Metode pentru rezolvarea sau aproximarea soluţiilor sistemelor de ecuaţii liniare

Norme de vectori şi norme de matrici

Fie $m \in N^*$. Pe spaţiul R^m se consideră normele vectoriale uzuale $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ şi $\|\cdot\|_\infty$ definite prin

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|\,;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}\,;$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |x_i|\,,\ \forall\, x = (x_i)_{1\le i\le m} \in \mathbf{R}^m.$$

Fie $M_m(R)$ spaţiul matricelor cu m linii şi m coloane cu elemente din R. Pe $M_m(R)$ se pot considera norme definite ca norme de operator liniar

$$\|A\|_{\alpha\beta} := \sup_{\|x\|_\alpha \le 1} \|Ax\|_\beta,\ \forall\, A \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$$

unde $\|\cdot\|_\alpha$ şi $\|\cdot\|_\beta$ sunt norme pe R^m. În cazul în care $\alpha = \beta$ notăm $\|A\|_\alpha := \|A\|_{\alpha\alpha}$ şi o numim norma α a matricei A (subordonată normei vectoriale $\|\cdot\|_\alpha$).

Propoziţia -1.1 *Fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m} \in M_m(R)$. Atunci $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.*

Propoziţia -1.2 *Fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m} \in M_m(R)$. Atunci $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$.*

Propoziţia -1.3 *Fie $A \in M_m(R)$. Atunci $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$, unde $\rho(A^tA)$ reprezintă cea mai mare valoare proprie a matricei A^tA.*

Exemplul -1.1 *Fie*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

Atunci

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}| =$$

$$= \max\left(|1|+|4|+|7|, |-2|+|-5|+|-8|, |3|+|6|+|9|\right) = \max(12, 15, 18) = 18$$

şi

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}| =$$

$$= \max\left(|1|+|-2|+|3|, |4|+|-5|+|6|, |7|+|-8|+|9|\right) = \max(6, 15, 24) = 24.$$

Condiţionarea unui sistem de ecuaţii liniare

Fenomenul de instabilitate manifestat în diverse procese matematice este important de studiat , dat fiind limitările tehnicii de calcul sau ale măsurătorilor de unde provin datele de calcul. Un exemplu cum este cel care urmează scoate în evidenţă existenţa unui astfel de fenomen şi motivaţia studiului său.

Exemplul -1.2 *Fie sistemul de ecuaţii* $Ax = b$ *unde*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \qquad \textit{cu soluţia} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considerăm sistemul perturbat $A(x + \delta x) = b + \delta b$ *unde*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b + \delta b = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix}$$

$$cu\ soluţia\ x + \delta x = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Considerăm şi sistemul perturbat $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ *unde*

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$cu\ soluţia\ x + \Delta x = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Sistemul (1) diferă de cel iniţial printr-o "mică" variaţie a coloanei termenilor liberi, iar sistemul (2) printr-o "mică" variaţie a elementelor matricei. După cum se observă aceste "mici" variaţii antrenează după sine variaţii "mari" ale soluţiei iniţiale.

Exemplul -1.3 *Dacă considerăm sistemul perturbat* $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$ *unde*

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix} \quad b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix}$$

$$atunci\ acesta\ are\ soluţia\ x + \Delta x = \begin{pmatrix} 332,90 \\ -550,49 \\ 143,88 \\ -84,58 \end{pmatrix} \tag{3}$$

În legătură cu această problemă de stabilitate a sistemelor de ecuaţii liniare sunt cunoscute următoarele rezultate:

Definiţia -1.1 *Fie A o matrice nesingulară şi $\| \ \|$ o normă a matricei A. Numărul $cond(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ se numeşte indice de condiţionare al matricei A relativ la norma $\| \ \|$.*

Teorema -1.1 *Fie sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$ şi sistemul perturbat $A(x+\delta x) = b + \delta b$. Presupunem $b \neq 0$. Atunci*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\,. \tag{4}$$

şi

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{cond(A)} \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

În plus există $b \neq 0$ şi $\delta b \neq 0$ astfel încât inegalitatea (4) să devină egalitate.

Teorema -1.2 *Fie sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$ şi sistemul perturbat $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$. Atunci*

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq cond(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\,. \tag{5}$$

În plus există $b \neq 0$ şi $\Delta A \neq 0$ astfel încât inegalitatea (5) să devină egalitate.

Teorema -1.3 *Fie sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$ şi sistemul perturbat $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Dacă $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$, atunci*

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

Exemplul -1.4 *Vom considera cazul sistemului (1) şi vom lucra cu norma infinit.*

Avem:

$$\|\delta x\|_\infty = \|x + \delta x - x\|_\infty = 13,6$$

$$\|x\|_\infty = 1.$$

Atunci

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{13,6}{1} = 13,6$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 33, \ \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 136.$$

Rezultă că

$$cond(A) := \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 33 \cdot 136 = 4488$$

Avem

$$\|\delta b\|_\infty = \|b + \delta b - b\|_\infty = 0,1.$$

$$\|b\|_\infty = 33..$$

Atunci

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{0,1}{33} = \frac{1}{330}$$

şi

$$cond(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 4488 \cdot \frac{1}{330} = 13,6$$

Deci

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = cond(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

Exemplul -1.5 *Fie sistemul de ecuaţii $Ax = b$ unde*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{cu soluţia} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considerăm sistemul perturbat $A(x + \delta x) = b + \delta b$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad b + \delta b = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 25 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{cu soluţia } x + \delta x = \begin{pmatrix} 832 \\ 1324 \\ -2407 \\ 2021 \end{pmatrix}$$

Exemplul -1.6 *Un alt exemplu de matrici cu un indice de condiţionare mare sunt matricele Hilbert (H_n) de ordinul n, definite astfel:*

$$H_n = (h_{ij}^{(n)})_{i,j=\overline{1,n}} \text{ cu } h_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \ \forall\ i, j = \overline{1, n}$$

Astfel $cond_1(H_3) = 748$, $cond_1(H_4) = 28375$, $cond_1(H_5) = 943656$, $cond_1(H_6) = 29070279$, $cond_1(H_7) = 985194886$, $cond_1(H_8) = 33872791095$, $cond_1(H_{10}) = 35357439251992 = 3.5357439251992 \cdot 10^{13}$, $cond_1(H_{20}) = 6.283579684317887 \cdot 10^{28}$, $cond_1(H_{50}) = 4.330343748573601 \cdot 10^{74}$, $cond_1(H_{100}) = 1.267220787492374 \cdot 10^{151}$.

