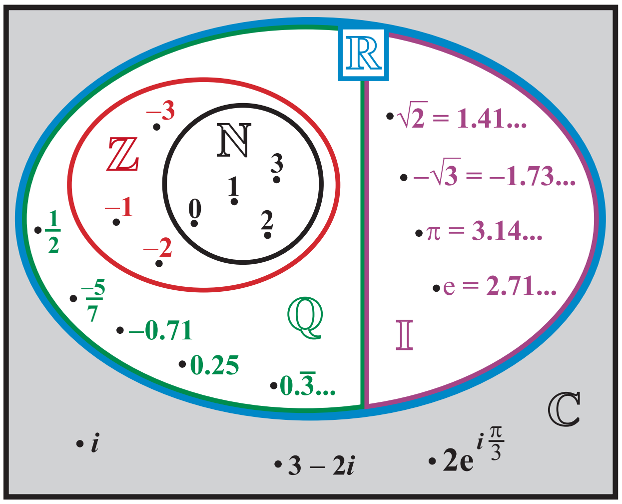
Formelsammlung in Mathematik

Um ein Register zu erstellen, bitte die grauen Flächen ausschneiden!

1 Zahlenmengen



- **Natürliche Zahlen:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- **Ganze Zahlen:** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
- **Rationale Zahlen:** Menge aller Brüche: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0\}$ = Zahlen mit abbrechender oder periodischer Dezimalentwicklung.
- **Irrationale Zahlen:** $\mathbb{I}$ = Zahlen mit unendlicher, nichtabbrechender und nichtperiodischer Dezimalentwicklung.
- **Reelle Zahlen:** $\mathbb{R}$ = Vereinigung der Rationalen und Irrationalen Zahlen.
- **Komplexe Zahlen:** $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$.

Komplexe Zahlen

▶ **Imaginäre Einheit:** $\boxed{i^2 = -1}$

▶ **Eulersche Formel:**

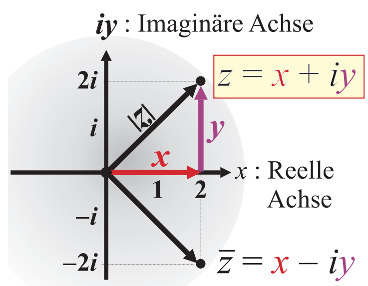
$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)}$$

$e^{i\varphi} = \text{cis}(\varphi), \quad |e^{i\varphi}| = 1.$

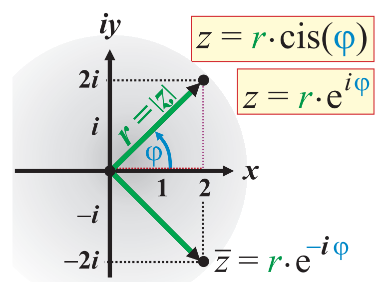
▶ **Gausssche Zahlenebene:**

xy-Ebene der kompl. Zahlen.

Kartesische Koordinaten



Polarkoordinaten

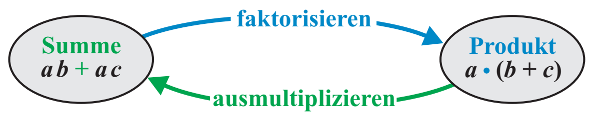


Komplexe Zahl	z	$z = x + i\,y$ $\begin{cases} x: \text{Realteil} \\ y: \text{Imaginärteil} \end{cases}$	$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \text{cis}(\varphi)$
Konjugierte	$\overline{z}$	$\overline{z} = x - i\,y$	$\overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$
Betrag	$\lvert z\rvert$	$\lvert z\rvert = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\lvert z\rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Winkel	φ	$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$	$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ $\varphi = \arg(z)$
Addition **Subtraktion**	$z_1 + z_2$ $z_1 - z_2$	$(x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)$	
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2$	$(x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)$	$r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\,(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division $(z_2 \neq 0)$	$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\lvert z_2\rvert^2} = \frac{(x_1\,x_2 + y_1\,y_2) + i\,(x_2\,y_1 - x_1\,y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Inverse $(z \neq 0)$	$\frac{1}{z}$	$\frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2}$	$\frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$
Potenzieren	z^n	$r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i\,\sin(n \cdot \varphi)) = r^n \cdot e^{i\,n\,\varphi}$	
Radizieren	$\sqrt[n]{z}$	$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi\,k}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)$	

2 Algebra

2.1 Rechengesetze

	Addition	Multiplikation
Kommutativgesetz:	$\boxed{a+b=b+a}$	$\boxed{a\cdot b=b\cdot a}$
Assoziativgesetz:	$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c}$	$\boxed{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c}$
Distributivgesetz:	$\boxed{a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c}$	
Neutrales Element:	$\boxed{a+0=0+a=a}$	$\boxed{a\cdot 1=1\cdot a=a}$
Inverses Element:	$\boxed{a+(-a)=(-a)+a=0}$	$\boxed{a\cdot(a^{-1})=(a^{-1})\cdot a=1}$

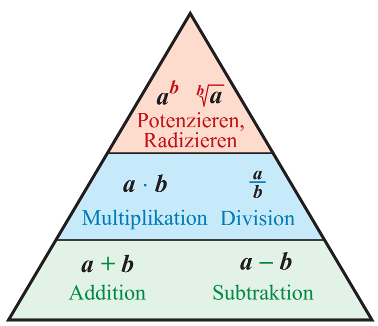


2.2 Reihenfolge der Operationen

Klammern *vor* **Potenzieren**, **Radizieren** *vor* **Punktrechnung** *vor* **Strichrechnung**

Freiwillige Klammern:

- $-1^2=-(1)^2=-1$
- $2\cdot 3^4=2\cdot(3^4)=162$
- $4\,/\,2+3=(4\,/\,2)+3=5$
- $2+3\cdot 4=2+(3\cdot 4)=14$



Obligatorische Klammern:

- $(-1)^2=(-1)\cdot(-1)=+1$
- $(2\cdot 3)^4=6^4=1296$
- $4\,/\,(2+3)=4\,/\,5=0.8$
- $(2+3)\cdot 4=5\cdot 4=20$

2.3 Äquivalenzumformungen

Gleichung $a=b$		Ungleichung $a<b$
$a\pm c=b\pm c$	**Addition, Subtraktion**	$a\pm c<b\pm c$
$a\cdot c=b\cdot c$	**Multiplikation** mit $c\neq 0$	$a\cdot c<b\cdot c$ falls $c>0$ $a\cdot c>b\cdot c$ falls $c<0$ [*]
$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$	**Division** durch $c\neq 0$	$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ falls $c>0$ $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ falls $c<0$ [*]
$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$	**Kehrwert** $(a,\,b\neq 0)$	$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ falls $a\cdot b<0$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ falls $a\cdot b>0$ [*]

[*] : Ungleichung ändert ihre Richtung.

Bitte ausschneiden

2.4 Termumformungen, Binomischer Satz

Binomische Formeln:

1. Bin. Formel: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2}$

2. Bin. Formel: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2}$

3. Bin. Formel: $\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$

- $a^2 + b^2$ reell nicht zerlegbar.
- $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + a\cdot b + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)\cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\cdot b^k$

Binomischer Satz:

$$\boxed{(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^0\, b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\cdot b^k}$$

- Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.
- Fakultät: $n! = 1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot n$, $\quad 0! = 1! = 1$. (Siehe Kombinatorik auf S. 36)
- Für $(a-b)^n$ ist das Vorzeichen *alternierend*: $(a-b)^3 = +a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$.

Binomischer Satz und pascalsches Zahlendreieck:

1	$n=0$	$\binom{0}{0}$	$(a+b)^0 = 1$
1 + 1	$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	$(a+b)^1 = 1a^1 + 1b^1$
1 + 2 + 1	$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
1 + 3 + 3 + 1	$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
1 4 6 4 1	$n=4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$

Betrag: $\boxed{|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$ „macht x immer positiv". Siehe S. 15.

2.5 Bruchrechnen

Addition, Subtraktion	$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{a\cdot y}{b\cdot y} \pm \frac{x\cdot b}{y\cdot b} = \frac{a\cdot y \pm x\cdot b}{b\cdot y}}$ $b,\ y \neq 0$	▶ Hauptnenner: kgV$(b,\ y)$, ▶ Brüche auf HN erweitern, ▶ Zähler addieren.
Multiplikation	$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y} = \frac{a\cdot x}{b\cdot y}}$ $b,\ y \neq 0$	▶ „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner".
Division, Doppelbrüche	$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}}$ $b,\ x,\ y \neq 0$	▶ Division durch Bruch: Multiplikation mit dessen Kehrwert.

2.6 Potenzen

Definition: $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$ heisst n-te Potenz von a, wobei $\begin{cases} a \in \mathbb{R}: & \text{Basis} \\ n \in \mathbb{N}: & \text{Exponent.} \end{cases}$

Insbesondere: $a^1 = a$ und $\begin{cases} a^0 = 1, & \text{falls } a \neq 0 \\ 0^n = 0, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$

- **Negative Exponenten $\Rightarrow$ Nenner:** $\boxed{k \cdot a^{-n} = \dfrac{k}{a^n}}$ $\quad a \neq 0.$

- **Rationale Exponenten $\Rightarrow$ Wurzeln:** $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $\quad a \geq 0, \quad n > 0.$

  speziell: $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $\qquad$ Quadratwurzel: $\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$

Potenzsätze

Gleiche Basis	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a \neq 0$
Gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$b \neq 0$
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$b \neq 0$
Doppelte Potenzen	$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$a \geq 0$

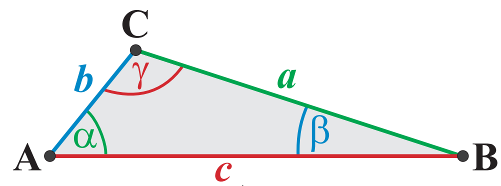
2.7 Logarithmen (siehe auch S. 18)

Definition	$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$	$a, x > 0, \quad a \neq 1$
Multiplikation, Division	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
Potenzen	$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \qquad x > 0$	$a^x = b \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$
Basiswechsel	$\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0;\ b \neq 1$	speziell: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

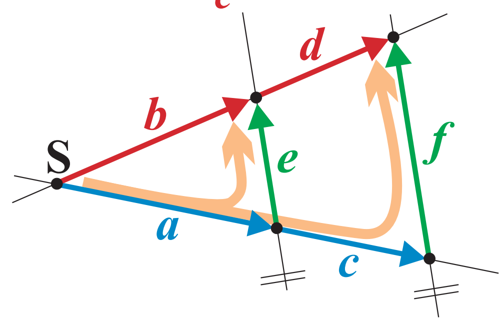
$\Rightarrow$ Siehe auch Logarithmusfunktionen auf S. 18.

3 Planimetrie

3.1 Allgemeine Dreiecke



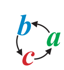
- **Winkelsumme:** $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$
- **Dreiecksungleichung:** $\boxed{c < a + b}$
- **Ähnlichkeit, Strahlensätze:** Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie **gleiche Winkel** und / oder **gleiche Seitenverhältnisse** haben.



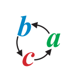
  1. **Strahlensatz:** $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}$

  2. **Strahlensatz:** $\boxed{\frac{a}{e} = \frac{a+c}{f}}$

- **Sinussatz:** $\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot R}$ wobei R : Umkreisradius.

- **Cosinussatz:** $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$ und zyklisch: 

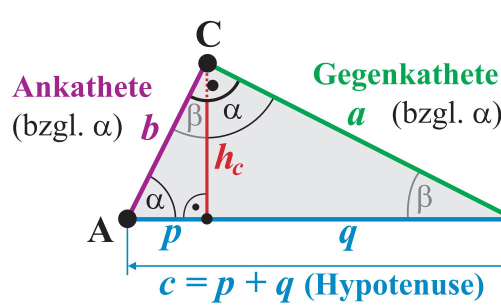
- **Fläche:** $\boxed{A_\Delta = \frac{1}{2}\,(\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}}$

  ▶ **Zwei Seiten und Zwischenwinkel:** $\boxed{A_\Delta = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)}$ und zyklisch: 

  ▶ **Drei Seiten (Heron):** $\boxed{A_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ wobei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

  ▶ **Drei Winkel und Umkreisradius *R*:** $\boxed{A_\Delta = 2\,R^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)}$

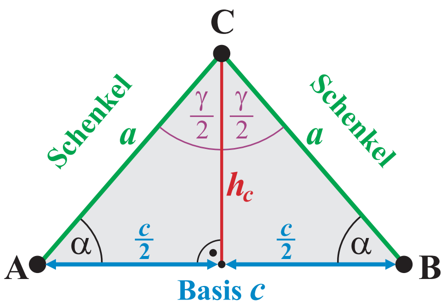
3.2 Rechtwinklige Dreiecke



- **Satz von Pythagoras:** $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$
- **Höhensatz:** $\boxed{{h_c}^2 = p \cdot q}$
- **Kathetensatz (Satz von Euklid):**
  $\boxed{a^2 = c \cdot q}$ oder $\boxed{b^2 = c \cdot p}$
- **Trigonometrische Funktionen:**
  $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}}$ (Siehe auch S. 19)

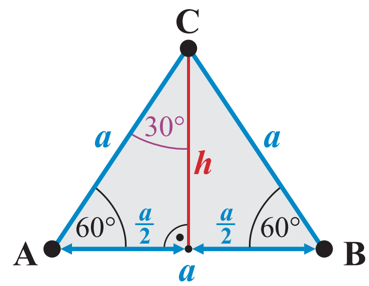
3.3 Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

Gleichschenkliges Dreieck



- h_c halbiert die Basis c.
- h_c halbiert den Winkel γ.
- Gleiche Basiswinkel ($\alpha = \beta$).

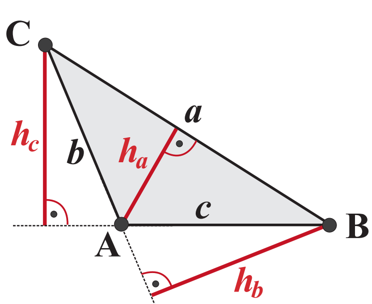
Gleichseitiges Dreieck



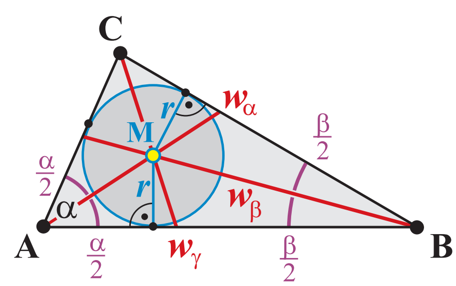
- Höhe: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a$
- Fläche: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2$
- Umkreisradius: $R = \frac{\sqrt{3}}{3}\, a = \frac{2}{3}\, h$
- Inkreisradius: $r = \frac{\sqrt{3}}{6}\, a = \frac{1}{3}\, h$

3.4 Linien im Dreieck

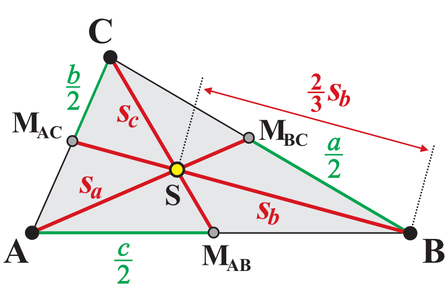
Höhen sind die Verbindungslinien von einem Eckpunkt zur gegenüberliegenden Seite (oder deren Verlängerung), welche zu dieser **senkrecht** stehen.



