问能够窃取的财产的最大值是多少?

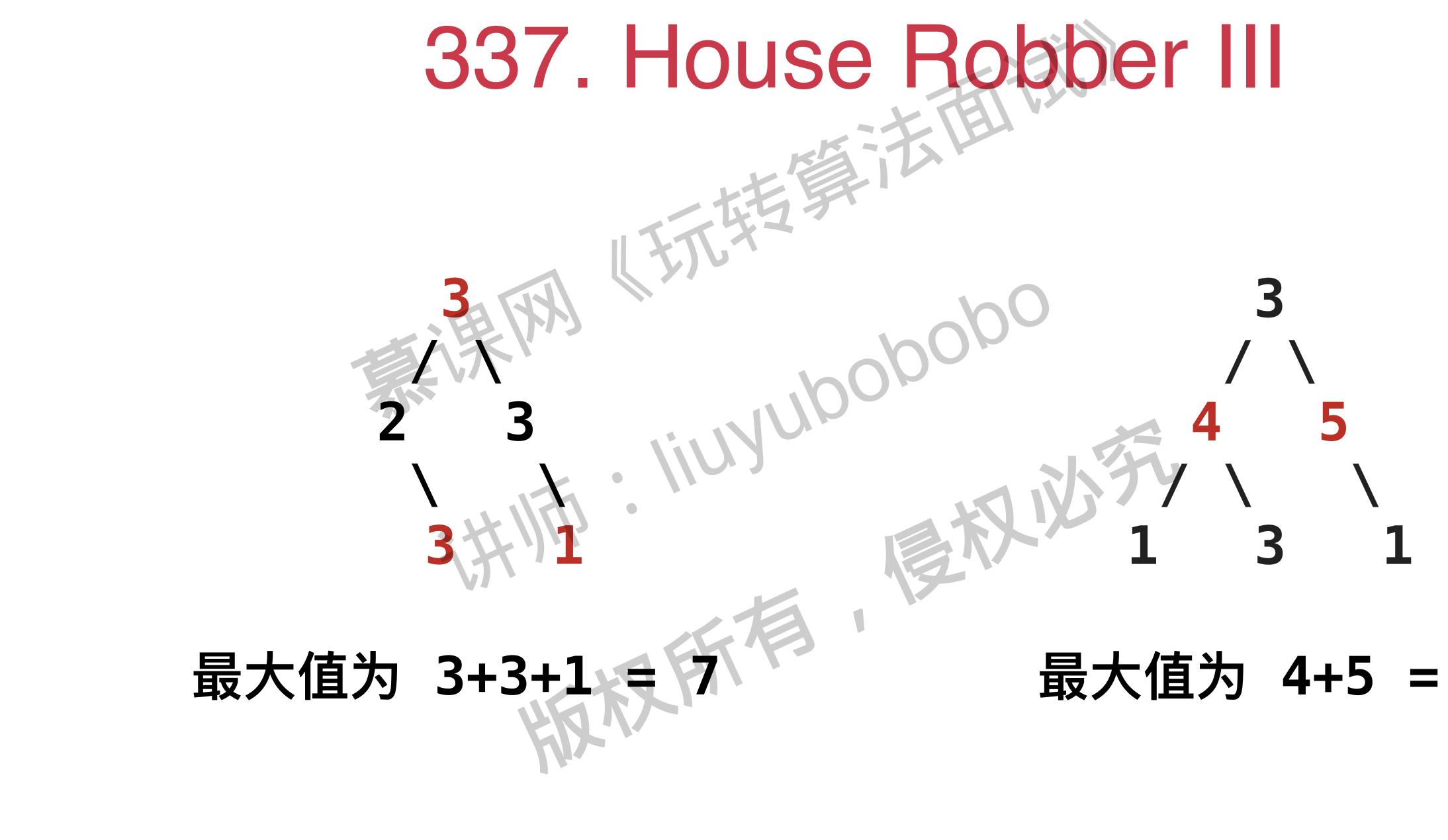
#### 337. House Robber III

UBER

和 House Robber 一样,不过这次是在一个小区中,整个小区成

二叉树的结构。在不触碰警报的情况下, 问能够窃取的财产的最

大值是多少?



#### 309. Best Time to Buy and Sell Stock with Cooldown

# Google

给定一个数组,表示一支股票在每一天的价格。设计一个交易算法,在这些 天进行自动交易,要求:每一天只能进行一次操作;在买完股票后,必须卖 了股票,才能再次买入;每次卖了股票以后,在下一天是不能购买的。问如 何交易,能让利润最大?

- 如 prices =[1, 2, 3, 0, 2];
- 最佳交易方式: [buy, sell, cooldown, buy, sell] , 利润为3,算法返回3

见于元华 0-1.背色问题 洪师

有一个背包,它的容量为C (Capacity),。现在有n种不同的物品,编号为0...n-1,其中每一件物品的重量为w(i),价值为v(i)。问可以向这个背包中盛放哪些物品,使得在不超过背包容量的基础上,物品的总价值最大。

暴力解法:每一件物品都可以放进背包,也可以不放进背包。 O((2<sup>n</sup>)\*n)

贪心算法? 优先放入平均价值最高的物品?

10

| id     | 0 | 1  | 2  |            |
|--------|---|----|----|------------|
| weight | 1 | 2  | 3  |            |
| value  | 6 | 10 | 12 | 有一个容量为5的背包 |
| v/w    | 6 | 5  | 4  |            |

贪心算法? 优先放入平均价值最高的物品?

|   | id     | 0 | 1  | 20 |            |
|---|--------|---|----|----|------------|
| V | veight | 1 | 2  | 3  |            |
| • | value  | 6 | 10 | 12 | 有一个容量为5的背包 |
|   | v/w    | 6 | 5  | 4  |            |

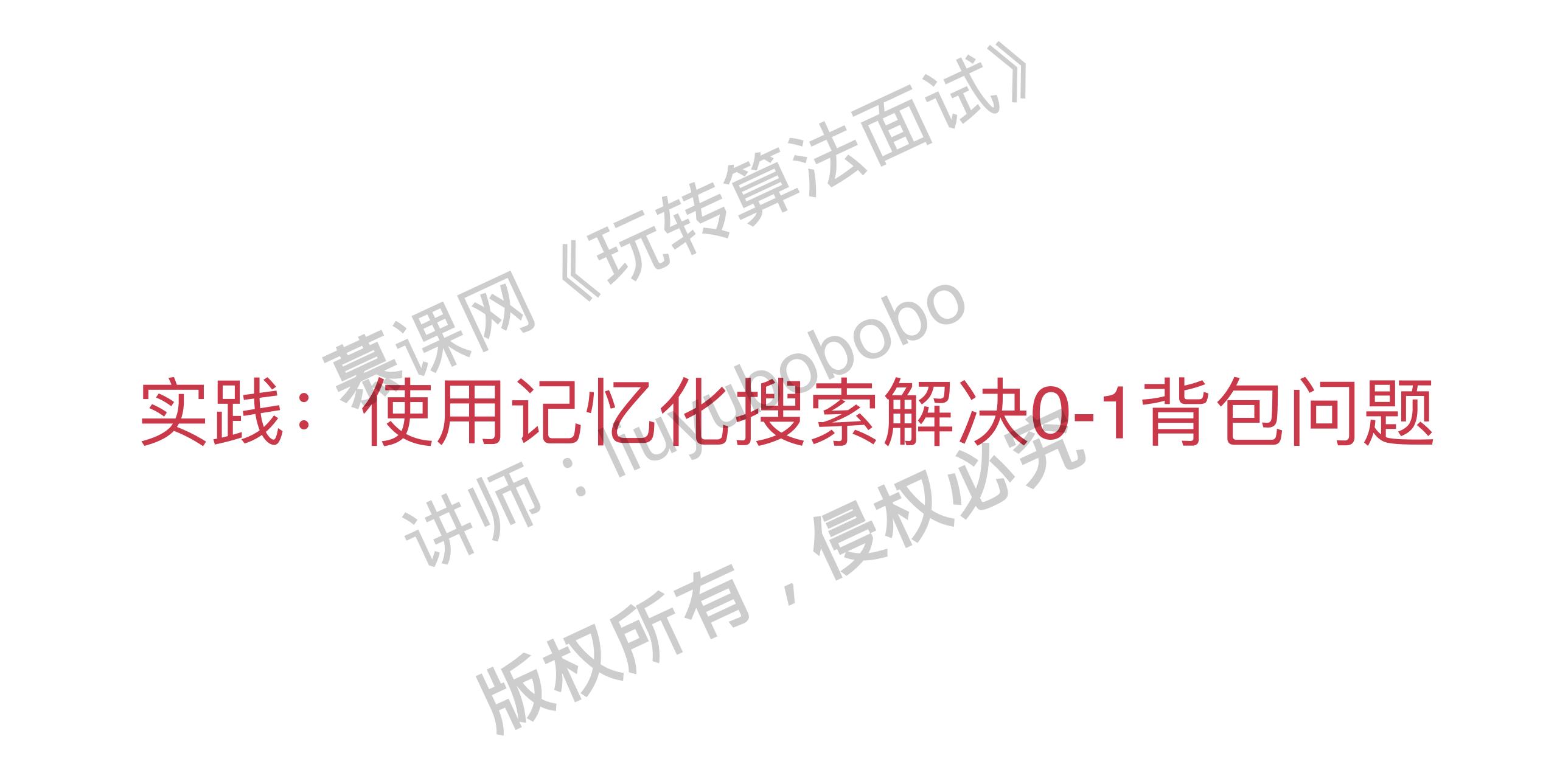
10 + 12 = 22

F(n,C)考虑将n个物品放进容量为C的背包,使得价值最大

$$F(i,c) = F(i-1,c)$$
  
=  $V(i) + F(i-1,c-w(i))$ 

F(i,c) = max(F(i-1,c),v(i)+F(i-1,c-w(i))







|   | 0 |   | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 1 | 0 | 6 |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |



有一个容量为5的背包

|   | 0 1 2  | 4 5 |
|---|--------|-----|
| 0 | 0 6    | 6   |
| 1 | 0 6 10 |     |
| 2 |        |     |



|   | 0 |   | 2  | 3  | 4 | 5 |
|---|---|---|----|----|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6 | 6 |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 |   |   |
| 2 |   |   |    |    |   |   |



|   | 0 |   | 2  | 3 1) | 4  | 5 |
|---|---|---|----|------|----|---|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6    | 6  | 6 |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16   | 16 |   |
| 2 |   |   |    |      |    |   |



|   | 0 |   | 2  | 3 1) | 4  | 5  |
|---|---|---|----|------|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6    | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16   | 16 | 16 |
| 2 |   |   |    |      |    |    |



有一个容量为5的背包

|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 |   |    |    |    |    |



|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 |    |    |    |    |



有一个容量为5的背包

|   | 0 |   | 2  | 3 1) | 4  | 5  |
|---|---|---|----|------|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6    | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16   | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 |      |    |    |