Exemplul -1.7 *Fie $A(p) = (a_{ij}^{(p)})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{N})$ cu $a_{ij}^{(p)} = C_{p+j-1}^{i-1}$, $\forall\ i, j = \overline{1, n}$. Notam cu $B(p) = (b_{ij}^{(p)})_{i,j=\overline{1,n}} = A(p)^{-1}$ inversa matricei $A(p)$. Avem*

$$b_{ij}^{(p)} = (-1)^{i+j} \cdot \sum_{k=0}^{n-j} C_{p+k-1}^{k} C_{k+j-1}^{i-1} \ \forall i, j = \overline{1, n}$$

(cu conventia $C^0_{-1} = 1$ si $C^s_r = 0$ pentru $r < s$ sau $s < 0$). Pentru $n = 10$ norma ∞ a matricei $A(20)$ este 29860259, *iar norma ∞ a matricei $B(20)$ este* 1514268756, *deci $cond_\infty(A(20)) = 29860259 * 1514268756 \simeq 4.5216 * 10^{16} > cond_\infty(H_{10}) = 3.5357439251992 \cdot 10^{13}$.*

Metode directe

Metoda lui Gauss (cu pivotare parţială)

Se dau $m \in \mathbf{N}^*$ şi $A = (a_{ij}) \in M_{m,m+1}(\mathbf{R})$. Fie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = a_{1,m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m = a_{m,m+1} \end{cases}$$

cu necunoscutele $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$. Metoda lui Gauss este folosită atât pentru determinarea soluţiei sistemului, cât şi pentru calculul determinantului matricei sistemului..

Sistemul dat se transformă în $m-1$ etape astfel:

Iniţial se consideră determinantul matricei sistemului $\det = 1$

Pentru n între 1 şi $m-1$ se efectuează următoarele:

- Se determină $max = |a_{sn}| = \max\limits_{n \le i \le m} |a_{in}|$ ($s \in \overline{n,m}$ reprezintă poziţia pe care s-a găsit maximul).
- Se ia $piv = a_{sn}$ (elementul a_{sn} se numeşte pivot).
- Dacă $piv = 0$, atunci metoda nu se aplică.
- $det = det \cdot piv$.

- Dacă $s \neq n$, atunci $det = (-1) \cdot det$ şi se permută ecuaţia s cu ecuaţia n.
- Coeficienţii ecuaţiei n se împart la piv.
- Pentru $\forall i \in \overline{n+1, m}$ se elimină x_n din ecuaţia i astfel: $a_{ij} = a_{ij} - a_{in} \cdot a_{nj}$, $\forall\, j \in \overline{m+1, n}$.

Procedând astfel se obţine un sistem de forma:

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j &= a_{i,m+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \\ a_{mm} x_m &= a_{m,m+1} \end{cases} \tag{6}$$

Determinantul matricei sistemului se calculează astfel: $det = det \cdot a_{mm}$.

Dacă $a_{mm} = 0$, atuci metoda nu se aplică.

Se rezolvă sistemul (6) astfel:

- $x_m = a_{m,m+1}/a_{m,m}$;
- $x_i = a_{i,m+1} - \sum\limits_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j$, $\forall\, i \in \overline{m-1, 1}$.

Exemplul -1.8 *Fie sistemul de ecuaţii liniare*

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z &= 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z &= 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z &= 3 \end{cases}$$

Să se calculeze determinantul matricei sistemului şi să se rezolve sistemul cu metoda lui Gauss.

Folosind transformările date de metoda lui Gauss, obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z &= 1 \\ y + z &= 18 \\ \frac{1}{180}z &= \frac{7}{6} \end{cases}$$

Calculăm determinantul matricei sistemului (tot cu algoritmul dat de metoda lui Gauss) det $= \frac{1}{2160}$ şi rezolvăm sistemul anterior. Obţinem $z = 210$, $y = -192$, $x = 27$.

Observaţie: Alegerea pivotului ca cel mai mare element de pe coloană se face pentru a minimiza erorile care apar dacă pivotul are valori mici. Dacă considerăm sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x + 592y = 437 \\ 592x + 4308y = 2251 \end{cases}$$

şi dacă considerăm că lucrăm numai cu 4 cifre exacte, atunci prin alegerea pivotului elementul 1,prin metoda lui Gauss se obţine soluţia

$$x = -1,6128, \;\; y = 0,7409$$

iar prin alegera pivotului elementul 592, prin metoda lui Gauss se obţine soluţia

$$x = -1,5891, \;\; y = 0,7409$$

pe când soluţia exactă a sistemului este

$$x = -1.58889055801431, \;\; y = 0.74085961242908.$$

Metoda lui Gauss (cu pivotare totală)

Se dau $m \in \mathbf{N}^*$ şi $A = (a_{ij}) \in M_{m,m+1}(\mathbf{R})$. Fie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = a_{1,m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m = a_{m,m+1} \end{cases}$$

cu necunoscutele $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$. La metoda lui Gauss cu pivotare totală căutarea pivotului se face în toată matricea rămasă de transformat (reamintim că, la pivotarea parţială, pivotul se caută numai pe prima coloană a matricei rămase de transformat).

Sistemul dat se transformă în $m - 1$ etape astfel:

Iniţial se consideră determinantul matricei sistemului det = 1

Pentru n între 1 şi $m-1$ se efectuează următoarele:

- Se determină $max = |a_{ps}| = \max\limits_{n \leq i,j \leq m} |a_{ij}|$ ($s, p \in \overline{n, m}$ reprezintă indicii de poziţie ai maximului determinat).
- Se ia $piv = a_{ps}$ (elementul a_{ps} se numeşte pivot)
- Dacă $piv = 0$, atunci metoda nu se aplică.
- $det = det \cdot piv$.
- Dacă $p = n$ sau $s = n$ (dar nu $p = s = n$), atunci $det = (-1) \cdot det$ şi se permută coloana s cu coloana n (dacă $p = n$) sau linia p cu linia n (dacă $s = n$). Dacă $p \neq n$ şi $s \neq n$ se permută linia p cu linia n şi apoi coloana s cu coloana n.
- Ecuaţia n se împarte la piv.
- Pentru $\forall i \in \overline{n+1, m}$ se elimină x_n din ecuaţia i astfel: $a_{ij} = a_{ij} - a_{in} \cdot a_{nj}$, $\forall\, j \in \overline{m+1, n}$.

Procedând astfel se obţine un sistem de forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'_i + \sum\limits_{j=i+1}^{m} a_{ij} x'_j & = & a_{i,m+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \\ a_{mm} x'_m & = & a_{m,m+1} \end{array} \right. \tag{7}$$

Determinantul matricei sistemului se calculează astfel: $det = det \cdot a_{mm}$.

Dacă $a_{mm} = 0$, atuci metoda nu se aplică.

Se rezolvă sistemul (7) astfel:

- $x'_m = a_{m,m+1}/a_{m,m}$;

- $x'_i = a_{i,m+1} - \sum\limits_{j=i+1}^{m} a_{ij}x'_j$, $\forall\, i \in \overline{m-1,1}$.

unde $(x'_1, \ldots, x'_m)$ este o permutare a soluţiei $(x_1, \ldots, x_m)$ sistemului iniţial (după cum s-au permutat coloanele matricei iniţiale în procesul de transformare a sistemului).

Exemplul -1.9 *Folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală, să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare:*

$$\begin{cases} 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \\ x + 2y + 4z = 31 \end{cases} \tag{8}$$

Să se calculeze şi determinantul matricei sistemului.