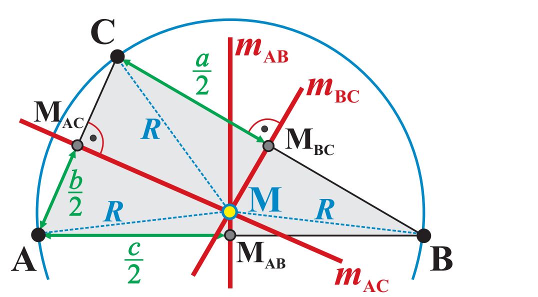
Winkelhalbierende (WH) halbieren einen Winkel des Dreiecks. Jeder Punkt auf einer WH hat zu den angrenzenden Seiten **gleicher Abstand**. Die WH schneiden sich im **Inkreismittelpunkt M** des Dreiecks.



Seitenhalbierende verlaufen von einem Eckpunkt zum Seitenmittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Sie schneiden sich im **Verhältnis 2:1**. Ihr Schnittpunkt ist der **Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt) des Dreiecks (vgl. S. 32).

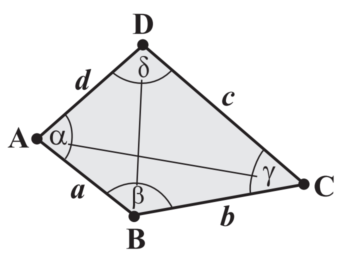


Mittelsenkrechte sind die Menge aller Punkte, welche von zwei Endpunkten **gleichen Abstand** haben. Sie schneiden sich im **Umkreismittelpunkt M** des Dreiecks.



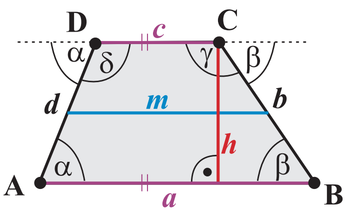
3.5 Vierecke

Allgemeines Viereck



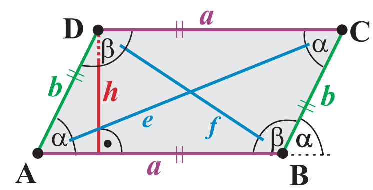
▶ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Trapez



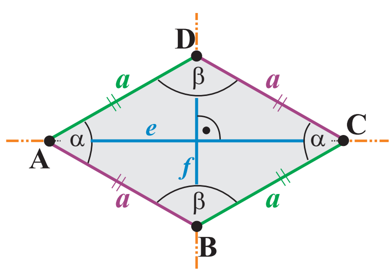
▶ $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$

Parallelogramm



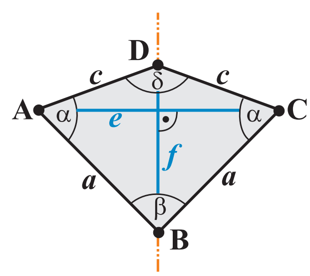
▶ $A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

Rhombus (Raute)



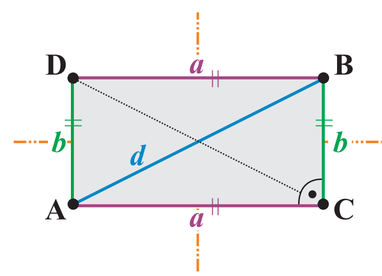
▶ $A = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin(\alpha)$

Drachenviereck



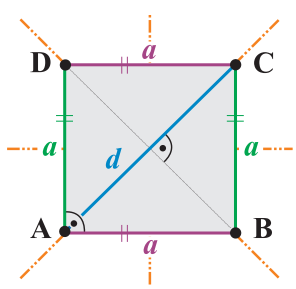
▶ $A = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot c \cdot \sin(\alpha)$

Rechteck



▶ $A = a \cdot b$

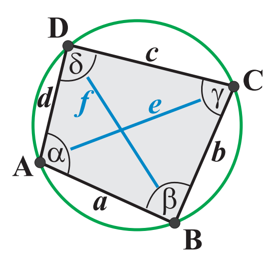
Quadrat



▶ $A = a^2$

▶ $d = a \cdot \sqrt{2}$

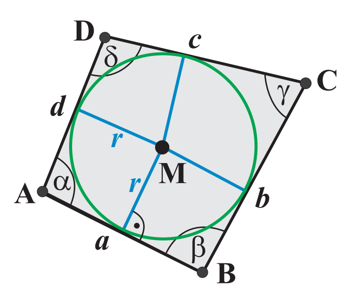
Sehnenviereck



▶ $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

▶ $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$

Tangentenviereck

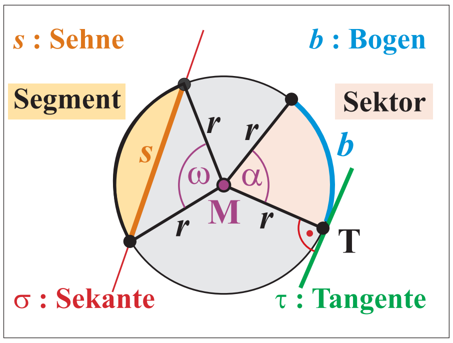


▶ $a + c = b + d$

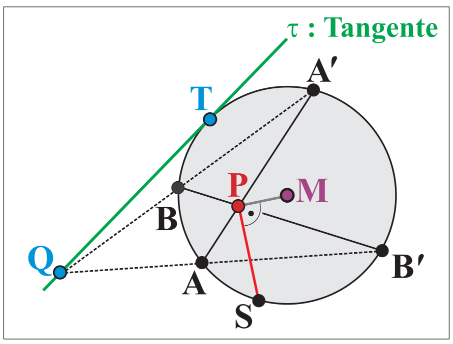
▶ $A = r \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$

Symmetrieachsen sind in oranger Farbe gekennzeichnet.

3.6 Kreis



Umfang	$\boxed{U = 2\pi \cdot r}$
Bogenlänge	$\boxed{b = 2\pi\, r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}}$
Fläche	$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$
Sektor	$\boxed{A_{\text{Sek}} = \pi\, r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°} = \dfrac{b \cdot r}{2}}$
Segment	$\boxed{A_{\text{Seg}} = r^2 \cdot \left(\pi \cdot \dfrac{\omega}{360°} - \dfrac{1}{2} \cdot \sin(\omega)\right)}$



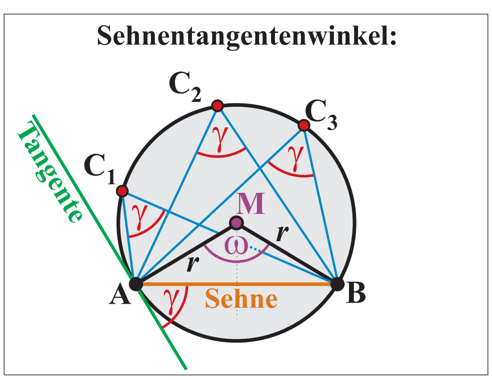
Sehnensatz	$\boxed{\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PS}^2}$
Sekantensatz	$\boxed{\overline{QB} \cdot \overline{QA'} = \overline{QA} \cdot \overline{QB'} = \overline{QT}^2}$

▶ **Kreisgleichung** des Kreises K mit Mittelpunkt $M(u \;/\; v)$ und Radius r:

Mittelpunktsform		**Koordinatenform**
$K\colon (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$	ausmultiplizieren → ← quadratisch ergänzen	$K\colon x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

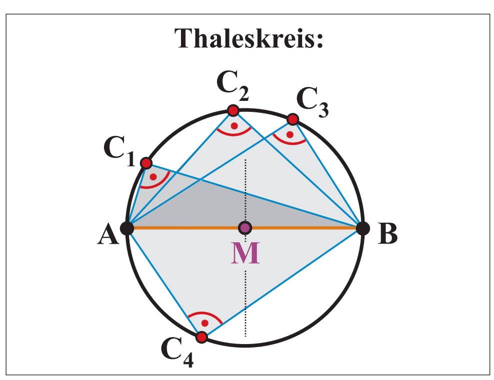
Tangente τ an K im Punkt $T(x_0 \;/\; y_0)$: $\boxed{\tau:\; (x-u)\cdot(x_0-u) + (y-v)\cdot(y_0-v) = r^2}$

Kreiswinkelsätze



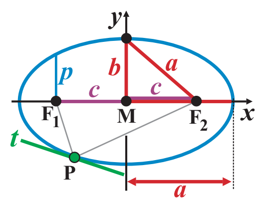
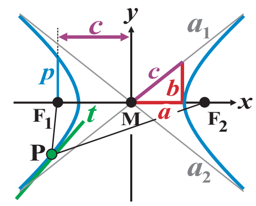
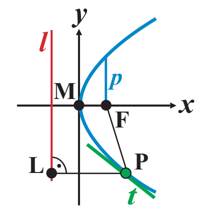
▶ gleiche Peripheriewinkel γ.

▶ Zentriwinkel $\omega = 2 \cdot \gamma$.



▶ gleiche Peripheriewinkel $\gamma = 90°$.

3.7 Kegelschnitte

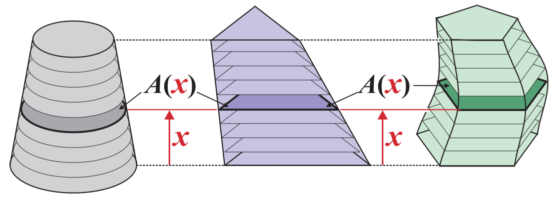
	Ellipse	Hyperbel	Parabel
			
Abstands-Eigenschaften	$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$	$\lvert\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\rvert=2a$	$\overline{PF}=\overline{PL}$
Kurvengleichung Mittelpunkt M(0 / 0)	$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$	$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$	$\boxed{y^2=2\cdot p\cdot x}$
Parametergleichung Mittelpunkt M(0 / 0)	$x(\varphi)=a\cdot\cos(\varphi)$ $y(\varphi)=b\cdot\sin(\varphi)$	$x(\varphi)=\pm\,a\cdot\cosh(\varphi)$ $y(\varphi)=b\cdot\sinh(\varphi)$	
Tangentengleichung in P(x_0 / y_0)	$t:\ \frac{x\,x_0}{a^2}+\frac{y\,y_0}{b^2}=1$	$t:\ \frac{x\,x_0}{a^2}-\frac{y\,y_0}{b^2}=1$	$t:\ y\,y_0=p\,(x+x_0)$
Tangentenbedingung für $t:\ y=m_t\,x+q$	$q^2=a^2\,m_t^2+b^2$	$q^2=a^2\,m_t^2-b^2$	$q=\frac{p}{2\,m_t}$
Konjugierte Richtung	$m_1\cdot m_2=-\,\frac{b^2}{a^2}$	$m_1\cdot m_2=+\,\frac{b^2}{a^2}$	
Lineare Exzentrität	$c^2=a^2-b^2$	$c^2=a^2+b^2$	
Numerische Exzentrität	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$	$\varepsilon=1$
Brennpunkte	$F_{1,2}(\pm c\ /\ 0)$	$F_{1,2}(\pm c\ /\ 0)$	$F(\frac{p}{2}\ /\ 0)$
Scheitelkrümmungs-Kreisradien	$r_a=\frac{b^2}{a},\ \ r_b=\frac{a^2}{b}$	$r=\frac{b^2}{a}$	$r=p$
Parameter p (Quermass)	$p=\frac{b^2}{a}$	$p=\frac{b^2}{a}$	p
Fläche	$A=\pi\cdot a\cdot b$		
Asymptoten		$a_{1,2}:\ y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$	

Verschiebung von M(0 / 0) auf M′(u / v): $x\mapsto(x-u)$ und $y\mapsto(y-v)$.

4 Stereometrie

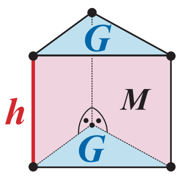
4.1 Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper sind volumengleich, wenn deren Schnittfläche $A(x)$ in jeder Höhe x den gleichen Flächeninhalt haben.

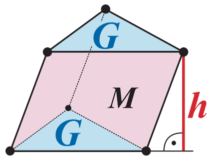


4.2 Prismen und Zylinder (Kongruente, parallele Grund- und Deckfläche)

Gerades Prisma

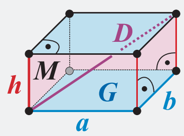


Schiefes Prisma



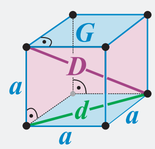
- G: Grundfläche; M: Mantelfläche.
- h: Höhe.
- Volumen: $\boxed{V = G \cdot h}$
- Oberfläche: $\boxed{A = 2 \cdot G + M}$

Quader



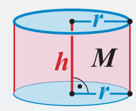
- $V = a \cdot b \cdot h$
- $A = 2\,(a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$
- $D = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

Würfel



- $V = a^3$
- $A = 6 \cdot a^2$
- $D = a \cdot \sqrt{3}, \quad d = a \cdot \sqrt{2}$

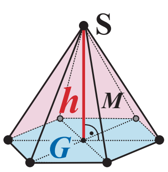
Zylinder



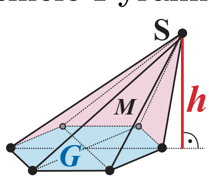
- $V = \pi\, r^2 \cdot h$
- $A = 2 \cdot \pi\, r^2 + 2\pi\, r \cdot h$
- $M = 2\pi\, r \cdot h$

4.3 Spitze Körper

Gerade Pyramiden

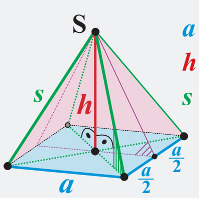


Schiefe Pyramiden



- G: Grundfläche; M: Mantelfläche.
- h: Höhe.
- Volumen: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$
- Oberfläche: $\boxed{A = G + M}$

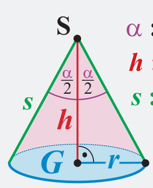
Gerade, quadratische Pyramide



***a* :** Grundkante
***h* :** Höhe
***s* :** Seitenkante

- $V = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$
- $A = a^2 + M$
- $s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$

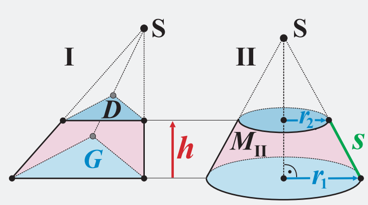
Gerader Kreiskegel



***α* :** Öffnungswinkel
***h* :** Höhe
***s* :** Mantellinie

- $V = \frac{1}{3}\, \pi r^2 \cdot h$
- $A = \pi r^2 + \pi r s, \quad M = \pi r s$
- $s = \sqrt{h^2 + r^2}$

Pyramidenstumpf, Kegelstumpf

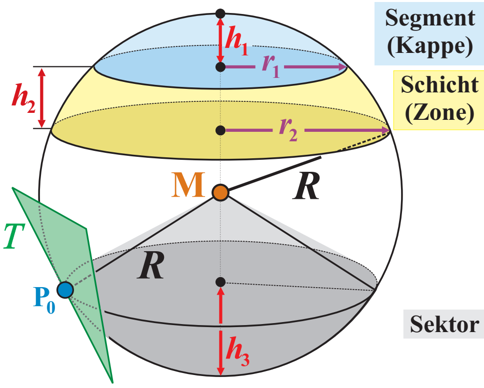


- $V_{\mathrm{I}} = \frac{h}{3}\,(G + \sqrt{GD} + D)$
- $V_{\mathrm{II}} = \frac{\pi h}{3}\,({r_1}^2 + r_1\, r_2 + {r_2}^2)$
- $M_{\mathrm{II}} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

Kegelschn.
Stereometrie

Bitte ausschneiden

4.4 Kugel



Volumen: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$

▶ **Segment:** $V = \frac{1}{3}\pi \cdot {h_1}^2 \cdot (3\,R - h_1)$

▶ **Schicht:** $V = \frac{1}{6}\pi \cdot h_2 \cdot (3\,{r_1}^2 + 3\,{r_2}^2 + {h_2}^2)$

