Instituto Superior de Engenharia
Politécnico de Coimbra

DEPARTAMENTO DE / DEPARTMENT OF
INFORMÁTICA E SISTEMAS

Métodos Numéricos para EDO/PVI

Relatório de Licenciatura em / in Engenharia Informática

Autor / Author

LEI-CE

António Domingos Gonçalves Pedroso 2021132042

António Miguel Grangeiro Rocha 2021145734

LEI

Samuel Frazão Pinto Costa 2022161160

Supervisor

Arménio António da Silva Correia

INSTITUTO POLITÉCNICO DE COIMBRA

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

Coimbra, Março 2025

Resumo

Este relatório documenta o desenvolvimento da Atividade 3 da unidade curricular de Análise Matemática 2, centrada nos métodos numéricos para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). São abordados diversos métodos, nomeadamente o método de Euler, o método de Euler melhorado (Heun), e os métodos de Runge-Kutta de ordem 2, 3 e 4, bem como o solver `ode45` do Matlab. Para cada método, é apresentada a respetiva formulação matemática, juntamente com uma análise comparativa da sua eficácia, precisão e aplicabilidade. A atividade permitiu consolidar conhecimentos teóricos e práticos na resolução numérica de EDOs, demonstrando a importância destas ferramentas em contextos de modelação matemática e simulação computacional.

Abstract

This report documents the development of Activity 3 from the course unit Mathematical Analysis 2, focused on numerical methods for solving Ordinary Differential Equations (ODEs). Several methods are addressed, including Euler's method, the improved Euler method (Heun), and the Runge-Kutta methods of order 2, 3, and 4, as well as the `ode45` solver from MATLAB. Each method is presented with its corresponding mathematical formulation and a comparative analysis regarding its effectiveness, accuracy, and applicability. This activity allowed for the consolidation of both theoretical and practical knowledge in the numerical resolution of ODEs, highlighting the importance of these tools in mathematical modeling and computational simulation.

Epígrafe

Tzzzzz Tzzzzzzz Tzzzzzz.
Arménio, 2025

Agradecimentos

Arménio António da Silva Correia

Rui Manuel Carreira Rodrigues

Índice

Índice de figuras

Lista de abreviaturas

EDO	Equação Diferencial Ordinária
IEEE	*Institute of Electrical and Electronics Engineers*
ISEC	Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
k1, k2, k3, k4	Avaliações intermediárias da função diferencial
MATLAB	*Matrix Laboratory*
ODE	*Ordinary Differential Equation*
PVI	Problema de Valor Inicial
RK2	Método de Runge-Kutta de Ordem 2
RK3	Método de Runge-Kutta de Ordem 3
RK4	Método de Runge-Kutta de Ordem 4
RK45	Método de Runge-Kutta de Ordem 4(5), usado pelo `ode45`
`ode45`	Função do MATLAB para resolver EDOs com método adaptativo
t	Variável independente (tempo)
y	Variável dependente (solução da EDO)
y_0	Condição inicial da variável dependente
h	Tamanho do passo (step size)
a	Limite inferior do intervalo
b	Limite superior do intervalo
$f(t, y)$	Função que define a EDO, ou seja, $y' = f(t, y)$

1 Introdução

No presente documento, será registado todo o processo envolvido na realização da Atividade 3: Métodos Numéricos para EDO/PVI, proposta no âmbito da Unidade Curricular Análise Matemática 2.

Os assuntos abordados neste relatório baseiam-se, principalmente, nos conhecimentos transmitidos nas aulas, sendo ainda complementados com pesquisa e trabalho realizado fora do ambiente letivo.

Ao longo deste documento, será possível acompanhar todo o trabalho desenvolvido nesta atividade, as dificuldades enfrentadas e a descrição detalhada de todas as suas componentes.

2 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

O estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) foca-se na resolução de equações da forma:

$$\{ x'(t) = f(t, x(t))x(t_0) = x_0 \tag{2.1}$$

em que x e f podem ser funções escalares ou vetoriais. O objetivo é determinar a função $x(t)$ para $t > t_0$, conhecendo-se o valor inicial x_0 no instante t_0. Estas equações surgem frequentemente na modelação de fenómenos físicos, biológicos, económicos, entre outros.

Na prática, a solução analítica destas equações nem sempre é possível, pelo que se recorre a métodos numéricos para obter aproximações da solução.

3 Método de Euler

3.1 Fórmulas

O método de Euler é um procedimento numérico de primeira ordem (y') para aproximar a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial:

$$y' = f(t, y) \tag{3.1}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{3.2}$$

O Método de Euler para resolver um Problema de Valor Inicial (PVI) é dado pela seguinte fórmula geral:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \tag{3.3}$$

onde:

- y_{i+1} → Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abscissa t_{i+1});
- y_i → Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;
- h → Valor de cada subintervalo (passo);
- $f(t_i, y_i)$ → Valor da equação em t_i e y_i.

3.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o valor do passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução e atribuir $y(1) = y_0$;
3. Atribuir o primeiro valor de y;
4. Para i de 1 a n, calcular o método de Euler para a i-ésima iteração.

4 Método de Euler Melhorado ou Modificado (Método de Heun)

4.1 Fórmulas

Este método também pode ser chamado de Método de Euler Melhorado ou Modificado, sendo equivalente a um método de Runge-Kutta de ordem 2.