Folosind transformările date de metoda lui Gauss cu pivotare totală, obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + \frac{2}{5}z + \frac{1}{5}y & = & \frac{29}{5} \\ \\ z + \frac{1}{2}y & = & 7 \\ \\ -\frac{3}{2}y & = & -6 \end{cases}$$

Calculăm determinantul matricei sistemului (tot cu algoritmul dat de metoda lui Gauss) det $= -27$ şi rezolvăm sistemul anterior. Obţinem $z = 5$, $y = 4$, $x = 3$.

Metoda lui Gauss-Jordan de calcul a inversei unei matrice

Se dau $m \in N^*$ şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Metoda lui Gauss-Jordan este folosită pentru determinarea inversei matricei A (dacă aceasta există). Se consideră ansamblul matriceal compus din matricea A şi matricea unitate I_m

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1m} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

Ansamblul anterior se transformă (analog metodei Gauss - cu pivotare parţială sau totală) astfel:

Pentru n între 1 şi m se efectuează următoarele:

- Se determină pivotul piv ca la metoda lui Gauss de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare cu pivotare parţială (analog se poate descrie un algoritm folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală).
- Dacă $piv = 0$, atunci metoda nu se aplică.
- Dacă $s \neq n$, atunci se permută ecuaţia s cu ecuaţia n.
- Ecuaţia n se împarte la piv.
- Pentru $\forall\ i \in \overline{n+1, m}$ se elimină x_n din ecuaţia i astfel: $a_{ij} = a_{ij} - a_{in} \cdot a_{nj}$, $\forall\ j \in \overline{2m, n}$.

Procedând astfel se obţine un ansamblu matricial de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \ldots & a_{1,2m} \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2m} & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \ldots & a_{2,2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \ldots & a_{m,2m} \end{array}\right)$$

(matricea din partea dreaptă are cel puţin $n(n-1)/2$ zerouri).

Pentru n între m şi 2 se efectuează următoarele:

- Pentru $\forall\ i \in \overline{n-1,1}$ se recalculează elementele a_{ij} astfel: $a_{ij} = a_{ij} - a_{in} \cdot a_{nj}$, $\forall\ j \in \overline{2m,n}$.

Precedând astfel se obţine un ansamblu matricial de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{array}\right).$$

Matricea

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

are liniile matricei inverse A^{-1} modulo permutarea liniilor descrisă în algoritm.

Rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare $Ax = b$ este echivalentă, după ce s-a calculat inversa matricei A, cu egalitatea $x = A^{-1}b$.

Exemplul -1.10 *Folosind metoda Gauss-Jordan să se calculeze inversa matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Formăm ansamblul matriceal

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cu transformările din algoritm obţinem:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}\right)$$

iar, în final,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}\right)$$

Deci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

Factorizarea LU

Se numeşte factorizare LU a unei matrice A descompunerea matricei ca produs de două matrici, una inferior triunghiulară (notată L), alta superior triunghiulară (notată U), adică $A = LU$. Descompunerea, dacă este posibilă, nu este unică.

Teorema -1.4 *Fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ o matrice astfel încât determinanţii "de colţ" $\Delta_k := \det((a_{ij})_{1\le i,j\le k})$ să fie nenuli, pentru orice $k = \overline{1,m}$. Atunci A se descompune unic sub forma $A = LU$ cu $L = (l_{ij})_{1\le i,j\le m}$ inferior triunghiulară şi $U = (u_{ij})_{1\le i,j\le m}$ superior triunghiulară cu elementele diagole egale cu* 1.

Calculul elementelor matricelor L şi U se face după formulele:

$$l_{i1} = a_{i1},\ i = \overline{1,m},\ u_{11} = 1,\ u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}},\ j = \overline{2,m}. \tag{9}$$

iar, pentru $k = \overline{2, m}$,

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk}, \; i = \overline{k, m}, \; u_{kk} = 1, \quad u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj}}{l_{kk}}, \; j = \overline{k+1, m}. \quad (10)$$

Fie un sistem de ecuaţii liniare $Ax = b$, pentru care A admite factorizare LU. Atunci soluţia y a sistemului $Ly = b$ se determină astfel:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}} \qquad \forall i = \overline{1, m}$$

Soluţia x a sistemului iniţial se determină astfel:

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{m} u_{ik} x_k \qquad \forall i = \overline{m, 1}$$

Exemplul -1.11 *Să se factorizeze sub forma LU matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se verifică mai întâi că determinanţii de colţ ai matricei A sunt nenuli. Cu formulele (9) şi (10) se obţine:

$$l_{11} = 2, \; l_{21} = -1, \; l_{31} = 4, \; l_{41} = 0$$

$$u_{11} = 1, \; u_{12} = 2, \; u_{13} = -1, \; u_{14} = 0$$

$$l_{22} = 1, \; l_{32} = -3, \; l_{42} = 1$$

$$u_{22} = 1, \; u_{23} = 1, \; u_{24} = 3$$

$$l_{33} = 5, \; l_{43} = 2$$

$$u_{33} = 1, \; u_{34} = 0$$

$$l_{44} = 1$$

$$u_{44} = 1$$

Deci

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metoda rădăcinii pătrate (Cholesky)

Definiţia -1.2 *O matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ se numeşte simetrică dacă $A = A^t$. Matricea A este pozitiv definită dacă determinanţii "de colţ" $\Delta_k := \det((a_{ij})_{1 \le i,j \le k})$ sunt strict pozitivi pentru orice $k = \overline{1,m}$.*

Teorema -1.5 *Fie A simetrică şi pozitiv definită. Atunci A se descompune unic sub forma $A = L \cdot L^t$ cu $L = (l_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ inferior triunghiulară.*

Fie sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$, cu $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{R})$ simetrică şi pozitiv definită, iar $b = (b_i) \in \mathbb{R}^m$.

Descompunem $A = L \cdot L^t$ cu $L = (l_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ matrice superior triunghiulară. Se determină mai întâi $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ soluţia sistemului de ecuaţii $Ly = b$ şi apoi soluţia $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ a sistemului iniţial se determină prin rezolvarea sistemului $L^t x = y$.

Se calculează elementele matricei L astfel:

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \quad \text{şi} \quad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \qquad \forall i = \overline{j+1,m}, \forall j = \overline{1,m} \tag{11}$$

Soluţia y a sistemului $Ly = b$ se determină astfel:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}} \qquad \forall i = \overline{1, m} \tag{12}$$

Soluţia x a sistemului iniţial se determină astfel:

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{m} l_{ki} x_k}{l_{ii}} \qquad \forall i = \overline{m, 1} \tag{13}$$

Dacă matricea A nu este simetrică şi pozitiv definită, dar este inversabilă, atunci sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$ se transformă în sistemul echivalent $A^t Ax = A^t b$, a cărui matrice este simetrică şi pozitiv definită.