▶ **Sektor:** $V = \frac{2}{3}\pi\, R^2 \cdot h_3$

Oberfläche: $\boxed{A = 4\,\pi \cdot R^2}$

▶ **Segment:** $M = 2\,\pi\, R \cdot h_1$ (Kappe, Haube)

▶ **Schicht:** $M = 2\,\pi\, R \cdot h_2$ (Zone)

▶ **Sektor:** $A = 2\,\pi\, R \cdot h_3 + \pi\, R\,\sqrt{2Rh_3 - {h_3}^2}$

▶ **Kugelgleichung** einer Kugel mit Mittelpunkt $M(u\ /\ v\ /\ w)$ und Radius R:

Mittelpunktsform		**Koordinatenform**
$K\colon (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$	ausmultiplizieren → ← quadratisch ergänzen	$K\colon x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

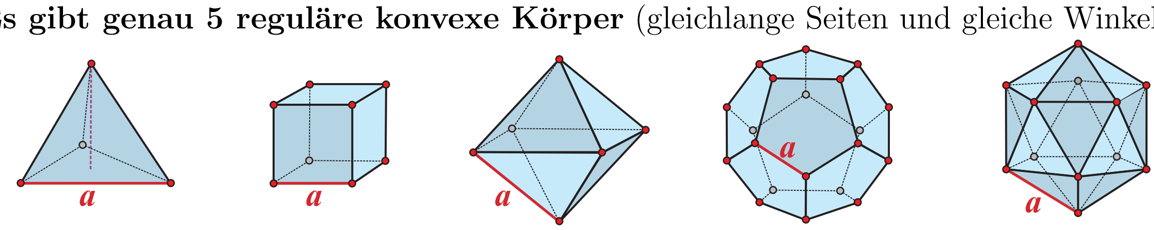
▶ **Tangentialebene *T*** an Kugel im Punkt $P_0(x_0\ /\ y_0\ /\ z_0)$:

$$\boxed{T:\ (x-u)\cdot(x_0-u) + (y-v)\cdot(y_0-v) + (z-w)\cdot(z_0-w) = R^2}$$

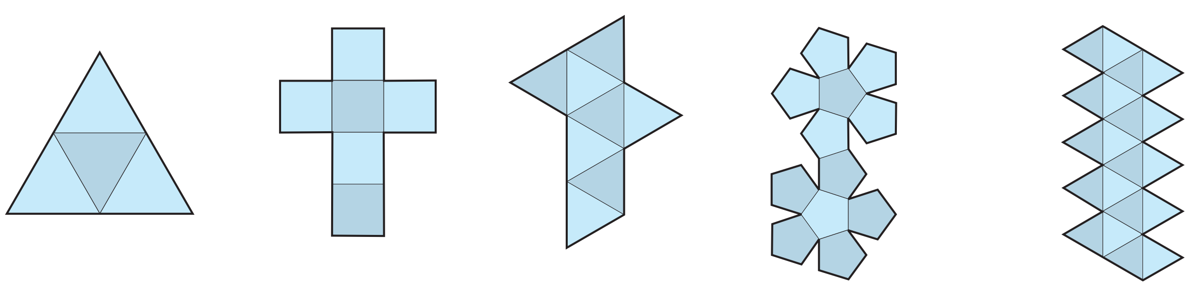
4.5 Polyeder und Platonische Körper

Polyedersatz (Euler): $\boxed{e + f = k + 2}$ wobei $\begin{cases} e: & \text{Anzahl Ecken} \\ f: & \text{Anzahl Flächen} \\ k: & \text{Anzahl Kanten.} \end{cases}$

Es gibt genau 5 reguläre konvexe Körper (gleichlange Seiten und gleiche Winkel):



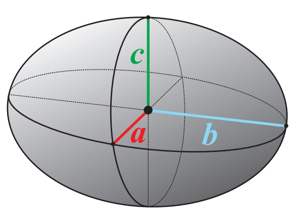
***Tetra*eder (*Vier*flächner)** | ***Hexa*eder (*Sechs*flächner)** | ***Okta*eder (*Acht*flächner)** | ***Dodeka*eder (*Zwölf*flächner)** | ***Ikosa*eder (*Zwanzig*flächner)**



	Volumen V	Oberfläche A	Umkugelradius R	Inkugelradius r
Tetraeder	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3$	$\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}\,a$
Hexaeder	a^3	$6\,a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$	$\frac{1}{2}\,a$
Oktaeder	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$	$2\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,a$
Dodekaeder	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\,a^3$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\,a^2$	$\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{10+4.4\sqrt{5}}}{4}\,a$
Ikosaeder	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}\,a^3$	$5\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}\,a$	$\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{12}\,a$

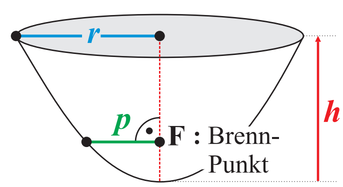
4.6 Körper mit runden Begrenzungsflächen

Ellipsoid



► $V = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b \cdot c$

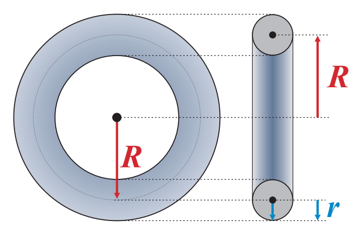
Paraboloid



► $V = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 \cdot h$

$= \pi \cdot p \cdot h^2$

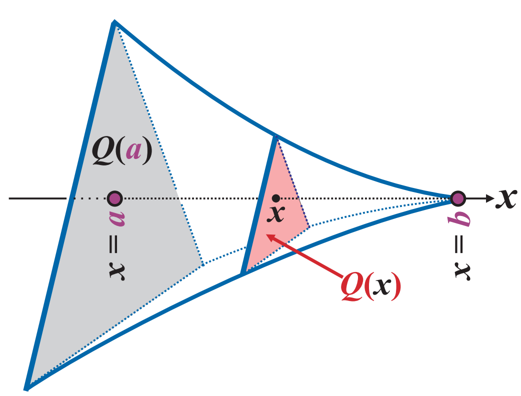
Torus (Ring)



► $V = 2\,\pi^2 \cdot r^2 \cdot R$

► $A = 4\,\pi^2 \cdot r \cdot R$

4.7 Volumen eines Körpers mit Integralrechnung



- $\boxed{V = \int_a^b Q(x)\,dx}$

  Querschnittsfläche $Q(x)$ $\perp$ x-Achse.

- Spezialfall Rotationsvolumen:
  Durch $f(x)$ begrenztes Volumen,
  wenn diese um die x-Achse rotiert:

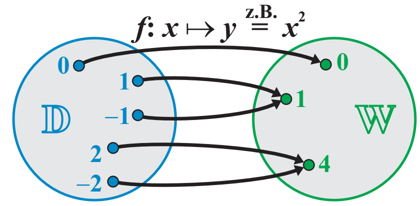
  $V_x = \pi \cdot \int_a^b (\,f(x)\,)^2\,dx.$ Siehe S. 31.

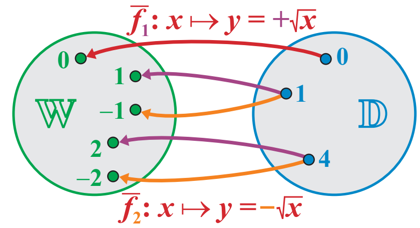
Bitte ausschneiden

5 Funktionen

Definition: Eine **Funktion** $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ ist eine **Zuordnungsvorschrift** von einer Zahlenmenge $\mathbb{D}$ (Urbild, Definitionsmenge) nach $\mathbb{W}$ (Bild, Wertemenge), welche **jedem** Element $x \in \mathbb{D}$ **genau ein** $y \in \mathbb{W}$ zuordnet:

$$\boxed{f: x \mapsto y = f(x)}$$





Umkehrfunktion: $\overline{f}: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ macht die Funktion f „rückgängig": $\overline{f}(\, f(x)\,) = x$ und $f(\,\overline{f}(y)\,) = y$

Damit eine Funktion eindeutig umkehrbar ist, muss im Allgemeinen deren maximaler Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ so eingeschränkt werden, dass f streng monoton wird.

Ermittlung der Umkehrfunktion(en):

- *Graphisch:* Funktionsgraph an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.
- *Algebraisch:* $y = f(x)$ nach x auflösen, anschliessend x und y vertauschen.

Definitionsbereich: Menge aller erlaubten x-Werte:

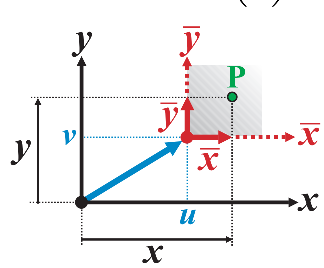
- $\dfrac{U(x)}{V(x)} \quad \Rightarrow \quad V(x) \neq 0$
- $\sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad g(x) \geq 0$
- $\log_a(g(x)) \quad \Rightarrow \quad g(x) > 0$

Tabelle von Funktionen und Umkehrfunktionen:

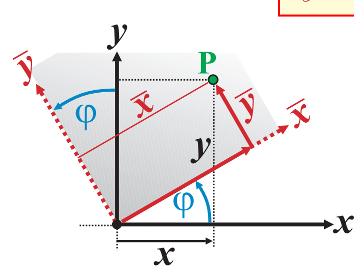
Funktion	$y = f(x)$	$\mathbb{D}_f$	$\mathbb{W}_f$	$y = \overline{f}(x)$
Kehrwert	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Quadrat	x^2	$\mathbb{R}$	$y \geq 0$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
Potenz	x^n	$\mathbb{R}$	falls n gerade: $y \geq 0$ falls n **un**gerade: $\mathbb{R}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
Sinus	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,\ 1]$	$\arcsin(x)$
Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,\ 1]$	$\arccos(x)$
Tangens	$\tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\{(n+\frac{1}{2})\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
Exponential	a^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\log_a(x)$
Exponential	10^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\log(x)$
Exponential	e^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\ln(x)$

5.1 Translation, Rotation des Koordinatensystems

Translation um $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $\boxed{\begin{aligned} \overline{x} &= x - u \\ \overline{y} &= y - v \end{aligned}}$

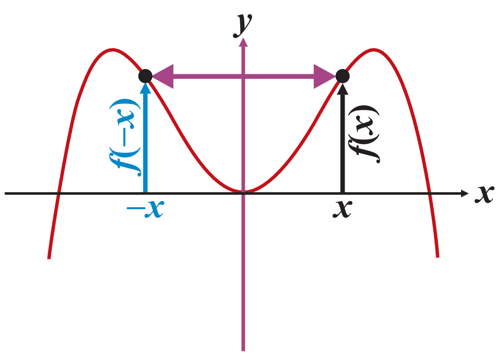


Rotation um φ: $\boxed{\begin{aligned} \overline{x} &= x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) \\ \overline{y} &= -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{aligned}}$



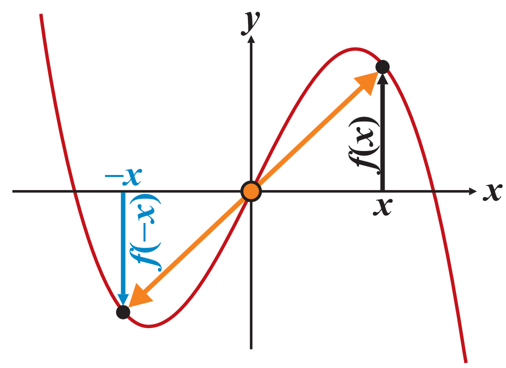
5.2 Symmetrie

Gerade Funktionen: Graph Spiegel-symmetrisch bezüglich der y-Achse.



$\boxed{f(-x) = f(x)}$

Ungerade Funktionen: Graph Punkt-symmetrisch zum Ursprung O(0 / 0).

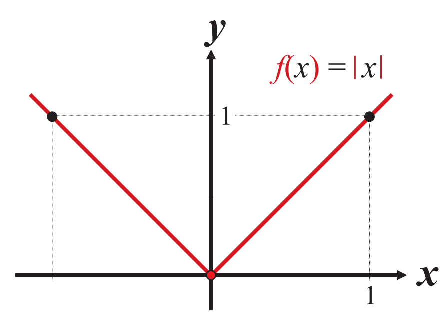


$\boxed{f(-x) = -f(x)}$

5.3 Betragsfunktion

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

„macht x positiv".

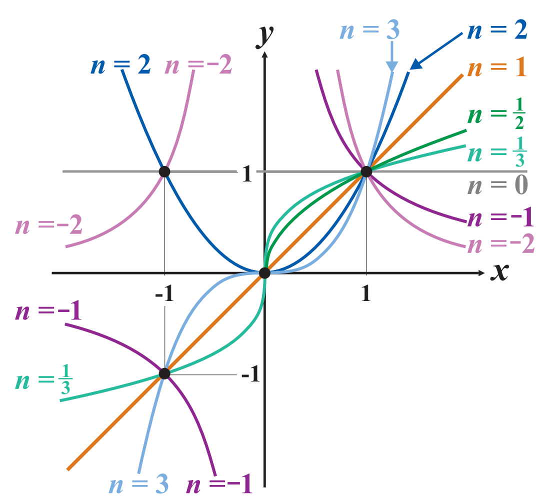


- $|x|$ ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

5.4 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen: $\boxed{f(x) = x^n}$ $\quad n \in \mathbb{Q}$

$n = 0$	Konstante Funktion.
$0 < n < 1$	Wurzelfunktionen.
$n = 1$	Lineare Funktion.
$n \in \mathbb{N};\ n > 1$	Parabeln n-ter Ordnung.
$n \in \mathbb{N};\ n < 0$	Hyperbeln n-ter Ordnung.



Der Graph von $f(x) = x^n$ ist...

- ...spiegelsymmetrisch zur y-Achse, falls n gerade.
- ...punktsymmetrisch zum Ursprung, falls n ungerade.

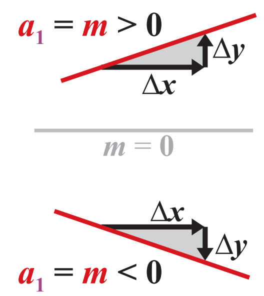
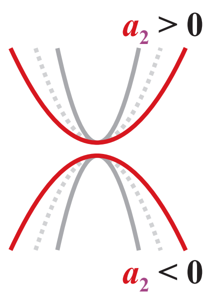
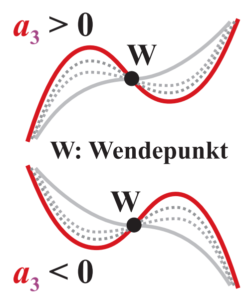
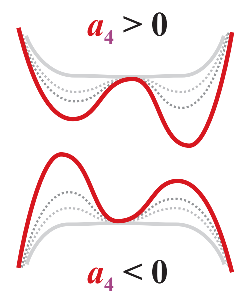
⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

5.5 Ganzrationale Funktionen (Polynome, Parabeln n-ten Grades)

$$\boxed{y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k} \quad \text{mit} \begin{cases} n: \text{ Grad, Ordnung} \\ a_n \neq 0. \end{cases}$$

$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots, a_1, a_0$ heissen **Koeffizienten** von $f(x)$.

