

Grau en Enginyeria Informàtica  
Facultat d'Informàtica de Barcelona

## **Matemàtiques 1**

### **Part II: Àlgebra Lineal**

Exercicis i problemes

Curs 2023-2024

Departament de Matemàtiques  
Universitat Politècnica de Catalunya

Els problemes d'aquesta col·lecció han estat recopilats per Anna de Mier i Montserrat Maureso el curs 2011/2012. En part provenen de reculls de problemes elaborats pels membres del Departament de Matemàtica Aplicada 2 per a les diverses assignatures que s'han impartit al llarg dels anys. D'altres provenen de la bibliografia de l'assignatura o d'altres llibres, i n'hi ha que són de nova collita. Aprofitem per fer constar i agrair la tasca del becari docent Gabriel Bernardino en la redacció de les solucions. El curs 2018/2019 s'ha fet una revisió general.

Anna de Mier

Mercè Mora

Febrer 2019

# Índex

<b>5</b>	<b>Matrius, sistemes i determinants</b>	<b>1</b>
5.1	Àlgebra de matrius .. .. .	1
5.2	Sistemes d'equacions .. .. .	4
5.3	Determinants .. .. .	6
<b>6</b>	<b>Espais vectorials</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Aplicacions lineals</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Diagonalització</b>	<b>23</b>
	<b>Exercicis de repàs i consolidació</b>	<b>26</b>



# Matrius, sistemes i determinants

Si no especifiquem el contrari, el cos en el que treballem és  $\mathbb{R}$ .

## 5.1 Àlgebra de matrius

**5.1** Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu: 1)  $3A$ ; 2)  $3A - B$ ; 3)  $AB$ ; 4)  $BA$ ; 5)  $C(3A - 2B)$ .

**5.2** Calculeu els productes  $(1 \ 2 \ -3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ -3)$ .

**5.3** Donades  $A$  i  $B$  matrius tals que  $AB$  és una matriu quadrada, proveu que el producte  $BA$  està definit.

**5.4** Per a les matrius  $A$  i  $B$  següents, doneu els elements  $c_{13}$  i  $c_{22}$  de la matriu  $C = AB$  sense calcular tots els elements de  $C$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**5.5** Una empresa confecciona bosses i maletes en dues fàbriques diferents. La taula adjunta dóna la informació del cost total de fabricació en milers d'euros de cada producte a cada lloc:

	Fàbrica 1	Fàbrica 2
Bosses	135	150
Maletes	627	681

Responen les preguntes següents mitjançant operacions matricials.

- 1) Sabent que el cost de personal representa  $2/3$  del cost total, trobeu la matriu que representa el cost de personal de cada producte en cada fàbrica.
- 2) Trobeu la matriu que representa els costos de material de cada producte en cada fàbrica, suposant que, a més dels costos de personal i de materials, hi ha un cost de 20.000 euros per cada producte a cada fàbrica.

**5.6** En aquest exercici es vol trobar una fórmula per calcular les potències d'una matriu diagonal.

- a) Calculeu  $A^2$ ,  $A^3$  i  $A^5$ , sent

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) Quina matriu creieu que és  $A^{32}$ ?
- c) Sigui  $D$  una matriu  $n \times n$  diagonal que té per elements a la diagonal  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Conjectureu quina és la matriu  $D^r$ , per a  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 1$ , i proveu la conjectura per inducció.

**5.7** Doneu un exemple de dues matrius  $A$  i  $B$  de tipus  $2 \times 2$  tals que  $(AB)^t \neq A^t B^t$ .

**5.8** Siguin  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculeu  $(AB)^t$  i  $B^t A^t$ . Observeu que, encara que  $A$  i  $B$  són matrius simètriques, el seu producte no ho és.

**5.9** Siguin  $A$  i  $B$  dues matrius simètriques del mateix tipus. Proveu que  $AB$  és una matriu simètrica si, i només si,  $A$  i  $B$  commuten.