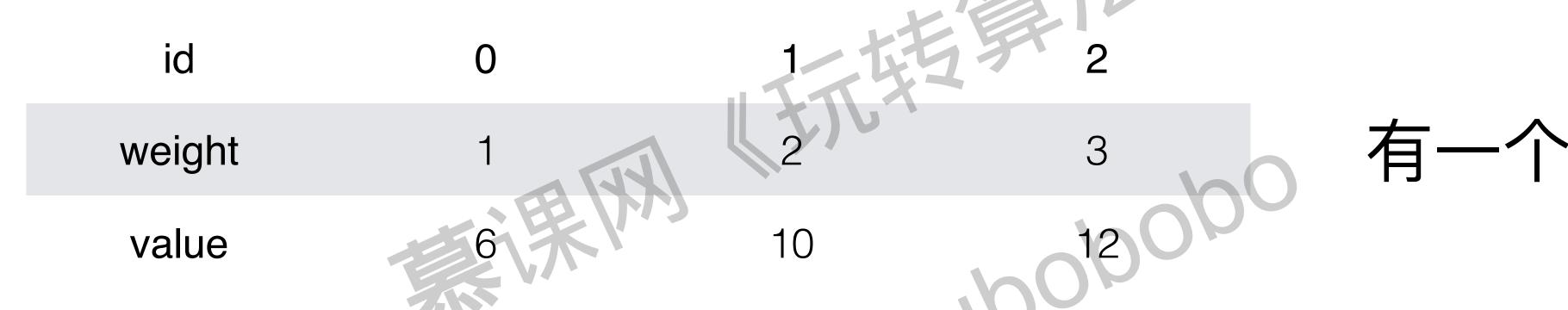


|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 |    |    |



| <del>_</del> |              |    | <b>-</b> 44- | コヒ 人 |    |
|--------------|--------------|----|--------------|------|----|
|              | 容量           |    | <b>)</b> H'\ |      | IJ |
|              | │ <b>│ │</b> | ノン | $\mathbf{J}$ |      |    |

|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 | 18 |    |

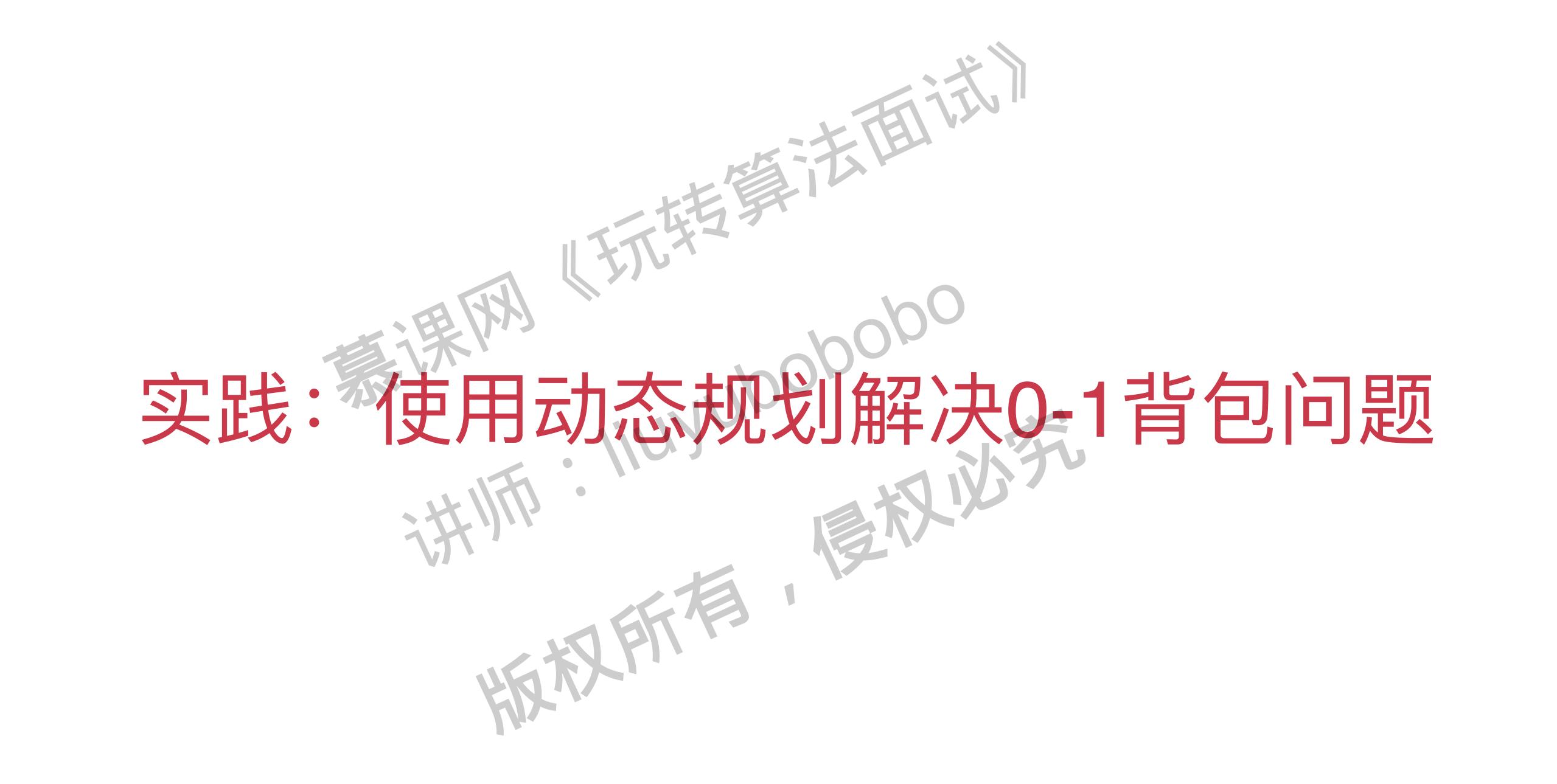


#### 有一个容量为5的背包

|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 | 18 | 22 |

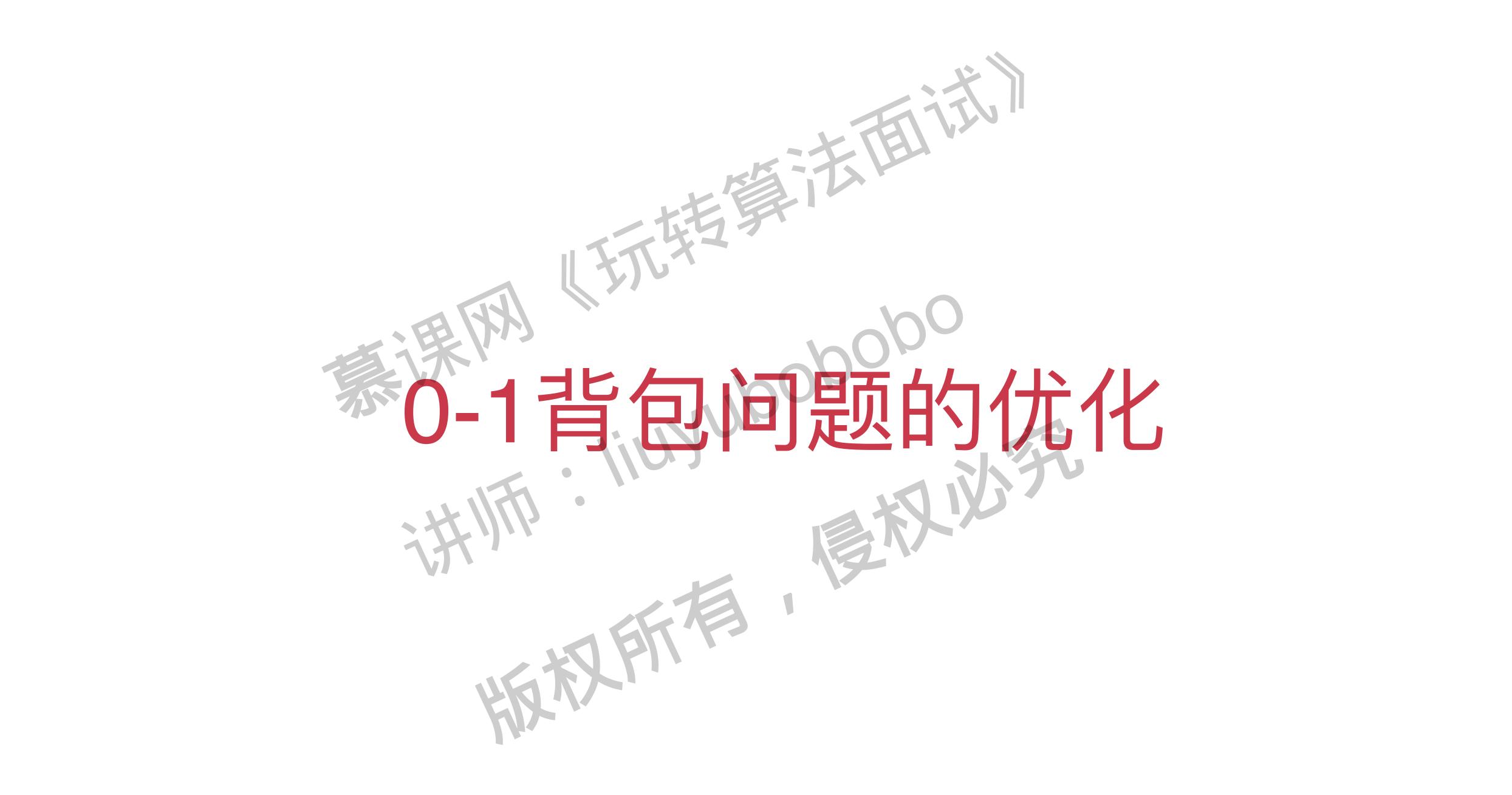


|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 | 18 | 22 |



时间复杂度: O(n\*C)空间复杂度: O(n\*C)





F(n,C)考虑将n个物品放进容量为C的背包,使得价值最大

F(i,c) = max(F(i-1,c),v(i)+F(i-1,c-w(i))

第i行元素只依赖于第i-1行元素。理论上,只需要保持两行元素。

空间复杂度: O(2\*C)=O(C)