O Método de Heun para resolver um Problema de Valor Inicial (PVI) é dado pelas seguintes equações:

Fórmula Geral:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{4.1}$$

Cálculo de k_1:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \tag{4.2}$$

Cálculo de k_2:

$$k_2 = f(t_i + h, y_i + hk_1) \tag{4.3}$$

onde:

- y_{i+1} → Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abscissa t_{i+1});
- y_i → Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;
- h → Valor de cada subintervalo (passo);
- k_1 → Inclinação no início do intervalo;
- k_2 → Inclinação no fim do intervalo;
- $f(t_i, y_i)$ → Valor da equação em t_i e y_i.

4.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução;
3. Atribuir o primeiro valor de y (condição inicial do PVI);

4. Calcular a inclinação no início do intervalo (k_1);
5. Calcular a inclinação no fim do intervalo (k_2);
6. Calcular a média das inclinações;
7. Calcular o valor aproximado para a i-ésima iteração.

5 Método de Runge-Kutta de Ordem 2

5.1 Fórmulas

O Método de Runge-Kutta de Ordem 2 (RK2) é um método de passo simples que requer apenas derivadas de primeira ordem e pode fornecer aproximações precisas para a solução de Problemas de Valor Inicial (PVI).

Fórmula Geral:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{5.1}$$

Cálculo de k_1:

$$k_1 = hf(t_i, y_i) \tag{5.2}$$

Cálculo de k_2:

$$k_2 = hf(t_i + h, y_i + k_1) \tag{5.3}$$

onde:

- y_{i+1} → Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abscissa t_{i+1});
- y_i → Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;
- h → Valor de cada subintervalo (passo);
- $f(t_i, y_i)$ → Valor da equação diferencial avaliada em t_i e y_i;
- k_1 → Inclinação no início do intervalo;
- k_2 → Inclinação no fim do intervalo.

5.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução;
3. Atribuir o primeiro valor de y (condição inicial do PVI);
4. Calcular a inclinação no início do intervalo (k_1);
5. Calcular a inclinação no fim do intervalo (k_2);

6. Calcular a média das inclinações;
7. Calcular o valor aproximado para a i-ésima iteração usando o método de RK2.

6 Método de Runge-Kutta de Ordem 3

6.1 Fórmulas

O Método de Runge-Kutta de Ordem 3 (RK3) fornece uma aproximação mais precisa em relação ao RK2, utilizando três avaliações da função por iteração.

Fórmula Geral:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{6.1}$$

Cálculo de k_1:

$$k_1 = hf(t_i, y_i) \tag{6.2}$$

Cálculo de k_2:

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \tag{6.3}$$

Cálculo de k_3:

$$k_3 = hf(t_i + h, y_i - k_1 + 2k_2) \tag{6.4}$$

onde:

- y_{i+1} → Próximo valor aproximado da solução do problema original;
- y_i → Valor aproximado da solução na abscissa atual;
- h → Passo de integração;
- $f(t_i, y_i)$ → Avaliação da função diferencial;
- k_1, k_2, k_3 → Aproximações das inclinações.

6.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h;
2. Criar um vetor y para armazenar os valores aproximados;
3. Atribuir o valor inicial $y(1) = y_0$;
4. Calcular k_1 com os valores atuais;
5. Calcular k_2 no ponto médio do intervalo;

6. Calcular k_3 com base em k_1 e k_2;
7. Calcular y_{i+1} usando a média ponderada das inclinações.

7 Método de Runge-Kutta de Ordem 4

7.1 Fórmulas

O Método de Runge-Kutta de Ordem 4 (RK4) é um dos métodos mais utilizados para resolver equações diferenciais ordinárias devido à sua alta precisão e simplicidade de implementação.

Fórmula Geral:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7.1}$$

Cálculo de k_1:

$$k_1 = hf(t_i, y_i) \tag{7.2}$$

Cálculo de k_2:

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \tag{7.3}$$

Cálculo de k_3:

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \tag{7.4}$$

Cálculo de k_4:

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) \tag{7.5}$$

onde:

- y_{i+1} → Próximo valor aproximado;
- y_i → Valor atual;
- h → Tamanho do passo;
- $f(t_i, y_i)$ → Equação diferencial;
- k_1, k_2, k_3, k_4 → Avaliações intermediárias.

7.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h;
2. Criar um vetor y para armazenar a solução;

3. Atribuir o valor inicial $y(1) = y_0$;
4. Calcular k_1 com os valores atuais;
5. Calcular k_2 com base em k_1;
6. Calcular k_3 com base em k_2;
7. Calcular k_4 com base em k_3;
8. Calcular y_{i+1} usando a média ponderada das quatro inclinações.

8 Função `ode45` do MATLAB

8.1 Descrição

A função `ode45` do MATLAB é um dos métodos numéricos mais utilizados para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs). Ela é baseada no método de Runge-Kutta de ordem 4(5), ou seja, uma combinação de dois métodos de Runge-Kutta de ordens 4 e 5, que permite controle adaptativo do passo de integração.

A função é adequada para a maioria dos problemas não-stiff e fornece uma solução com alta precisão de forma eficiente.