**5.10** Siguin  $I$  la matriu identitat i  $O$  la matriu nul·la de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Trobeu matrius  $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tals

- 1)  $A^2 = I$  i  $A \neq I, -I$ ;
- 2)  $B^2 = O$  i  $B \neq O$ ;
- 3)  $C^2 = C$  i  $C \neq I, O$ ;
- 4)  $DE = O$  però  $E \neq D$  i  $ED \neq O$ .

**5.11** Esbrineu si les igualtats següents les satisfan totes les matrius  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En cas negatiu, doneu alguna condició sobre  $A$  i  $B$  per tal que es satisfacin.

- 1)  $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ ;
- 2)  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ .

**5.12** Siguin  $A$  i  $B$  matrius quadrades del mateix tipus. Direm que  $A$  és *semblant* a  $B$  si existeix una matriu invertible  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ . Si aquest és el cas, proveu:

- 1)  $B$  és semblant a  $A$ . En general direm que  $A$  i  $B$  són semblants.
- 2) *Ser semblants* és una relació d'equivalència.
- 3)  $A$  és invertible si, i només si,  $B$  és invertible.
- 4)  $A^t$  és semblant a  $B^t$ .
- 5) Si  $A^n = \mathbf{0}$  i  $B$  és semblant a  $A$ , aleshores  $B^n = \mathbf{0}$ .

**5.13** Trobeu una matriu escalonada per files equivalent a cadascuna de les matrius següents. Doneu el rang de cada matriu.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**5.14** Trobeu la inversa de les matrius elementals següents.

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**5.15** Trobeu, si existeix, la inversa de cadascuna de les matrius següents, seguint el mètode de Gauss-Jordan.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- 4)  $A = (a_{i,j})_{4 \times 4}$ , tal que  $a_{i,j} = 1$  si  $|i - j| \leq 1$ , i  $a_{i,j} = 0$  altrament.
- 5)  $A = (a_{i,j})_{4 \times 4}$ , tal que  $a_{i,j} = 2^{j-1}$  si  $i \geq j$ , i  $a_{i,j} = 0$  altrament.
- 6)  $A = (a_{i,j})_{4 \times 4}$ , tal que  $a_{i,i} = k$ ,  $a_{i,j} = 1$  si  $i - j = 1$ , i  $a_{i,j} = 0$  altrament.

## 5.2 Sistemes d'equacions

**5.16** Quines de les equacions següents són lineals en  $x$ ,  $y$  i  $z$ ?

- 1)  $x + 3xy + 2z = 2$ ;                      3)  $x - 4y + 3z^{1/2} = 0$ ;                      5)  $z + x - y^{-1} + 4 = 0$ ;  
 2)  $y + x + \sqrt{2}z = e^2$ ;                      4)  $y = z \sin \frac{\pi}{4} - 2y + 3$ ;                      6)  $x = z$ .

**5.17** Trobeu un sistema d'equacions lineals que correspongui a cadascuna de les matrius ampliades següents.

1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

2)  $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

**5.18** Responen raonadament les preguntes següents

- 1) Quin és el rang de la matriu associada a un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és compatible indeterminat?
- 2) Quantes equacions com a mínim són necessàries per tenir un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquest sistema?
- 3) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?
- 4) És possible que un sistema lineal amb menys equacions que incògnites sigui incompatible?
- 5) Inventeu un sistema compatible determinat, un sistema compatible indeterminat i un sistema incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

**5.19** Resoleu els sistemes lineals següents amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$ . Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

1)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$       2)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$       3)  $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$



**5.20** Resoleu el sistemes lineals següents. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \\ 3y - 2z = -1 \end{array} \right. & 3) \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{array} \right. \\
 2) \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 5z = 4 \\ x + 2y - z = -3 \\ 2y + 2z = 1 \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{array} \right.
 \end{array}$$

**5.21** Resoleu el sistemes lineals homogenis següents. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x + 7y + z = 0 \end{array} \right. & 3) \left\{ \begin{array}{l} x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0 \end{array} \right. \\
 2) \left\{ \begin{array}{l} 2x - 4y + z + w = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ -2y - 2z - w = 0 \\ x + 3y + w = 0 \\ x - 2y - z + w = 0 \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