Exemplul -1.12 *Folosind metoda rădăcinii pătrate, să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare* $Ax = b$ *cu*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Se verifică imediat că matricea A este simetrică şi pozitiv definită. Cu formulele (11) se obţine

$$l_{11} = 2,\ l_{12} = 1,\ l_{13} = 1$$

$$l_{22} = 3,\ l_{23} = 1$$

$$l_{33} = 2$$

Din (12) rezultă că

$$y_1 = 4,\ y_2 = 4,\ y_3 = 2$$

iar din (13) rezultă că

$$x_3 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$$

Descompunerea QR

Se consideră date $m \in \mathbf{N}^*$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$ şi $b = (b_i)_{i=\overline{1,m}} \in \mathbf{R}^m$. Vom calcula soluţia $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ a sistemului $Ax = b$ şi determinantul matricei sistemului folosind factorizarea QR.

Factorizarea QR a matricei A înseamnă descompunerea $A = QR$ cu Q matrice ortogonală, adică $QQ^t = Q^tQ = \mathbf{I}_m$ şi R matricea superior triunghiulară.

Dacă notăm $Q = (q_{ij})$ cu $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} q_{ik}q_{jk} = \delta_{ij}$ şi $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij}$ pentru $i, j = \overline{1,m}$ şi $R = (r_{ij})$ cu $r_{ij} = 0$ pentru $1 \leq j < i \leq m$, atunci din identificarea $A = QR$ se obţin relaţiile următoare:

$$\begin{cases} r_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + \cdots + a_{m1}^2}\,, \\ \\ q_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{r_{11}}\,, \quad \text{pentru } i = \overline{1,m} \end{cases}$$

şi pentru $k = \overline{2,m}$ avem:

$$\begin{cases} r_{jk} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ik}q_{ij}\,, \quad \text{pentru } j = \overline{1,k-1} \\ \\ r_{kk} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ik}^2 - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}^2}\,, \\ \\ q_{ik} = \dfrac{1}{r_{kk}}\left(a_{ik} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} r_{jk}q_{ij}\right)\,, \quad \text{pentru } i = \overline{1,m}\,. \end{cases} \tag{14}$$

Rezolvarea sistemului după descompunerea matricei A în produs QR se face astfel:

- rezolvăm întâi sistemul $Qy = b$ a cărui soluţie este

$$y = Q^t b,$$

sau pe componente:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} q_{ji}b_j\,, \quad i = \overline{1,m}.$$

- apoi, rezolvăm sistemul triunghiular $Rx = y$, şi obţinem:

$$x_m = \frac{y_m}{r_{mm}}, \qquad x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(y_i - \sum_{j=i+1}^{m} r_{ij}x_j\right) \quad , i = \overline{m-1, 1}\,. \tag{15}$$

Observaţie. Descompunerea QR nu există dacă există un $k \in \overline{1, m}$ astfel încât $r_{kk} = 0$ în (14) sau (15).

Exemplul -1.13 *Pentru* $m = 3$ *, matricea* $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *şi vectorul* $b = \begin{pmatrix} 23 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}$*, rezolvaţi sistemul* $Ax = b$ *folosind o descompunere* QR*.*

Folosind relaţiile de mai sus obţinem:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar pentru soluţie

$$y = Q^t b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 23 \\ 3 \end{pmatrix},$$

iar din $Rx = y$ rezultă:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

Metoda lui Jacobi

Fie $m \in N^*,\ A \in M_m(R),\ b \in R^m$.

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$. Notăm cu I matricea unitate din $M_m(R)$ şi cu $B := I - A$. Sistemul de ecuaţii $Ax = b$ se transformă echivalent astfel:

$$Ax = b \Longleftrightarrow (I - B)x = b \Longleftrightarrow x = Bx + b.$$

Pentru orice $x^{(0)} \in R^m$ definim şirul (numit şir Jacobi) $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ prin relaţia de recurenţă

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + b,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Fie $\|\cdot\|$ o normă pe $M_m(R)$. Dacă $\|B\| = q < 1$ atunci avem evaluările:

$$\|x^{(n)} - x\| \leq \frac{q}{1-q}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|,\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

(în particular $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$).

Algoritm: Dacă $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, $b = (b_i)_{1\leq i\leq m}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{1\leq i\leq m}$, $\forall\, n \in N$, atunci $b_{ij} = -a_{ij}$ dacă $i \neq j$, $b_{ii} = 1 - a_{ii}$, $\forall\, 1 \leq i,j \leq m$. Dacă pe R^m considerăm norma $\|\cdot\|_1$, atunci $q := \|B\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq m} \sum\limits_{i=1}^{m} |b_{ij}|$, iar dacă considerăm norma $\|\cdot\|_\infty$ atunci $q := \|B\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq m} \sum\limits_{j=1}^{m} |b_{ij}|$. Se testează condiţia de aplicabilitate a metodei $q < 1$. În caz de aplicabilitate se atribuie iteratei iniţiale $x^{(0)}$ o valoare oarecare din R^m, iar calculul celorlalte iterate se face după formula:

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j^{(n)} + b_i,\ \forall\, 1 \leq i \leq m,\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Se opreşte calculul recursiv la iterata $x^{(n+1)}$ pentru care

$$\frac{q}{1-q}\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_p \leq \boldsymbol{\varepsilon},$$

unde $p = 1$ sau $p = \infty$, iar ε este eroarea de aproximaţie dorită.

Exemplul -1.14 *Să se arate că se poate aplica metoda lui Jacobi (relativă la normele*

1 şi ∞) pentru sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$ cu

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ -0,2 & 0,8 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & -0,3 & 0,7 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 2 \\ 2,4 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Luând $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *să se determine numărul de iteraţii necesar pentru a aproxima soluţia sistemului cu o eroare mai mică de* 10^{-10}.

Avem

$$B = I - A = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 & -0,2 & -0,3 \\ 0,2 & 0,2 & -0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Atunci

$$\|B\|_{\mathbf{1}} = \max_{1 \le j \le 4} \sum_{i=1}^{4} |b_{ij}| = 0,9 < 1.,$$

şi

$$\|B\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le 4} \sum_{j=1}^{4} |b_{ij}| = 0,9 < 1$$

Deci metoda lui Jacobi se aplică. Din formula de evaluare a erorii avem:

$$\|x^{(n)} - x\|_p \le \frac{q^n}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_p, \; \forall n \in \mathbf{N}^*$$

unde $p = 1$ sau $p = \infty$, $q = 0,9$, $x^{(1)} = Bx^{(0)} + b = b$. Deci, pentru a aproxima x cu $x^{(n)}$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-10}$ este suficient ca $\frac{q^n}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_p < \varepsilon$. Avem

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 = \|b\|_1 = 9,5$$

şi

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \|b\|_\infty = 3,6$$

Atunci

$$\frac{q^n}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 < \varepsilon \Longleftrightarrow n = \left[\log_{0,9}\frac{\varepsilon}{95}\right] + 1$$

şi

$$\frac{q^n}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty < \varepsilon \Longleftrightarrow n = \left[\log_{0,9}\frac{\varepsilon}{36}\right] + 1$$

Metoda lui Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii

Fie $m \in N^*,\ A \in M_m(R),\ a \in R^m$.