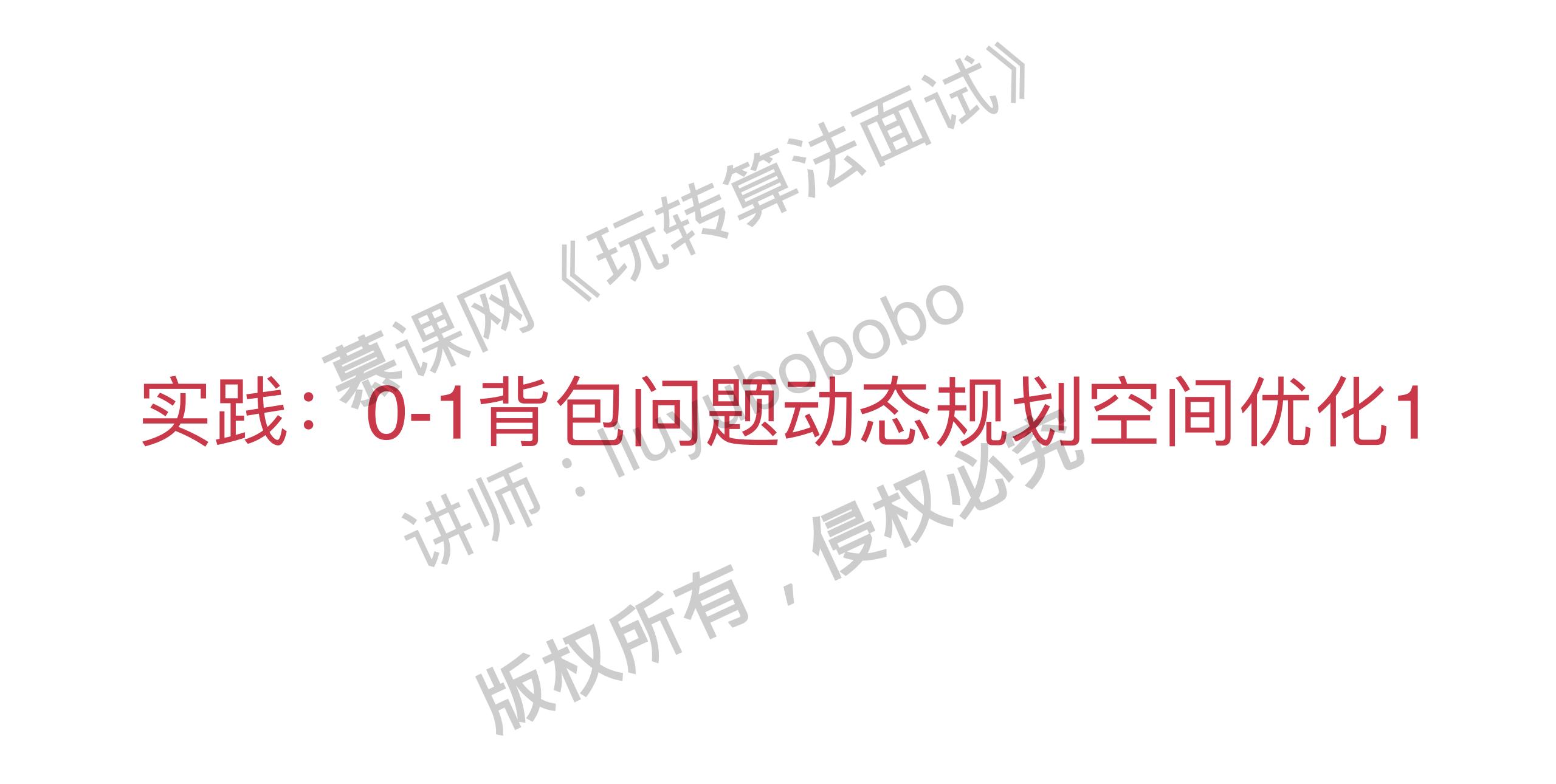
i = 0

0-1背包问题 i=2

i=3

i = 4 (偶数)

i = 3 (奇数)



第i行元素只依赖于第i-1行元素。理论上,只需要保持两行元素。

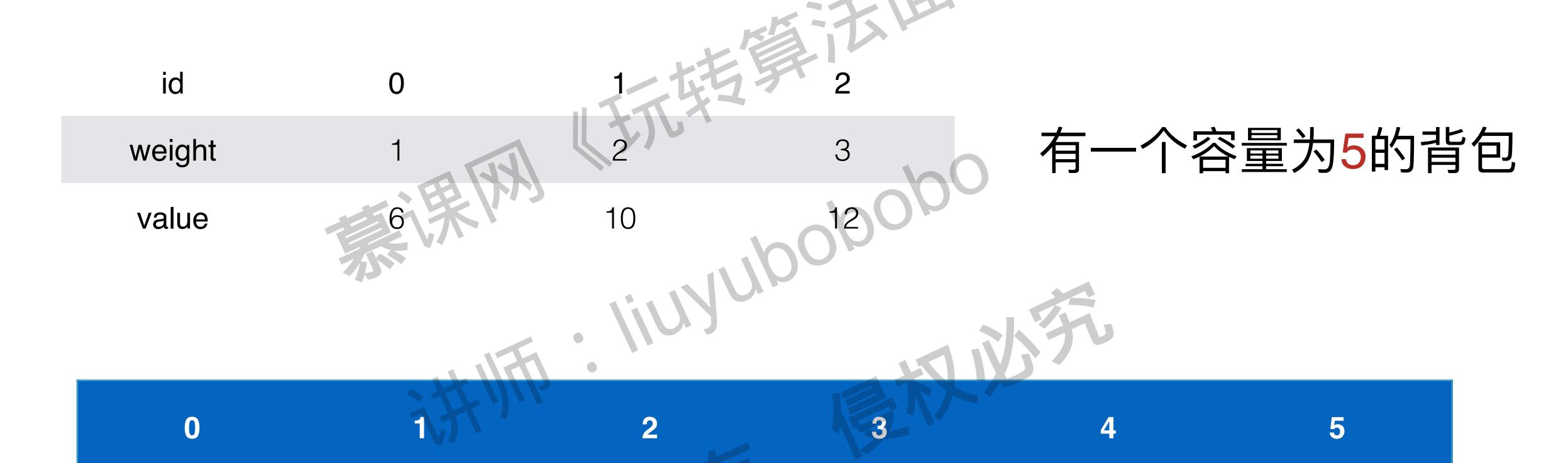
空间复杂度: O(2\*C)=O(C)

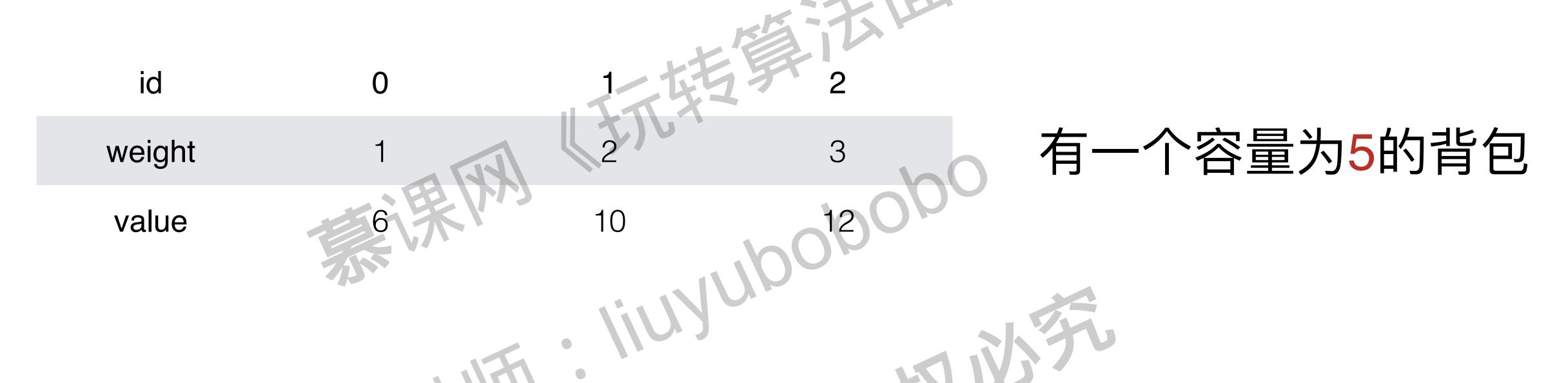
只使用一行大小为C的数组完成动态规划?



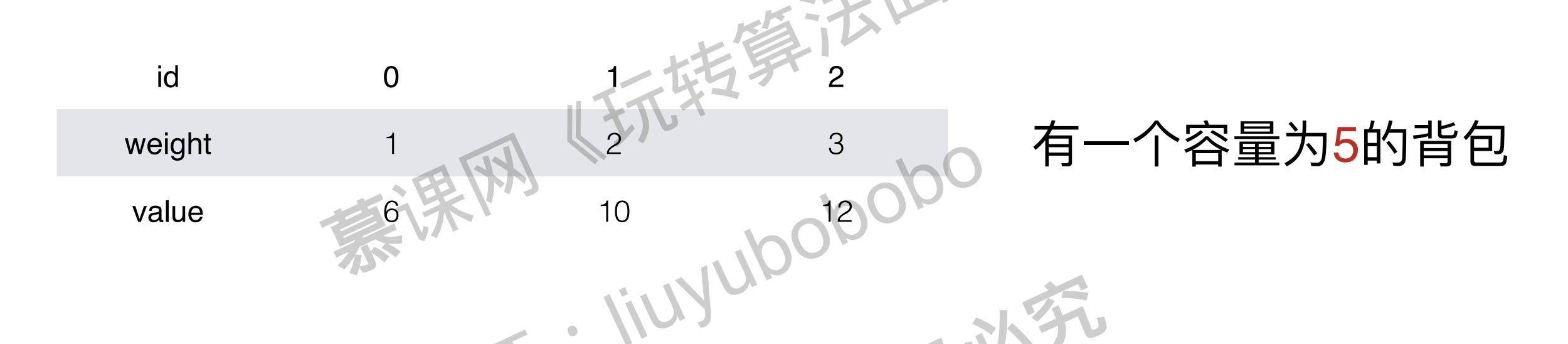


6





| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
|---|---|---|---|---|----|
| 0 | 6 | 6 | 6 | 6 | 16 |

