哈工大 2007 年 秋季学期

集合论与图论 试题 A

题号	一	二	三	四	总分
分数					

班号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 90 分

（06 级计算机、信息安全专业、实验学院）

一、判断对错（本题满分 10 分，每小题各 1 分）

（正确画“√”，错误画“×”）

1. 对每个集合 A，$\{A\}\in 2^A$。 （×）

2. 对集合 P,Q，若 $P\cup Q=Q, P\cap Q=\varnothing$，则 $P=\varnothing$。 （√）

3. 设 $f:X\to Y, A\subseteq X$，若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A$。 （×）

4. 设 $f:X\to Y, B\subseteq Y$，则有 $f(f^{-1}(B))\supseteq B$。 （×）

5. 若 R 是集合 X 上的等价关系，则 R^2 也是集合 X 上的等价关系。 （√）

6. 若 $f:X\to Y$ 且 f 是满射，则只要 X 是可数的，那么 Y 至多可数的。 （√）

7. 设 G 是有 10 个顶点的无向图，对于 G 中任意两个不邻接的顶点 u 和 v，均有 $\deg u+\deg v\geq 9$，则 G 是哈密顿图。 （×）

8. 设 $A=(a_{ij})$ 是 p 个顶点的无向图 G 的邻接矩阵，则对于 G 的顶点 v_i，有 $\deg v_i=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}$ 成立。 （√）

9. 设 G 是一个 (p,q) 图，若 $q\geq p-1$，则 $\chi(G)\leq[2p/q]$。 （×）

10. 图 G 和 G_1 同构当且仅当 G 和 G_1 的顶点和边分别存在一一对应关系。 （×）

二. 填空(本题 40 分，每空各 2 分)

1. 设 $S=\{\phi,\{\phi\}\}$, 则 $2^S=$_$\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$ __。

2. 设 A, B 是任意集合，若 $A \quad B=B$，则 A 与 B 关系为_ $A=B=\phi$ _。

3. 设 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{0,1\}$, $Z=\{2,3\}$; $f: X\to Y$, $f(a)=f(b)=0$, $f(c)=1$,

   $g: Y\to Z$, $g(0)=2$, $g(1)=3$, 则 $g\circ f(a)$, $g\circ f(c)$ 分别为 2 ， 3 。

4. 设 X 和 Y 是集合且 $|X|=m$，$|Y|=n$，若 $m\le n$，则从 X 到 Y 的单射的

   个数为 __$C_n^m m!$__ 。

5. 设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$, $B=\{1,2\}$，则从 X 到 Y 的满射的个数为 __2^n-2__。

6. 设 $X=\{1,2,3,4\}$, $R=\{(1,2),(2,2),(3,4)\}$, $S=\{(2,3),(3,1),(4,2)\}$，则

   $R\circ(S\circ R)=$_$\{(1,4),(2,4),(3,2)\}$ _ 。

7. 设 $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}$，则 $\sigma_1\sigma_2=\begin{pmatrix}12345\\23541\end{pmatrix}$_ 。

8. 设 $X=\{a,b,c,d\}$, $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，则

   $R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b)\}$ _ 。

9. 设 X 为集合且 $|X|=n$，则 X 上不同的自反或对称的二元关系的个数

   为_$2^{n^2-n}+2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^{\frac{n^2-n}{2}}$_。

10. 设 $X=\{a,b,c,d\}$, $A=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$ 是 X 的一个划分，则由 A 确定的

    X 上的等价关系为 ___$\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c),(d,d)\}$ _ 。