**5.22** Discutiu els sistemes següents segons els valors dels paràmetres a  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \\ bx + y + z = b^2 \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{array} \right. \\
 2) \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3b \end{array} \right. & 5) \left\{ \begin{array}{l} x + y = k \\ ax + by = k^2 \\ a^2x + b^2y = k^3 \end{array} \right. \\
 3) \left\{ \begin{array}{l} ax + y - z + t - u = 0 \\ x + ay + z - t + u = 0 \\ -x + y + az + t - u = 0 \\ x - y + z + at + u = 0 \\ -x + y - z + t + au = 0 \end{array} \right. &
 \end{array}$$

### 5.3 Determinants

**5.23** Suposant que  $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 5$ , calculeu els determinants següents.

$$1) \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ e & f & g & h \\ m & n & o & p \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} -a & -b & -c & -d \\ 2e & 2f & 2g & 2h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ 4m & 4n & 4o & 4p \end{vmatrix}$$

**5.24** Trobeu els valors de  $\lambda$  per als quals les matrius següents tenen determinant 0.

$$1) \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

**5.25** Calculeu els determinants següents.

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

**5.26** Siguin  $A$  i  $B$  matrius quadrades d'ordre 3 tals que  $\det(A) = 10$  i  $\det(B) = 12$ . Calculeu

$$1) \det(AB), \quad 2) \det(A^4), \quad 3) \det(2B), \quad 4) \det(A^t), \quad 5) \det(A^{-1}).$$

**5.27** Comproveu que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.$$

# 6

## Espais vectorials

Un *espai vectorial sobre un cos*  $\mathbb{K}$  consisteix en

- 1) un conjunt no buit  $E$ ,
- 2) una operació interna  $E \times E \rightarrow E$  anomenada suma i denotada per  $+$ , i
- 3) una aplicació  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  anomenada producte per escalars i denotada  $\cdot$ ,

de manera que es satisfan les 8 propietats següents per a tot  $u, v, w \in E$  i tot  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ :

- e1)  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (*associativa*);
- e2)  $u + v = v + u$  (*commutativa*);
- e3) existeix un únic element  $0_E \in E$  tal que  $u + 0_E = u$  (*element neutre*);
- e4) per cada  $u \in E$  existeix un únic  $u' \in E$  tal que  $u + u' = 0_E$  (*element oposat*);
- e5)  $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ ;
- e6)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ ;
- e7)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ ;
- e8)  $1u = u$ , on 1 és el neutre del producte de  $\mathbb{K}$ .

(Nota: habitualment el cos  $\mathbb{K}$  serà  $\mathbb{R}$ , però podríem considerar altres cossos, com ara  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{Z}_p$ .)

### Exercicis

**6.1** Siguin  $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$  i  $w = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$  vectors de  $\mathbb{R}^3$ . Calculeu

- 1)  $u - v$ ;    2)  $5v + 3w$ ;    3)  $5(v + 3w)$ ;    4)  $(2w - u) - 3(2v + u)$ .

**6.2** Dibuixeu en el pla els vectors següents de  $\mathbb{R}^2$ .

$$1) v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad 2) v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad 3) v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad 4) v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**6.3** Per als vectors de l'exercici anterior, calculeu  $v_1 + v_2$ ,  $v_1 - v_3$  i  $v_2 - v_4$  gràficament i comproveu les vostres respostes algebraicament.

**6.4** Siguin  $u, v, w$  elements d'un espai vectorial i siguin  $\alpha, \beta, \gamma$  elements del cos d'escalars amb  $\alpha$  diferent de 0. Suposem que es compleix la relació  $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ . Escriviu els vectors  $u$ ,  $u - v$  i  $u + \alpha^{-1}\beta v$  en funció de  $v$  i  $w$ .