8.2 Sintaxe

```
[t, y] = ode45(@f, [t0 tf], y0)
```

onde:

- `@f` → Handle da função que define a EDO, ou seja, $y' = f(t, y)$;
- `[t0 tf]` → Intervalo de integração, com tempo inicial t_0 e final t_f;
- `y0` → Condição inicial da variável dependente y;
- `t` → Vetor de tempos nos quais a solução foi avaliada;
- `y` → Solução numérica aproximada da EDO nos tempos definidos em `t`.

8.3 Exemplo de Uso

Exemplo: Resolver a equação diferencial $y' = -2y$, com $y(0) = 1$, de $t = 0$ até $t = 5$.

```
f = @(t, y) -2*y;
[t, y] = ode45(f, [0 5], 1);
plot(t, y)
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Solução da EDO usando ode45')
```

8.4 Vantagens

- Método adaptativo: ajusta automaticamente o passo para maior precisão;
- Simples de usar com apenas a definição da função e condições iniciais;
- Ideal para problemas com solução suave e bem comportada.

9 Exercícios

Exercício 3 do Teste Farol

Problemas de Aplicação - Parte 2

Exercícios Adicionais - Farol

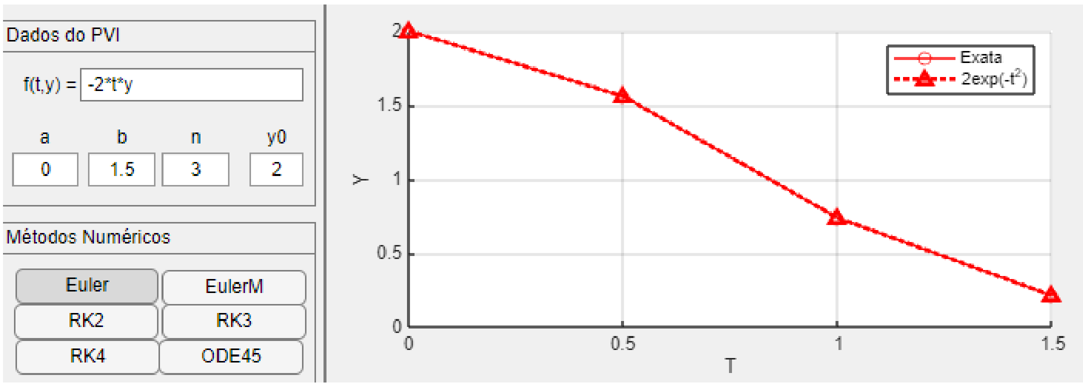


Figura 9.1: Resolução do Exercício 3.a

			Aproximações		Erros	
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2
0	0	2	2	2	0	0
1	0.5	1.5576	2	1.5000	0.4424	0.0576
2	1	0.7358	1	0.7500	0.2642	0.0142
3	1.5	0.2108	0	0.3750	0.2108	0.1642

