Metode numerice pentru ecuaţii neliniare

În general, modelele matematice asociate fenomenelor fizice sau de altă natură conduc la ecuaţii de forma

$$f(x) = 0$$

Ne propunem să găsim aproximaţii ale soluţiei ecuaţiei anterioare, în cazul în care f este o funcţie reală neliniară.

Metoda bisecţiei

Această metodă constă în înjumătăţirea intervalului în care se află soluţia unei ecuaţii.

Fie $a < b \in R$ şi $f : [a, b] \to R$ o funcţie continuă cu $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $z \in [a, b]$ astfel încât $f(z) = 0$. Definim şirurile $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}, (c_n)_{n\geq 0}$ astfel:

- $a_0 := a$, $b_0 := b$, $c_0 := (a + b)/2$;
- Pentru $n \geq 1$
  - dacă $f(c_{n-1}) = 0$, atunci $\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := c_{n-1} \end{cases}$
  - dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) < 0$, atunci $\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := c_{n-1} \\ c_n := (a_n + b_n)/2 \end{cases}$
  - dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) > 0$, atunci $\begin{cases} a_n := c_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := (a_n + b_n)/2 \end{cases}$

Teorema -1.1 *Presupunem că funcţia f are o singură rădăcină în $[a, b]$. Atunci şirul $(c_n)_{n\geq 0}$ construit mai sus converge la unica soluţie $z \in [a, b]$ a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi*

$$|c_n - z| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Iteraţiile construite prin metoda bisecţiei se opresc la pasul m pentru care

$$|f(c_m)| < \varepsilon$$

sau, pentru o mai mare acurateţe, la pasul m pentru care

$$|f(c_m)| < \varepsilon \text{ şi } |c_m - c_{m-1}| < \varepsilon,$$

unde ε este eroarea de aproximare.

Exemplul -1.1 *Să se aproximeze, folosind metoda bisecţiei, soluţia ecuaţiei $x^3+4x^2-10 = 0$ (conţinută în intervalul $[-1, 2]$) cu eroarile $\varepsilon 1 = 0.01$, $\varepsilon 2 = 10^{-10}$.*

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 1 = 0.01$ se obţine la pasul $m = 9$ şi are valoarea $c_9 = 1.36132812500000$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 2 = 10^{-10}$ se obţine la pasul $m = 35$ şi are valoarea $c_{35} = 1.36523001342721$.

Regula falsi

"Regula falsi" este tot o metoda de "micsorare" a intervalului in care se afla solutia unei ecuatii.

Fie $a < b \in R$ şi $f : [a, b] \to R$ o funcţie continuă cu $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $z \in [a, b]$ astfel încât $f(z) = 0$.

Definim şirurile $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}, (c_n)_{n\geq 0}$ astfel:

- $a_0 := a$, $b_0 := b$, $c_0 := (a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0))/(f(b_0) - f(a_0)$;

- Pentru $n \geq 1$

  - dacă $f(c_{n-1}) = 0$, atunci $\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := c_{n-1} \end{cases}$

  - dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) < 0$, atunci $\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := c_{n-1} \\ c_n := \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \end{cases}$

  - dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) > 0$, atunci $\begin{cases} a_n := c_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \end{cases}$

Iteraţiile construite prin regula falsi se opresc la pasul m pentru care

$$|f(c_m)| < \varepsilon$$

sau, pentru o mai mare acurateţe, la pasul m pentru care

$$|f(c_m)| < \varepsilon \text{ şi } |c_m - c_{m-1}| < \varepsilon,$$

unde ε este eroarea de aproximare.

Interpretare geometrică: Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(a_n, f(a_n))$, $B(b_n, f(b_n))$ este

$$\frac{y - f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{x - a_n}{b_n - a_n}$$

Intersecţia acestei drepte cu axa Ox se obţine pentru $y = 0$, deci

$$x = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Teorema -1.2 *Presupunem că funcţia f are o singură rădăcină în $[a, b]$. Atunci şirul $(c_n)_{n \geq 0}$ construit mai sus converge la unica soluţie $z \in [a, b]$ a ecuaţiei $f(x) = 0$.*

Exemplul -1.2 *Să se aproximeze, folosind regula falsi, soluţia ecuaţiei* $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ *(conţinută în intervalul* $[-1, 2]$*) cu eroarile* $\varepsilon 1 = 0.01$, $\varepsilon 2 = 10^{-10}$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 1 = 0.01$ se obţine la pasul $m = 8$ şi are valoarea $c_8 = 1.36506360624662$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon = 10^{-10}$ se obţine la pasul $m = 21$ şi are valoarea $c_{21} = 1.36523001341145$.