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare $Ax = a$. Notăm cu I matricea unitate din $M_m(R)$ şi cu

$$D = \mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Spunem că A este diagonal dominantă pe linii dacă

$$|a_{ii}| > \sum_{j=\overline{1,m}\ j\neq i} |a_{ij}|\,,\ \forall i \in \overline{1,m}$$

Atunci $a_{ii} \neq 0,\ \forall i \in \overline{1,m}$, deci D este inversabilă. Notăm cu $B = I - D^{-1}A$ şi cu $b = D^{-1}a$. Sistemul de ecuaţii $Ax = a$ se transformă echivalent astfel:

$$Ax = a \Longleftrightarrow D^{-1}Ax = D^{-1}a \Longleftrightarrow (I - B)x = b \Longleftrightarrow x = Bx + b.$$

Pentru orice $x^{(0)} \in R^m$ definimm şirul $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ prin relaţia de recurenţă

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + b,\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Teorema -1.6 *Fie A o matrice diagonal dominantă pe linii, $B = I - D^{-1}A$, $q := \|B\|_\infty$ şi $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ definit ca mai sus. Atunci $q < 1$ şi avem evaluările:*

$$\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \frac{q}{1-q}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty,\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

(în particular $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$).

Metoda lui Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe coloane

Spunem că matricea A este diagonal dominantă pe coloane dacă

$$|a_{jj}| > \sum_{i=\overline{1,m}\ i\neq j} |a_{ij}|\ ,\ \forall j \in \overline{1,m}$$

Atunci $a_{ii} \neq 0$, $\forall i \in \overline{1,m}$, deci D este inversabilă. Notăm cu $y = Dx$ (deci $x = D^{-1}y$), şi cu $B = I - AD^{-1}$. Sistemul de ecuaţii $Ax = a$ se transformă echivalent astfel:

$$Ax = a \Longleftrightarrow AD^{-1}y = a \Longleftrightarrow (I - B)y = a \Longleftrightarrow y = By + a.$$

Pentru orice $y^{(0)} \in R^m$ definimm şirul $(y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ prin relaţia de recurenţă

$$y^{(n+1)} = By^{(n)} + a,\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Teorema -1.7 *Fie A o matrice diagonal dominantă pe coloane, $B = I - AD^{-1}$, $q := \|B\|_{\mathbf{1}}$ şi $(y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ definit ca mai sus. Atunci $q < 1$ şi avem evaluările:*

$$\|y^{(n)} - y\|_{\mathbf{1}} \leq \frac{q}{1-q}\|y^{(n)} - y^{(n-1)}\|_1 \leq \frac{q^n}{1-q}\|y^{(1)} - y^{(0)}\|_{\mathbf{1}},\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

(în particular $\lim\limits_{n\to\infty} y^{(n)} = y$). Deci soluţia x a sistemului $Ax = a$ este aproximată de $D^{-1}y^{(n)}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} D^{-1}y^{(n)} = x$).

Metoda Gauss-Seidel

Fie $m \in N^*,\ A \in M_m(R),\ b \in R^m$.

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$. Notăm cu I matricea unitate din $M_m(R)$ şi cu $B := I - A$. Dacă elementele matricei B sunt $(b_{ij})_{1\le i,j\le m}$, descompunem B sub forma $B = L + R$, cu $L = (l_{ij})_{1\le i,j\le m}$, unde $l_{ij} := b_{ij},\ \forall\, 1 \le j < i \le m$ şi $l_{ij} := 0$ altfel. Atunci $\det(I - L) = 1$ şi deci există $(I - L)^{-1}$.

Sistemul de ecuaţii $Ax = b$ se transformă echivalent astfel:

$$Ax = b \Longleftrightarrow (I - B)x = b \Longleftrightarrow (I - L - R)x = b \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (I - L)^{-1}(I - L - R)x = (I - L)^{-1}b \Longleftrightarrow (I - (I - L)^{-1}R)x = (I - L)^{-1}b \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x - (I - L)^{-1}Rx = (I - L)^{-1}b.$$

Dacă notăm $C := (I - L)^{-1}R$ şi $c := (I - L)^{-1}b$ atunci

$$Ax = b \Longleftrightarrow x = Cx + c.$$

Pentru orice $x^{(0)} \in C^m$ definim şirul Jacobi $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ prin relaţia de recurenţă

$$x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + c \Longleftrightarrow x^{(n+1)} = Lx^{(n+1)} + Rx^{(n)} + b,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Deci

$$x_1^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} b_{1j}x_j^{(n)} + b_1,\ \ \forall\, n \in \mathbf{N} \text{ şi}$$

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i}^{m} b_{ij}x_j^{(n)} + b_i,\ \forall\, 2 \le i \le m,\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Teorema -1.8 *Dacă* $q := \max\limits_{1\le i\le m} q_i$ *cu* $q_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} |b_{1j}|,\ q_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|q_j + \sum\limits_{j=i}^{m} |b_{ij}|,\ 2 \le i \le m$ *şi* $q < 1$ *atunci avem evaluările:*

$$\|x^{(n)} - x\|_\infty \le \frac{q}{1-q}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty \le \frac{q^n}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty,\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

(în particular $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$*).*

Algoritm: Dacă $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$, $b = (b_i)_{1\le i\le m}$, $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{1\le i\le m}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, atunci $b_{ij} = -a_{ij}$ dacă $i \neq j$, $b_{ii} = 1 - a_{ii}$, $\forall\, 1 \le i,j \le m$. Se calculează q. Se testează condiţia de aplicabilitate a metodei $q < 1$. În caz de aplicabilitate se atribuie iteratei iniţiale $x^{(0)}$ o valoare oarecare din $\mathbf{C}^m$, iar calculul celorlalte iterate se face după formula:

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i}^{m} b_{ij} x_j^{(n)} + b_i,\ \forall\, 1 \le i \le m,\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Se opreşte calculul recursiv la iterata $x^{(n+1)}$ pentru care

$$\frac{q}{1-q}\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_\infty \le \varepsilon.$$

Exemplul -1.15 *Fie sistemul de ecuaţii liniare*

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \frac{1}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 2 \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{20}x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Să se arate că se aplică metoda Gauss-Seidel.

Soluţie Notăm cu A matricea ceoficienţilor sistemului. Avem

$$B = I - A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & 0 \end{pmatrix}$$

şi

$$q_1 = \frac{5}{6},\ q_2 = \frac{1}{3},\ q_3 = \frac{1}{10}.$$

Deci

$$q = \max(q_1, q_2, q_3) = \frac{5}{6} < 1$$

Rezultă că metoda Gauss-Seidel se aplică.

Metoda relaxării simultane

Fie $m \in N^*$, $A \in M_m(R)$ simetrică şi pozitiv definită, $a \in R^m$.