Figura 9.2: Resolução do Exercício 3.b - Parte 0

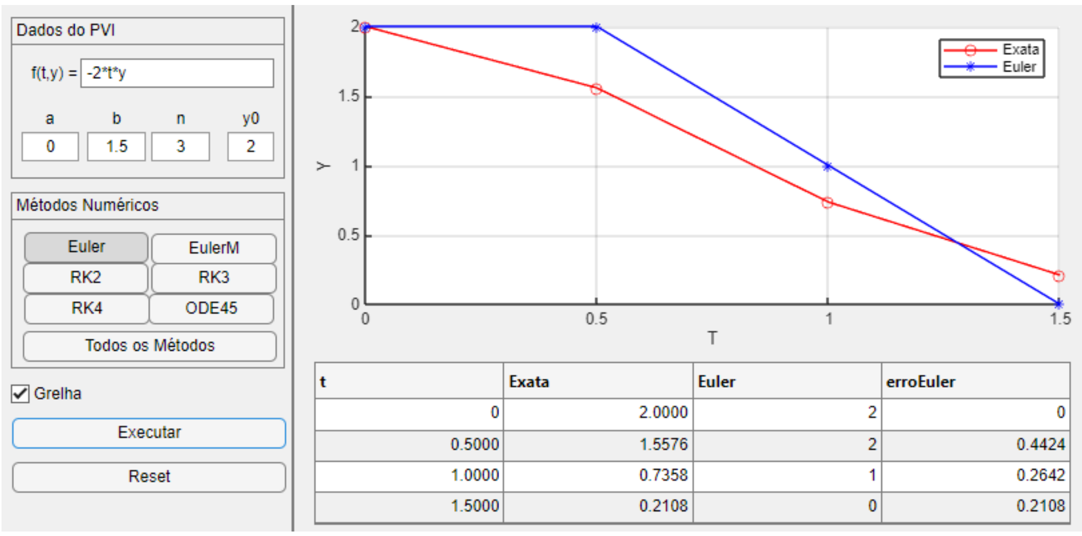


Figura 9.3: Resolução do Exercício 3.b - Parte 1

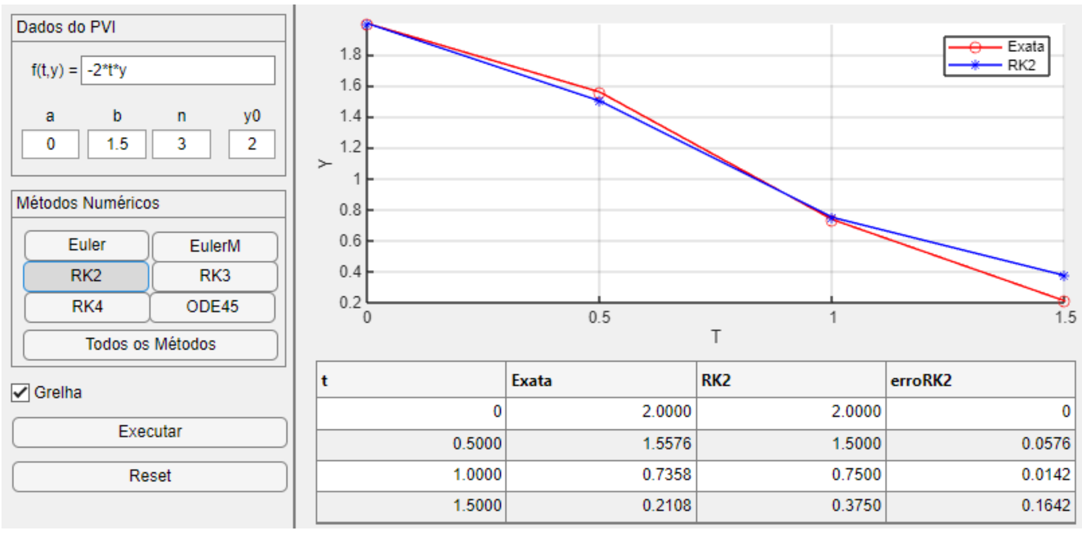