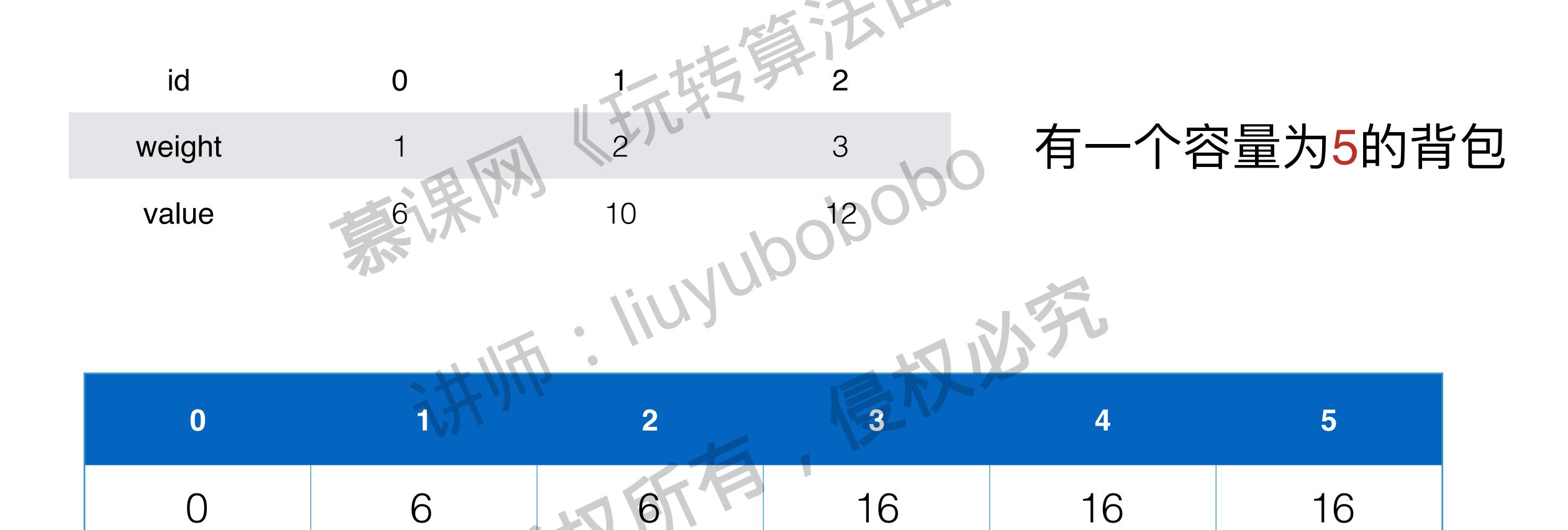


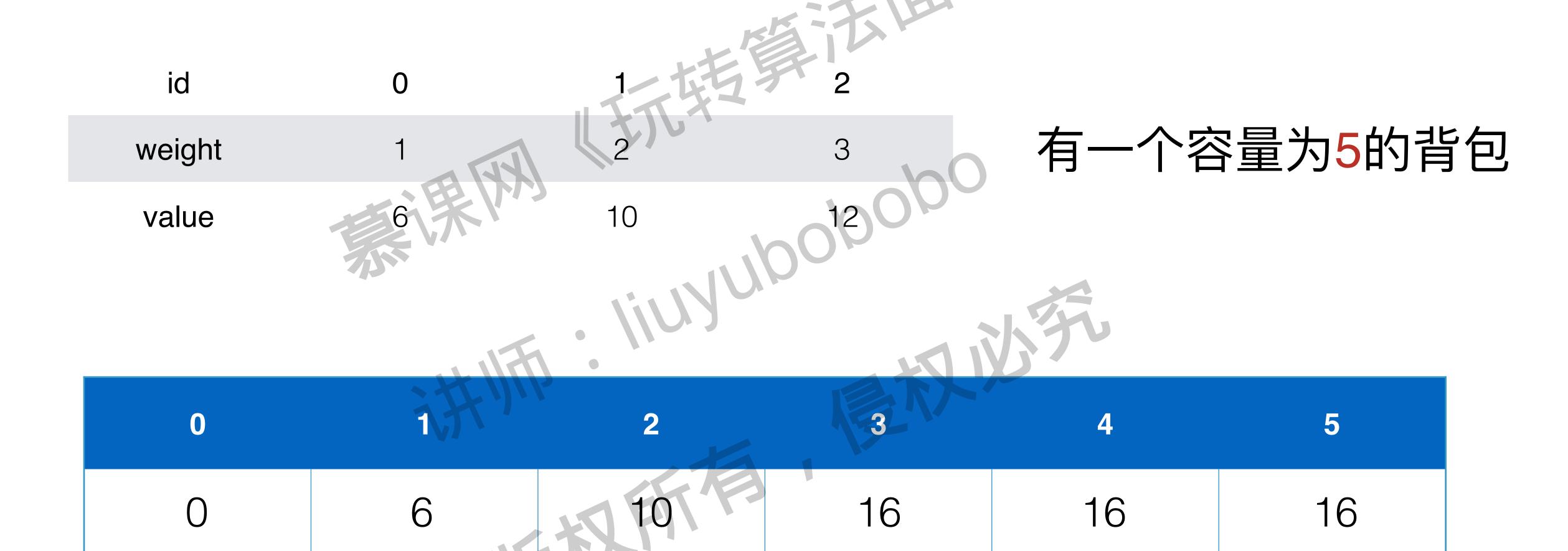
| 0 |   | 2 | 3 | 4  | 5  |
|---|---|---|---|----|----|
| 0 | 6 | 6 | 6 | 16 | 16 |

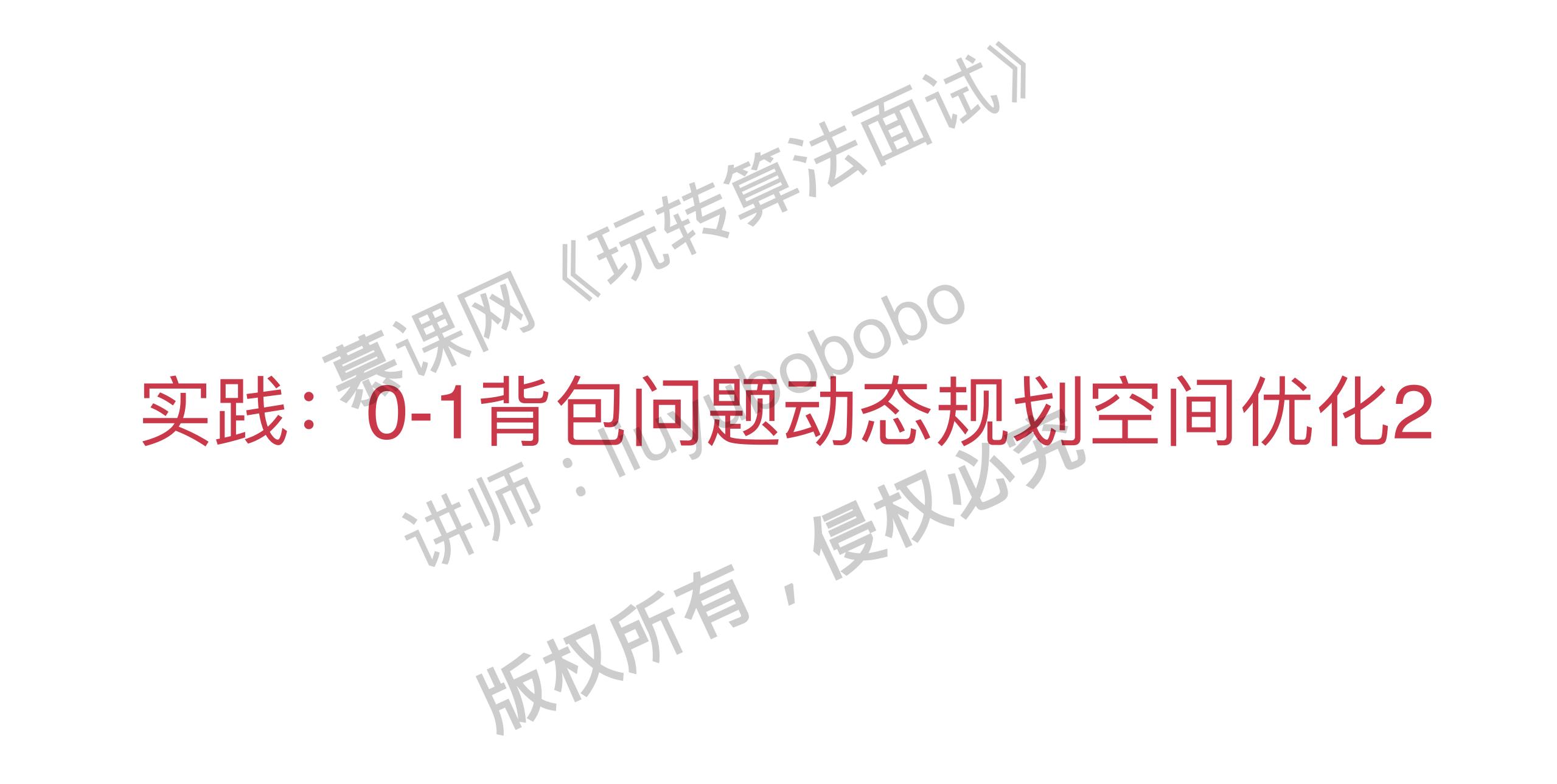


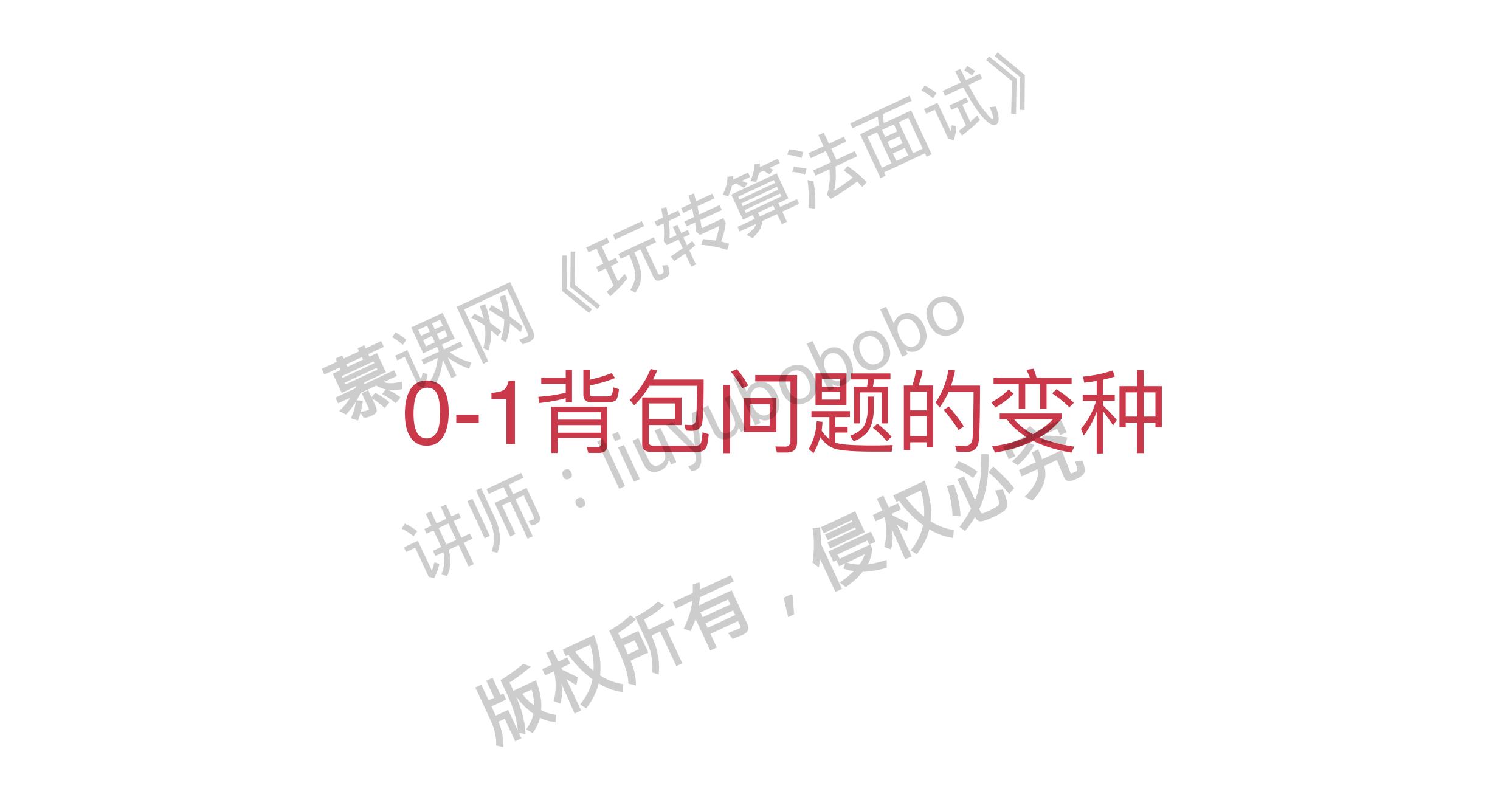
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  |
|---|---|---|---|----|----|
| 0 | 6 | 6 | 6 | 16 | 16 |











## 0-1背包问题更多变种

多重背包问题:每个物品不止1个,有num(i)个。

完全背包问题:每个物品可以无限使用。

# 0-1背包问题更多变种

多维费用背包问题:要考虑物品的体积和重量两个维度?

# 0-1背包问题更多变种

物品间加入更多约束 物品间可以互相排斥;也可以互相依赖

面试中的0-1背包问题

### 416. Partition Equal Subset Sum

给定一个非空数组,其中所有的数字都是正整数。问是否可以将这个数组的 元素分成两部分,使得每部分的数字和相等?

