一、　填空（本题满分 10 分，每小题各 1 分）

1. 设 A，B 是集合，若$A\Delta B = B$，则 A 等于什么？　　$A = \emptyset$

2. 设 X 为集合，R 为 X 上的偏序关系，计算$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$等于什么？　　R

3. 把置换$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 9 & 8 & 7 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$分解成循环置换的乘积。

   ((149)(2367)(58))

4. 什么是无穷集合？　　凡能与自身的一个真子集对等的集称为无穷集合

5. 设 T 是一棵树，$p \geq 2$，则 p 个顶点的树 T 至多有多少个割点？　　p-2

6. 设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图，若 D 是连通的，则 q 至少是多大？

   p-1

7. 设 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$，则以 V 为顶点集的无向图共有多少个？　　$2^{\frac{p(p-1)}{2}}$

8. 设 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$，则以 V 为顶点集的有向图共有多少个？　　$2^{p(p-1)}$

9. 每个有 3 个支的不连通图，若每个顶点的度均大于或等于 2，则该图至少有多少个圈？　　3

10. 设 T 是一个正则二元树，它有n_0个叶子，则 T 有多少条弧？　　$2(n_0 - 1)$

二、　判断对错（本题满分 10 分，每小题各 1 分）

1. 设 A，B 是两个集合，则$A \subseteq B$且$A \in B$不可能同时成立。　　错

2. 在集合{1, 2, ⋯, 10}上可以定义2^{10}个二元运算。　　错

3.

4.

5. 设Σ为一个有限字母表，Σ上所有字（包括空字）之集记为Σ'。则Σ'不是可数集。

   错

6. 设 G 是一个(p, q)图，若$p \geq q$，则 G 中必有圈。　　对

7. 设 G 是一个(p, p)连通图，则 G 至多有 p 个生成树。　对

8. 设$r \geq 2$，G是 r-正则图且顶点连通度为 1，则$\lambda(G) \leq r$。　对

9. 把平面分成 p 个区域，每两个区域都相邻，则 p 最大为 5.　错

10. 有向图的每一条弧必在某个强支中。　错

三、证明下列各题(本题满分 18 分，每小题各 6 分)

1．设A,B,C是三个任意的集合，则

（1）证明：$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$；（2） 举例说明$(A\setminus B)\setminus C\neq A\setminus(B\setminus C)$。

证：（1） 证明：$\forall x\in(A\setminus B)\setminus C$，有$x\in(A\setminus B), x\notin C$，即$x\in A$但$x\notin B, x\notin C$，从而$x\notin B\setminus C$，于是$x\in A\setminus(B\setminus C)$，即$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

（2） 若$A=\{1,2,3\}, B=C=\{2\}$，则$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

2．设A,B,C是三个任意的集合，证明：$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

证明：设 $(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，则$x\in A$， $y\in B\setminus C$，从而$x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$。于是$(x,y)\in A\times B$， $(x,y)\notin A\times C$，因此$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，即

$$A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)。$$

反之，设$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，有$(x,y)\in(A\times B)$， $(x,y)\notin(A\times C)$，从而 $x\in A$，

$y\in B$， $y\notin C$，故$x\in A$且$y\in B\setminus C$。于是$(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，

即$(A\times B)\setminus(A\times C)\subseteq A\times(B\setminus C)$。

因此，$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

3．设S,T是两个任意的集合，证明：$S\Delta T=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

证： $\forall x\in S\Delta T$，则

若$x\in S$，则$x\notin T$。因而$x\in(S\cup T)$且$x\notin(S\cap T)$，故

$x\in(S\cup T)\setminus(S\cap T)=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$；

若$x\notin S$，则$x\in T$，同理可得$x\in(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

因此 $S\Delta T\subseteq(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

反之，因为$(S\cap T)\subseteq(S\cup T)$，故$(S\cup T)\Delta(S\cap T)=(S\cup T)\setminus(S\cap T)$。于是

$\forall x\in(S\cup T)\Delta(S\cap T)=(S\cup T)\setminus(S\cap T)$，有$x\in(S\cup T),x\notin(S\cap T)$。

若$x\in S$，则$x\notin T$，故$x\in S\Delta T$；

若$x\notin S$，则$x\in T$，故$x\in S\Delta T$。

因此$(S\cup T)\Delta(S\cap T)\subseteq S\Delta T$。

从而$S\Delta T=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

四、回答下列各题(本题满分 14 分)

1．如图 1 所示是彼德森图G，回答下列问题：(6 分)