Figura 9.4: Resolução do Exercício 3.b - Parte 2

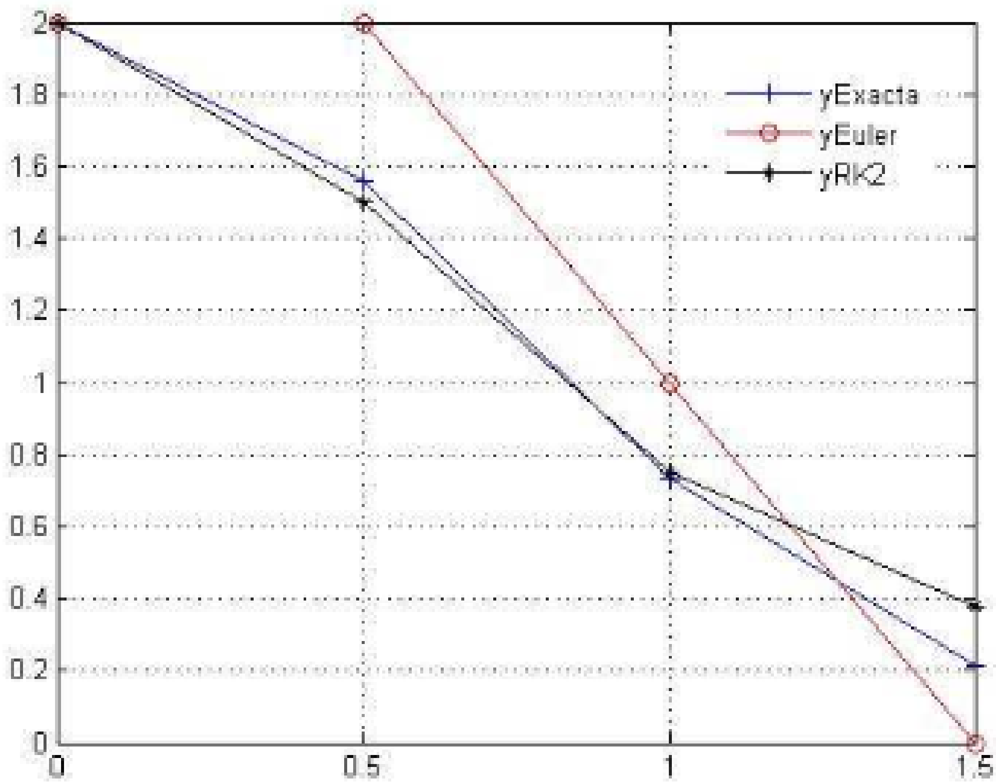


Figura 9.5: Resolução do Exercício 3.c

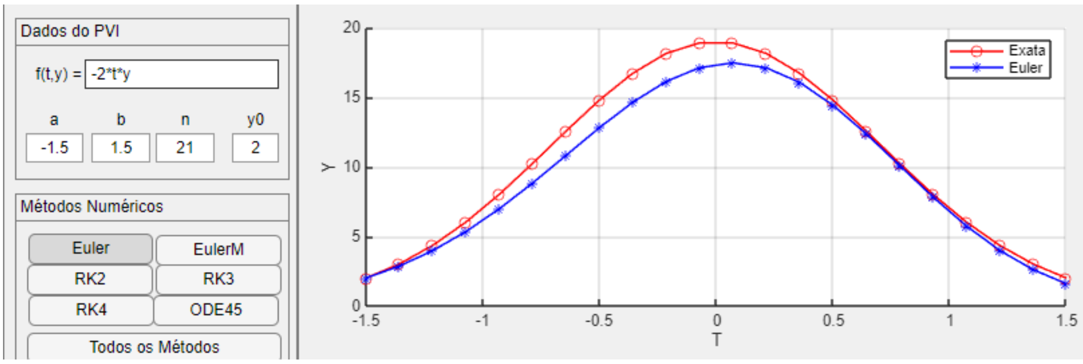