- 如对 [1, 5, 11, 5],可以分成 [1, 5, 5]和[11]两部分,元素和相等,返回true
- 如对[1, 2, 3, 5],无法分成元素和相等的两部分,返回false

#### 416. Partition Equal Subset Sum

典型的背包问题,在n个物品中选出一定物品,填满sum/2的背包

F(n,C)考虑将n个物品填满容量为C的背包

F(i,c) = F(i-1,c) | F(i-1,c-w(i))

时间复杂度: O(n\*sum/2) = O(n\*sum)

### 416. Partition Equal Subset Sum

给定一个非空数组,其中所有的数字都是正整数。问是否可以将这个数组的 元素分成两部分,使得每部分的数字和相等?

- 最多有200个数字
- 每个数字最大为100
- 所有数字和为20000;背包最大为10000;n\*sum/2 = 100\*10000 = 100万

实践: 使用递归解决416



实践:使用动态规划解决416

#### 322. Coin Change

给定不同面值的硬币。问最少需要多少枚硬币,可以凑成指定的金额?算法返回这个数。如果无法凑成指定金额,则返回-1. (可以无限次使用同种面额的硬币。)

- 如给定硬币的面额为 [1, 2, 5],amount = 11,则返回3(5+5+1=11)
- 如给定硬币的面额为 [2], amount = 3, 则返回-1

#### 377. Combination Sum IV

#### facebook



给定一个整数数组,其中元素没有重复。问有多少种可能,使用这个数组中的

数字,凑出一个指定的整数target

- 如 nums = [1, 2, 3], target = 4
- 可能的组合有 [1, 1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 2, 1], [1, 3], [2, 1, 1], [2, 2], [3, 1]
- 算法返回7
- 注意: 顺序性

#### 474. Ones and Zeroes

# Google

给定一个字符串数组。数组中的每个字符串都是一个01串。问用m个0和n个

- 1,最多可以组成数组中的多少个01串?
- 如[10,0001,111001,1,0],
- 给定5个0和3个1,最多可以组成其中的4个元素:10,0001,1,0
- 如[10,0,1],给定1个0和1个1,最多可以组成其中2两个元素,0和1

#### 474. Ones and Zeroes

# Google

给定一个字符串数组。数组中的每个字符串都是一个01串。问用m个0和n个

- 1,最多可以组成数组中的多少个01串?
- m和n不超过100
- 数组中的元素个数不超过600
- 注意: 什么叫组成? 必须用完? 还是有剩余就可以?

#### 139. Word Break













给定一个非空字符串s和一个字符串数组wordDict,问能否使用wordDict中的不同字 符串首尾连接,组成s。假定wordDict中没有重复的字符串。

- 如 s = "leetcode", dict = ["leet", "code"], 则返回true

#### 494. Target Sum

# Google

#### facebook

给定一个非0数字序列,在这些数字前加上+或

者-的符号,使其计算结果为给定的整数S。问

一共有多少种可能。

- 如: nums = [1, 1, 1, 1, 1], S = 3

- 答案为5

$$-1+1+1+1=3$$

$$+1-1+1+1=3$$

$$+1+1-1+1+1 = 3$$

$$+1+1+1-1+1 = 3$$

$$+1+1+1+1-1 = 3$$

最长上升子序列版权所有。

# Microsoft

给定一个整数序列, 求其中的最长上升子序列的长度。

- 如 [10, 9, 2, 5, 3, 7, 101, 18], 其最长上升子序列的长度为4。
- 最长上升子序列为 [2,5,7,101]
- 注意1: 什么是子序列?
- 注意2: 什么是上升?
- 注意3:一个序列可能有多个最长上升子序列;但这个最长的长度只有1个。



给定一个整数序列,求其中的最长上升子序列的长度。

- 如 [10, 9, 2, 5, 3, 7, 101, 18], 其最长上升子序列的长度为4。

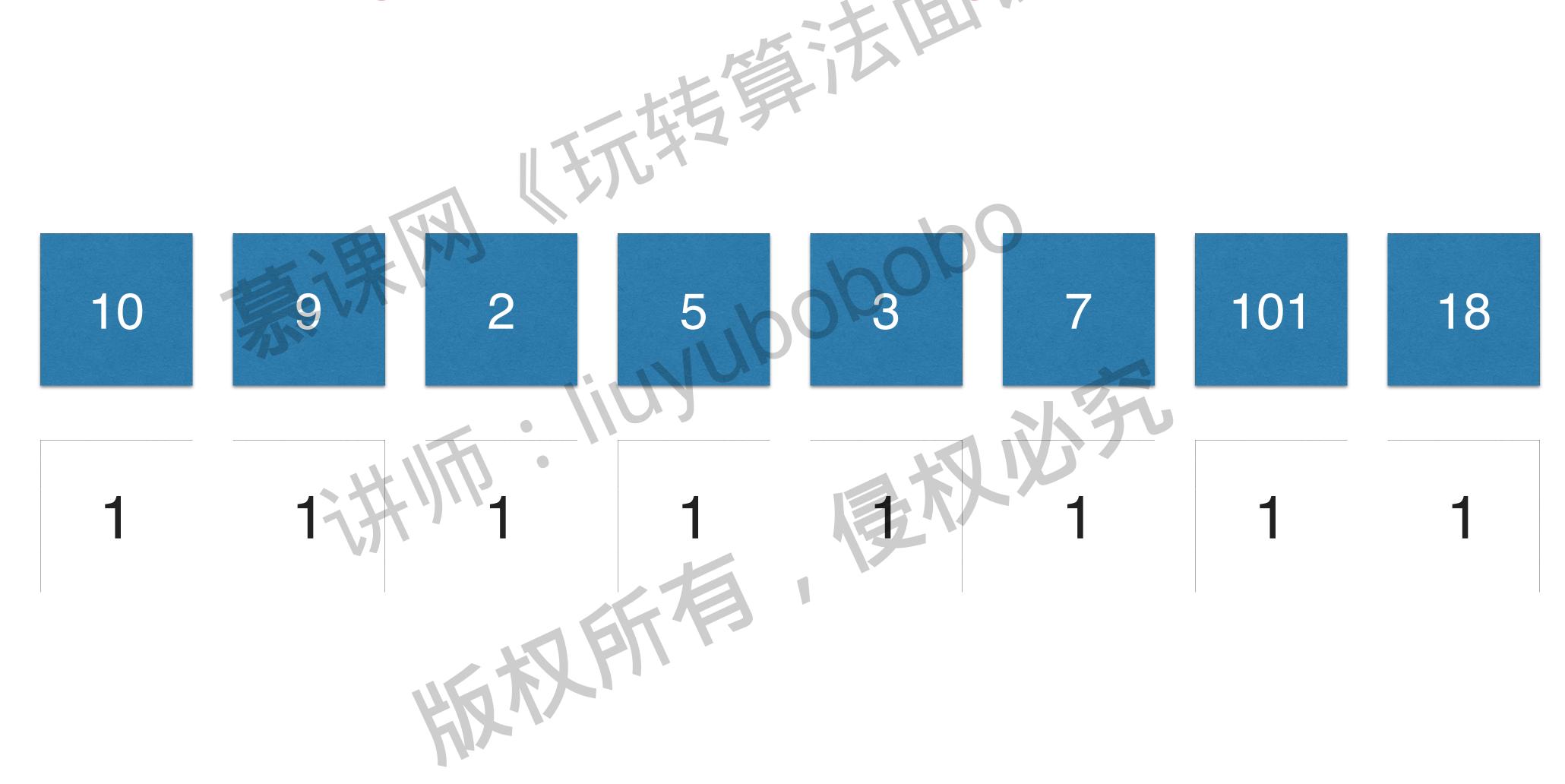
暴力解法:选择所有的子序列进行判断。O((2^n)\*n)

LIS(i)表示以第i个数字为结尾的最长上升子序列的长度

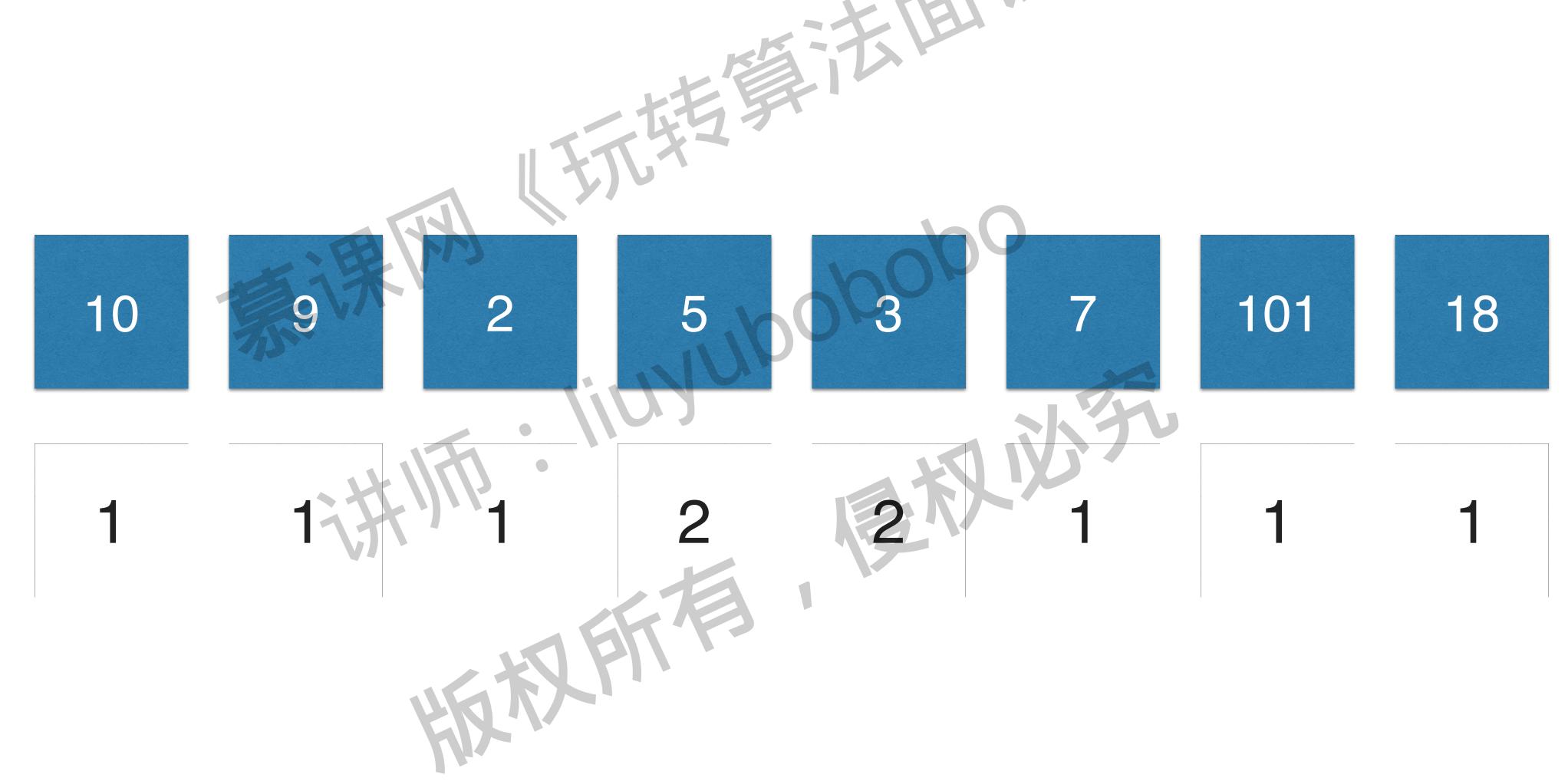
LIS(i)表示[0...i]的范围内,选择数字nums[i]可以获得的最长上升