**6.5** Sigui  $P(\mathbb{R})_p$  el conjunt de tots els polinomis amb coeficients a  $\mathbb{R}$  i on totes les potències de  $x$  tenen grau parell. Esbrineu si  $P(\mathbb{R})_p$  és un espai vectorial amb les operacions de suma i producte per escalar habituals. (Considerem que el polinomi 0 té grau 0.)

**6.6** Considereu el conjunt  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  format per totes les funcions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Donades dues funcions  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definim les funcions  $f + g$  i  $\lambda f$  com

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Demostreu que  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  amb aquestes operacions és un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial.

**6.7** Esbrineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials sobre  $\mathbb{R}$ . (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + \pi y = 0 \right\}, & E_5 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0, x - t = 0 \right\}, \\ E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + z = \pi \right\}, & E_6 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 = 0 \right\}, \\ E_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0 \right\}, & E_7 &= \left\{ \begin{pmatrix} a + b \\ a - 2b \\ c \\ 2a + c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \\ E_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \right\}, & E_8 &= \left\{ \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ b + a \\ 2 + a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

**6.8** Denotem per  $P(\mathbb{R})$  l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals i variable  $x$ . Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de  $P(\mathbb{R})$ . (Justifiqueu les

respostes.)

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P(\mathbb{R}) : a_2 = a_0\} \\
 F_2 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau } 3\} \\
 F_3 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau parell}\} \\
 F_4 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \\
 F_5 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\} \\
 F_6 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p'(5) = 0\}
 \end{aligned}$$

**6.9** Considerem  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  l'espai vectorial de les matrius  $n \times m$  amb coeficients reals. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ . (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\
 M_2 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : A = A^t\} \\
 M_3 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : a_{1i} = 0 \ \forall i \in [m]\} \\
 M_4 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : a_{1i} = 1 \ \forall i \in [m]\} \\
 M_5 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : AB = 0\} \text{ (on } B \text{ és una matriu fixa)}
 \end{aligned}$$

**6.10** Considerem el conjunt  $T \subset \mathbb{R}^4$ . Proveu que el vector  $u$  es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt almenys de dues maneres diferents.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**6.11** Per a quins valors del paràmetre  $a$  el vector  $u$  de  $\mathbb{R}$  es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt  $T$ ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**6.12** Doneu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  per als quals la matriu  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$  és combinació lineal de  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

**6.13** Donats els vectors  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  i  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^3$ , trobeu quina condició han de complir les components d'un vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  per a que pertanyi al subespai generat per  $\{u, v\}$ .

**6.14** Doneu la forma genèrica dels polinomis de  $P(\mathbb{R})$  que pertanyen al subespai vectorial generat pel conjunt  $\{1+x, x^2\}$ .

**6.15** Siguin  $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$  i  $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$  subespais de  $\mathbb{R}^3$ .

1) Demostreu que  $F = G$ .

2) Sigui  $e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ . Proveu que  $e \in F$  i expresseu-lo com a combinació lineal dels conjunts de vectors que generen  $F$ .

**6.16** Esbrineu si els conjunts de vectors següents són linealment independents a l'espai vectorial que s'indica.

1)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$  a  $\mathbb{R}^3$ ;

4)  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$  a  $\mathbb{R}^4$ ;

2)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  a  $\mathbb{R}^3$ ;

5)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$  a  $\mathbb{R}^5$ .

3)  $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  a  $\mathbb{R}^3$ ;

**6.17** A l'espai vectorial  $\mathbb{R}^4$  considerem els vectors  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}$ . Determineu  $a$  i  $b$

per tal que siguin un conjunt linealment dependent, i en aquest cas expresseu el vector  $0_{\mathbb{R}^4}$  com a combinació lineal no nul·la dels vectors.

**6.18** Siguin  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial i  $u, v, w$  tres vectors qualssevol d' $E$ . Demostreu que el conjunt  $\{u-v, v-w, w-u\}$  és linealment dependent.

