Почему линейное уравнение называется линейным?

Апрель 6, 2018 / Алгебра / Автор: Дэйв Петерсон

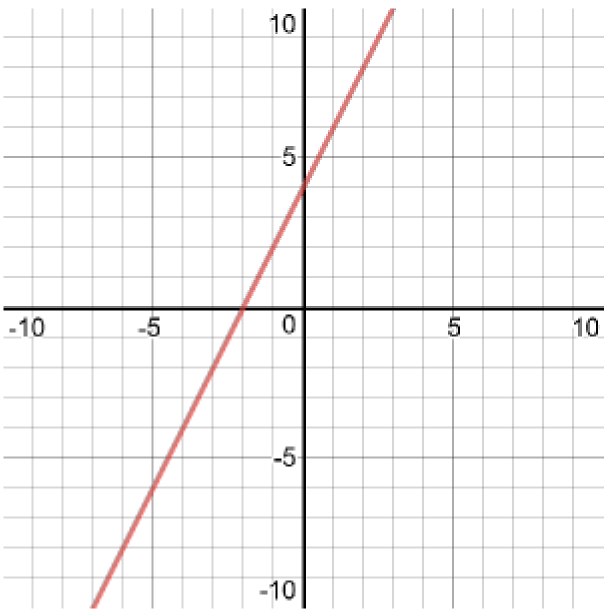
Время от времени мы получаем вопросы, которые в большей степени относятся к словам, чем непосредственно к математике, и обычно они касаются значения или происхождения математических терминов. К всеобщей радости, некоторые из нас любят слова ничуть не меньше, чем математику, и всегда готовы прийти на помощь вопрошающим. Вопрос, который я хочу сейчас рассмотреть, был задан один месяц назад и он в равной степени относится к обеим перечисленным категориям. Получив объяснение, почему непонятное для некоторых слово является приемлемым математическим термином, мы узнаем кое-что о математике в целом.

Но ведь это не прямая линия...

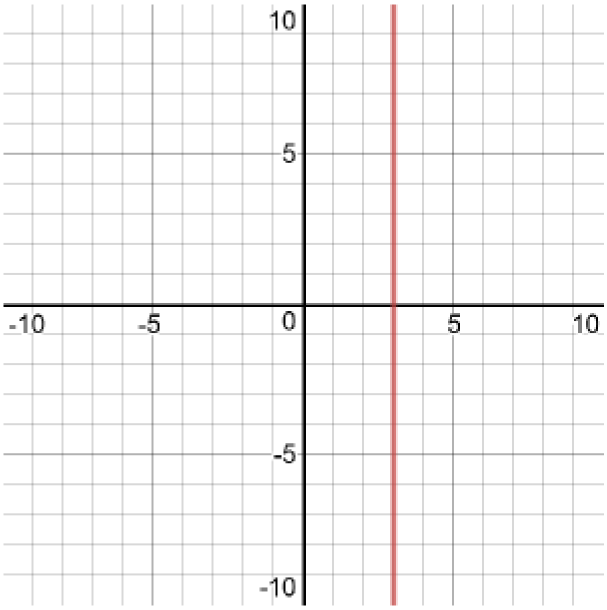
Вот вопрос Кристины:

> Почему уравнение типа 2x+4=10 называется **линейным уравнением с одной переменной**? Очевидно, что решение данного уравнения — это единственная **точка** на оси Икс, а **не прямая линия** на двухосной декартовой координатной плоскости. Или все линейные уравнения с одной переменной рассматриваются как вертикальные прямые линии?

Очевидно, пишет она, словосочетание «линейное уравнение» должно означать «уравнение прямой линии». Также имеется видимое сходство между линейным уравнением с одной переменной, приведённым выше, и линейным уравнением с двумя переменными, например $y = 2x + 4$, которое определённо является уравнением прямой. Но, имея только одну переменную, единственный способ убедиться, что $2x + 4 = 10$ является уравнением прямой, — это построить график данного уравнения на плоскости в виде вертикальной прямой линии $x = 3$. В этом ли заключается смысл данного термина?



$$y = 2x + 4$$



$$2x + 4 = 10$$

Нет, всё не так просто, потому что, работая с линейными уравнениями позднее, нам придётся учитывать три или большее количество переменных. Для начала я дал лишь краткий ответ, чтобы посмотреть, какую реакцию он вызовет, прежде чем я начну «копать» вглубь:

> Термин «линейный», хотя и произошёл от идеи о том, что линейное уравнение с двумя переменными представляет собой прямую линию, был **обобщён** и означает, что уравнение включает в себя **многочлен степени 1**. То есть переменная(ые) только умножается на константу(ы) и прибавляется к другим константам, но не более того (не возводится в квадрат и т. д.).
>
> Таким образом, можно сказать, что этот термин был взят из одной ситуации, давшей ему такое название, и применён к более общим случаям с другим количеством переменных. Например, линейное уравнение с тремя переменными представляет плоскость.