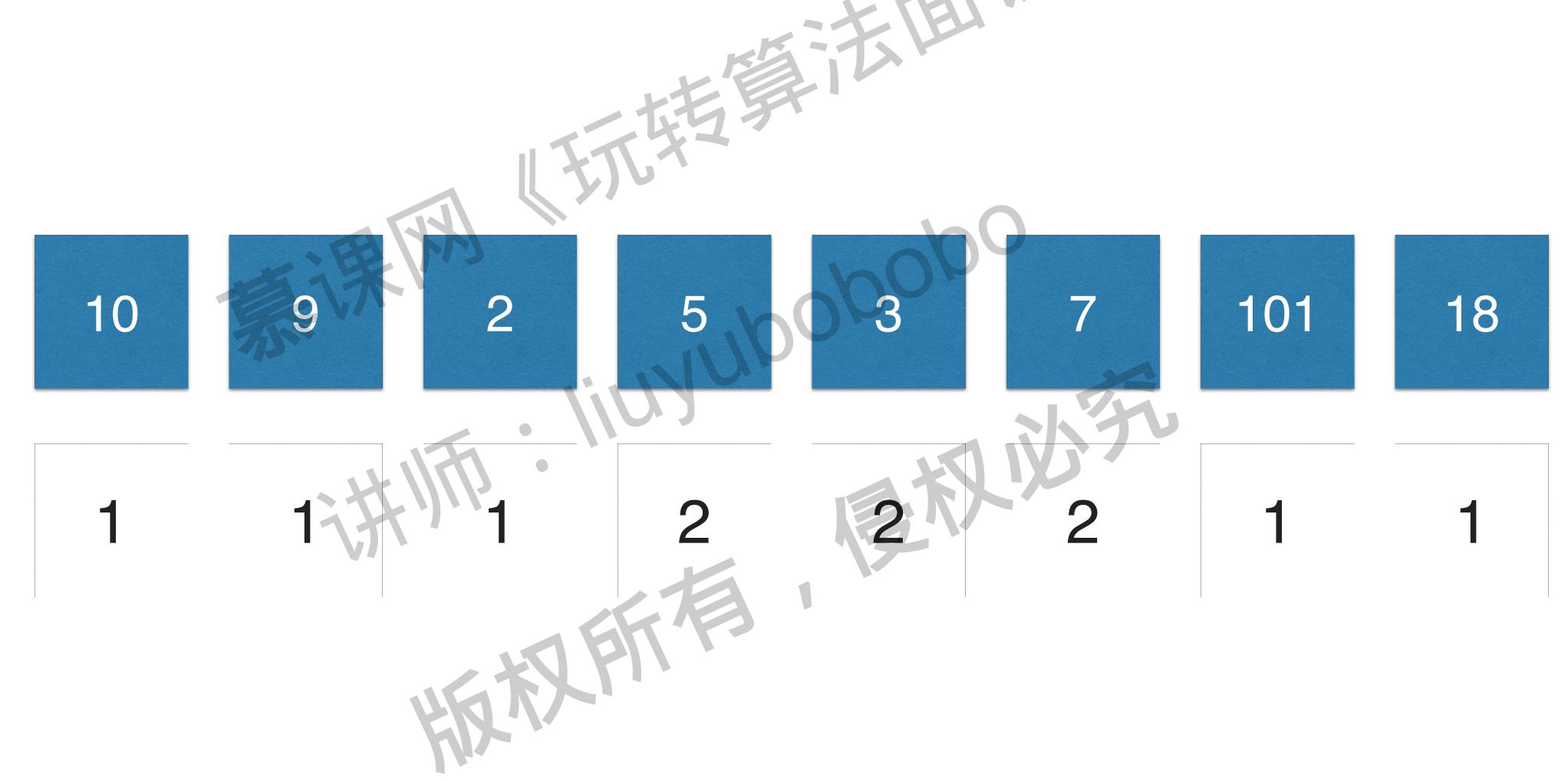
子序列的长度

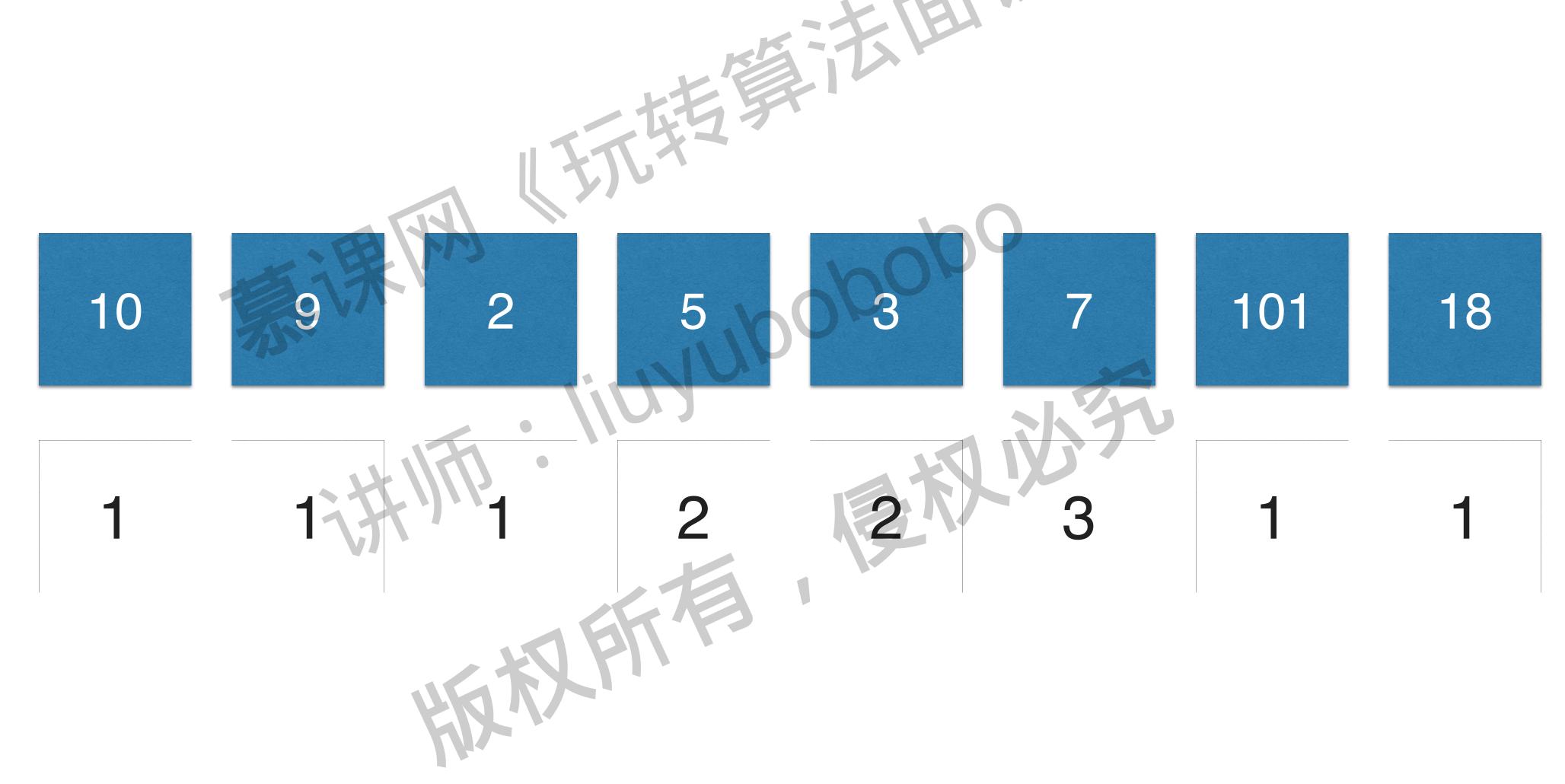
LIS (i) =  $\max_{j < i}$  (1 + LIS(j) if nums[i] > nums[j])























馬源湖 洪师:川山洋 HEAVER I











突践: 动态规划实现 300

LIS问题的O(nlogn)解法

### 376. Wiggle Subsequence

一个序列,它的相邻数字的大小关系是升序降序轮流交替的 初可以是升序,也可以是降序),就称为wiggle sequence。比如 [1, 7, 4, 9, 2, 5] 就是一个wiggle sequence。但是[1, 4, 7, 2, 5] 和 [1, 7, 4, 5, 5] 就不是。给出一个数组,求出他的最长 wiggle sequence 子序列。