Metoda coardei

Fie $[a, b] \subset R$ şi $f : [a, b] \to R$ o funcţie. Definim (dacă este posibil) recurent şirul $(x_n)_n$ astfel:

$$x_0 := a,\ x_1 := b \text{ şi}$$

$$x_{n+1} := \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)},\ \forall\ n \in \mathbf{N} \tag{1}$$

Interpretare geometrică: Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(x_0, f(x_0))$, $B(x_n, f(x_n))$ este

$$\frac{y - f(x_n)}{f(x_0) - f(x_n)} = \frac{x - x_n}{x_0 - x_n}$$

Intersecţia acestei drepte cu axa Ox se obţine pentru $y = 0$, deci

$$x = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}.$$

Teorema -1.3 *Presupunem că* $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ *şi*

$$a)\ f''(x) \neq 0,\ \forall\ x \in (a,b)$$

$$b)\ f(a) \cdot f''(a) > 0$$

$$c)\ f(a) \cdot f(b) < 0$$

Atunci ecuaţia $f(x) = 0$, *are o soluţie unică* $z \in [a, b]$, *iar şirul* $(x_n)_n$ *converge la* z.

Iteraţiile construite prin metoda coardei se opresc la pasul m pentru care

$$|f(x_m)| < \varepsilon$$

sau, pentru o mai mare acurateţe, la pasul m pentru care

$$|f(x_m)| < \varepsilon \text{ şi } |x_m - x_{m-1}| < \varepsilon,$$

unde ε este eroarea de aproximare.

Exemplul -1.3 *Să se aproximeze, folosind metoda coardei, soluţia ecuaţiei* $x^3 - x + 3 = 0$ *(conţinută în intervalul* $[-3, 0]$*) cu eroarile* $\varepsilon 1 = 0.01$, $\varepsilon 2 = 10^{-10}$.

Se verifică ipotezele teoremei anterioare.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 1 = 0.01$ se obţine la pasul $m = 10$ şi are valoarea $x_{10} = -1.66063905970749$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 2 = 10^{-10}$ se obţine la pasul $m = 40$ şi are valoarea $x_{40} = -1.67169988158683$.

Metoda secantei

Fie $[a, b] \subset R$ şi $f : [a, b] \to R$ o funcţie. Definim recurent şirul $(x_n)_n$ astfel:

$$x_0,\ x_1 \in [a, b] \text{ şi}$$

$$x_{n+1} := \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Teorema -1.4 *Presupunem că* $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ *şi*

a) $f'(x) \neq 0,\ \forall\ x \in [a,b]$

b) şirul $(x_n)_n$ *are toate valorile în intervalul* $[a, b]$

c) $f(a) \cdot f(b) < 0$

Atunci ecuaţia $f(x) = 0$, *are o soluţie unică* $z \in [a, b]$, *iar şirul* $(x_n)_n$ *converge la* z.

Iteraţiile construite prin metoda secantei se opresc la pasul m pentru care

$$|f(x_m)| < \varepsilon$$

sau, pentru o mai mare acurateţe, la pasul m pentru care

$$|f(x_m)| < \varepsilon \text{ şi } |x_m - x_{m-1}| < \varepsilon,$$

unde ε este eroarea de aproximare.

Exemplul -1.4 *Să se aproximeze, folosind metoda secantei, soluţia ecuaţiei* $x^3 - x + 3 = 0$ *(conţinută în intervalul* $[-15, 15]$, *luând* $x_0 = 1$, $x_1 = 2$*) cu eroarile* $\varepsilon 1 = 0.01$, $\varepsilon 2 = 10^{-10}$.

Se verifică ipotezele teoremei anterioare. Punctul b) se verifică la fiecare pas.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 1 = 0.01$ se obţine la pasul $m = 23$ şi are valoarea $x_{23} = -1.67109143768403$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 2 = 10^{-10}$ (chiar $\varepsilon 2 = 10^{-13}$) se obţine la pasul $m = 26$ şi are valoarea $x_{26} = -1.67169988165715$.