Übersicht des grundsätzlichen Aussehens von Polynomfunktionen:

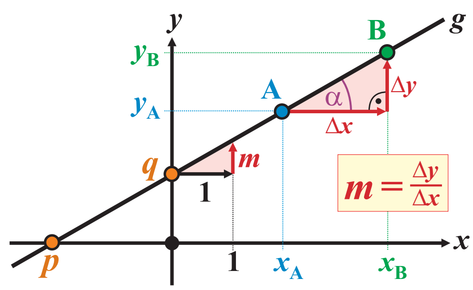
Geraden ($n = 1$)	Parabeln ($n = 2$)	Parabeln ($n = 3$)	Parabeln ($n = 4$)
			

5.5.1 Geraden, lineare Funktionen ($n = 1$): $\boxed{y = m \cdot x^1 + q}$ (Siehe S. 34)

▶ **Normalform:** $\boxed{g:\ y = m \cdot x + q}$

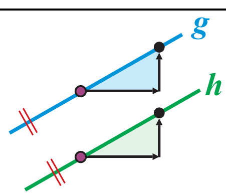
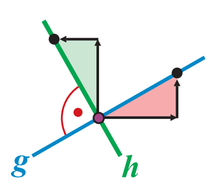
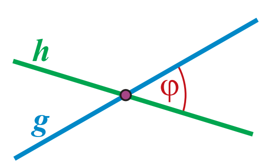
▶ **Punkt-Steigungsform:** $\boxed{g:\ y = m \cdot (x - x_A) + y_A}$ mit $A(x_A \ /\ y_A) \in g$

- **Steigung:** $\boxed{m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\alpha)}$
- **y-Achsenabschnitt:** q.



▶ **Achsenabschnittsform:** $\boxed{g: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ mit

den Achsenabschnitten $p,\ q\ \in\ \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \cup\ \{\pm\infty\}$.

Parallele Geraden	Senkrechte Geraden	Schnittwinkel von g und h
		
$g \parallel h \ \Leftrightarrow m_g = m_h$	$g \perp h \ \Leftrightarrow m_h = \frac{-1}{m_g}$	$\tan(\varphi) = \left\lvert \frac{m_h - m_g}{1 + m_h \cdot m_g} \right\rvert$

▶ **Parameterform und Koordinatenform der Geraden: Siehe S. 34.**

5.5.2 Parabeln ($n = 2$): $\boxed{y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

- a : Öffnung:

  $a < 0 \Rightarrow$ nach unten $\cap$

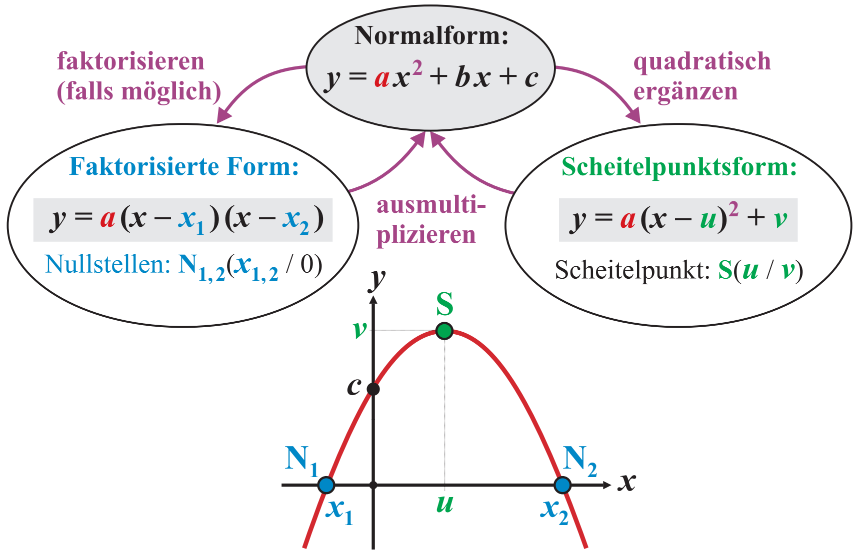
  $a > 0 \Rightarrow$ nach oben $\cup$

  $a = 1 \Rightarrow$ Normalparabel.

- b : linearer Term.
- c : y-Achsenabschnitt.
- Scheitelpunkt $S(u \,/\, v)$:

  $S(-\frac{b}{2a} \,/\, \frac{-b^2+4ac}{4a})$

$\Rightarrow$ Lösungsformel quadratische Gleichungen S. 21.



5.6 Gebrochenrationale Funktionen

Eine **gebrochenrationale Funktion** $f(x)$ ist eine Funktion von folgender Bauart:

$$f(x) = \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}} = \frac{a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0}{b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + b_1\,x + b_0}$$

Koeffizienten: $a_n, b_m \neq 0$.

Zählergrad: $n \in \mathbb{N}_0$; Nennergrad: $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$

▶ **Polgeraden (vertikale Asymptoten):** $y \to \pm\infty$

x_0 heisst Pol von f wenn gilt:

$y = \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ („echte" Division durch Null).

▶ **Asymptote**: Anschmiegfunktion $a(x)$ für $x \to \pm\infty$

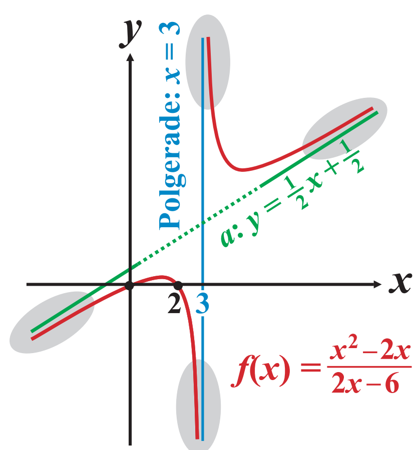
- $\boldsymbol{n < m}$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow a: \; y = 0$
- $\boldsymbol{n = m}$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \Rightarrow a: \; y = \frac{a_n}{b_m}$
- $\boldsymbol{n > m}$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ Zerlege

  $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)} = a(x) + \frac{\text{Rest}(x)}{V(x)}$ mit $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\text{Rest}(x)}{V(x)} = 0$

  Division = Polynomdivision

  $\Rightarrow$ Für $n = m + 1$ ist $a(x)$ schiefe, gerade Asymptote.

  $\Rightarrow$ $a(x)$: ganzrationale Funktion vom Grad $n - m$.



$\Rightarrow$ Grenzwerte siehe S. 25.

5.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

▶ **Exponentialfunktionen:** $\boxed{y = f(x) = a^x}$ $\quad a > 0$

- **Eulersche Zahl:** $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718...$.
- Wachstums- oder Zerfallsprozesse:

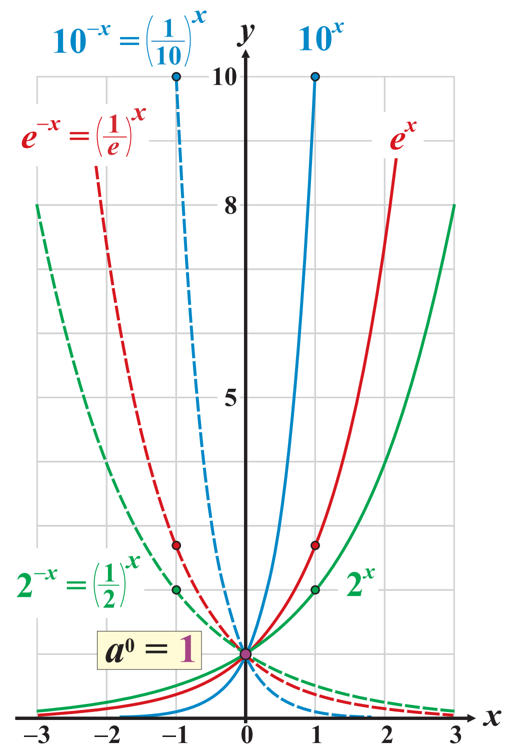
  $\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}$ oder $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}}$

  wobei:

t	:	Zeit.
N_0	:	Startwert (Population bei $t = 0$).
$N(t)$	:	Population zur Zeit t.
$a = e^k$	:	Wachstumsfaktor: $\boxed{a = 1 + \frac{p}{100}}$ mit

  $$p : \left\{ \begin{array}{ll} \text{Wachstum} & (p > 0) \\ \text{Zerfall} & (p < 0) \end{array} \right\} \text{ in } \%$$

  pro Zeiteinheit.



⇒ Potenzsätze, Logarithmensätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

⇒ Grenzwerte siehe S. 25.

▶ **Logarithmusfunktionen:** $\boxed{\overline{f}(x) = \log_a(x)}$ $\quad x > 0$; $\quad a > 0; \quad a \neq 1.$

$\overline{f}(x) = \log_a(x)$ ist Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$:

- Zehnerlogarithmus:

  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)}$

  $\log(10^x) = x, \qquad 10^{\log(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Natürlicher Logarithmus:

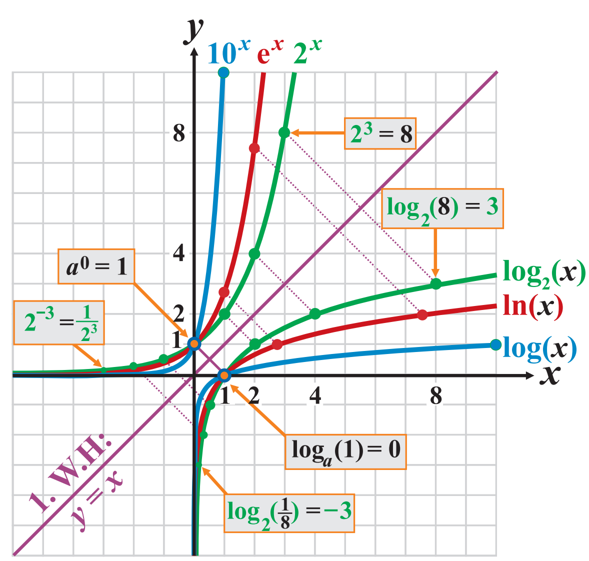
  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_e(x) = \ln(x)}$

  $\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Binärer Logarithmus:

  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_2(x) = \mathrm{lb}(x)}$

  $\log_2(2^x) = x, \qquad 2^{\log_2(x)} = x \qquad (x > 0)$



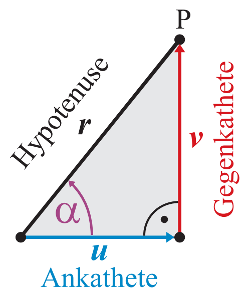
⇒ Potenz- und Logarithemsätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

5.8 Trigonomtrische Funktionen

▶ **Definition:** (siehe auch S. 6)

Rechtwinkliges Dreieck: $0 < \alpha < 90°$.

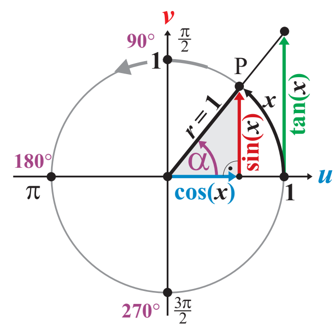


$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{v}{r} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{u}{r} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

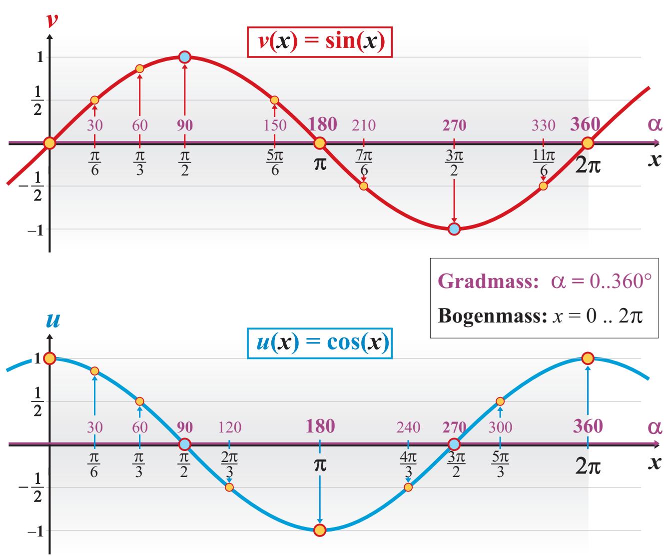
$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{v}{u} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

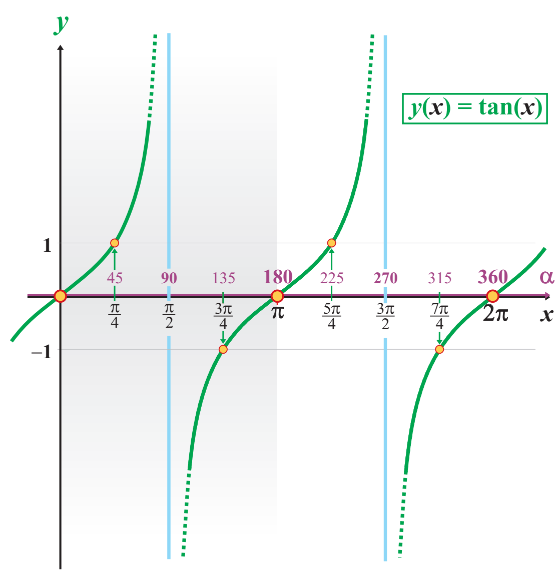
Einheitskreis: $\alpha \in \mathbb{R}$.



Bogenmass: $\boxed{x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}}$ zu α gehörende **Bogenlänge** x am Einheitskreis.

▶ **Funktionsgraphen:**





▶ **Eigenschaften und spezielle Werte:**

	$0° \doteq 0$	$30° \doteq \frac{\pi}{6}$	$45° \doteq \frac{\pi}{4}$	$60° \doteq \frac{\pi}{3}$	$90° \doteq \frac{\pi}{2}$	Periode	Symmetrie
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$360° \doteq 2\pi$ $\sin(x+2\pi\, n) = \sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$360° \doteq 2\pi$ $\cos(x+2\pi\, n) = \cos(x)$	$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$(\pm\infty)$	$180° \doteq \pi$ $\tan(x+\pi\, n) = \tan(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

▶ **Definitionsbereich:** $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{(\frac{\pi}{2} + n\pi)\,,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

▶ **Wertebereich:** $\mathbb{W}_{\sin} = \mathbb{W}_{\cos} = [-1, 1]$ $\qquad \mathbb{W}_{\tan} = \mathbb{R}$.

▶ **Umkehrfunktionen:**
$$\begin{cases} \arcsin(x) & \text{manchmal auch } \sin^{-1}(x) \\ \arccos(x) & \text{manchmal auch } \cos^{-1}(x) \\ \arctan(x) & \text{manchmal auch } \tan^{-1}(x). \end{cases}$$

Ableitungen, Stamm-Funktionen S. 29.

Beziehungen und Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$	$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp \sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp \frac{1}{\tan(x)}$
$\sin(2\,x) = 2\sin(x)\cos(x)$	$\cos(2\,x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \end{cases}$	$\tan(2\,x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
$\sin(3\,x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$	$\cos(3\,x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$	$\tan(3\,x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$
$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$	$\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$	$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$

$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \cdot \tan(y)}$
$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

6 Gleichungen

6.1 Fundamentalsatz der Algebra

In $\mathbb{R}$ kann jedes Polynom n-ten Grades als Produkt von $k \leq n$ Linearfaktoren und nicht weiter zerlegbaren quadratischen Faktoren $q(x)$, welche nicht Null werden können, dargestellt werden:

Gleichung in Normalform:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

faktorisieren (falls möglich) → / ← **ausmultiplizieren**

Zerlegung in Linearfaktoren:

$$a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot q(x) = 0$$

⇒ Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ablesbar.

In den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom n-ten Grades vollständig in Linearfaktoren.

6.2 Quadratische Gleichungen

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

Diskriminante: $\boxed{D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

Lösungen: $\boxed{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} \quad D \geq 0$

Satz von Vieta:

Produkt der Lösungen: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Summe der Lösungen: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

⇒ Quadratische Funktionen siehe S. 17.