11. $S=\{1,2,\cdots,10\}$，在偏序关系“整除”下的极大元为 6，7，8，9，10 。

12. 给出一个初等函数 $f(x)$，使得它是从 $(0,1)$ 到实数集合 R 的一一对应，

    这个函数为 _____ctgπx 或- ctgπx 或 tg(πx $-\pi/2$)_____ 。

13. 设 G 是 (p,p) 连通图，则 G 的生成树的个数至多为 __ p __。

14. 含 5 个顶点、 3 条边的不同构的无向图个数为 __4__ 。
15. 设无向图 G 有 12 条边，有 6 个 3 度顶点，其余顶点度数均小于 3，则 G 中顶点数至少为 __9__ 。
16. 由 6 个顶点， 12 条边构成的平面连通图 G 中，每个面由 __3__ 条边围成。
17. 若 K_p 为平面图，则 p 的取值为 __≤ 4__ 。
18. 包含完全图 K_p 作为子图的无向图的顶点色数至少为 __p__ 。
19. 有向图的可达矩阵 $R=(r_{ij})$ 中，若 $r_{ij}=r_{ji}=1$，则顶点 v_i 与 v_j 之间是 __互达__ 。
20. 高为 h 的 $r\,(r\ge 2)$ 元正则树至多有 __r^h__ 片树叶。

三、证明和计算（本题 40 分，每小题各 5 分）

1. 设 A,B,C 是三个任意集合，证明： $A\times(B\ \ C)=(A\times B)\ \ (A\times C)$。

证：设 $(x,y)\in A\times(B\ \ C)$，则 $x\in A$， $y\in B\ \ C$，从而 $x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$ 。

于是 $(x,y)\in A\times B$， $(x,y)\notin A\times C$，因此 $(x,y)\in(A\times B)\ \ (A\times C)$，即

$$A\times(B\ \ C)\subseteq(A\times B)\ \ (A\times C)。$$

反之，设 $(x,y)\in(A\times B)\ \ (A\times C)$，有 $(x,y)\in(A\times B)$， $(x,y)\notin(A\times C)$，从而

$x\in A$， $y\in B$， $y\notin C$， 故 $x\in A$ 且 $y\in B\ \ C$。于是 $(x,y)\in A\times(B\ \ C)$，

即 $(A\times B)\ \ (A\times C)\subseteq A\times(B\ \ C)$。

因此， $A\times(B\ \ C)=(A\times B)\ \ (A\times C)$。

2. 设 $N=\{0,1,2,\cdots\}$， $f,g:N\to N$，$\forall n\in N$， $f(n)=n+1$，$g(n)=\max\{0,n-1\}$。证明：

(1) f 是单射而不是满射； (2) g 是满射而不是单射； (3) $g\circ f=I_N$， 但 $f\circ g\ne I_N$ ；

证：（1）若 $f(n)=f(m)$，则 $n+1=m+1$，从而 $n=m$，故 f 为单射；但 0 不存在原象，故 f 不是满射。

(2) $\forall n\in N$， $g(n+1)=n,\ n\ge 0$，故 g 是满射；但 $g(0)=g(1)$，故 g 不是单射。

(3) $g\circ f(x)=g(f(x))=\max\{0,f(x)-1\}=\max\{0,x\}=x=I_N(x)$，故 $f\circ g=I_N$。但 $f\circ g(0)=f(g(0))=1\ne I_N(0)$，故 $f\circ g\ne I_N$。

3. 设 R 是 A 上的一个自反关系，证明：

R 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，则 $(b,c)\in R$。

证：$\Rightarrow$ R 是 A 上的等价关系。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，由 R 的对称性有：$(b,a)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，

由 R 的传递性有：$(b,c)\in R$。

$\Leftarrow$ R是自反的，故 $\forall a\in A$ 有 $(a,a)\in R$。

若 $(a,b)\in R$，由 $(a,a)\in R$ 有 $(b,a)\in R$，所以 R 是对称的。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 R 的对称性有：

$(b,a)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，故由题意得 $(a,c)\in R$，所以 R 是传递。