**6.19** Demostreu que les matrius  $A$ ,  $B$  i  $C$  següents formen un conjunt linealment independent a  $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proveu que per a qualsevol valor de  $\lambda$  la matriu següent és combinació lineal d' $A$  i  $B$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 2-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**6.20** Demostreu que els polinomis  $-1 + 2x + x^2$ ,  $1 + x^2$  i  $x + x^2$  són linealment dependents a l'espai  $P(\mathbb{R})$ .

**6.21** Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  és un conjunt de vectors linealment dependent d'un espai vectorial, és cert que qualsevol  $e_i$  es pot escriure com a combinació lineal dels altres vectors del conjunt? Demostreu-ho o doneu un contraexemple.

**6.22** Esbrineu si les afirmacions següents sobre conjunts de vectors en un espai vectorial  $E$  són certes, demostrant-ho si és el cas i donant-ne un contraexemple altrament.

- 1) Si  $\{e_1, \dots, e_r\}$  és un conjunt linealment independent i  $v \neq e_i$  per a tot  $i$ , aleshores el conjunt  $\{e_1, \dots, e_r, v\}$  és linealment independent.
- 2) Si  $\{e_1, \dots, e_r\}$  és un conjunt linealment independent i  $v \notin \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ , aleshores  $\{e_1, \dots, e_r, v\}$  és linealment independent.
- 3) Si  $\{e_1, \dots, e_r\}$  és un conjunt generador de  $E$  i  $v \neq e_i$  per a tot  $i$ , aleshores  $\{e_1, \dots, e_r, v\}$  és un conjunt generador de  $E$ .
- 4) Si  $\{e_1, \dots, e_r\}$  és un conjunt generador de  $E$  i  $e_r \in \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$ , aleshores  $\{e_1, \dots, e_{r-1}\}$  és un conjunt generador de  $E$ .
- 5) Tot conjunt amb un sol vector és linealment independent.

**6.23** Considereu el conjunt de vectors  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

- 1) Demostreu que formen una base de  $\mathbb{R}^4$ .

- 2) Trobeu les coordenades del vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  en aquesta base.

- 3) Trobeu les coordenades d'un vector arbitrari  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  en aquesta base.

**6.24** Sigui  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Comproveu que és una base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Doneu les coordenades d' $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  en la base  $B$ .

**6.25** Sigui  $P_3(\mathbb{R})$  l'espai vectorial dels polinomis de grau com a molt 3. Demostreu que els polinomis  $1+x$ ,  $-1+x$ ,  $1+x^2$  i  $1-x+x^3$  formen una base de  $P_3(\mathbb{R})$  i doneu les coordenades del polinomi  $-5+6x+3x^2+x^3$  en aquesta base.

**6.26** Considereu el subespai  $F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  a  $\mathbb{R}^3$ . Trobeu una base de  $F$  i la condició (en forma de sistema d'equacions lineals homogènies) que ha de satisfer un vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  per pertànyer a  $F$ .

**6.27** Considereu els subespais següents de  $\mathbb{R}^4$ .

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Proveu que  $F = G$  i que els conjunts de generadors donats són bases. Esbrineu si algun dels vectors  $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  pertany a  $F$  i, si és el cas, doneu-ne les coordenades en les dues bases.

**6.28** Sigui  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una base d'un espai vectorial  $E$ . Demostreu que el conjunt  $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$  també és una base d' $E$ .

**6.29** Trobeu una base del subespai  $E$  de  $\mathbb{R}^5$  i completeu-la a una base de  $\mathbb{R}^5$ .

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_3 = x_1 + x_2 - x_4, x_5 = x_2 - x_1 \right\}.$$

**6.30** Considereu els vectors de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que formen un conjunt linealment independent i trobeu un vector que juntament amb aquests tres formi una base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**6.31** Per a quins valors de  $\lambda$  els vectors  $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$  generen un subespai vectorial de

$\mathbb{R}^4$  de dimensió 2?