6.3 Polynomgleichungen dritten und höheren Grades

$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \; a \neq 0.$

Satz: Division durch $a \neq 0$ führt auf $a' = 1$, also $x^3 + b' \cdot x^2 + c' \cdot x + d' = 0$. Wenn es eine ganzzahlige Lösung x_1 gibt, dann ist diese Teiler von d'. Finde Lösung x_1 durch Einsetzen (Probieren) der Teiler von d' und dividiere die Gleichung anschliessend durch $(x - x_1)$.

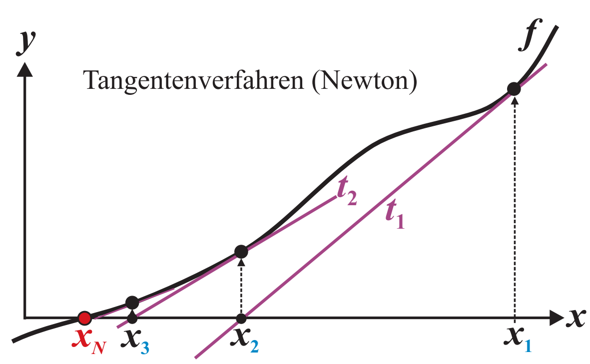
6.4 Numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung

Gesucht ist die Nullstelle $\mathrm{N}(x_N \,/\, 0)$ von $f(x)$. Ausgehend von einem Startwert x_1, konstruiere eine rekursiv definierte Zahlenfolge x_1, x_2, x_3,... mit Grenzwert x_N.

▶ **Sehnenverfahren (Regula Falsi)**

Wähle $\mathrm{P}(\,a \,/\, f(a)\,)$ und $\mathrm{Q}(\,b \,/\, f(b)\,)$
mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Mit Startwert $x_1 = a$ berechne:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_N}$$



▶ **Tangentenverfahren von Newton**

Wähle $\mathrm{P}_1(x_1 \,/\, f(x_1))$ mit $f'(x_1) \neq 0$. Dann:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_N}$$

(die Folge ist nicht notwendigerweise konvergent.)

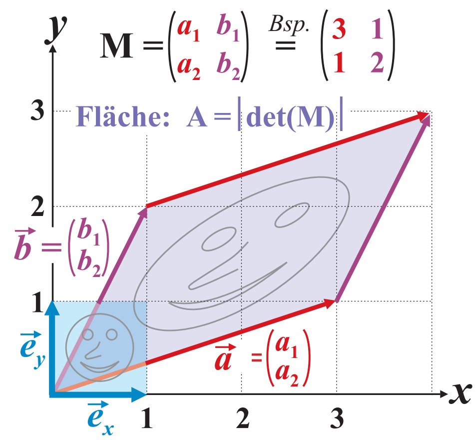
7 Matrizen, lineare Gleichungssysteme

7.1 Lineare Gleichungssysteme, 2×2 Matrizen

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{kurz: } \boxed{M \cdot \vec{x} = \vec{c}}$$

- Multiplikation von Links mit der Inversen M^{-1} von M löst die Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{c}$ nach $\vec{x}$ auf: $\boxed{\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{c}}$ (falls M^{-1} existiert).

- Die Matrix $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ stellt eine lineare Transformation von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dar: $\vec{x} \mapsto \vec{c} = M \cdot \vec{x}$
Jedem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird genau ein Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zugeordnet.



- Die **Spalten** $\vec{a}$, $\vec{b}$ der Matrix sind die **Bilder der Einheitsvektoren** unter der Transformation M.

7.2 Operationen und Eigenschaften von Matrizen:

▶ **Einheitsmatrizen:** $E_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\quad E_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\quad E_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

▶ **Addition:** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm u_1 & b_1 \pm v_1 \\ a_2 \pm u_2 & b_2 \pm v_2 \end{pmatrix}$

- $M_1 \pm M_2 = M_2 \pm M_1$
- $(M_1 + M_2) + M_3 = M_1 + (M_2 + M_3)$

▶ **Multiplikation mit reeller Zahl:** $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 \\ k\,a_2 & k\,b_2 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$

▶ **Multiplikation mit Vektor:** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix}$

▶ **Produkt zweier Matrizen:** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 u_1 + b_1 u_2 & a_1 v_1 + b_1 v_2 \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 & a_2 v_1 + b_2 v_2 \end{pmatrix}$

- $M_1 \cdot M_2 \neq M_2 \cdot M_1$
- $(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$

▶ **Transponierte:** $M^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $M^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

- $(M_1 + M_2)^T = M_1^T + M_2^T$
- $(M_1 \cdot M_2)^T = M_2^T \cdot M_1^T$
- $(M^T)^T = M$

▶ **Inverse Matrix:** $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = E_n$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \det(M) \neq 0.$$

Allgemein: $[M \mid E_n] \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} [E_n \mid M^{-1}]$

- $(M_1 \cdot M_2)^{-1} = M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}$
- $(M^{-1})^{-1} = M$
- $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$

▶ **Determinante:** $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(E_n) = 1$
- $\det(A^T) = \det(A) \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$

▶ **Rang:** Anzahl **linear unabhängige** Zeilen (Spalten) einer Matrix. M heisst...

- *Reguläre* $n \times n$ Matrix: $\det(M) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \text{Rang}(M) = n \;\Leftrightarrow\; M^{-1}$ existiert.
- *Singuläre* $n \times n$ Matrix: $\det(M) = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{Rang}(M) < n \;\Leftrightarrow\; M^{-1}$ existiert nicht.

▶ **Orthogonale Matrizen:** $M \cdot M^T = M^T \cdot M = E$ oder $M^T = M^{-1}$

▶ **Eigenvektoren, Eigenwerte:** Der Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst Eigenvektor der Matrix M zum Eigenwert λ, falls $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt. Die Abbildung M ändert die Richtung von $\vec{v}$ nicht.

- Eigenwertgleichung: $\boxed{\det(M - \lambda \cdot E_n) = 0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots$
- Bestimmung der Eigenvektoren $\vec{v}_k \neq \vec{0}$: $\quad (M - \lambda_k \cdot E_n) \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots$

▶ **Elementare Matrizenmanipulationen (Gauss'scher Algorithmus)**

- Multiplikation der Zeilen mit einer Zahl.
- Addition zweier Zeilen.
- Vertauschung zweier Zeilen.

Lineare Gleichungssysteme lösen:

- Lineares Gleichungssystem als Matrix schreiben: $[M \mid \vec{c}\,]$.
- Mit dem Gausschen Algorithmus M auf Einheitsmatrix transformieren.

▶ **Spezielle Matrizen:**

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ dreht den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um den Winkel α im GUZ,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ spiegelt $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ an der x-Achse, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ spiegelt $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ an der y-Achse.

Matrizen
Gauss

Bitte ausschneiden

8 Folgen und Reihen

Eine **Zahlenfolge** $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ ist eine **Funktion** $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\quad n \mapsto a_n$.

- **Explizite Funktionsvorschrift:** $a_n = \{\text{Formel mit } n\}$.
- **Rekursive Darstellung:** $a_{n+1} = \{\text{Formel mit } a_n,\ a_{n-1}, \ldots\}$ mit Startwert a_1.

Eine **Reihe** $s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots$ ist die Folge der Teilsummen einer gegebenen Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$s_1 = a_1 \xrightarrow[+a_2]{} s_2 = a_1 + a_2 \xrightarrow[+a_3]{} s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \ldots \quad \boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

8.1 Arithmetische Folgen (AF), arithmetische Reihen (AR)

Konstante Differenz $\boxed{d = a_2 - a_1}$ aufeinanderfolgender Glieder: $\quad a_1 \xrightarrow[+d]{} a_2 \xrightarrow[+d]{} a_3 \xrightarrow[+d]{} \ldots$

	Rekursionsformel	Explizite Formel
Folge	$a_{n+1} = a_n + d$	$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$
Reihe	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\cdot(\,2a_1 + (n-1)\cdot d\,)}$

8.2 Geometrische Folgen (GF), geometrische Reihen (GR)

Konstanter Quotient $\boxed{q = \frac{a_2}{a_1}}$ aufeinanderfolgender Glieder: $\quad a_1 \xrightarrow[\cdot q]{} a_2 \xrightarrow[\cdot q]{} a_3 \xrightarrow[\cdot q]{} \ldots$

	Rekursionsformel	Explizite Formel
Folge	$a_{n+1} = a_n \cdot q$	$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$
Reihe	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$ $\quad q \neq 1, \quad s_n = n \cdot a_1$ für $q = 1$. $\boxed{s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}}$ falls $\lvert q \rvert < 1$ (unendliche GR)

8.3 Weitere Reihen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \qquad \text{(Harmonische Reihe)}$$

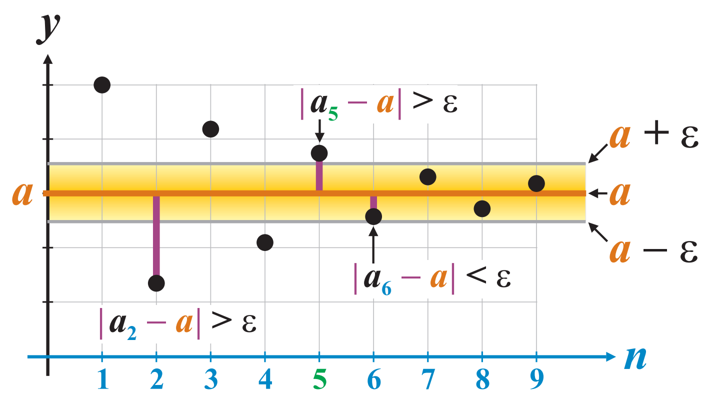
$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{n}{6}\,(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)\right)^2$$

8.4 Grenzwerte

Definition: Eine Folge a_n heisst **konvergent** mit Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wenn es zu **jeder** beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$\boxed{|\, a_n - a \,| < \varepsilon}$$

Für (beliebig) grosse n wird der Abstand von a_n zum Grenzwert a beliebig klein (kleiner als jedes $\varepsilon > 0$).



- Ein Grenzwert ist immer **eindeutig** und **endlich**.
- Folgen ohne Grenzwert oder solche mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ heissen **divergent**.
- **Nicht definiert sind:** $\frac{0}{0}$, $\quad \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, $\quad 0 \cdot (\pm\infty) \quad$ und $\quad \infty - \infty$

▶ **Grenzwertsätze:** Falls $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existieren, gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

$\Rightarrow$ Entsprechende Sätze gelten auch für Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

▶ **Häufige Grenzwerte:**

- $\boxed{\lim\limits_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} = 0}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < a < 1 \\ 1, & \text{falls } a = 1 \\ \infty, & \text{falls } a > 1 \end{cases}}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\pm 0} \frac{1}{n} = \pm\infty}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0}{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + b_1\, x + b_0} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ \pm\infty, & n > m \end{cases}}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

▶ **Dominanzregel:**

Exponentielles Wachstum ist stärker als Potenzwachstum: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0}$

Potenzwachstum ist stärker als logarithmisches Wachstum: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0}$ für $n > 0$.

▶ **Regel von de l'Hôpital**: Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (oder ∞) **und** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (oder ∞), dann:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Bsp: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$

Folgen & R.
Grenzwerte

Bitte ausschneiden

8.5 Mittelwerte

Gegeben seien n verschiedene Werte $x_1,\ x_2\ ,...,\ x_n$.

- **Ungewichteter arithmetischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{A}} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}}$ (vgl. S. 39)

- **Gewichteter arithmetischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{A}} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}}$

  $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$ bezeichnen die Gewichte (relative Häufigkeiten) der Werte $x_1,\ x_2\ ,...,\ x_n$.

- **Quadratischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{Q}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + {x_n}^2}{n}}}$

- **Geometrischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{G}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}$

- **Harmonischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{H}} = n \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1}}$ $\quad x_k \neq 0.$

- Ungleichung: $\overline{x}_{\mathrm{H}} \leq \overline{x}_{\mathrm{G}} \leq \overline{x}_{\mathrm{A}} \leq \overline{x}_{\mathrm{Q}}$ gilt, falls $x_k \geq 0$ für alle $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

8.6 Harmonische Teilung, Goldener Schnitt

Unter dem Goldenen Schnitt Φ versteht man das harmonische Teilungsverhältnis $\boxed{\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}}$ Daraus folgt:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \Phi = 1.618... \\ \overline{\Phi} = -0.618... \end{cases}}$$

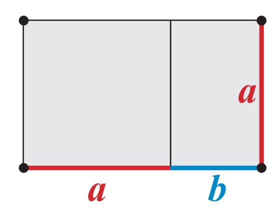
Eigenschaften:

- $\overline{\Phi} = -\frac{1}{\Phi}$

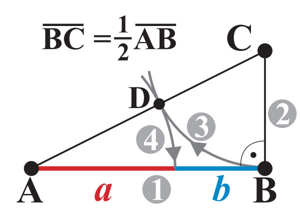
- Φ ist irrational und hat auch folgende Darstellungen:

  $$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}} \qquad \Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}$$

Harmonisches Rechteck:



Harmonische Teilung der Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$:



8.7 Vollständige Induktion

Beweisverfahren für Aussagen $\mathbb{A}_n$ über natürliche Zahlen.

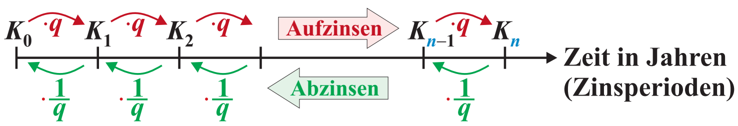
(I) **Verankerung:** Überprüfe $\mathbb{A}_1$. (Anstatt $n = 1$ kann ein anderer Startwert gewählt werden, der Beweis gilt dann ab dieser Zahl.)

(II) **Vererbung (Schritt von n nach $n+1$):**
Zeige rekursiv, dass $\mathbb{A}_{n+1}$ korrekt ist, unter der Voraussetzung, dass $\mathbb{A}_n$ stimmt.

9 Finanzmathematik

Aufzinsfaktor: $\boxed{q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i}$ $p =$ Zins (jährlich) in %, $i = \frac{p}{100}$ = Zinssatz.

▶ **Verzinsung mit Zinseszins:** Startkaptial K_0, Laufzeit n Jahre:



Endwert: $\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$

Barwert: $\boxed{K_0 = K_n \cdot \frac{1}{q^n}}$

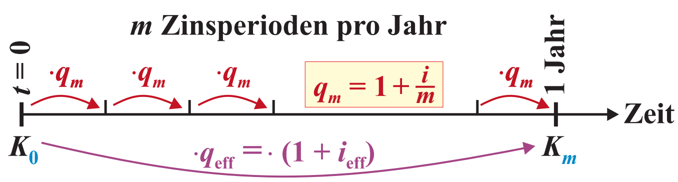
▶ **Unterjährige Verzinsung:**

Linear:	**mit Zinseszins:**	**Stetig:**
Kapital K_T nach T Tagen ohne Zinseszins:	m Zinsperioden pro Jahr, Laufzeit: n Jahre.	Kontinuierlich wird ein beliebig kleiner Zins bezahlt:
$\boxed{K_T = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{T}{360}}$	$\boxed{K_{n \cdot m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}}$	$\boxed{K_S = \lim_{m \to \infty} K_{n \cdot m} = K_0 \cdot e^{i \cdot n}}$

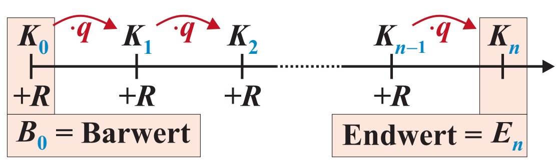
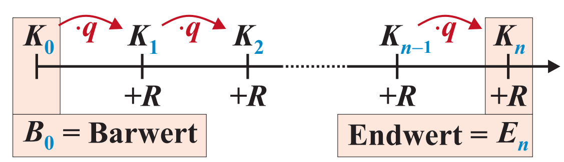
Effektiver Jahreszinssatz:

$\boxed{i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}$

$\boxed{q_m = \sqrt[m]{q_{\text{eff}}}}$



▶ **Rentenrechnung:** Zum Startkapital K_0 werden n Renten R bezahlt:

Vorschüssige Rentenzahlung		Nachschüssige Rentenzahlung	
			
Barwert $B_0 =$	**Endwert** $E_n =$	**Barwert** $B_0 =$	**Endwert** $E_n =$
$\boxed{K_0 + \frac{R}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}}$	$\boxed{K_0\, q^n + R\, q \frac{q^n - 1}{q - 1}}$	$\boxed{K_0 + \frac{R}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}}$	$\boxed{K_0\, q^n + R \frac{q^n - 1}{q - 1}}$

⇒ Bei Schuldentilgung heisst R Tilgungsrate oder Annuität. (vgl. S. 24)

▶ **Ableitungen in der Finanzmathematik:**

Marginale Funktion (Grenzfunktion)

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}$$

Wachstumsrate

$$\boxed{r(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln(f(t))}$$

Elastizität

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Mittelwerte Finanzmath.