Figura 9.6: Resolução do Exercício 3.d

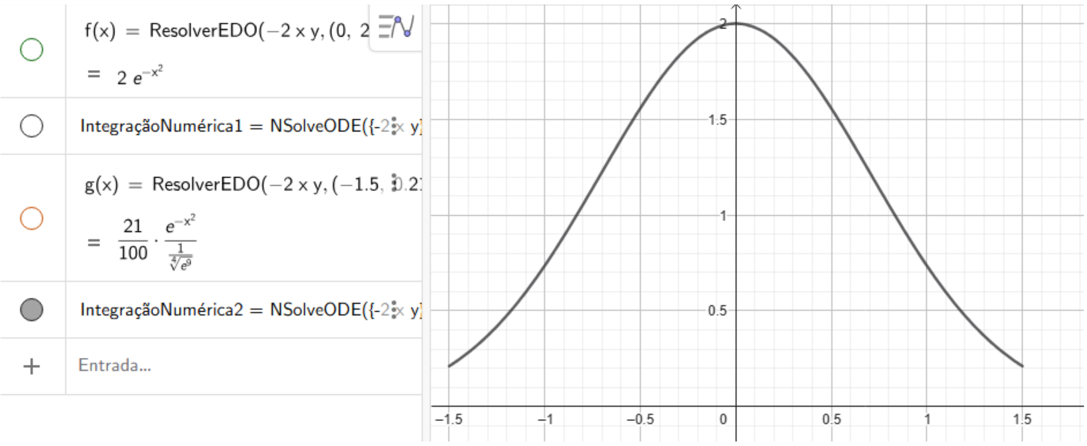


Figura 9.7: Resolução do Exercício 3.e

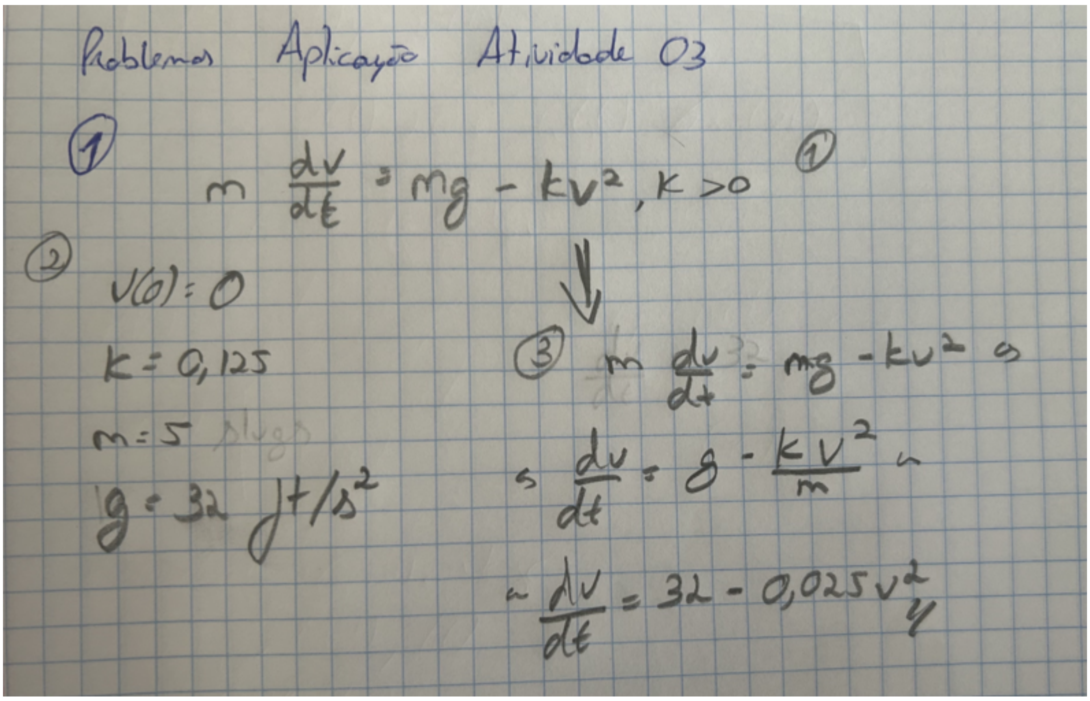
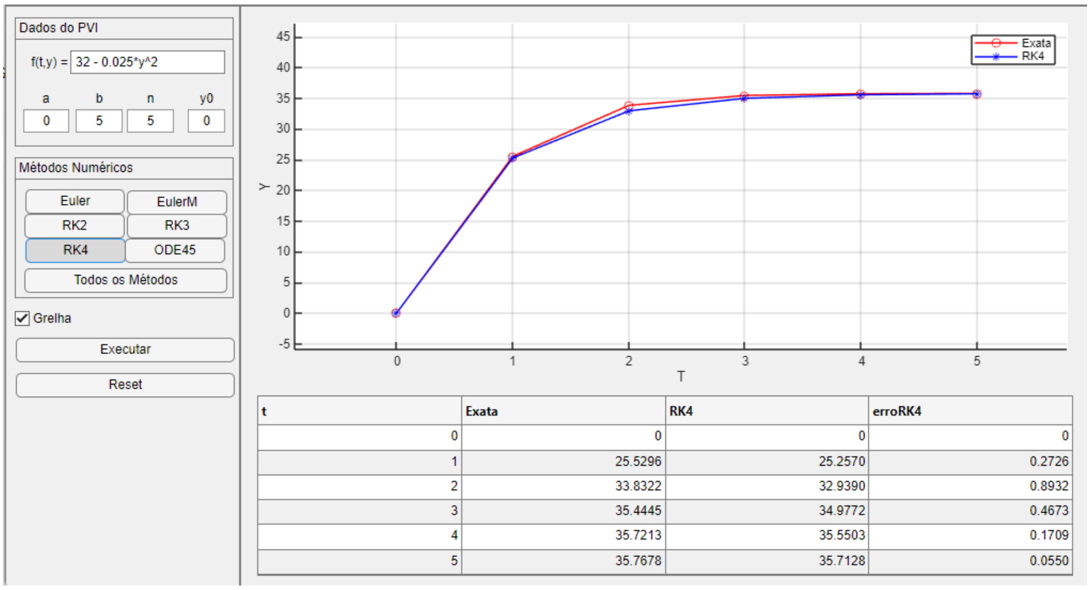