Metoda lui Newton

Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$ şi $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie.

Teorema -1.5 *Presupunem că* $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, *că* f', f'' *nu se anulează pe* $[a, b]$ *şi* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Fie* $x_0 \in [a, b]$ *astfel încât*

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

şi

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Dacă $x_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbf{N}$, *atunci ecuaţia* $f(x) = 0$, *are o soluţie unică* $z \in [a, b]$, *iar şirul* $(x_n)_n$ *converge la* z.

Interpretare geometrică: Ecuaţia dreptei tangentă la graficul funcţiei f în punctul $A(x_0, f(x_0))$ este

$$y - f(x_0) = f\text{'}(x_0)(x - x_0)$$

Intersecţia acestei drepte cu axa Ox se obţine pentru $y = 0$, deci

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\text{'}(x_0)}.$$

Iteraţiile construite prin metoda Newton se opresc la pasul m pentru care

$$|f(x_m)| < \varepsilon$$

sau, pentru o mai mare acurateţe, la pasul m pentru care

$$|f(x_m)| < \varepsilon \text{ şi } |x_m - x_{m-1}| < \varepsilon,$$

unde ε este eroarea de aproximare (se poate folosi si evaluarea data de propozitia anterioara).

Exemplul -1.5 *Să se aproximeze, folosind metoda secantei, soluţia ecuaţiei* $x^3 - x + 3 = 0$ *(conţinută în intervalul* $[-2, -1]$, *luând* $x_0 = -1$*) cu eroarile* $\varepsilon 1 = 0.01$, $\varepsilon 2 = 10^{-10}$.

Se verifică ipotezele teoremei anterioare.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 1 = 0.01$ se obţine la pasul $m = 5$ şi are valoarea $x_5 = -1.67170038194364$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 2 = 10^{-10}$ (chiar $\varepsilon 2 = 10^{-11}$) se obţine la pasul $m = 7$ şi are valoarea $x_7 = -1.67169988165716$.

Presupunem că o metodă de aproximare a soluţiei unei ecuaţii de tipul $f(x) = 0$ este dată de construcţia unui şir $(x_n)_n$ genrat recursiv de formula $x_{n+1} = I_f(x_n)$.