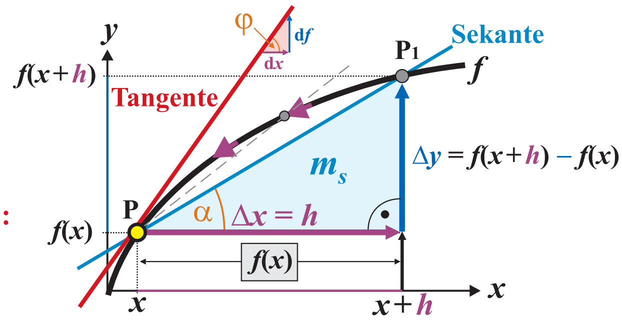
Bitte ausschneiden

10 Differentialrechnung

Voraussetzung: Gegeben sei eine stetige Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto y = f(x)$.

- **Sekantensteigung, Differenzenquotient:**
  Mittlere Änderungsrate (Steigung)
  von f im Intervall $[x,\ x+h]$:

$$\boxed{m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\alpha)}$$



- **Tangentensteigung, Differentialquotient:**
  Lokale Änderungsrate (Steigung)
  von f im Punkt P(x / $f(x)$),
  Definition der 1. Ableitung:

$$\boxed{m_t = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\varphi)}$$

Steigung siehe S. 16.

10.1 Ableitungsregeln:

Seien $y = f(x)$, $y = u(x)$ und $y = v(x)$ stetige Funktionen, c eine Konstante.

▶ **Additive Konstante:** $f(x) = u(x) \pm c$

$$\boxed{f'(x) = u'(x)}$$

▶ **Multiplikative Konst.:** $f(x) = c \cdot u(x)$

$$\boxed{f'(x) = c \cdot u'(x)}$$

▶ **Summenregel:** $f(x) = u(x) \pm v(x)$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \pm v'(x)}$$

▶ **Produktregel:** $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

▶ **Quotientenregel:** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

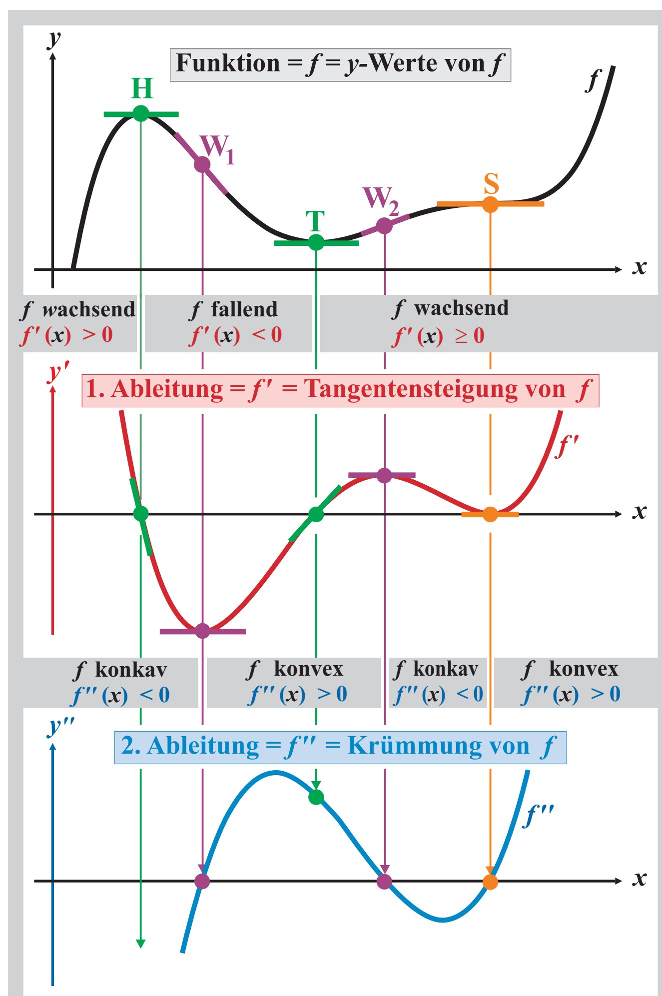
$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(\ v(x)\ )^2}}$$

▶ **Kettenregel:** $f(x) = u(v(x))$

$$\boxed{f'(x) = u'(v)\ \cdot\ v'(x) = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}}$$

„Äussere mal innere Ableitung."

Bedingungen für Extrema und Wendepunkte:
Zusammenhang zwischen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$:



10.2 Bedingungen spezieller Punkte:

		f	f'	f''	f'''
Nullstelle	$\mathrm{N}(x_N \ / \ 0)$	$f(x_N) \ = \ 0$	-	-	-
Hochpunkt	$\mathrm{H}(x_H \ / \ f(x_H))$		$f'(x_H) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_H) \overset{\blacklozenge}{<} 0$	-
Tiefpunkt	$\mathrm{T}(x_T \ / \ f(x_T))$		$f'(x_T) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_T) \overset{\blacklozenge}{>} 0$	-
Sattelpunkt Terrassenp.	$\mathrm{S}(x_S \ / \ f(x_S))$		$f'(x_S) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_S) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f'''(x_S) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$
Wendepunkt	$\mathrm{W}(x_W \ / \ f(x_W))$		-	$f''(x_W) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f'''(x_W) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$

$\bigstar$ = notwendige Bedingung, $\quad$ ($\bigstar$ + $\blacklozenge$) = hinreichende Bedingung.

10.3 Ableitungen und Stammfunktionen:

Stammfunktion $F(x)$ $\xrightarrow{\text{ableiten}}$ **Funktion $f(x)$** $\xrightarrow{\text{ableiten}}$ **1. Ableitung $f'(x)$**

1. Ableitung $f'(x)$ $\xrightarrow{\text{integrieren}}$ **Funktion $f(x)$** $\xrightarrow{\text{integrieren}}$ **Stammfunktion $F(x)$**

$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad [n \neq -1]$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^x
$x \cdot (\ln\lvert x \rvert - 1)$	$\ln\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln\lvert x \rvert - 1)$	$\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
Beachte: Variable x in Bogenmass! Trigonometrische Funktionen siehe S. 19, 20.		
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

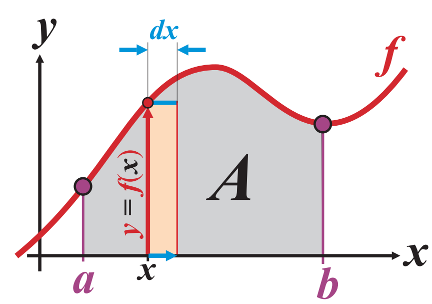
11 Integralrechnung

Definition: $F(x)$ heisst **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Zwei verschiedene Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich um höchstens eine additive Konstante: $F_2(x) = F_1(x) + C$. Die Konstante C heisst **Integrationskonstante**.

- **Unbestimmtes Integral = Menge aller Stammfunktionen:** $\boxed{\int f(x)\, dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}}$

- **Bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [\,F(x)\,]_a^b}$$



$|A|$: Fläche unter f zwischen den Integrationsgrenzen $x = a$ und $x = b$, wenn f zwischen a und b keine Nullstellen hat.

11.1 Integrationsregeln

▶ **Konstantenregel:** $\boxed{\int_a^b (\, c \cdot f(x)\,)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx}$

▶ **Summenregel:** $\boxed{\int_a^b (\, u(x) \pm v(x)\,)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx \pm \int_a^b v(x)\, dx}$

▶ **Orientierung des Integrals:** $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx}$

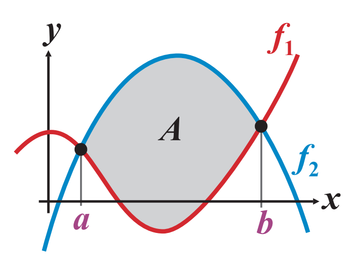
▶ **Änderung der Integrationsgrenzen:** $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx}$

▶ **„Vorzeichen" der Fläche:** $\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \text{ für } x \in [a,\, b] \\ f(x) \leq 0 \text{ für } x \in [a,\, b] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}}$

▶ **Fläche zwischen f_1 und f_2:** $\boxed{A = \int_a^b |\, f_2(x) - f_1(x)\,|\, dx}$

▶ **Partielle Integration:**

$$\boxed{\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [\,u(x) \cdot v(x)\,]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx}$$



▶ **Substitutionsregel:** Es sei $f(x) = u(\,v(x)\,)$ eine verkettete Funktion. $U(\,v\,)$ bezeichne eine Stammfunktion der äusseren Funktion. Dann: $\boxed{\int_a^b u(v(x)) \cdot v'(x)\, dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(v)\, dv = [\,U(\,v\,)\,]_{v(a)}^{v(b)}}$

11.2 Rotationsvolumen und Bogenlänge

- **Drehung um x-Achse:** $\boxed{V_x = \pi \int\limits_a^b (\,f(x)\,)^2\,dx}$

  Verallgemeinerung siehe S. 13.

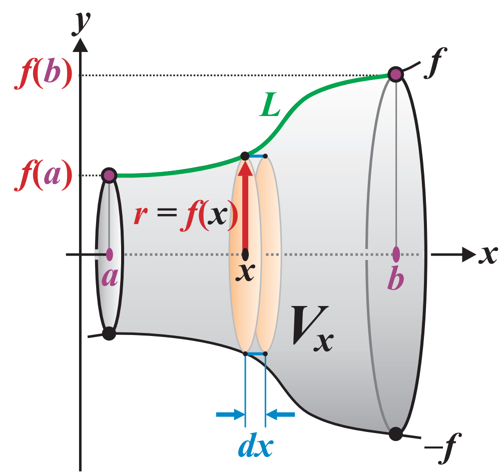
- **Drehung um y-Achse:** $\boxed{V_y = \pi \int\limits_{f(a)}^{f(b)} (\,\overline{f}(y)\,)^2\,dy}$

  $y = f(x)$ streng monoton.

  $x = \overline{f}(y)$ ist die Umkehrfunktion von $y = f(x)$

  $\Rightarrow$ Umkehrfunktion siehe S. 14.

- **Bogenlänge:** $\boxed{L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (\,f'(x)\,)^2}\,dx}$



11.3 Potenzreihen, Taylor-Polynome

▶ **Taylorpolynom $T_n(x)$:** Approximation einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 durch eine ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) n-ten Grades:

$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x - x_0)^k}$, wobei $f^{(k)}(x)$ für die k-te Ableitung steht. Ausführlich:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n$$

Fehler (Restglied): $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \alpha(x - x_0)), \quad 0 < \alpha < 1.$

▶ **Potenzreihenentwicklungen:**

Term	**Potenzreihenentwicklung**	**Gültig für**
$(1+x)^n$	$1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$	$n \in \mathbb{N};\, \lvert x \rvert < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2\cdot4} x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} x^3 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} x^4 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \mp \ldots$	$0 < x \le 2$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 \pm \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 \pm \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \ldots$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$

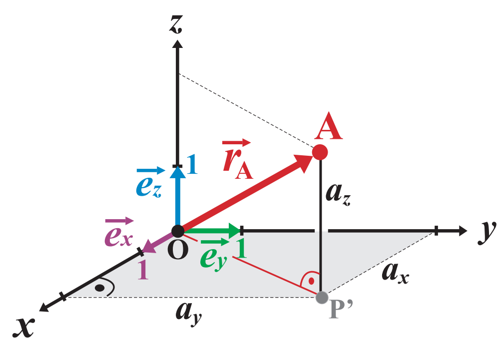
Bitte ausschneiden

12 Vektorgeometrie

Definition: Ein Vektor $\vec{r}_A$ beschreibt eine **Translation (Verschiebung)**. Vektoren haben eine Länge (Betrag) und eine Orientierung (Richtung). Vektoren dürfen beliebig parallel verschoben werden, haben also keinen fix vorgegebenen Anfangspunkt.

▶ **Einheitsvektoren:**

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



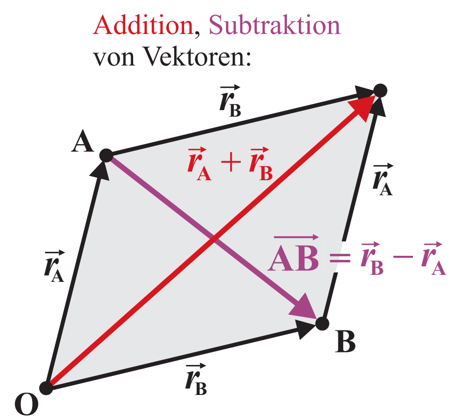
▶ **Linearkombination:** Jeder dreidimensionale Vektor $\vec{r}_A$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ schreiben: $\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$.

a_x, a_y, a_z heissen Komponenten von $\vec{r}_A$.

▶ **Ortsvektor** von $A(a_x, a_y, a_z)$: $\quad \vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vektor vom Ursprung} \\ \text{zum Punkt A.} \end{array} \right.$

▶ **Betrag, Länge:**

$$\boxed{|\vec{r}_A| = r_A = \overline{OA} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$



▶ **Addition, Subtraktion:**

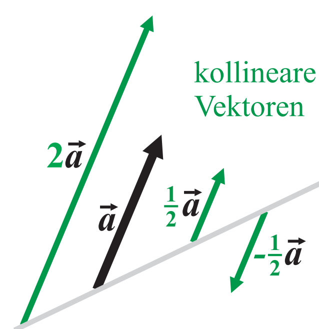
$$\boxed{\vec{r}_A \pm \vec{r}_B = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}}$$

Differenzenvektor: Ortsvektor des Endpunktes Minus Ortsvektor des Anfangspunktes.

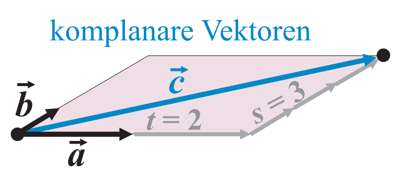
▶ **Multiplikation mit Skalaren (= Zahlen)**

Kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\boxed{\vec{b} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix}}$$

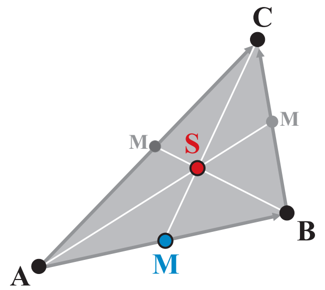


Komplanare Vektoren: $\vec{c}$ ist komplanar zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wenn $\vec{c}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, also wenn es $t, s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\boxed{\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}}$ gilt.