**6.32** Considerem el subespai  $F_a = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , amb  $a \in \mathbb{R}$ .

- 1) Trobeu el valor de  $a$  per al qual  $F_a$  és de dimensió 2.
- 2) Sigui  $a = a_0$  el valor de  $a$  obtingut a l'apartat anterior. Trobeu les condicions, en la forma d'un sistema d'equacions lineals homogeni en  $x, y, z, t$ , per tal que la matriu  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  sigui de  $F_{a_0}$ .
- 3) Raoneu que  $B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$  i  $B' = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$  són bases de  $F_{a_0}$ .

**6.33** Doneu una base i la dimensió dels espais  $E$ ,  $F$  i  $E \cap F$  en els casos següents:

- 1)  $E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z \}$  i  $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, 3x + y + z = 0 \}$  com a subespais de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2)  $E = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$  i  $F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$  com a subespais de  $\mathbb{R}^3$ .
- 3)  $E = \{ \begin{pmatrix} a \\ a + 3b \\ 2a - b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \}$  i  $F = \{ \begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 0 \\ 3b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \}$  com a subespais de  $\mathbb{R}^4$ .
- 4)  $E = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b = c \}$  i  $F = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$  com a subespais de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**6.34** Considereu els subespais  $E$  de l'exercici anterior (exercici 6.33). Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai vectorial on es troben.

**6.35** Considereu la base  $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) Doneu la matriu  $P_B^C$  de canvi de base de la base canònica de  $\mathbb{R}^3$  a  $B$ .
- 2) Sigui ara  $B' = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$  una altra base de  $\mathbb{R}^3$ . Doneu la matriu  $P_B^{B'}$  de canvi de base de  $B'$  a  $B$ .

**6.36** Considereu l'espai vectorial  $P_2(\mathbb{R})$  dels polinomis de grau menor o igual a 2 i amb coeficients reals.

- 1) Proveu que  $B = \{-1 + 2x + 3x^2, x - x^2, x - 2x^2\}$  és una base de  $P_2(\mathbb{R})$  i calculeu la matriu de canvi de base de base canònica a base  $B$ .
- 2) Trobeu les coordenades de  $p(x) = 3 - x + 2x^2$  en la base  $B$ .

**6.37** Siguin  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  i  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) Comproveu que efectivament són bases.
- 2) Doneu la matriu del canvi de la base  $B$  a la base  $B'$  ( $P_{B'}^B$ ) i la matriu del canvi de  $B'$  a  $B$  ( $P_B^{B'}$ ).
- 3) Calculeu les coordenades en les bases  $B$  i  $B'$  del vector que en base canònica té coordenades  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**6.38** Siguin

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dues bases de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Doneu les matrius de canvi de base  $P_{B'}^B$  i  $P_B^{B'}$ .

**6.39** Considereu els conjunts  $B$  i  $B'$  i comproveu que són bases de  $\mathbb{R}^3$ .

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sigui  $u$  un vector de  $\mathbb{R}^3$  que en la base  $B$  té coordenades  $u_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  i en la base  $B'$ ,  $u_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .

Expresseu  $x, y$  i  $z$  en funció de  $x', y'$  i  $z'$ , i viceversa.

**6.40** Sigui  $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$  una base de  $P_2(\mathbb{R})$ , l'espai dels polinomis de grau  $\leq 2$ . Considerem els polinomis  $u(x) = x^2 + x + 2$ ,  $v(x) = 2x^2 + 3$  i  $w(x) = x^2 + x$ . Si en la base  $B$  les coordenades de  $u(x)$ ,  $v(x)$  i  $w(x)$  són

$$u(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w(x)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

respectivament, doneu les coordenades dels vectors de  $B$  en base canònica  $\{x^2, x, 1\}$ .

# 7

## Aplicacions lineals

### Exercicis

**7.1** Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

- 1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$ ;      4)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ x + y \end{pmatrix}$ ;
- 2)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 y^2$ ;
- 3)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 7 \\ 2y \\ x + y + z \end{pmatrix}$ ;      5)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ x \end{pmatrix}$ .

**7.2** Determineu quines de les següents aplicacions  $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  són lineals:

- 1)  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$ ;
- 2)  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$ ;
- 3)  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2$ .