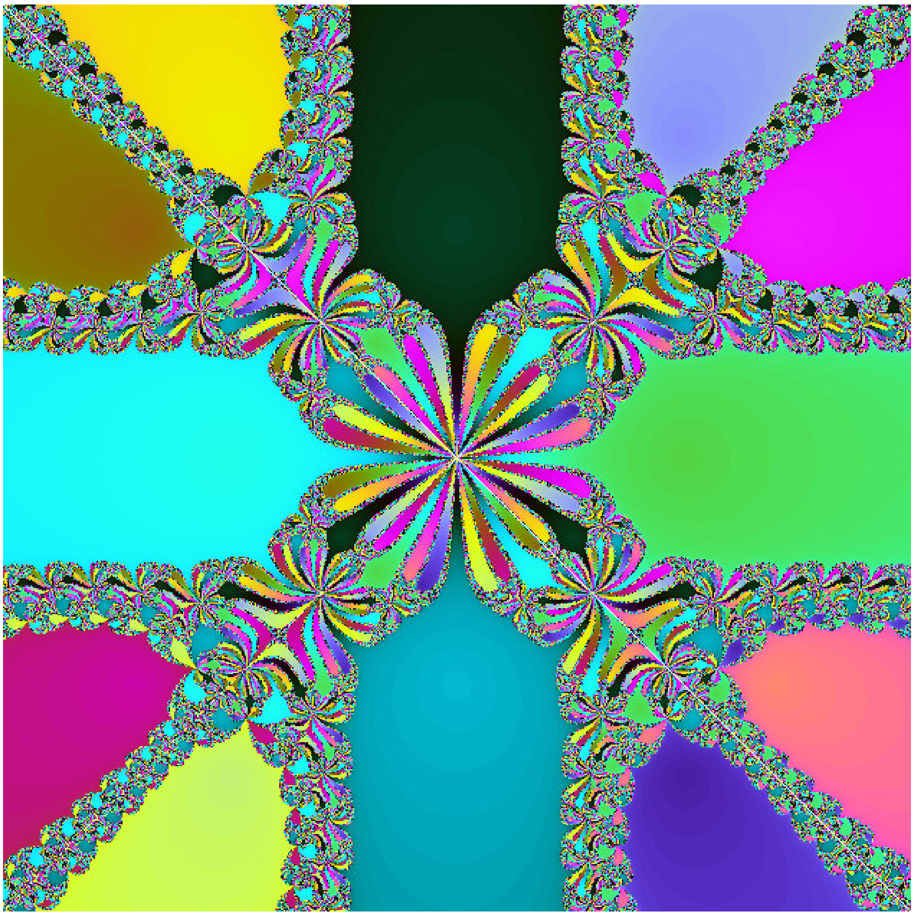

Figure 1:

Mulţimea punctelor iniţiale x_0 pentru care şirul $(x_n)_n$ este convergent la z, soluţie a acestei ecuaţii, se numeşte bazin de atracţie (al metodei generate de funcţia iterativă I_f) pentru soluţia z şi se notează cu $B(I_f, z)$.

De cele mai multe ori structura acestor bazine de atracţie este foarte complexă, chiar haotică.

Vom exemplifica acest lucru pentru o ecuaţie polinomială de forma $f(z) = 0$ ale cărei soluţii le vom aproxima cu metoda Newton.

Principiul contracţiei

Fie $\mathbf{I} \subset R$ un interval şi $f : \mathbf{I} \to R$ o funcţie. f se numeşte contracţie dacă şi numai dacă:

$$a) \text{ există } q \in (0,1) \text{ astfel încât } |f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y|\,, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbf{I}$$

$$b)\ f(\mathbf{I}) \subset \mathbf{I}$$

Propoziţia -1.1 *Fie $f : [a,b] \to R$ o funcţie derivabilă.*

a) Dacă există $q \in (0,1)$ astfel încât $|f\prime(x)| \leq q$, pentru orice $x \in [a,b]$, atunci $|f(x) - f(y)| \leq q\,|x-y|$, pentru orice $x, y \in [a,b]$.

b) Dacă $|f(x) - f(y)| \leq q\,|x-y|$ şi $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| \leq (1-q) \cdot \frac{b-a}{2}$, atunci $f([a,b]) \subset [a,b]$.

Teorema -1.6 *Fie $f : [a,b] \to R$ o contracţie şi $x_0 \in [a,b]$. Definim şirul $(x_n)_n$ prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} := f(x_n),\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Atunci ecuaţia $f(x) = x$ are o soluţie unică $z \in [a,b]$, iar şirul $(x_n)_n$ converge la z, cu următoarea formulă de evaluare a erorii:

$$|x_n - z| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|\,,\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Iteraţiile construite prin metoda coardei se opresc la pasul m pentru care

$$\frac{q}{1-q}\,|x_m - x_{m-1}| < \varepsilon$$

sau la pasul m pentru care

$$|f(x_m) - x_m| < \varepsilon \text{ şi } |x_m - x_{m-1}| < \varepsilon,$$

unde ε este eroarea de aproximare.

Exemplul -1.6 *Să se aproximeze, folosind principiul contracţiei, soluţia ecuaţiei*

$$x = \frac{8}{x+2}$$

conţinută în intervalul $[1, 4]$, *luând* $x_0 = 4$,*cu eroarile* $\varepsilon 1 = 0.01$, $\varepsilon 2 = 10^{-10}$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 1 = 0.01$ se obţine la pasul $m = 9$ şi are valoarea $x_9 = 1.99707174231332$.

Soluţia ecuaţiei, aproximată cu eroarea $\varepsilon 2 = 10^{-10}$ se obţine la pasul $m = 36$ şi are valoarea $x_{36} = 2.00000000002183$.

Presupunem că o metodă de aproximare a soluţiei unei ecuaţii de tipul $f(x) = 0$ este dată de construcţia unui şir $(x_n)_n$ genrat recursiv de formula $x_{n+1} = I_f(x_n)$. Mulţimea punctelor iniţiale x_0 pentru care şirul $(x_n)_n$ este convergent la z, soluţie a acestei ecuaţii, se numeşte bazin de atracţie (al metodei generate de funcţia iterativă I_f) pentru soluţia z şi se notează cu $B(I_f, z)$. De cele mai multe ori structura acestor bazine de atracţie este foarte complexă, chiar haotică.