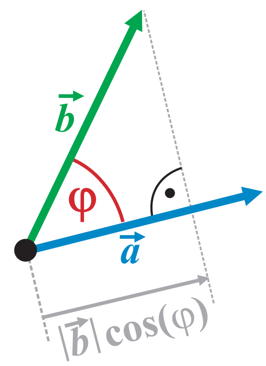
- **Mittelpunkt von A und B:** $\boxed{\vec{r}_M = \frac{1}{2} \cdot (\vec{r}_A + \vec{r}_B)}$

- **Schwerpunkt** Δ**ABC:** $\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{3} \cdot (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)}$
  (siehe auch S. 7)



- **Skalarprodukt:** Senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x\, b_x \;+\; a_y\, b_y \;+\; a_z\, b_z = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos(\varphi)}$$

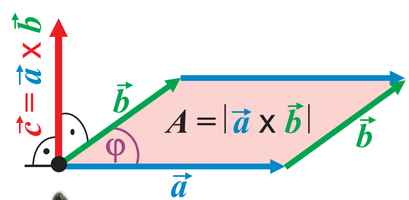


- **Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:** $\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|}}$

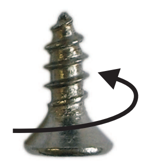
- **Senkrechtbedingung:** $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$ falls $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

- **Vektorprodukt:**

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z \;-\; a_z\, b_y \\ a_z\, b_x \;-\; a_x\, b_z \\ a_x\, b_y \;-\; a_y\, b_x \end{pmatrix}}$$



$\boxed{\vec{c} \perp \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{c} \perp \vec{b}}$



Schraube $\vec{c}$:
Drehe $\vec{a}$ nach $\vec{b}$

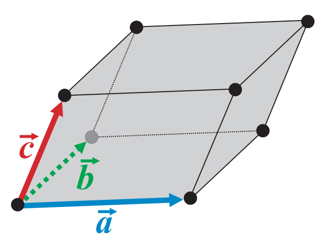
$\boxed{|\,\vec{c}\,| = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \sin(\varphi)}$

$|\,\vec{c}\,|$: Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

- **Spatprodukt:**

$\boxed{V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}\,| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}\,|}$

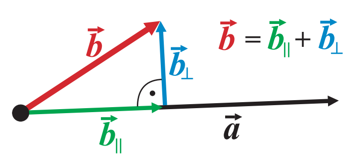
V : Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates.



- **Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$:** $\boxed{\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}}$

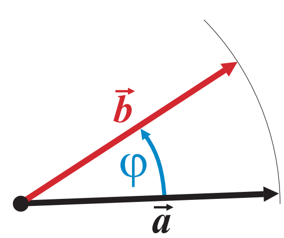
- **Zerlegung von $\vec{b}$ in vektorielle Komponenten Parallel und Senkrecht zu $\vec{a}$:**

$\boxed{\vec{b}_{\parallel} = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\,\vec{a}\,|^2} \cdot \vec{a}}$ $\qquad$ $\boxed{\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\,\vec{a}\,|^2} \cdot \vec{a}}$



- **Drehung eines zweidimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:**

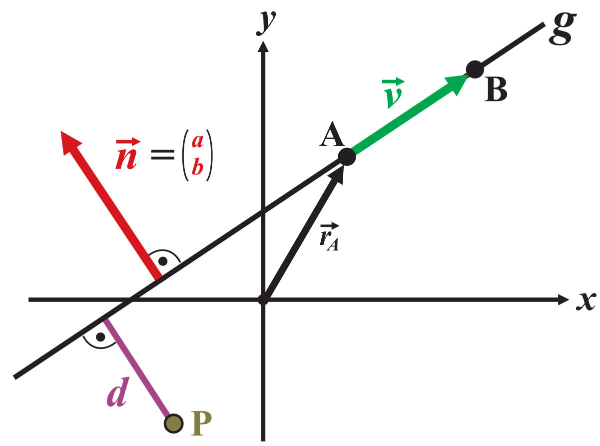
$$\boxed{\vec{b} = \begin{pmatrix} x\, \cos(\varphi) - y\, \sin(\varphi) \\ x\, \sin(\varphi) + y\, \cos(\varphi) \end{pmatrix}}$$



12.1 Geraden (siehe auch S. 16)

▶ **Punkt-Steigungsform (Normalform):** siehe S. 16.

▶ **Koordinatenform:** $\boxed{g:\ a\cdot x + b\cdot y + c = 0}$



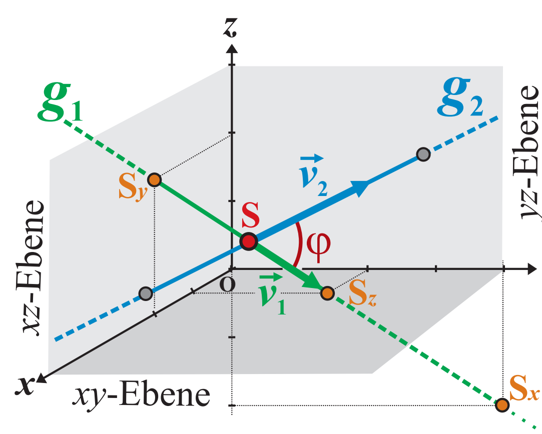
- **Normalenvektor:** $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp g$
- **Parallel:** $g_1 \parallel g_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{n}_1 = k\cdot\vec{n}_2$
- **Senkrecht:** $g_1 \perp g_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$
- **Schnittwinkel** φ **zwischen** g_1 **und** g_2:

  $$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{|\,\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\,|}{|\,\vec{n}_1\,|\cdot|\,\vec{n}_2\,|}}$$

- **Abstand Punkt P**$(x_P\ /\ y_P)$ **zu** g:

  $$\boxed{d(\mathrm{P},\, g) = \frac{|\,a\cdot x_P + b\cdot y_P + c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

▶ **Parameterform:** $\boxed{g:\ t \mapsto \vec{r} = \vec{r}_A + t\cdot\vec{v}}$

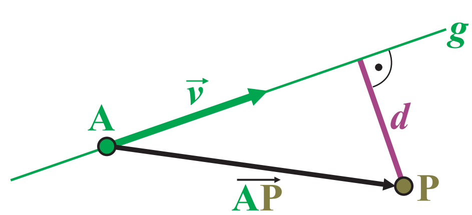


- ***Einzige*** **Geradengleichung im Raum!**
- **Richtungsvektor:** $\vec{v}$ = beliebiger Vektor in Richtung von g.
- **Aufpunkt:** Beliebiger Punkt A (mit Ortsvektor $\vec{r}_A$) auf g.
- **Parallel:** $g_1 \parallel g_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{v}_1 = k\cdot\vec{v}_2$
- **Senkrecht:** $g_1 \perp g_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$
- **Schnittwinkel zwischen** g_1 **und** g_2:

  $$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{|\,\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\,|}{|\,\vec{v}_1\,|\cdot|\,\vec{v}_2\,|}}$$

- **Spurpunkte** S_x, S_y, S_z: Schnittpunkte von g mit einer der Grundebenen.

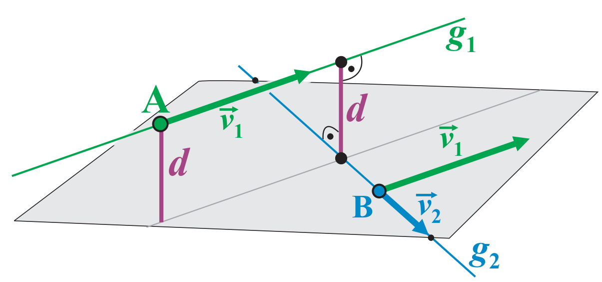
▶ **Abstand Punkt P zur Geraden** $g:\ \vec{r} = \vec{r}_A + t\cdot\vec{v}$



im Raum: $\boxed{d(P,\, g) = \frac{|\,\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\,|}{|\,\vec{v}\,|}}$

▶ **Abstand zweier windschiefen Geraden**

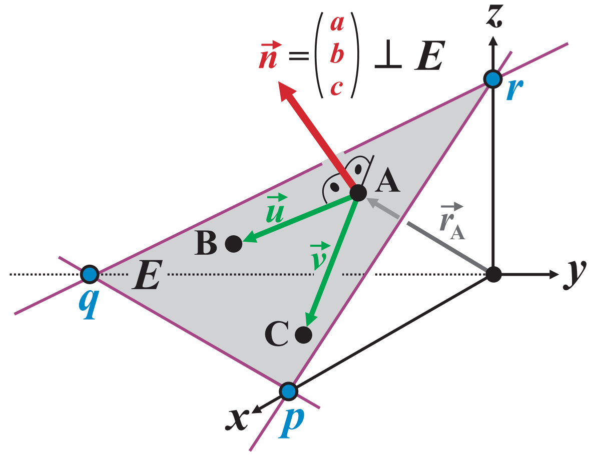
$g_1:\ \vec{r} = \vec{r}_A + t\cdot\vec{v}_1$ **und** $g_2:\ \vec{r} = \vec{r}_B + \tilde{t}\cdot\vec{v}_2$



im Raum: $\boxed{d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}}$

12.2 Ebenen

▶ **Parameterform:** $\boxed{E:\ \vec{r} = \vec{r}_A + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}}$



- Falls **3 Punkte** A, B, C oder **Punkt** A und **zwei verschiedene Richtungen** $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ gegeben sind.

- Jedem Zahlenpaar (t, s) entspricht genau ein Punkt P (Ortsvektor $\vec{r}$) auf E.

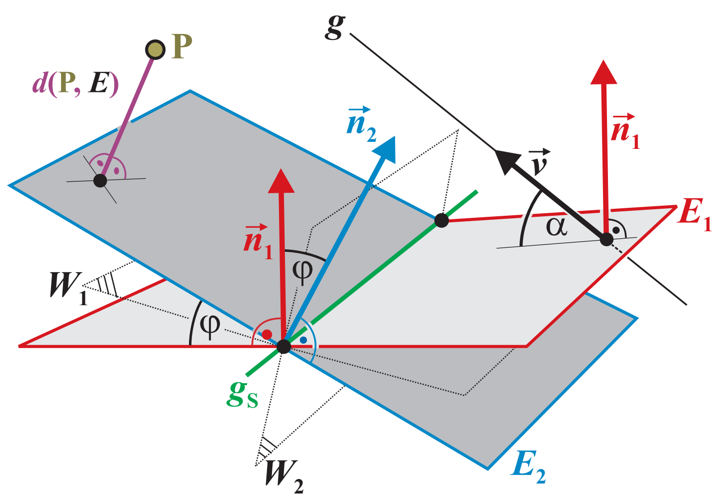
▶ **Achsenabschnittsform:** $\boxed{E:\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$ $\quad \begin{cases} p,\ q,\ r \neq 0 \\ p,\ q,\ r = \infty \ \text{ ist zugelassen.} \end{cases}$

▶ **Normalform:** $\boxed{E:\ \vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_A) = 0}$

▶ **Koordinatenform:** $\boxed{E:\ a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z + d = 0}$

- **Normalenvektor:**

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u}\times\vec{v} \ \perp \ E$$



- $E_1 \parallel E_2 \iff \vec{n}_1 = k\cdot\vec{n}_2$

- $E_1 \perp E_2 \iff \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$

- **Winkel φ zwischen E_1 und E_2:**

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{|\,\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\,|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}} \qquad 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$$

- **Winkel α zwischen E und g:**

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{|\,\vec{n}\cdot\vec{v}\,|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}} \qquad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

- **Abstand P$(x_P\ /\ y_P\ /\ z_P)$ zu E:**

$$\boxed{d(\mathrm{P},\ E) = \frac{|\,a\cdot x_P + b\cdot y_P + c\cdot z_P + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

- **Hessesche Normalform:**

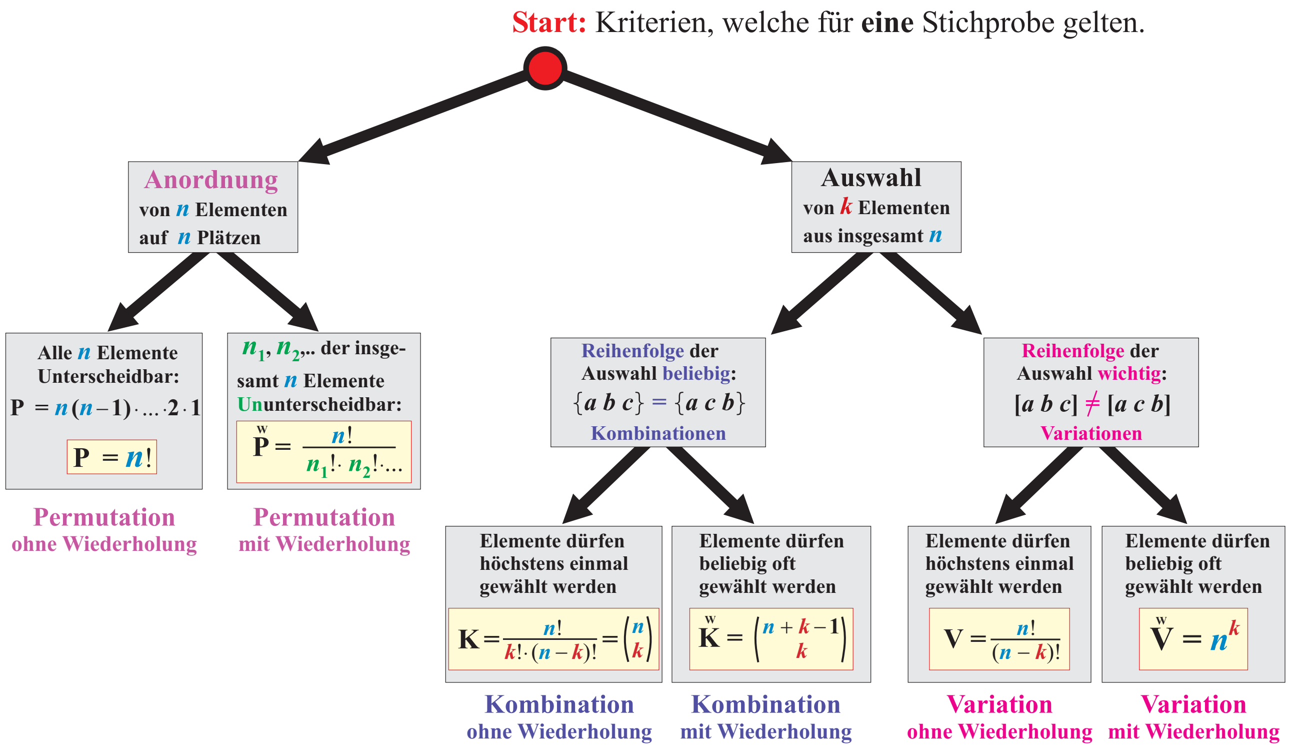
$$\boxed{H(x, y, z) = \frac{a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0}$$

- **Winkelhalbierende Ebenen:**

$$\boxed{W_{1,2}:\ H_1(x,\ y,\ z) = \pm\, H_2(x,\ y,\ z)}$$

13 Stochastik

13.1 Kombinatorik



Fakultät: $\boxed{n! := 1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot n}$ $\qquad 0! = 1$, $\ 1! = 1$

Binomialkoeffizient: $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$

Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

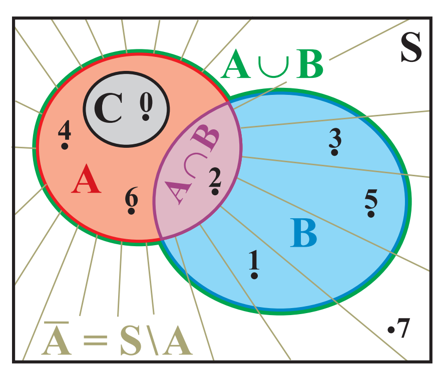
Rekursion: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

13.2 Wahrscheinlichkeit, Mengenlehre

- **Stichprobenraum S:** Menge aller möglichen Ereignisse (Grundmenge).
- **Ereignisse A, B, C:** Teilmengen von **S**.