因此，R 是 A 上的等价关系。

4. 设 G 是一个 (p,q) 图，证明：G 是树 $\Leftrightarrow$ G 连通且 $p=q+1$。

证：$\Rightarrow$ 因为 G是树，所以 G是连通的；
其次对 G的顶点数 p 进行归纳证明 p=q+1。
当 p 为 1 或 2 时，连通图 G中显然有 p=q+1。

假设对一切少于 p 个顶点的树结论成立；

今设 G是有 p 个顶点树，从 G中去掉任一条边 x，则 G-x 恰有两个支。由归纳假设，每个支中顶点数与边数之间有关系式：$p_1=q_1+1$，$p_2=q_2+1$。

所以，$p=p_1+p_2=q_1+q_2+2=(q_1+q_2+1)+1=q+1$。

$\Leftarrow$ 显然，只须证 G中无回路即可。

设 G中有一个长为 n 的回路 C_n，则回路上有 n 条边，显然 n〈p。于是，G中还有 p-n 个顶点不在 C_n 上。由于 G是连通的，所以不在 C_n 上的那些 p-n 个点的每一个均关联一条边，这些边互不相同，其中每一条都在该点与 C_n 的某点的最短路上。因此，除了 Cn 上的 n 条边之外，G至少还有 p-n 条边。所以，G至少有 q≥p 条边，这与 p=q+1相矛盾，故 G 中无回路。

5. 设 G 是一个 (p,q) 无向图，证明：（1）若 $\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则 G是连通的；

（2）若 G 是连通的，则是否一定有 $\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$ 成立？请说明理由。

证：(1) 因为对 G 的任一对不邻接顶点 u 和 v，有 $\deg u+\deg v\geq[p/2]+[p/2]\geq p-1$。

假设 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1=(V_1,E_1)$ 是其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2=(V_2,E_2)$，其中，$|V_1|=n_1,|V_2|=p-n_1$，则 $\forall u\in V_1, v\in V_2$，有

$$\deg u\le n_1-1, \deg v\le p-n_1-1。$$

于是，$\deg u+\deg v\le(n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$。

矛盾，所以 G 是连通的。

(2) 这个定理是一个充分条件，不是必要条件，即若 G 是连通的，则 $\delta(G)\ge[\frac{p}{2}]$ 不一定成立。

例如：6个顶点的一条通路，每个顶点的度 $\deg v\le 2$，不满足 $\delta(G)\ge[\frac{p}{2}]=3$。

6. 证明：每个自补图必有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点（n 为正整数）。

证：因为每个自补图 G 所对应的完全图的边数必为偶数，即 $q=p(p-1)/2$ 为偶数。而当 $p=1,2,3$ 时，图 G 无自补图，只有 $p\ge 4$ 时，图 G 才有自补图。于是 p 可写成如下形式：$4n,4n+1,4n+2,4n+3$，其中 n 为正整数；代入 $q=p(p-1)/2$ 中，只有 $4n,4n+1$ 才能使 q 为偶数，故每个自补图必有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点。

7. 设 T 是一棵树且 $\Delta(T)\ge k$，证明：T 中至少有 k 个顶点的度为 1。

证：设 T 中有 p 个顶点，s 个树叶，则 T 中其余 $p-s$ 个顶点的度数均大于等于 2，且至少有一个顶点的度大于等于 k。由握手定理可得：

$$2q=2p-2=\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)\ge 2(p-s-1)+k+s，有 s\ge k。$$

所以 T 中至少有 k 个树叶。

8. 证明：一个没有有向回路（圈）的有向图中至少有一个入度为零的顶点。

证：设 D=(V,A) 是一个没有有向回路的有向图。考察 D 中任一条最长的有向路的第一个顶点 v，则 id(v)=0。因为若 id(v) ≠0，则必有一个顶点 u 使得 (u,v) ∈A。于是，

若 u 不在此最长路上，则此最长路便不是 D 中的最长路，这是与前面的假设相矛盾。

若 u 在此最长路上，则 D中有有向回路，这与定理的假设矛盾。因此 id(v)=0。