С моей точки зрения, слово «линейный» означает гораздо больше, чем просто «график, представляющий собой прямую линию». Когда оно встречается за рамками уроков элементарной алгебры, то первое, что приходит мне на ум — «многочлен первой степени». Хотя первоначально его связывают с прямыми линиями, когда мы расширяем его применение (а почти каждая идея в математике является расширением чего-то более простого), главная идея, которую мы пытаемся донести, — это степень, а не количество измерений. Например, вот начало статьи в Википедии о линейных уравнениях:

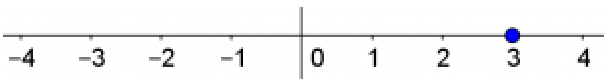
> Линейное уравнение — это алгебраическое уравнение, в котором каждый член является либо константой, либо произведением константы и одной переменной в первой степени (при этом в разных членах могут встречаться разные переменные). Простой пример линейного уравнения только с одной переменной x можно записать в виде: ax + b = 0, где a и b —

> константы, и $a \neq 0$.

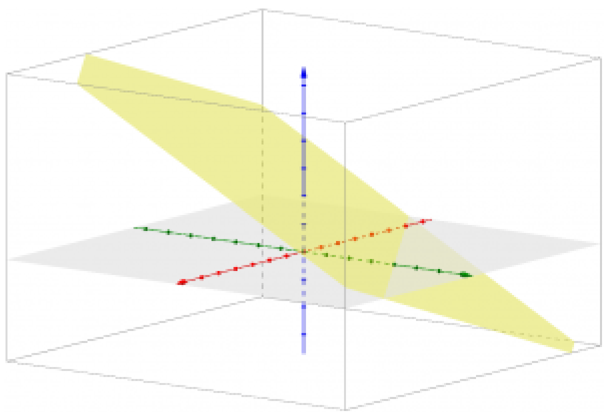
Хотя обозначенная статья в основном посвящена линейным уравнениям, начинаются они с *одной* переменной, а не с линий. И даже несмотря на то, что линейные уравнения с *двумя* переменными демонстрируют графики прямых линий, в следующем параграфе пропускается случай их использования, сразу переходя к уравнениям с *тремя* переменными:

> Линейные уравнения могут иметь одну переменную или несколько. Пример линейного уравнения с тремя переменными x, y и z: ax + by + cz + d = 0, где a, b, c и d — константы, и a, b и c не равны нулю.

Но почему же мы называем *любое* уравнение многочлена степени 1 «линейным», если оно связано с прямой линией только в двух измерениях? В случае с одной переменной, как сказала Кристина, график на самом деле представляет собой **точку**; а в случае с тремя переменными это уже **плоскость**:



2x + 4 = 10



2x – 3y – 6z + 12 = 0

Но все же – это не линия!

Кристину это не убедило:

> Большое спасибо. Я очень внимательно отношусь к терминологии, когда преподаю математику. Должна признаться, мне не нравится такое обобщение данного термина. Я думаю, что оно вводит многих в заблуждение.

Хммм… Термин «линейный» вводит в заблуждение? Нет, только не математиков, и, надеюсь, не их учеников, особенно после того, как он станет для них привычным. Однако это правда, в действительности он означает не совсем то, чем кажется. Но разве обобщение — это всегда плохо? Лично я считаю, что в этом заключена суть того, чем является математика, к тому же это неотъемлемая часть многих языков, которые постоянно расширяют значения своих слов для удовлетворения вновь возникающих потребностей. Вот мой ответ:

> Привет, Кристина.
>
> Спасибо, что изложили свои соображения. Давайте обсудим всё более подобно.
>
> Во-первых, **это стандартная терминология**, которую уже 200 лет используют многие, в том числе великие математики, поэтому нам следует быть весьма осторожными и не считать её применение плохой идеей. Я сомневаюсь в том, что вам удастся убедить кого-либо изменить свою точку зрения, поскольку слово «линейный» используется не только для обозначения линейного уравнения как такового, но и для обозначения «систем *линейных* уравнений» (в отличие от «*нелинейных* уравнений»), всей основной области «*линейной* алгебры» и связанных с ними концепций, таких как «*линейная* комбинация», «*линейное* преобразование» и «*линейная* независимость», которые применимы к любому количеству переменных или измерений. Таким образом, этот термин очень хорошо устоялся и имеет специфическое, но весьма широкое толкование, и (по крайней мере, после первого года обучения) он никого не вводит в заблуждение. Мы знаем, что он означает, и это больше, чем просто «линия».
>
> Во-вторых, **чем бы вы его заменили?** Если вы не хотите использовать слово «линейный», за исключением ситуаций, связанных с реальными линиями, то какое слово вы бы стали применять вместо него для описания общего класса уравнений, включающих переменные, умноженные только на константы, вне зависимости от количества переменных? Нам понадобится слово для этого общего понятия; это слово должно быть либо знакомым словом, значение которого расширено и охватывает более широкую концепцию, либо каким-то вымышленным словом. Традиция в математике всегда заключалась в том, чтобы брать знакомые слова и придавать им новые значения (либо *более конкретные*, такие как «группа», «комбинация» или «функция», либо *более общие*, такие как «число», «умножение» или «пространство»). Итак, то, что мы наблюдаем здесь, встречается во всей математике: слово, которое вышло за рамки своего скромного начального значения. (Это также относится и ко всему английскому языку! Большинство слов обязательно «введут вас в заблуждение», если слишком глубоко задумываться об их происхождении.)
>
> Я мог бы сказать, что в некотором смысле **вся математика основана на обобщениях** (или абстракциях). Только что я упомянул «число»: некоторые люди высказывают недовольство тем, что «числом» часто называют что-либо ещё, кроме натурального числа, но логическое развитие от натуральных чисел к целым, рациональным, действительным и комплексным числам предполагает неоднократное расширение этого термина, что является чрезвычайно полезным. Мы изобретаем новые концепции и даем им старые имена, потому что они представляют собой более крупную и мощную версию старых.