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare $Ax = a$. Notăm cu I matricea unitate din $M_m(R)$ şi cu $D = diag(A)$. Atunci D inversabilă. Fie $\sigma > 0$ un număr real. Notăm cu $C_\sigma := I - \sigma D^{-1}A$ şi cu $c_\sigma := \sigma D^{-1}a$. Sistemul de ecuaţii $Ax = a$ se transformă echivalent astfel:

$$Ax = a \Longleftrightarrow \sigma D^{-1}Ax = \sigma D^{-1}a \Longleftrightarrow (I - C_\sigma)x = c_\sigma \Longleftrightarrow x = C_\sigma x + c_\sigma.$$

Pentru orice $x^{(0)} \in R^m$ definim şirul Jacobi $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ prin relaţia de recurenţă

$$x^{(n+1)} = C_\sigma x^{(n)} + c_\sigma,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Fie $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$ valorile proprii ale matricei $D^{-1}A$. Dacă alegem σ astfel încât $0 < \sigma < 2/\lambda_1$, şi notăm $q := \max\limits_{1\leq i\leq m} |1 - \sigma\lambda_i|$, atunci $q < 1$ şi avem evaluările:

$$\|x^{(n)} - x\|_D \leq \frac{q}{1-q}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_D \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_D,\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

(în particular $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$), unde $\|x\|_D := \sqrt{\langle Dx, x\rangle}, \forall\, x \in R^m$, cu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produsul scalar uzual pe R^m.

Parametrul optim de relaxare σ (pentru care q corespunzător este minim) este

$$\sigma = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_m},$$

iar valoarea lui q în acest caz este

$$q = \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_m}$$

În practică, de obicei, nu se calculează valoarea lui λ_1, ci se alege $\sigma \in (0, 2/\|D^{-1}A\|_\infty)$ (deoarece $\lambda_1 \leq \|D^{-1}A\|_\infty$), parcurgând intervalul cu un pas echidistant. Valoarea optimă a lui σ se stabileşte atunci când numărul de iteraţii n, necesar pentru a aproxima soluţia sistemului de ecuaţii cu o eroare dată este minim.

Dacă matricea A a sistemului de ecuaţii liniare $Ax = a$ nu este simetriică şi pozitiv definită, sistemul se transformă echivalent

$$Ax = a \Longleftrightarrow A^t Ax = A^t a$$

(unde $A^t = (a_{ji})_{1 \le i,j \le m}$ este transpusa matricei A), pentru care matricea $A^t A$ este simetrică şi pozitiv definită.

Se va lua $\sigma \in (0, t)$ cu $t = 2/\|D^{-1}A\|_\infty$ parcurgând intervalul cu pasul $h = t/p$, unde $p \in \mathbf{N}^*$ este dat.

Algoritm: Dacă $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$, $a = (a_i)_{1 \le i \le m}$, $B = D^{-1}A = (b_{ij})_{1 \le i,j \le m}$, $b = D^{-1}a = (b_i)_{1 \le i \le m}$, $C_\sigma = (c_{ij})_{1 \le i,j \le m}$, $c_\sigma = (c_i)_{1 \le i \le m}$, $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{1 \le i \le m}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, atunci $b_{ij} = a_{ij}/a_{ii}$, $b_i = a_i/a_{ii}$, $\forall\, 1 \le i,j \le m$, $t = 2/(\max\limits_{1 \le i \le m} \sum\limits_{j=1}^{m} |b_{ij}|)$. Se va lua $\sigma \in (0, t)$ cu $t = 2/\|D^{-1}A\|_\infty$ parcurgând intervalul cu pasul $h = t/p$, unde $p \in \mathbf{N}^*$ este dat:

Pentru $1 \le k \le p - 1$ se ia $\sigma = k \cdot h$, se calculează $c_{ij} = -\sigma b_{ij}$ dacă $i \ne j$, $c_{ii} = 1 - \sigma b_{ii}$, $c_i = \sigma b_i$, $\forall\, 1 \le i,j \le m$. Se atribuie iteratei iniţiale $x^{(0)}$ o valoare oarecare din $\mathbf{R}^m$, iar calculul celorlalte iterate se face după formula:

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j^{(n)} + c_i,\ \forall\, 1 \le i \le m,\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Se opreşte calculul recursiv la iterata $x^{(n+1)}$ pentru care

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_D = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ii} |x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}|^2} \le \varepsilon.$$

La fiecare pas se reţine n numărul de iterate efectuat.

Se determină parametrul optim de relaxare (este acela pentru care numărul de iteraţii este minim).

Exemplul -1.16 *Fie sistemul de ecuaţii liniare:*

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Să se arate că se poate aplica metoda relaxării simultane. Să se determine parametrul optim de relaxare. Luând $x^{(0)} = (0,0,0)$ să se evalueze eroarea $x - x^{(n)}$.

Soluţie: Notăm cu A matricea sistemului. Se verifică că A este simetrică şi pozitiv definită.

Fie $D = diag(A)$. Atunci

$$D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 & 1 \end{pmatrix}$$

şi $\det(D^{-1}A - \lambda I) = 0 \iff (1-\lambda)^3 - \frac{19}{25}(1-\lambda) + \frac{6}{25} = 0$, de unde rezultă că valorile proprii ale matricei $D^{-1}A$ sunt $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = 3/5 > \lambda_3 = 2/5$. Parametrul optim de relaxare este

$$\sigma = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_3} = \frac{5}{6}$$

căruia îi corespunde

$$q = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} = \frac{2}{3}.$$

Avem $x^{(1)} = C_\sigma x^{(0)} + c_\sigma = c_\sigma = \sigma D^{-1} b = 5/6 \cdot (1/5; 2/6; 3/5)^t$ unde $b = (1;2;3)^t$ este vectorul termenilor liberi din sistem. Atunci

$$\|x^{(1)}\|_D^2 = \left\langle Dx^{(1)}, x^{(1)} \right\rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{25}{9}$$

şi

$$\|x^{(n)} - x\|_D \leq \frac{q^n}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_D = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Metode relaxării succesive

Fie $m \in N^*,\ A \in M_m(R)$ simetrică şi pozitiv definită şi $b \in R^m$.

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$ şi $\sigma > 0$ un număr real numit parametru de relaxare. Notăm cu I matricea unitate din $M_m(R)$ şi cu $D = diag(A)$. Atunci D inversabilă. Dacă elementele matricei A sunt $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, descompunem A sub forma $B = L + D + R$, cu $L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, unde $l_{ij} := a_{ij},\ \forall 1 \leq j < i \leq m$ şi $l_{ij} := 0$ altfel. Atunci matricea $\sigma^{-1}D+L$ este inversabilă,iar sistemul de ecuaţii $Ax = b$ se transformă echivalent astfel:

$$Ax = b \Leftrightarrow (\sigma^{-1}D + L)^{-1}(L + D + R)x = (\sigma^{-1}D + L)^{-1}b \Leftrightarrow$$

$$(I - (\sigma^{-1}D + L)^{-1}((\sigma^{-1} - 1)D - R))x = (\sigma^{-1}D + L)^{-1}b$$