**7.3** Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

- 1)  $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ ;
- 2)  $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ , on  $f(A) = AB$ , essent  $B \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  una matriu fixada;
- 3)  $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $f(A) = \det(A)$ .

**7.4** Sigui  $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  l'aplicació lineal definida per:  $f(1) = 1 + x$ ,  $f(x) = 3 - x^2$  i  $f(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$ . Quina és la imatge del polinomi  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ ? Calculeu  $f(2 - 2x + 3x^2)$ .

**7.5** Estudieu si existeix algun endomorfisme  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(u_i) = v_i, i = 1, 2, 3$ , on:

$$1) \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$2) \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ i } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$3) \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ i } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**7.6** Siguin  $E$  i  $F$  dos espais vectorials,  $f: E \rightarrow F$  una aplicació lineal, i  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectors d' $E$ . Discutiu les afirmacions següents: demostreu les certes i doneu contraexemples per a les falses.

- 1) Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  són linealment independents, aleshores  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  són linealment independents.
- 2) Si  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  són linealment independents, aleshores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  són linealment independents.
- 3) Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  és un conjunt de generadors d' $E$ , aleshores  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  és un conjunt de generadors de  $F$ .
- 4) Si  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  és un conjunt de generadors de  $F$ , aleshores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  és un conjunt de generadors d' $E$ .
- 5) Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  és un conjunt de generadors d' $E$ , aleshores  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  és un conjunt de generadors de  $\text{Im } f$ .

**7.7** Per als següents subespais  $E$  i  $F$  de  $\mathbb{R}^4$ , esbrineu si existeix una aplicació lineal  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f(u) = 0$  per a tot  $u \in E$  i  $f(v) = v$  per a tot  $v \in F$ .

$$1) \ E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ i } F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$2) \ E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ i } F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**7.8** Doneu la matriu associada a les aplicacions lineals següents en les bases canòniques i calculeu la dimensió del nucli i de la imatge:

1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $f(x) = 3x$ ;

2)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix}$ ;

3)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$ ;

4)  $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ c+d \\ 2a-b+c-d \end{pmatrix}$ ;

5)  $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ , on  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_1 - a_0) + (2a_1 - a_2)x + (3a_2 - 2a_1 + a_0)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2)x^3$ .

**7.9** Sigui  $f$  un endomorfisme de  $\mathbb{R}^3$  amb matriu associada

$$\begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}.$$

Determineu la dimensió de la imatge segons els valors de  $m$ .

**7.10** Sigui  $E$  un espai vectorial i  $B = \{u, v, w, t\}$  una base d'aquest. Sigui  $f$  un endomorfisme d' $E$  tal que:

$$f(u) = u + 2w, \quad f(v) = v + w, \quad f(w) = 2u + v + w, \quad f(t) = 2u + 2v + 4w.$$

Escriviu la matriu d' $f$  en la base  $B$ , i trobeu una base i la dimensió de la imatge d' $f$ .

**7.11** Trobeu el nucli de l'aplicació lineal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$ , calculeu  $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i les antiimatges, si en tenen, dels vectors  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**7.12** Determineu si les aplicacions lineals següents són o no bijectives usant la informació que es dona:

1)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , amb  $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ ;

3)  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , amb  $n < m$ ;

2)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , amb  $\dim(\text{Im } f) = n - 1$ ;

4)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , amb  $\text{Im } f = \mathbb{R}^n$ .

**7.13** Per a cadascuna de les aplicacions lineals següents, doneu la matriu associada a l'aplicació en les bases canòniques; doneu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de l'aplicació; digueu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva, bijectiva o cap de les tres; i determineu l'aplicació inversa, en el cas que existeixi:

1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $f(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fix;

2)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + 7y \end{pmatrix}$ ;

3)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z + 2t \\ y - z + t \\ x - 2y + 2z \end{pmatrix}$ ;

4)  $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ , on  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)x + (a_2 - a_0)x^2$ ;

5)  $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ , on  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2$ ;

6)  $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on  $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d \\ b + c \end{pmatrix}$ ;

7)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y & y - z \\ z - y & x - z \end{pmatrix}$ .