更多关于动态规划



给出两个字符串S1和S2, 求这两个字符串的最长公共子序列的长度

S1 = AAACCGTGAGTTATTCGTTCTAGAA

S2 = CACCCCTAAGGTACCTTTGGTTC

S1 = ABCD

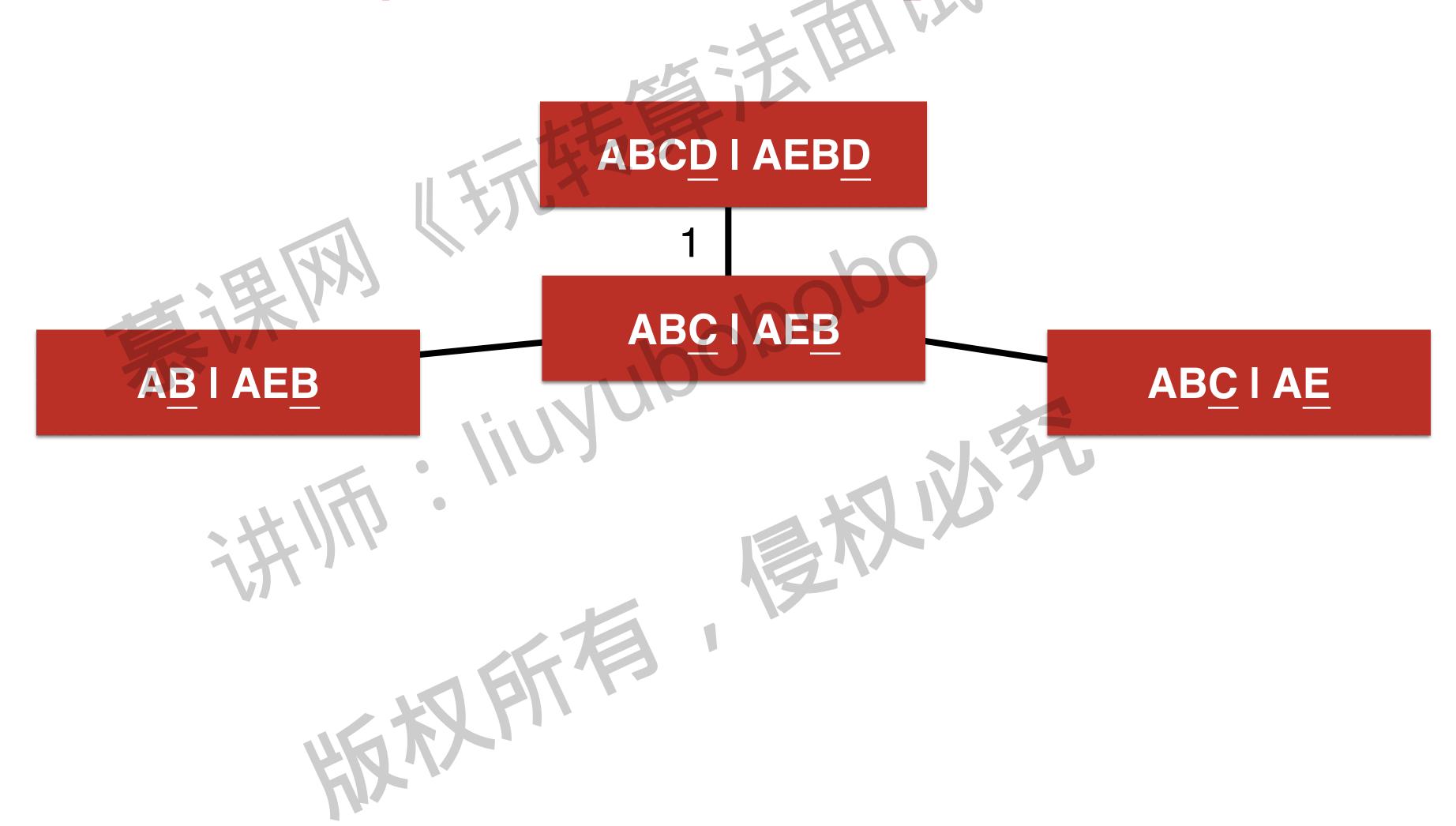
S2 = AEBD

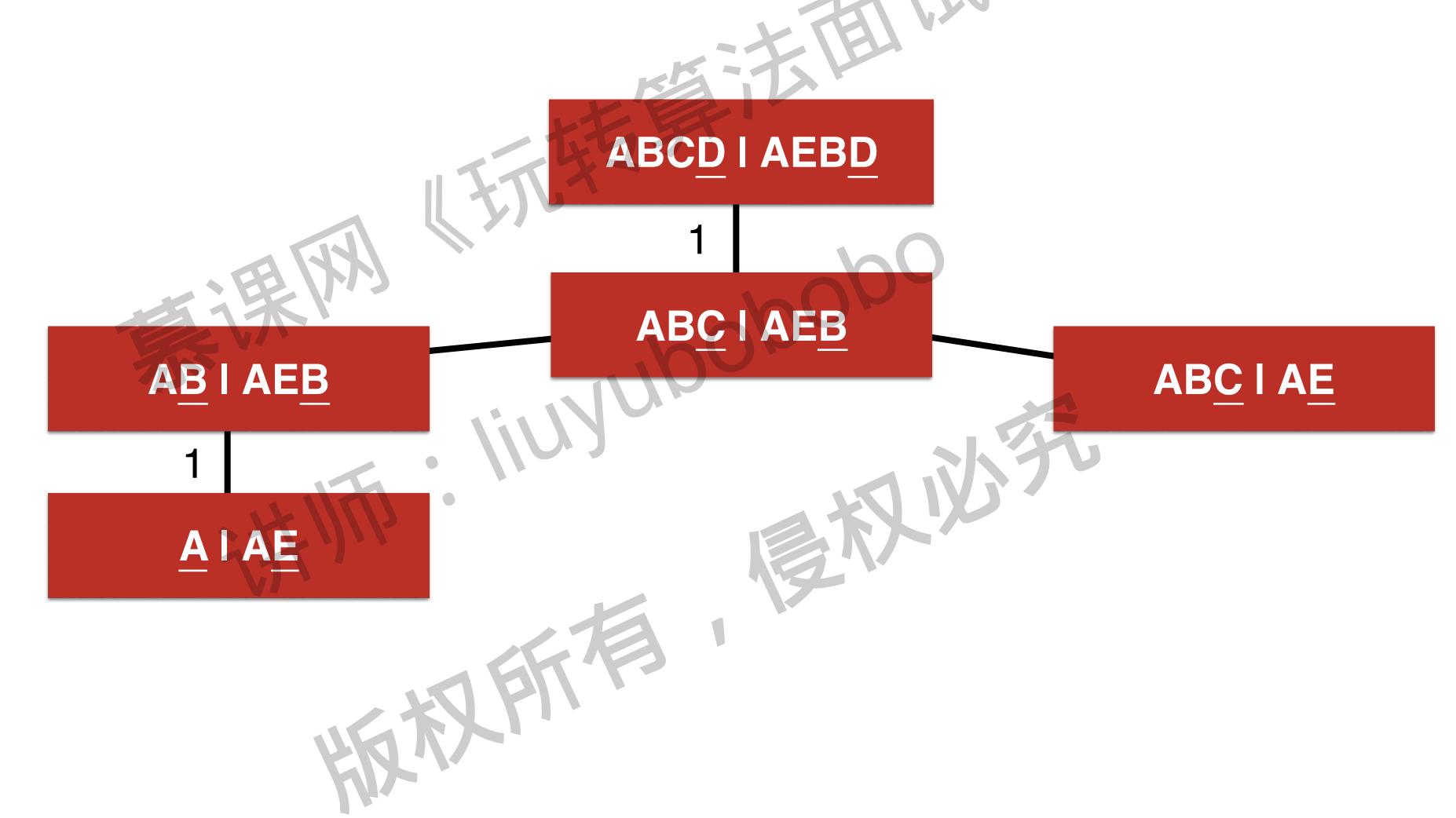
LCS(m,n)S1[0...m]和S2[0...n]的最长公共子序列的长度

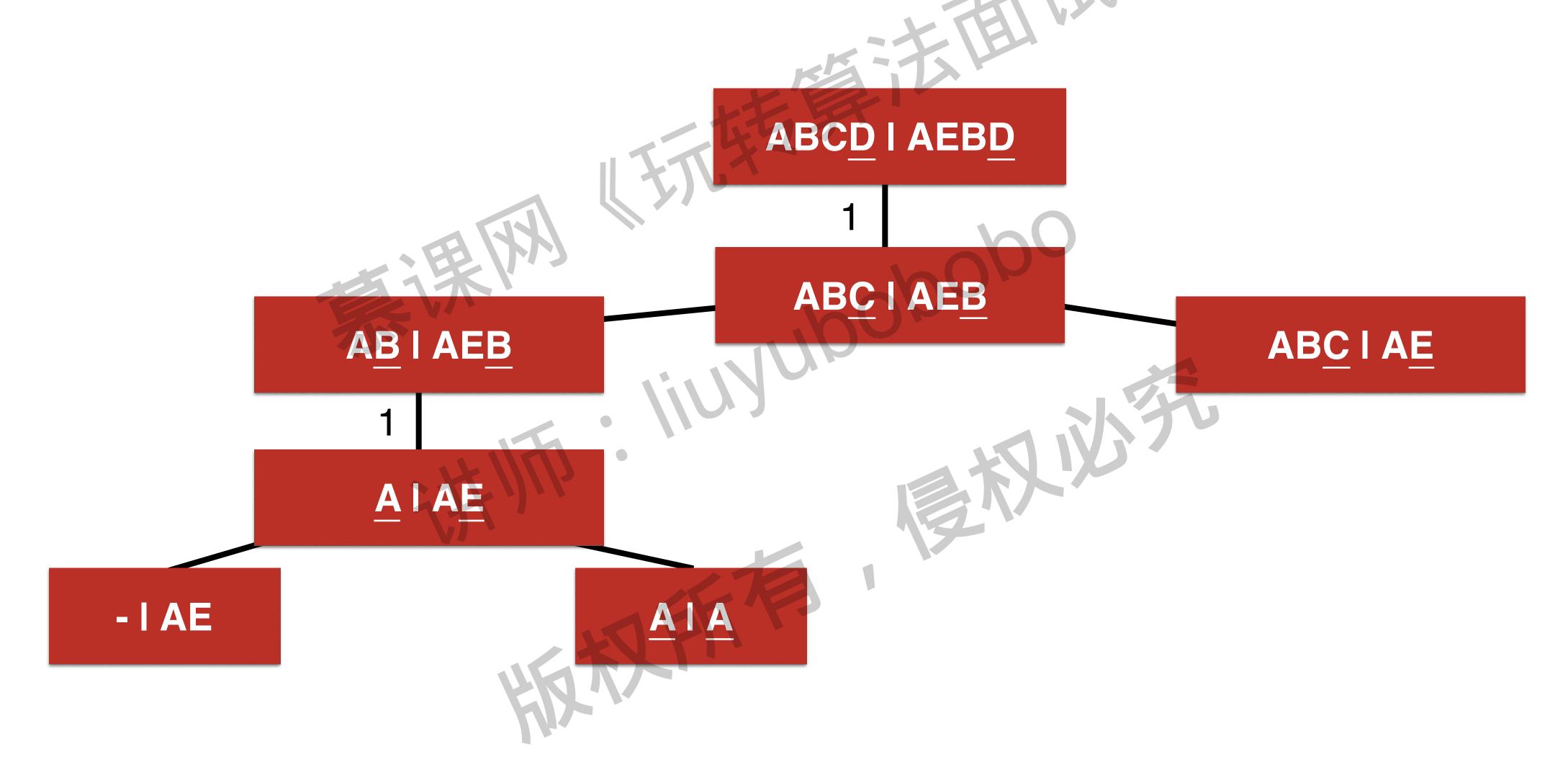
```
S1[m] == S2[n]:
LCS(m,n) = 1 + LCS(m-1,n-1)
S1[m] != S2[n]:
LCS(m,n) = max(LCS(m-1,n) , LCS(m,n-1) )
```

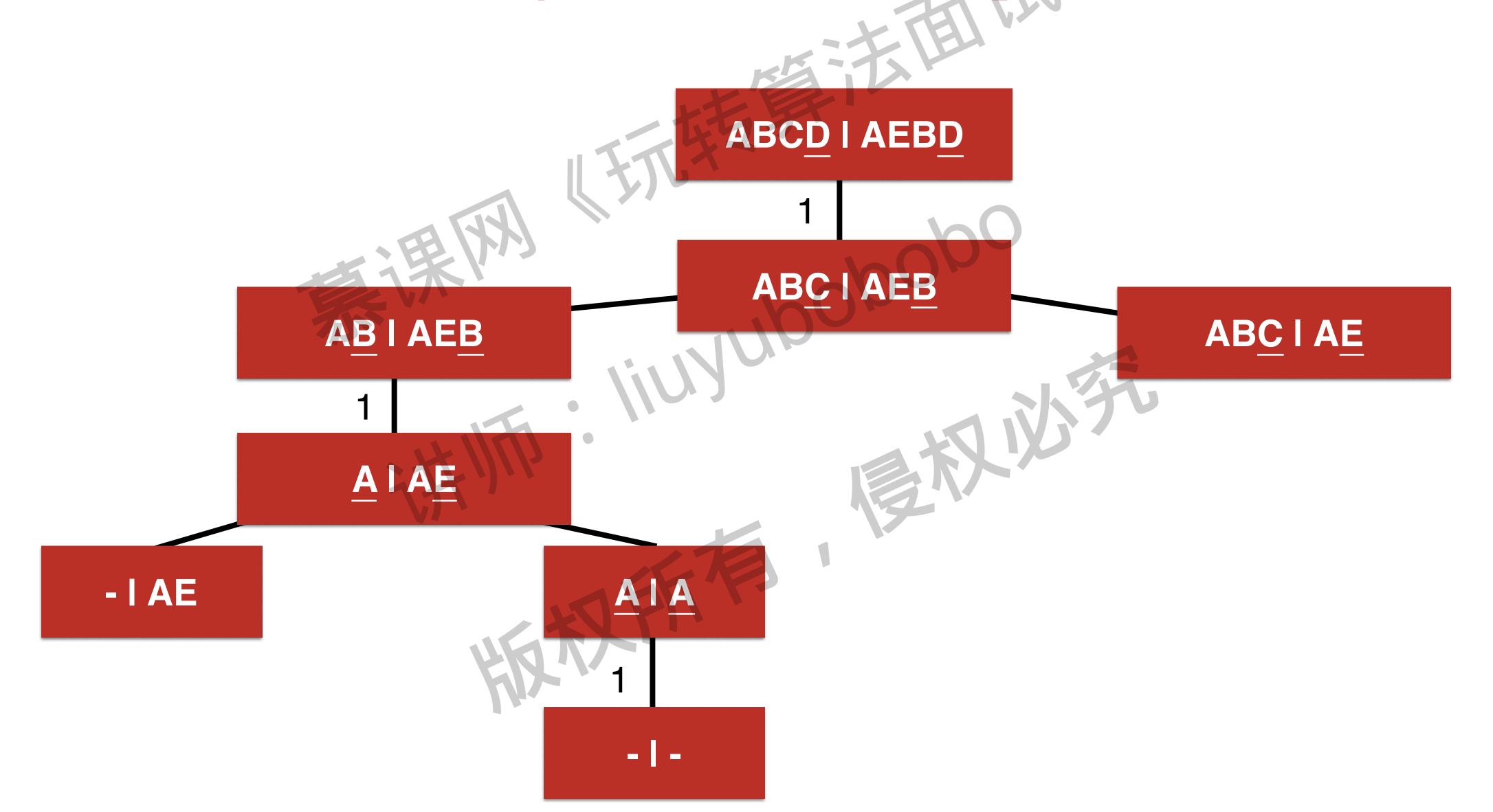
最长公共子序列 ABC<u>D</u> I AEB<u>D</u> HIM. IIIIA 假拟肝病

