СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Теорема 1

Если a – любое число и n, k – натуральные числа, то справедливо равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n множителей}}$

2) $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{k множителей}}$

3) $a^n \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n множителей}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{\text{k множителей}} =$

$= \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n множителей}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{k множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n+k множителей}} = a^{n+k}$

Теорема доказана.

Теорема 2

Если $a \neq 0$ и n, k – натуральные числа, такие, что $n > k$, то справедливо равенство $a^n : a^k = a^{n-k}$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим произведение $a^{n-k} \cdot a^k$. Мы знаем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются (об этом шла речь в теореме 1). Сложив показатели n—k и k, получим (n—k) + k = n. Итак, $a^{n-k} \cdot a^k = a^n$, а это как раз и означает, что $a^n : a^k = a^{n-k}$.
Теорема доказана.

Теорема 3

Если a – любое число и n, k – натуральные числа, то справедливо равенство $(a^n)^k = a^{nk}$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot ... \cdot a^n}_{\text{k множителей}} =$$
$$\underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot ... \cdot a) \cdot ... \cdot (a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{\text{k групп по n множителей в каждой}} =$$
$$= \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{nk множителей}} = a^{nk}$$

Теорема доказана.

Эти теоремы на практике удобнее формулировать в виде трёх правил, которые полезно запомнить.

Правило 1. *При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются.*
Правило 2. *При делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя делимого вычитается показатель делителя.*
Правило 3. *При возведении степени в степень показатели перемножаются.*

Самое главное – три формулы:

$$\boxed{a^n \cdot a^k = a^{n+k};}$$
$$\boxed{a^n : a^k = a^{n-k}, n > k, a \neq 0;}$$
$$\boxed{(a^n)^k = a^{nk}.}$$

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Оказывается, можно умножать и делить степени и с *разными* основаниями, если только показатели у этих степеней одинаковы.

Пример 1. Вычислить $2^4 \cdot 5^4$.
Р е ш е н и е.

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$$
$$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\ 000.$$

В процессе решения мы получили числовое равенство

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4.$$

Точно так же можно доказать, что $a^3b^3 = (ab)^3$. В самом деле,

$$a^3b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3.$$

Вообще, имеет место равенство:

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

Для тех, кому интересно, приведём "молчаливое"доказательство этого утверждения:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n множителей}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{\text{n множителей}} =$$
$$a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{\text{n множителей}} = (ab)^n.$$

Пример 2. Вычислить $\dfrac{12^6}{4^6}$.

Р е ш е н и е. Конечно, можно найти 12^6, затем 4^6, затем первое число разделить на второе.

Но лучше рассуждать так:

$$\frac{12^6}{4^6} = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} =$$
$$= \left(\frac{12}{4}\right)^6 = 3^6 = 729.$$

В процессе решения мы получили числовое равенство $\dfrac{12^6}{4^6} = \left(\dfrac{12}{4}\right)^6$.

Точно так же можно доказать, что $\dfrac{a^3}{b^3} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$ и $\dfrac{a^7}{b^7} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^7$. Вообще имеет место равенство $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, если $b \neq 0$. Итак,

$$\boxed{a^n b^n = (ab)^n;}$$
$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; b \neq 0.}$$

Обе эти формулы можно оформить в виде правил действий над степенями, тогда к трём правилам добавятся ещё два:
Правило 4. *Чтобы перемножить степени с одинаковыми показателями, достаточно перемножить основания, а показатель степени оставить неизменным.*
Правило 5. *Чтобы разделить друг на друга степени с одинаковыми показателями, достаточно разделить одно основание на другое, а показатель степени оставить неизменным.*

Пример 3. Упростить выражение $\left(\dfrac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5 = \frac{(2^2a^3b^4)^5}{3^5} \text{ (правило 5);}$$

далее:

$$(2^2a^3b^4)^5 = (2^2)^5(a^3)^5(b^4)^5 \text{ (правило 4).}$$

Но

$$(2^2)^5 = 2^{10} = 1024; \;\; (a^3)^5 = a^{15}; \;\; (b^4)^5 = b^{20} \text{ (правило 3).}$$

Значит, $(2^2a^3b^4)^5 = 1024a^{15}b^{20}$. Так как $3^5 = 243$, то окончательно получаем: $\left(\dfrac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5 = \dfrac{1024a^{15}b^{20}}{243}$.

Если умножение и деление выполняется над степенями с р а з л и ч н ы м и основаниями и р а з н ы м и показателями, то будьте внимательны. Так, $3^5 \cdot 2^4$ можно вычислить "в лоб": сначала вычислить 3^5, затем 2^4 и, наконец, выполнить умножение.
А можно так: $3 \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 3 \cdot (3 \cdot 2)^4 = 3 \cdot 6^4$.

СТЕПЕНЬ С НУЛЕВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Мы с вами научились вычислять значение степени с любым *натуральным* показателем. В дальнейшем вы узнаете, что показателем степени может быть не только натуральное число. Но это произойдёт позднее, в старших классах, а пока мы сделаем лишь один скромный шаг в этом направлении: введём понятие *степени с нулевым показателем*, т.е. выясним, какой смысл придаётся в математике символу a^0. А ведь этот символ "напрашивается". Смотрите: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2,\; 3^8 : 3 = 3^{8-1} = 3^7$.

Почему бы не написать $5^4 : 5^4 = 5^0$?
До сих пор всё было хорошо: a^3 – это значит число a умножить само на себя 3 раза, a^{10} – это значит число а умножить само на себя 10 раз, a^1 – это просто а. А что такое a^0? Ведь нельзя же, в самом деле, умножить число a само на себя 0 раз!
Хотелось бы, чтобы для a^0 выполнялись привычные правила, например, чтобы при вычислении $a^3 \cdot a^0$ показатели складывались: $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0}$. Но $3 + 0 = 3$. Что же получается? Получается, что $a^3 \cdot a^0 = a^3$. Значит, $a^0 = a^3 : a^3 = 1$ (при этом нужно ввести естественное ограничение: $a \neq 0$). Проведённое рассуждение как-то мотивирует следующее определение.
Определение. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Например, $5,7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $(2^n)^0 = 1$ и т.д. Однако учтите, что символ 0^0 считается в математике не имеющим смысла.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь собраны основные определения, свойства, теоремы, формулы, правила, которые мы с вами изучали. Всё это записано на сухом математическом языке без всяких комментариев, поскольку комментарии, обоснования были приведены ранее.

$$\boxed{a^1 = a;}$$

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n множителей}};}$$

$$\boxed{a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0;}$$

$$\boxed{1^n = 1; \quad 0^n = 0;}$$

$$\boxed{(-1)^{2n} = 1; \quad (-1)^{2n-1} = -1;}$$

$$\boxed{10^n = 1\,\underbrace{00...0}_{\text{n нулей}};}$$

$$\boxed{a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \quad a^{n+k+m} = a^n \cdot a^k \cdot a^m;}$$

$$\boxed{a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ где } n \geqslant k;}$$

$$\boxed{(a^n)^k = a^{nk};}$$

$$\boxed{a^n b^n = (ab)^n; \quad (abc)^n = a^n b^n c^n; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ где } b \neq 0.}$$