Я упоминал, что в английском языке многие слова «перерастают» свои первоначальные значения. Сидя за компьютером, я смотрю на *мышь* – неужели неправильно её так называть, поскольку у неё нет ни лап, ни хвоста? У компьютера есть *экран*; в определённое время «экран» представлял собой плоскую поверхность, которая *скрывала* что-либо от посторонних глаз, защищая от возможных ошибок. Затем «экран» наносили на плоские поверхности, предназначенные для проецирования на них изображений, а позже – на поверхности, которые уже самостоятельно демонстрировали изображения. Разве сейчас это слово вводит нас в заблуждение? Могло бы, если бы нам удалось вернуться в прошлое, на сто лет назад…

Размышляя в очередной раз о математических терминах, я вспоминаю одну из своих прежних дискуссий, в которой мы пытались выяснить, что имеется общего между всеми различными операциями, называемыми «умножением».

Так как же нам это объяснить?

Но когда я писал эти строки, то понял, что пошёл не в том направлении, которое задала Кристина, и мне захотелось связать свой ответ с её конкретным контекстом, то есть с линейными уравнениями с одной переменной. Исходный вопрос носил педагогический характер: каким образом она могла бы объяснить всё это своим ученикам так, чтобы в конце концов термин «линейный» стал означать для них именно то, что нужно? И я продолжил:

> Сейчас я думаю в основном о «расширенном» толковании слова «линейный», приведя его к **более** чем двум измерениям. Вы же думаете конкретно о термине, используемом **только с одной** переменной. Поэтому может оказаться полезным, если мы сосредоточим усилия на том, чтобы стать немного ближе к контексту вашего вопроса. Я хотел бы объяснить линейные уравнения с одной переменной таким образом, чтобы для вас стало ясно, почему мы используем именно это слово и почему оно не является неправильным.
>
> Рассмотрим уравнение, о котором вы спрашивали: 2x + 4 = 10. Левая часть — это выражение. Мы называем его **линейным выражением**, потому что если бы вы использовали его в уравнении с двумя переменными: y = 2x + 4, то его график являлся бы прямой линией. Поэтому мы называем 2x + 4 линейным выражением (немного позже мы назовём его линейной функцией). Линейное уравнение с одной переменной — это уравнение, которое утверждает, что два *линейных выражения* равны (или одно из них равно константе).
>
> Если посмотреть с другой стороны, то один из способов решения данного уравнения — построить график соответствующего уравнения y = 2x + 4 и найти, где эта прямая **линия** пересекает прямую y = 10, параллельную оси Икс. Как мы видим, линейное уравнение можно истолковывать по-разному, не отрываясь от термина «линия».
>
> (Ко времени первого знакомства учащихся с линейными уравнениями с одной переменной, они, вероятно, ещё не проводили построение графиков и поэтому не готовы к данному обсуждению, в таком случае слово «линейный» следует оставить без объяснения, отложив его для более подходящего случая.)
>
> Надеюсь, мои объяснения пригодились?

Частенько бывает трудно понять, оказался ли ваш ответ полезным для собеседника, но Кристина не оставила места для сомнений:

> Да, ваш ответ очень помог. Кроме того, он заставил меня серьёзно задуматься. Это правда, ученики, которым я сейчас преподаю, учатся решать линейные уравнения с одной переменной прежде, чем они узнают о линейных уравнениях и функциях. Возможно, именно поэтому я подвергаю сомнению использование данного термина. Я не должна забывать, что у меня имеется опыт преподавания тем, не соответствующих возрасту учащихся, и поэтому я более вдумчиво отношусь к тому, с какими терминами им придётся сталкиваться и, что более важно, в какой последовательности им будет представлен курс математики. Я ещё раз благодарю вас за такой подробный ответ и, безусловно, ещё раз обдумаю это обсуждение. С вами приятно общаться.

Полагаю, что если бы я знакомил с этими уравнениями учеников, не имевших опыта в построении графиков, то мог бы упомянуть между прочим, что они называются «линейными уравнениями с одной переменной», и что вскоре мы обязательно поймем, почему слово «линейный» является подходящим для этих уравнений. На данном этапе оно означает, что мы не выполняем над переменной никаких действий, кроме умножения её на константу и прибавления к ней других констант. Дети постоянно слышат, что некоторые темы будут объяснены позже и уже привыкли к этому…

Перевод статьи на русский язык выполнил 0x5dd в 2023 году.