Figura 9.8: Resolução do Problema do Livro 1a



t	Exata	RK4	erroRK4
0	0	0	0
1	25.5296	25.2570	0.2726
2	33.8322	32.9390	0.8932
3	35.4445	34.9772	0.4673
4	35.7213	35.5503	0.1709
5	35.7678	35.7128	0.0550

Figura 9.9: Resolução do Problema do Livro 1b

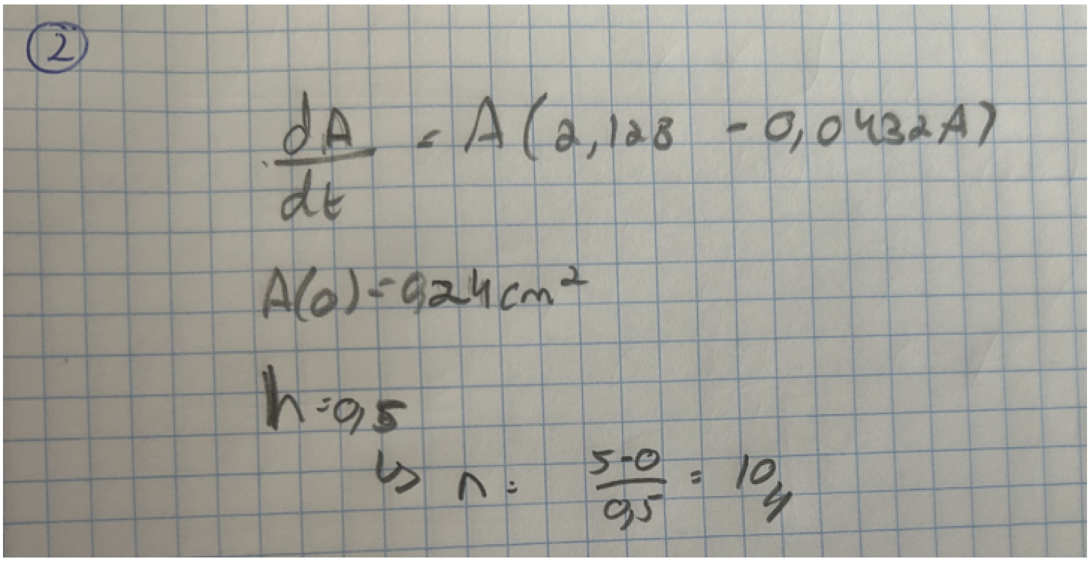
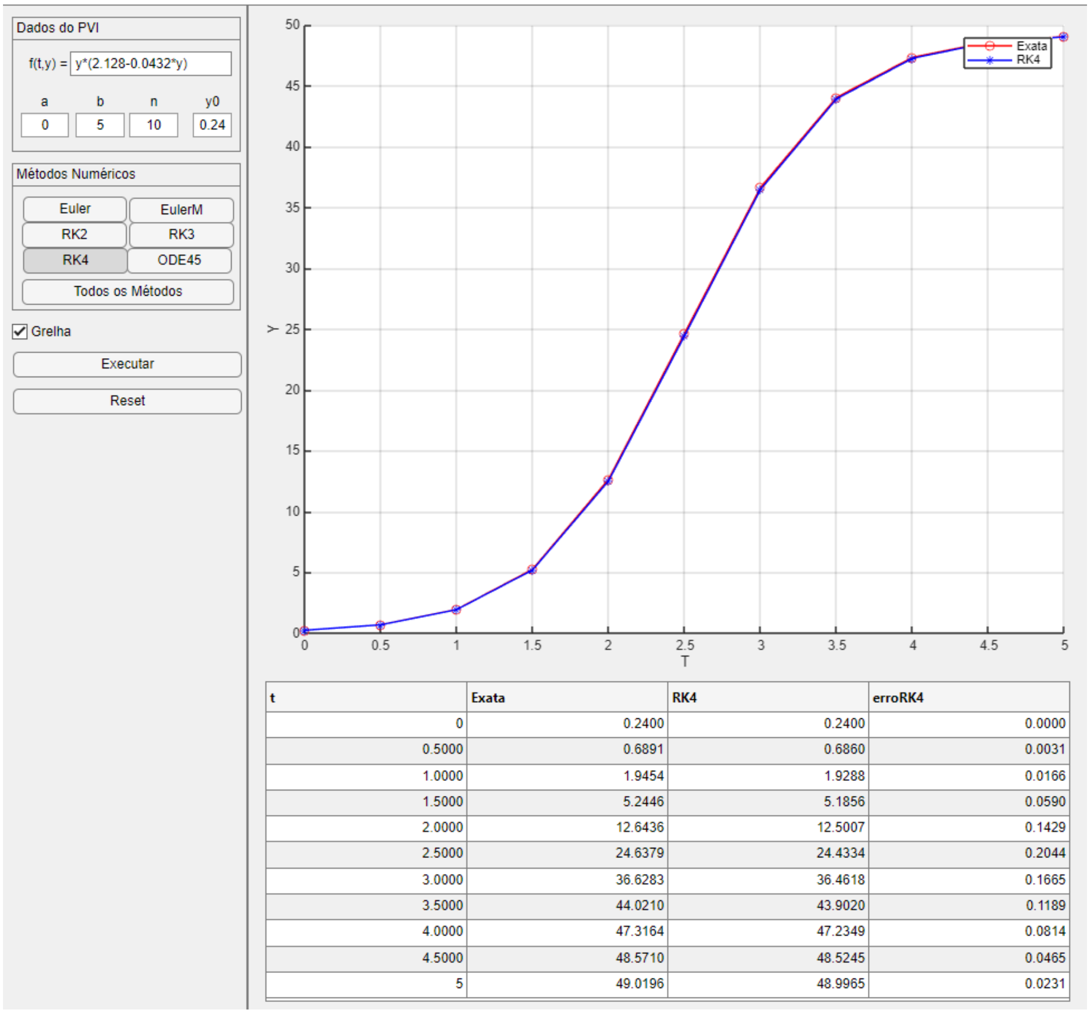