（1）G是否是偶图？　　（不是 ）

（2）G是否是欧拉图？　　（不是 ）

（3）G是否是平面图？　　（不是 ）

（4）G是否是哈密顿图？　　（不是 ）

（5）G的色数为多少？　　（ 3 ）

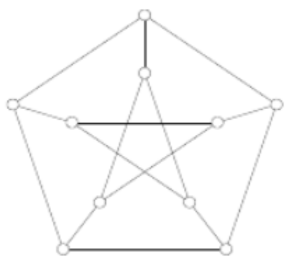

图 1

2．设 G 是如图 2 所示的有向图，则（8 分）

（1）写出 G 的邻接矩阵。

（2）求顶点 v_1 到 v_4 间长为 10 的有向通道的条数的方法是什么？

（不必算出具体的数）

（3）写出 G 的可达矩阵。

（4）画出对应于表达式（A＋B*C）/（A-C）的二元树表示。

解：（1）$B=\begin{pmatrix}0101\\0011\\0100\\0110\end{pmatrix}$；（2）$(B^{10})_{14}$ 元素的值；（3）$\begin{pmatrix}1111\\0111\\0111\\0111\end{pmatrix}$ （4）

五、证明下列各题(本题满分 18 分，每小题各 6 分)

1．设 f：X$\to Y$，g：Y$\to$Z。若 $g\circ f$ 是单射，则 f 与 g 哪个是单射？请证明之。

解：f 是单射。

因为 $g\circ f$ 是单射，所以 $\forall x_1,x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$。

因此，$f(x_1)\neq f(x_2)$，故 f 是单射。

2．设 $X=\{1,2,\Lambda,n\},S=X\times X$。"$\cong$"是 S 上如下的二元关系：$\forall(i,j),(k,l)\in S$，

$(i,j)\cong(k,l)$ 当且仅当 $i+j=k+l$。

则(1) 证明：$\cong$ 是等价关系；(2)求等价类数。

证：(1)等价关系显然；

(2)等价类数为：$2n-1$。

3．令 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，$S=\{f\,|\,f:N\to\{0,1\}\}$, 利用康托对角线法证明S是不可数集。

证:假设从N到{0, 1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$ 。每个函数 f_i 确定了一个0,1序列 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$ 。构造序列 $b_1,b_2,b_3,\cdots$,$b_i=1$，若 $a_{ii}=0$；否则 $b_i=0$。该序列对应的函数 $f(i)=b_i$，$i\in N$，不为 $f_1,f_2,\cdots$ 任一个，矛盾。

六、证明下列各题（本题满分20分，每小题各5分）

1. 设 G 是一个恰有两个不邻接的奇度顶点 u 和 v 的无向图，证明：

$$G\text{ 连通}\Leftrightarrow G+uv\text{ 连通。}$$

证：$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 假设 G 不连通，则 G 恰有 2 个分支：G_1,G_2。由题意 u与v 不在一个分支上，于是含有 u(或v)的顶点的分支只有一个奇度数顶点与握手定理的推论矛盾。于是假设不成立，即 G 是连通的。

2．证明：任意一棵非平凡树至少有两个树叶

证明：设 T 为一棵非平凡的无向树，T 中最长的路为 $L=v_1v_2\cdots v_k$。

若端点 v_1 和 v_k 中至少有

一个不是树叶，不妨设 v_k 不是树叶，即有 $\deg(v_k)\ge 2$，则 v_k 除与 L 上的顶点 v_{k-1} 相邻外，

必存在 v_{k+1} 与 v_k 相邻，而 v_{k+1} 不在 L 上，否则将产生回路。于是 $v_1\cdots v_kv_{k+1}$ 仍为 T 的一条比

L 更长的路，这与 L 为最长的路矛盾。故 v_k 必为树叶。

同理，v_1 也是树叶。

3．证明：若每个顶点的度数大于或等于3，则不存在有7条边的平面连通图。

证明：假设存在这样的平面图，则由 $p-q+f=2$，有

$$p+f=2+q=9\cdots\cdots\ (1)$$

而由 $\sum_{v\in V}\deg v=2q, 3p\le 2q, p\le\frac{2}{3}q=\frac{14}{3}$；由 $nf=2q, 3f\le 2q, f\le\frac{2}{3}q=\frac{14}{3}$；

p,f 为整数，故 $p,f\le 4$，于是 $p+f\le 8$ 与(1)矛盾。

4．证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。（用数学归纳法证明）

证：设D是p个顶点的比赛图。施归纳于p：

当p=1，2时，结论显然成立。

假设当p≥2时结论成立，往证对p+1个顶点的比赛图D也成立。从D中去掉一个顶点u，则得到一个具有p个顶点的比赛图D-u。由归纳假设D-u有哈密顿路 $u_1, u_2, \cdots, u_p$。

在D中，若 uu_1 或 u_pu 为D的弧，则结论成立。今设 u_1u 及 uu_p 为D的弧，由于D比赛图，所以u与 u_k（k=2,⋯，p-1）之间有且仅有一条弧，于是必有一个最大i使 u_iu 为弧，从而 uu_{i+1} 为D的弧。于是，$u_1\cdots u_iuu_{i+1}\cdots u_p$ 为D的哈密顿路。由归纳法原理知对任何p本题结论成立。