Notând cu $C_\sigma := (\sigma^{-1}D + L)^{-1}((\sigma^{-1} - 1)D - R)$ şi cu $c_\sigma := (\sigma^{-1}D + L)^{-1}b$ rezultă că

$$Ax = b \Leftrightarrow x = C_\sigma x + c_\sigma.$$

Pentru orice $x^{(0)} \in R^m$ definim şirul Jacobi $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ prin relaţia de recurenţă

$$x^{(n+1)} = C_\sigma x^{(n)} + c_\sigma,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Atunci

$$x^{(n+1)} = C_\sigma x^{(n)} + c_\sigma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{(n+1)} = (\sigma^{-1}D + L)^{-1}((\sigma^{-1} - 1)D - R)x^{(n)} + b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma^{-1}Dx^{(n+1)} = -Lx^{(n+1)} + ((\sigma^{-1} - 1) - R)x^{(n)} + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{(n+1)} = (1 - \sigma)x^{(n)} - \sigma D^{-1}(Lx^{(n+1)} + Rx^{(n)} - b) \Leftrightarrow$$

$$x_i^{(n+1)} = (1 - \sigma)x_i^{(n)} - \frac{\sigma}{a_{ii}}(-b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j^{(n)}),\ \forall 1 \leq i \leq m \qquad (16)$$

Dacă alegem σ astfel încât $0 < \sigma < 2$, şi notăm $q := \|C_\sigma\|_A$ atunci $q < 1$ şi avem evaluările:

$$\|x^{(n)} - x\|_A \leq \frac{q}{1-q}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_A \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_A,\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$$

(în particular $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$), unde $\|x\|_A := \langle Ax, x\rangle\,, \forall\, x \in R^m$, cu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produsul scalar uzual pe $\mathbf{R}^m$.

În practică, se alege $\sigma \in (0,2)$ parcurgând intervalul cu un pas echidistant. Valoarea optimă a lui σ se stabileşte atunci când numărul de iteraţii n, necesar pentru a aproxima soluţia sistemului de ecuaţii cu o eroare dată, este minim.

Dacă matricea A a sistemului de ecuaţii liniare $Ax = b$ nu este simetrică şi pozitiv definită, sistemul se transformă echivalent

$$Ax = b \Leftrightarrow A^tAx = A^tb$$

(unde A^t este transpusa matricei A) pentru care matricea A^tA este simetrică şi pozitiv definită.

Algoritm: Dacă $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, $b = (a_i)_{1\leq i\leq m}$, $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{1\leq i\leq m}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, atunci:

Se va lua $\sigma \in (0,2)$ parcurgând intervalul cu pasul $h = 2/p$, unde $p \in \mathbf{N}^*$ este dat.

Pentru $1 \leq k \leq p-1$ se ia $\sigma = k \cdot h$. Se atribuie iteratei iniţiale $x^{(0)}$ o valoare oarecare din $\mathbf{R}^m$, iar calculul celorlalte iterate se face după formula (16). Se opreşte calculul recursiv la iterata $x^{(n+1)}$ pentru care

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_A = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)})(x_j^{(n+1)} - x_j^{(n)})} \leq \varepsilon.$$

La fiecare pas se reţine n numărul de iterate efectuat.

Se determină parametrul optim de relaxare)acela pentru care numărul de iteraţii este minim)

.

Metoda lui Ritz

Este o metoda de calcul a inversei unei matrice simetrice şi poyitiv definite. Fie $A \in M_m(\mathbf{R})$ o matrice simetrică şi pozitiv definită. Notăm cu * operaţia de transpunere (a unui vector sau a unei matrice). Definim succesiv vectorii $(w_k)_{k=0}^m \subset R^m$, $(v_k)_{k=1}^m \subset R^m$ şi matricele $(C_k)_{k=1}^m, (D_k)_{k=1}^m \subset M_m(\mathbf{R})$ astfel:

$$w_0 \neq 0,\ C_1 = \frac{w_0 w_0^*}{w_0^* A w_0},\ D_1 = I_m - C_1 A$$

iar pentru $k = \overline{1, m-1}$:

$$\text{Se alege } v_k \text{ astfel ca } D_k v_k \neq 0,$$

$$w_k = D_k v_k.$$

$$C_{k+1} := C_k + \frac{w_k w_k^*}{w_k^* A w_k},$$

$$D_{k+1} := I_m - C_{k+1} A,$$

Atunci $C_m = A^{-1}$ (inversa matricei A) şi $D_m = 0_m$.

Exemplul -1.17 *Fie* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 30 \end{pmatrix}$. *Folosind metoda lui Ritz să se calculeze* A^{-1}.

Se verifică mai întâi că matricea A este simetrică şi pozitiv definita. Luăm $w_0 = (1, 0, 0, 0)^*$. Atunci $w_0^* A w_0 = 1$ şi

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luăm $v_1 = (0,1,0,0)^*$. Rezultă că $w_1 = (-2,1,0,0)^*$ şi $w_1^* A w_1 = 1$, de unde

$$C_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luăm $v_2 = (0,0,1,0)^*$. Rezultă că $w_2 = (-13,5,1,0)^*$ şi $w_2^* A w_2 = 1$, de unde

$$C_3 = \begin{pmatrix} 174 & -67 & -13 & 0 \\ -67 & 26 & 5 & 0 \\ -13 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luăm $v_3 = (0,0,0,1)^*$. Rezultă că $w_3 = (39,-17,-3,1)^*$ şi $w_3^* A w_3 = 1$, de unde

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1695 & -730 & -130 & 39 \\ -730 & 315 & 56 & -17 \\ -130 & 56 & 10 & -3 \\ 39 & -17 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \ D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pseudoinversa unei matrice

Pseudoinversa unei matrice este o extensie naturală a noţiunii de matrice inversabilă. Se poate defini pseudoinversa atât pentru matrici pătratice (singulare sau nesingulare - caz în care pseudoinversa coincide cu inversa) cât şi pentru matrici dreptunghiulre (în care numărul de linii diferă de numărul de coloane). Pentru o matrice $T \in M_{m,n}(R)$,notăm cu $T^* \in M_{n,m}(R)$ transpusa matricei T şi cu $T^+ \in M_{n,m}(R)$ pseudoinversa matricei matricei T.

Prin definiţie T^+ este singura soluţie $U \in M_{n,m}(R)$ a sistemului de ecuaţii matriceale:

$$TUT = T, \quad UTU = U, \qquad (TU)^* = TU, \quad (UT)^* = UT. \tag{17}$$

Teorema -1.9 *Fie $T \in M_{m,n}(R)$ şi $b \in R^m$.*

a) x_0 din R^n verifică egalitatea

$$\|Tx_0 - b\| = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \|Tx - b\| \tag{18}$$

dacă şi numai dacă $T^*Tx_0 = T^*b$.

b) Elementul $\widetilde{x_0} := T^+b$ verifică egalitatea (18) şi, pentru orice alt element x_0 ce verifică aceeaşi egalitate, avem $\|\widetilde{x_0}\| \leq \|x_0\|$.

Reciproc, T^+ este unica soluţie $U \in M_{n,m}(R)$a problemei: Ub satisface egalitatea (18) pentru orice $b \in R^m$, iar pentru orice alt element x_0, care verifică aceeaşi egalitate, avem $\|Ub\| \leq \|x_0\|$.