Figura 9.10: Resolução do Problema do Livro 2a

$t(days)$	1	2	3	4	5
$A(observed)$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(approximated)$	1.93	12.50	36.46	47.23	49.00
A(Valor Exato)	1.94	12.64	36.63	47.32	49.02

Figura 9.11: Resolução do Problema do Livro 2b



t	Exata	RK4	erroRK4
0	0.2400	0.2400	0.0000
0.5000	0.6891	0.6860	0.0031
1.0000	1.9454	1.9288	0.0166
1.5000	5.2446	5.1856	0.0590
2.0000	12.6436	12.5007	0.1429
2.5000	24.6379	24.4334	0.2044
3.0000	36.6283	36.4618	0.1665
3.5000	44.0210	43.9020	0.1189
4.0000	47.3164	47.2349	0.0814
4.5000	48.5710	48.5245	0.0465
5	49.0196	48.9965	0.0231

Figura 9.12: Resolução do Problema do Livro 2c

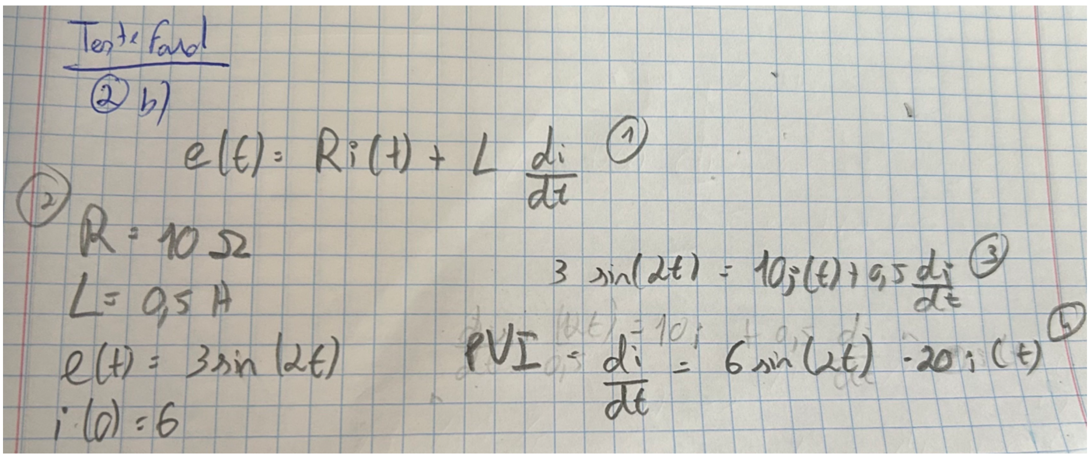


Figura 9.13: Resolução do Exercício Farol Extra 1

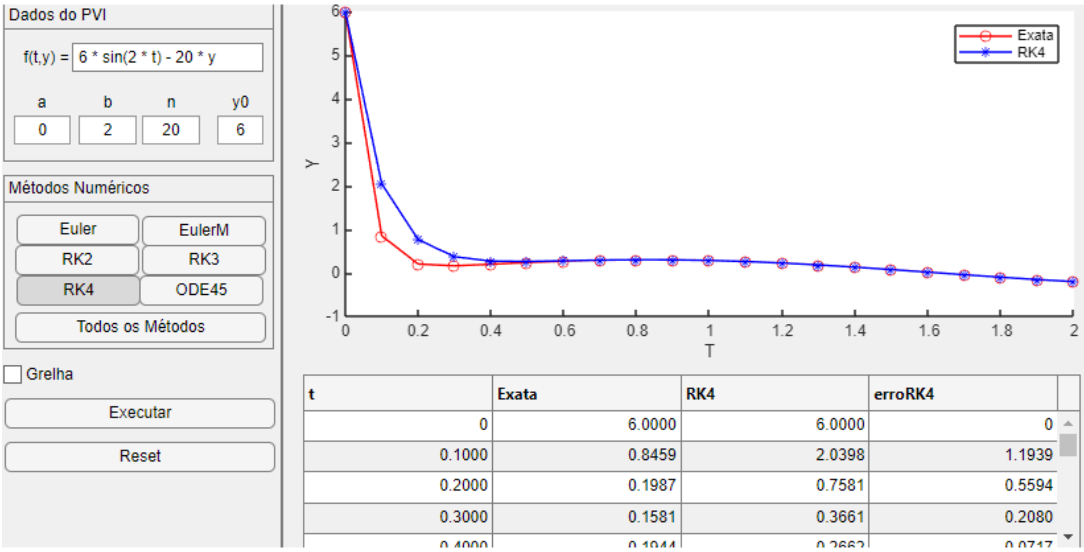


Figura 9.14: Resolução do Exercício Farol Extra 2

t	Exata	RK4	erroRK4
0	6	6	0
0.1	0.845931363	2.039833616	1.193902253
0.2	0.198748429	0.758123481	0.559375052
0.3	0.158146806	0.366115348	0.207968542
0.4	0.194404548	0.266153349	0.071748801
0.5	0.234167041	0.257794654	0.023627613
0.6	0.266117239	0.273229834	0.007112594
0.7	0.287664325	0.289129313	0.001464987
0.8	0.297771042	0.297287822	0.000483219
0.9	0.296010341	0.294856306	0.001154036
1	0.282449154	0.281090432	0.001358722
1.1	0.25762768	0.256258582	0.001369098
1.2	0.222535412	0.221257247	0.001278164
1.3	0.178571361	0.177450664	0.001120697
1.4	0.127488233	0.126574875	0.000913358
1.5	0.071322552	0.070654677	0.000667875
1.6	0.012313466	0.011918276	0.000395189
1.7	-0.04718652	-0.047293076	0.000106556
1.8	-0.104805327	-0.104618938	0.000186389
1.9	-0.158245877	-0.157773952	0.000471925
2	-0.205377663	-0.20463901	0.000738654

Figura 9.15: Resolução do Exercício Farol Extra 3

10 Conclusão

A realização desta atividade permitiu aprofundar os conhecimentos sobre métodos numéricos para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), com especial foco nos métodos de Euler, Euler melhorado, Runge-Kutta de ordens 2, 3 e 4, e o método `ode45` do Matlab.

Foi possível compreender não só a fundamentação teórica destes métodos, mas também as suas implementações práticas, as diferenças em termos de precisão, estabilidade e custo computacional, bem como as situações em que cada um se revela mais vantajoso.

Através da comparação entre os resultados obtidos por diferentes métodos, ficou evidente a importância de se considerar o equilíbrio entre a complexidade do método e a precisão desejada, bem como o controlo do erro associado à discretização.

Conclui-se que os métodos de Runge-Kutta, em especial o de quarta ordem e o método `ode45`, se destacam pela sua elevada precisão em problemas com soluções suaves, sendo adequados para a maioria das aplicações práticas. No entanto, métodos mais simples como o de Euler continuam a ser úteis em contextos onde a simplicidade e o baixo custo computacional são prioritários.

Em suma, esta atividade contribuiu significativamente para a consolidação de competências na área da análise numérica, nomeadamente na aplicação prática de técnicas fundamentais para a simulação de sistemas dinâmicos descritos por EDOs.

Referências bibliográficas

[1] Wikipédia, a enciclopédia livre. (2025) Método de euler. Consultado em 4 de abril de 2025. [Online]. Available: https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler

[2] ——. (2025) Método de heun. Consultado em 4 de abril de 2025. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Heun%27s_method

[3] ——. (2025) Método de runge–kutta. Consultado em 4 de abril de 2025. [Online]. Available: https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta

[4] Wikipédia, the free encyclopedia. (2025) Ordinary differential equation solver (ode45). Consultado em 4 de abril de 2025. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/ODE45

[5] MathWorks. (2025) ode45 - solve nonstiff differential equations — medium order method. Consultado em 4 de abril de 2025. [Online]. Available: https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html

[6] C. Álves. (2025) Capítulo 5 - equações diferenciais ordinárias. Consultado em 4 de abril de 2025. [Online]. Available: https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~calves/MC/cap5.html

[7] F. Coutinho and R. Silva, Pascoal e Rodrigues, "Como escrever um bom relatório em latex," ISEC/IPC, Coimbra, Tech. Rep., Nov. 2022.

Instituto Superior
de Engenharia
Politécnico de Coimbra