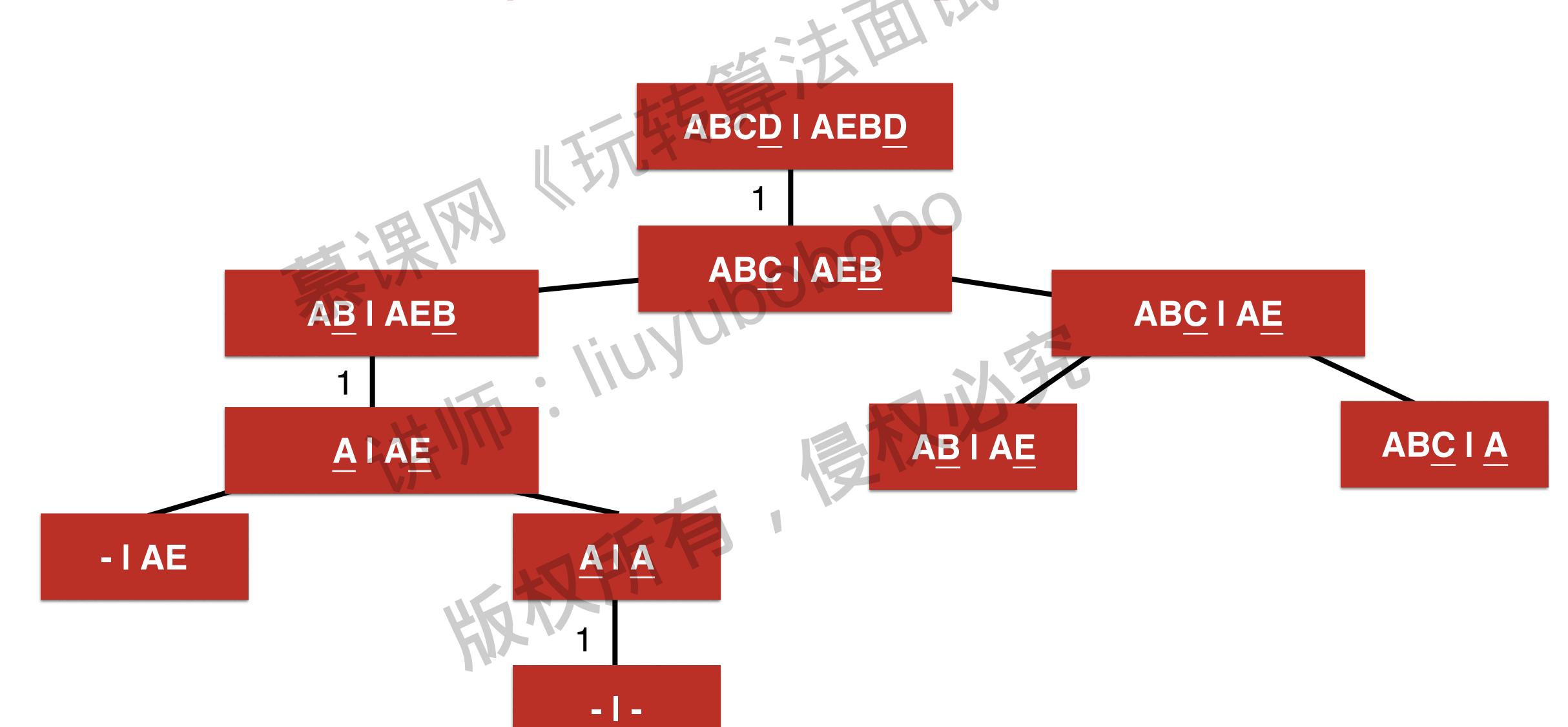


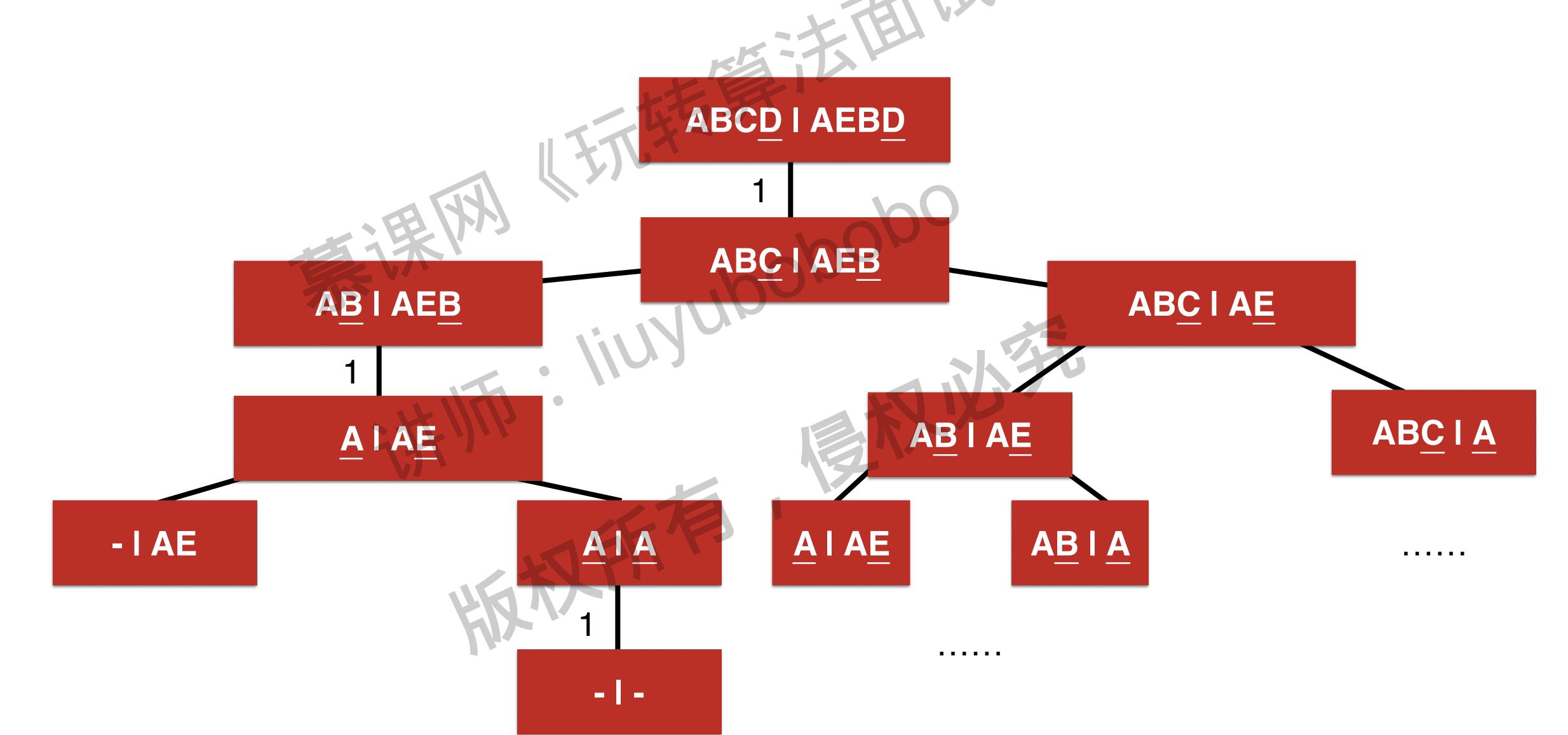












练习:成文解LCS问题

### dijkstra 单源最短路径算法也是动态规划

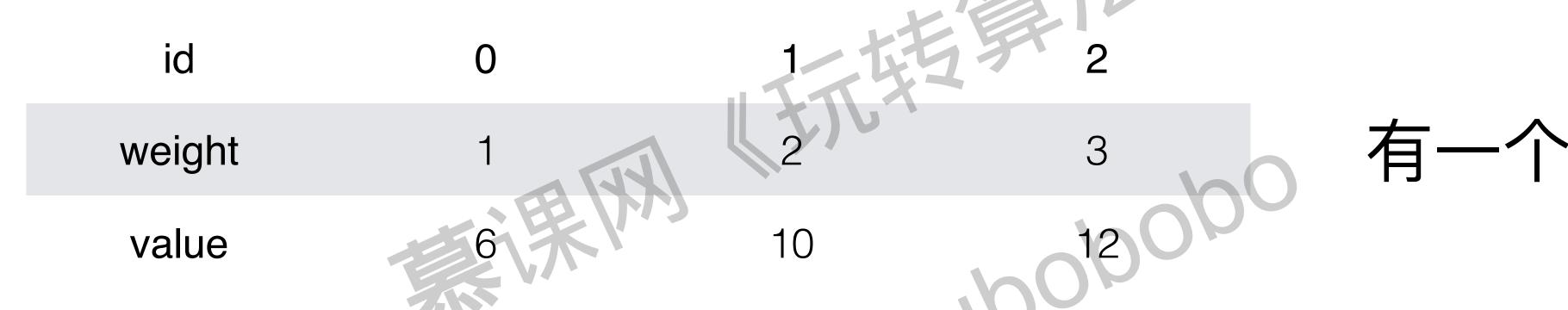
shortestPath(i) 为从start到i的最短路径长度

shortestPath(x) = min(shortestPath(a) + w(a->x))

练习:复习单源最短路径算法

动态规划给出具体解





### 有一个容量为5的背包

|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 | 18 | 22 |



|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 | 18 | 22 |



|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 | 18 | 22 |



|   | 0 |   | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 6 | 6  | 6  | 6  | 6  |
| 1 | 0 | 6 | 10 | 16 | 16 | 16 |
| 2 | 0 | 6 | 10 | 16 | 18 | 22 |



课玩儿转算法面试 版权所liuyubobobo