Prin această teoremă, în cazul unui sistem de ecuaţii liniare $Tx = b$ compatibil nedeterminat, rezultă că T^+b este o soluţie a acestui sistem (anume cea mai mică soluţie în normă), iar, în cazul unui sistem incompatibil, T^+b este acel element x, minim în normă, pentru care $Tx - b$ este cel mai aproape de 0.

În continuare presupunem că rang $T = l \leq \min(m, n)$. Cu $R(A)$ am notăm imaginea matricei $A \in M_{m,n}(R)$, adică mulţimea $\{Ax \mid x \in R^n\}$.

Determinarea pseudoinversei unei matrice se poate face cu algoritmi cu un număr de paşi mai mic sau egal cu l. În această categorie intră următorii algoritmi

- (Grigore) Definim succesiv vectorii $(y_k)_{k=1}^l \subset X$, $(w_k)_{k=1}^l \subset R^n$ şi matricele $(H_k)_{k=0}^l \subset M_{n,m}(R)$ astfel:

$$H_0 = \mathbf{0}.$$

$$y_k \in R(T^*) \text{ (adică în imaginea transpusei)}, \text{ astfel ca } y_k - H_{k-1}Ty_k \neq 0,$$

$$\begin{aligned} w_k &:= y_k - H_{k-1}Ty_k \text{ şi} \\ H_k &:= H_{k-1} + \frac{w_k(Tw_k)^*}{\|Tw_k\|^2}, \ \forall k = \overline{1, l}. \end{aligned}$$

Atunci $H_l = T^+$ (pseudoinversa matricei T).

Exemplul -1.18 *Fie*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ cu } rang(T) = 2 \text{ şi } H_0 = \mathbf{0}.$$

Luăm $y_1 = T^* * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (avem $y_1 - H_0 T y_1 = y_1 \neq 0$. Atunci $w_1 =$ $y_1 - H_0 T y_1 = y_1$ şi $Tw_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Rezultă că $\|Tw_1\|^2 = 12$, iar $w_1(Tw_1)^* =$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Deci

$$H_1 = H_0 + \frac{w_1(Tw_1)^*}{\|Tw_1\|^2} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & -1/6 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Luăm $y_2 = T^* * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (avem $y_2 - H_1 T y_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \neq 0$. Atunci

$w_2 = y_2 - H_1 T y_2$ şi $Tw_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Rezultă că $\|Tw_2\|^2 = 3$, iar $w_2(Tw_2)^* = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Deci

$$H_2 = H_1 + \frac{w_2(Tw_2)^*}{\|Tw_2\|^2} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

În concluzie

$$T^+ = H_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

- (Gramm-Schmidt) Fie o bază $e_1, e_2, \ldots, e_l$ în $R(T^*)$ şi fie $f_i = Te_i$, $\forall\ i = \overline{1,l}$. Definim, succesiv, elementele $(e_i')_{i=1}^l, (x_i)_{i=1}^l \subset R^n$, $(f_i')_{i=1}^l (y_i)_{i=1}^l \subset R^m$, astfel:

  $$x_1 = \frac{1}{\|f_1\|} e_1 \text{ şi } y_1 = Tx_1,$$

  iar pentru $i = \overline{2,l}$

  $$e_i' = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle f_i, y_j \rangle x_j,\ f_i' = Te_i' \text{ şi } x_i = \frac{1}{\|f_i'\|} e_i',\ y_i = Tx_i$$

  Definim matricea $U \in \mathcal{M}_{n,m}(R)$ prin

  $$U := \sum_{i=1}^{l} x_i y_i^*$$

Atunci $U = T^+$.

Exemplul -1.19 *Fie*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad cu \ \dim R(T^*) = 2$$

Luând $e_1 = (1;0;-1)^*, e_2 = (0;1;0)^*$ *(bază în* $R(T^*)$*) obţinem* $f_1 = (2;0;2;2)^*, f_2 = (0;1;1;2)^*$. *Atunci*

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1;0;-1)^*, \ y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;0;1;1)^*$$

În continuare

$$e_2' = e_2 - \langle f_2, y_1 \rangle x_1 = \frac{1}{2}(-1;2;1)^* \ \text{şi} \ f_2' = Te_2' = (-1;1;0;1)^*$$

Atunci

$$x_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1;2;1)^*, \ y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;0;1)^*$$

Rezultă că

$$T^+ = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (Stanica) Definim, succesiv, vectorii $(u_k)_{k=0}^{l-1} \subset R^m$, $(v_k)_{k=0}^{l-1} \subset R^n$, $(w_k)_{k=0}^{l-1} \subset R^m$ şi matricele $(H_k)_{k=1}^{l} \subset M_{n,m}(R)$ astfel:

$$H_0 = T^*.$$

$$v_k \in R((I - TH_k)^* T), \ w_k \in R(H_k) \text{ astfel încît } \langle v_k, Tw_k \rangle \neq 0,$$

$$u_k := \frac{1}{\langle v_k, Tw_k \rangle}(I - H_k T) w_k \text{ şi}$$

$$H_{k+1} := H_k + u_k \cdot v_k^*, \ \forall k = \overline{0, l-1}.$$

Atunci $H_l = T^+$.

Exemplul -1.20 *Fie*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{cu rang}(T) = 2 \textit{ şi } H_0 = T^*$$

Luând $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ obţinem $v_0 := (I - TH_0)^* Ta_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}$,

$w_0 = H_0 b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_0 := \dfrac{1}{\langle v_0, Tw_0 \rangle}(I - H_0 T) w_0 = \begin{pmatrix} 5/48 \\ 1/8 \\ -5/48 \end{pmatrix}$,

$$H_1 := H_0 + u_0 \cdot v_0^* = \begin{pmatrix} 23/48 & -5/16 & 1/6 & -7/48 \\ -5/8 & 5/8 & 0 & 5/8 \\ -23/48 & 5/16 & 1/6 & 7/48 \end{pmatrix}$$

Luând $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ obţinem $v_1 := (I - TH_1)^* Ta_2 = \begin{pmatrix} 7/8 \\ -7/8 \\ 0 \\ -7/8 \end{pmatrix}$, $w_1 =$

$$H_1 b_2 = \begin{pmatrix} -5/16 \\ 5/8 \\ 5/16 \end{pmatrix}, \ u_1 := \frac{1}{\langle v_1, Tw_1 \rangle}(I - H_1 T) w_1 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

$$T^+ = H_2 := H_1 + u_1 \cdot v_1^* = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul -1.21 *Fie sistemul de ecuaţii liniare $Tx = b$, unde*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{cu rang}(T) = 2 \textit{ şi } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(acest sistem este compatibil nedetreminat). Atunci

$$z = T^+ b = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este o soluţie a sistemului (compatibil nedeterminat) de ecuaţii liniare $Tx = b$.

Exemplul -1.22 *Fie sistemul de ecuaţii liniare $Tx = b$, unde*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{cu rang}(T) = 2 \textit{ şi } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(acest sistem este incompatibil). Atunci

$$z = T^{+}b = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

are proprietatea că

$$\|Tz - b\| = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \|Tx - b\|$$

.