  Bsp.: $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathbf{A} = \{0, 2, 4, 6\}$, $\mathbf{B} = \{1, 2, 3, 5\}$, $\quad 4 \in \mathbf{A}$; $\ 3 \notin \mathbf{A}$.

$\lvert\mathbf{A}\rvert$	**Mächtigkeit**	Anzahl Elemente in **A**
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$	**Schnittmenge**	**A und B**
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	**Vereinigung**	**A oder B**
$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{A}$	**Komplement**	**S ohne A**
$\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$	**Teilmenge**	**C** enthalten in **A**
$\{\}, \emptyset$	**Leere Menge**	



- **Laplace-Wahrscheinlichkeit:** Alle Elemente in **S** treten gleichwahrscheinlich auf. Dann:

$$\boxed{P(\mathrm{A}) = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{S}|} = \frac{\text{Anzahl Elemente in } \mathbf{A}}{\text{Anzahl Elemente in } \mathbf{S}} = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}}}$$

Unmögliches Ereignis $p(\emptyset) = 0$ **Sicheres Ereignis** $p(\text{S}) = 1$	$\boxed{0 \leq p(\text{A}) \leq 1}$
Gegenwahrscheinlichkeit	$\boxed{p(\overline{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})}$ (Mengendiagramm siehe S. 36.)
Addititionssatz	$\boxed{p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B})}$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$p(\text{B} \,\vert\, \text{A})$: Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist: „A = Wenn, B = Dann" Ereignis. $\boxed{p(\text{B} \,\vert\, \text{A}) = \frac{\vert \text{A} \cap \text{B} \vert}{\vert \text{A} \vert} = \frac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{A})}}$ (Verkleinerung des Stich-Probenraumes von S auf A)
Multiplikationssatz	$\boxed{p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B} \,\vert\, \text{A})}$
Unabhängige Ereignisse	Die Ereignisse A und B sind **unabhängig**, falls $\boxed{p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B})}$ gilt.

⇒ Binomialverteilung (Bernoulli) siehe S. 38.

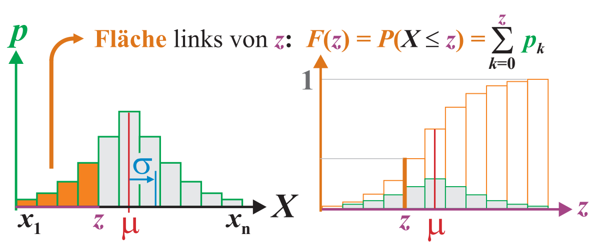
13.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Verteilung:

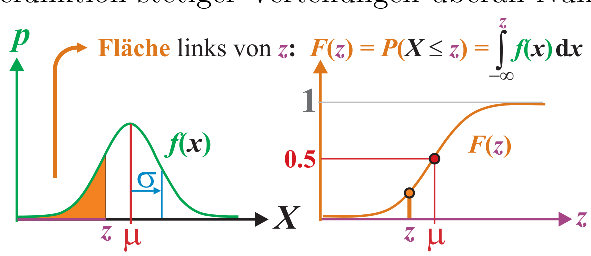
Zufallsvariable X nimmt ausschliesslich die n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten (relative Häufigkeiten, Gewichtungsfaktoren) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an.

Kontinuierliche Verteilung:

Zufallsvariable X nimmt beliebige Werte $x \in \mathbb{R}$ an. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau x eintritt, heisst Dichtefunktion $f(x)$. *Anmerkung:* Streng genommen, ist die Dichtefunktion stetiger Verteilungen überall Null.



Dichtefunktion Verteilungsfunktion



Dichtefunktion Verteilungsfunktion

Diskret		Kontinuierlich
$\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1}$	**Normierung**	$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$
$\boxed{E(X) = \mu = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k}$	**Mittelwert (Erwartungswert)**	$\boxed{E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x\,dx}$
$\boxed{\text{var}(X) = \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - \mu)^2}$	**Varianz**	$\boxed{\text{var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2\,dx}$
$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$	**Standard-abweichung**	$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$

Seien X, Y zwei Zufallsvariablen und a, b Konstanten. Dann gilt:

$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$ $\qquad$ $\text{var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{var}(X)$

13.4 Binomialverteilung, Bernoulli (diskrete Verteilung)

Stichprobenraum besteht aus genau zwei Elementen: S $= \{\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}\}$ mit den gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten $p(\mathrm{A}) = p$ und $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p$. Das Ereignis A trete bei genau n Wiederholungen X mal ein. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass...

A mindestens einmal eintritt:	$\boxed{P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n}$
A genau *k* mal eintritt:	$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^{\,k} \cdot (1-p)^{n-k}}$ $\quad 0 \leq k \leq n$
A höchstens *x* mal eintritt:	$\boxed{P(X \leq x) = \sum\limits_{k=0}^{x} \binom{n}{k} \cdot p^{\,k} \cdot (1-p)^{n-k}}$ $\quad 0 \leq x \leq n$
Erwartungswert:	$\boxed{E(X) = n \cdot p}$
Standardabweichung:	$\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

Für $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ kann eine Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden.

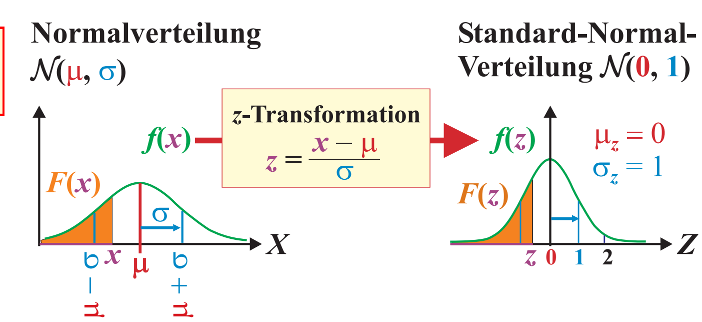
13.5 Normalverteilung (kontinuierliche Verteilung)

- **Dichtefunktion:**

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} = \mathcal{N}(\mu, \sigma)}$$

Standard-Normalverteilung:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \mathcal{N}(0, 1)}$$



Symmetrie:

$f(\mu + x) = f(\mu - x)$ $\qquad$ $f(-z) = f(+z)$

$F(-z) = 1 - F(+z)$

- **Verteilungsfunktion:**

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\, dt}$$

W'keit, dass *höchstens* x eintritt.

Standard-Normalverteilung:

$$\boxed{F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}$$

$\Rightarrow$ Siehe Tabelle im inneren hinteren Umschlag.

- **σ-Umgebungen bei Normalverteilung:**

$1\,\sigma$-Umgebung	$2\,\sigma$-Umgebung	$3\,\sigma$-Umgebung
$p(\lvert \mu - x \rvert < 1\,\sigma) \approx 68.3\%$	$p(\lvert \mu - x \rvert < 2\,\sigma) \approx 95.4\%$	$p(\lvert \mu - x \rvert < 3\,\sigma) \approx 99.7\%$

13.6 Statistik: Daten mit einer Variablen

Seien $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k\}$ die Werte einer Stichprobe und $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ deren **absolute Häufigkeiten**. Für den Umfang der Stichprobe gilt $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Die **relative Häufigkeit** ist durch $p(x_i) = \frac{n_i}{n}$ definiert. Insbesondere gilt $\sum\limits_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$.

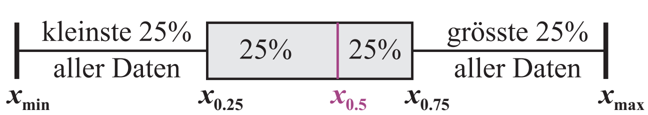
	Einzeldaten	**Gruppendaten (Klassen)**
Daten	n Werte $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$	k Werte $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ der absolute Häufigkeit $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$
Arithmetischer Mittelwert	$\boxed{\overline{x} = E(X) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$	$\boxed{\overline{x} = E(X) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\, x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} p(x_i)\, x_i}$
Median	Der Median $x_{0.5}$ der Werte einer geordneten Stichprobe ist... • der in der Mitte liegende Wert, falls n ungerade. • Der Mittelwert beider mittleren Werte, falls n gerade.	
Modalwert (Modus)	Der Modalwert x_M ist der am häufigsten auftretende Messwert.	
Spannweite	$R = x_{\max} - x_{\min}$	
Varianz*	$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$	$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\,(x_i - \overline{x})^2}$ oder $\boxed{s_x^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} p(x_i)\,(x_i - \overline{x})^2 = E(X^2) - (\,E(X)\,)^2}$

[*] Wenn die Werte $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ eine Population darstellen oder wenn die Varianz innerhalb der Stichprobe gesucht ist, ersetze man den Nenner $n-1$ durch n.

Standardabweichung: $\boxed{s_x = \sqrt{s_x^2}}$

Um Stichproben zu vergleichen, dient der **Variationskoeffizient** $\boxed{V = \frac{s_x}{\overline{x}} \cdot 100\%}$

Box plot: Ermittle den Median $x_{0.5}$, das obere ($x_{0.75}$) und das untere ($x_{0.25}$) Quartil, die kleinste ($x_{\min}$) und die grösste ($x_{\max}$) Stichprobe. Dann



Ungleichung von Tschebyschev:

Für eine Stichprobe mit Mittelwert $\overline{x}$ und Varianz s_x^2 gilt für die Wahrscheinlichkeit p dass ein Messwert x innerhalb einer $\pm\lambda$-Umgebung um den Mittelwert liegt: $\boxed{p(|\,x - \overline{x}\,| < \lambda) \geq 1 - \frac{s_x^2}{\lambda^2}}$

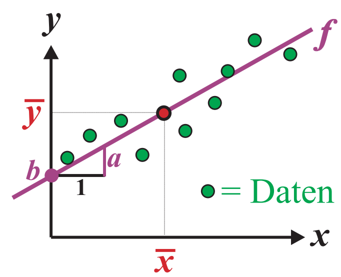
13.7 Daten mit zwei Variablen: Regression und Korrelation

Seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots(x_n, y_n)$ n Paare von Messwerten. Die Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen X und Y kann durch eine von Parametern a, b,... abhängigen Modellfunktion $y = f(x)$ beschrieben werden. Die Parameter a, b,... von f werden so gewählt, dass das mittlere Quadrat der Abweichungen von $y_i - f(x_i)$ minimal wird (Straffunktion):

$$\boxed{S(X, Y, a, b, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} (\, y_i - f(x_i)\,)^2 \quad \longrightarrow \quad \text{minimal}}$$

Lineare Regression:

Modellfunktion: $\boxed{y = f(x) = a \cdot x + b}$ mit



- **Steigung:** $\boxed{a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \dfrac{c_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \cdot \dfrac{s_y}{s_x}}$

- **y−Achsenabschnitt:** $\boxed{b = \overline{y} \; - \; a \cdot \overline{x}}$

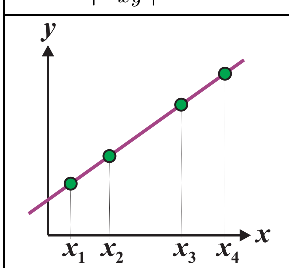
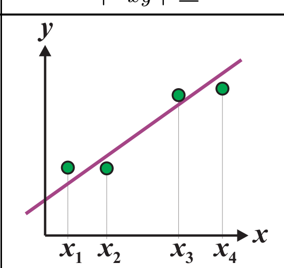
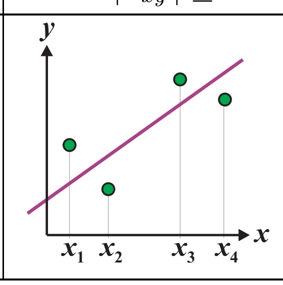
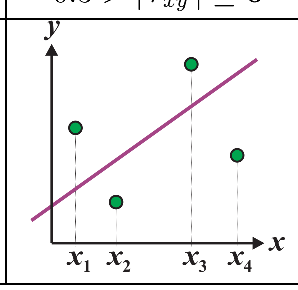
Korrelationskoeffizient:

$$\boxed{r_{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{c_{xy}}{s_x \cdot s_y}}$$

Kovarianz:

$$\boxed{\begin{aligned} c_{xy} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}) \\ c_{xy} &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}}$$

r_{xy} beschreibt die Stärke der Korrelation zwischen x und y:

Korrelationskoeffizient r_{xy}			
maximal	**stark**	**mittel**	**schwach bis keine**
$\lvert r_{xy} \rvert = \mathbf{1}$	$1 > \lvert r_{xy} \rvert \geq 0.7$	$0.7 > \lvert r_{xy} \rvert \geq 0.3$	$0.3 > \lvert r_{xy} \rvert \geq \mathbf{0}$
			

Alternative: Gleichungssystem zur Berechnung von a und b der Regressionsgeraden:

$$\boxed{\left| \begin{array}{lcl} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2) \cdot a \; + \; (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \cdot b & = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \cdot a \; + \quad n \quad \cdot \; b & = & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{array} \right|}$$

14 Mathematische Symbole

$A \Rightarrow B$ $A \Leftrightarrow B$	**Folgerung**: Aus A folgt B. **Äquivalenz**: A ist äquivalent (gleichwertig) zu B.
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ $\mathbb{D}$, $\mathbb{W}$	**Zahlenmengen** (siehe S. 2). **Definitionsmenge**, **Wertemenge** (siehe S. 14).
$f: x \mapsto y = f(x)$	y [abhängige Var.] ist Funktion von x [unabhängige Var.]
$A = \{a, b, c\}$	Die **Menge** A der Elemente a, b, c.
$[a,\ b]$ $(a,\ b)$	Das **Intervall** zwischen (und **mit**) a und b. Das **Intervall** zwischen (aber **ohne**) a und b. Beispiel: $(2,\ 5]$ = Menge aller x, so dass $2 < x \leq 5$ gilt.
$5 \in \mathbb{N}$ $1.5 \notin \mathbb{N}$ $\mathrm{P} \in f$	**Element**: Die Zahl 5 liegt in der Menge $\mathbb{N}$; (5 ist natürliche Zahl). **Nicht Element**: Die Zahl 1.5 liegt nicht in der Menge $\mathbb{N}$. Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion f.
$A \subset B$ $g \subset E$	**Enthalten in**: Die Menge A ist enthalten in B. Die Gerade g (=Punktemenge) liegt auf der Ebene E.
$A \cap B$ $g \cap E$	A **Geschnitten mit** B: Elemente, welche in A **und** in B liegen. Gerade g **geschnitten mit** E
$A \cup B$	A **Vereinigt** mit B: Elemente, welche in A **oder** in B liegen.
$A \setminus B$	A **Ohne** B: Elemente, welche in A aber **nicht** in B liegen.
$\mid$	**Bedingung (Wenn)**. Beispiele: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ = Menge aller reellen x, welche kleiner als 1 sind. $p(B \mid A)$ = W'keit, dass B eintritt, **wenn** A bereits eingetreten ist.
$\forall$	**Für alle**: Beispiel: $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt...
$\exists$	**Es gibt**: Beispiel: $\exists\, x \in \mathbb{R}:$ es gibt eine reelle Zahl x...

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha	H	η	Eta	N	ν	Nü	T	τ	Tau
B	β	Beta	Θ	θ, ϑ	Theta	Ξ	ξ	Xi	Y	υ	Ypsilon
Γ	γ	Gamma	I	ι	Iota	O	o	Omicron	Φ	ϕ, φ	Phi
Δ	δ	Delta	K	κ	Kappa	Π	π	Pi	X	χ	Chi
E	ϵ, ε	Epsilon	Λ	λ	Lambda	P	ρ	Rho	Ψ	ψ	Psi
Z	ζ	Zeta	M	μ	Mü	Σ	σ, ς	Sigma	Ω	ω	Omega

Index