**7.14** Sigui  $B$  una matriu invertible  $n \times n$ . Demostreu que l'aplicació  $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  definida per  $f(A) = AB$  és un endomorfisme bijectiu.

**7.15** Per a les aplicacions lineals següents  $f_1$  i  $f_2$ , digueu si l'aplicació composició  $f = f_2 \circ f_1$  és injectiva, exhaustiva, bijectiva.

1)  $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on  $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x + y \\ x + 2z - y \end{pmatrix}$  i  $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ y + 4z \end{pmatrix}$ ;

2)  $f_1: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  i  $f_2: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ , on  $f_1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2 + a_3x + a_0x^2$  i  $f_2(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 + a_2) + (a_0 + a_2)x + (a_0 + a_1)x^2$ ;

3)  $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ y \end{pmatrix}$  i  $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ x + y + z \\ y + x \end{pmatrix}$ .

**7.16** Doneu les matrius associades a les aplicacions lineals següents respecte de les bases canòniques:

1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  i  $f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ;

- 2)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  i  $f \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;
- 3)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  i  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**7.17** Sigui  $f$  un endomorfisme de  $P_2(\mathbb{R})$  donat per  $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2$ . Doneu la matriu d' $f$  en la base  $B = \{1 + x^2, -1 + 2x + x^2, 2 + x + x^2\}$ .

**7.18** Sigui  $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$  una base d'un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial  $E$  i sigui  $B_F = \{v_1, v_2\}$  una base d'un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial  $F$ . Considerem l'aplicació lineal  $f: E \rightarrow F$  definida per

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x - 2z)v_1 + (y + z)v_2.$$

Trobeu la matriu associada a  $f$  en les bases:

- 1)  $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$  i  $B_F = \{v_1, v_2\}$ .
- 2)  $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$  i  $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$ .
- 3)  $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$  i  $B_F = \{v_1, v_2\}$ .
- 4)  $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$  i  $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$ .

**7.19** Considerem l'endomorfisme  $f_N: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  definit per  $f_N(A) = NA$  on

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Trobeu la matriu associada a  $f_N$  en la base canònica de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 2) Calculeu  $\ker f_N$  i  $\text{Im } f_N$ .
- 3) Trobeu la matriu associada a  $f_N$  en la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**7.20** Sigui  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  la matriu associada a un endomorfisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  en la base canònica.

- 1) Trobeu els subespais  $\text{Ker } f$  i  $\text{Im } f$ .
- 2) Trobeu una base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  per a la qual la matriu associada  $f$  sigui  $M_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**7.21** Siguin  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  i  $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vectors de  $\mathbb{R}^4$  i  $E$  el subespai generat per  $B_E = \{u_1, u_2\}$ .

Siguin  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  i  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vectors de  $\mathbb{R}^3$  i  $F$  el subespai generat per  $B_F = \{v_1, v_2\}$ . Definim  $f: E \rightarrow F$  tal que  $f(x_1u_1 + x_2u_2) = (x_1 - x_2)v_1 + (x_1 + x_2)v_2$ .

1) Trobeu la matriu d' $f$  en les bases  $B_E$  i  $B_F$ .

2) És  $f$  injectiva? És exhaustiva?

3) Siguin  $B'_E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  i  $B'_F = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ . Proveu que són bases d' $E$  i  $F$  respectivament i doneu la matriu d' $f$  en aquestes noves bases.

**7.22** Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 5) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$  |
| 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 6) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ |

Observeu que si les apliquem a un vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  s'obté respectivament

- 1) la reflexió respecte de l'eix  $OX$ ;
- 2) la reflexió respecte de l'eix  $OY$ ;
- 3) la projecció ortogonal sobre l'eix  $OX$ ;
- 4) la projecció ortogonal sobre l'eix  $OY$ ;
- 5) un escalat de factor  $k$ ;
- 6) una rotació en sentit antihorari d'angle  $\alpha$  amb centre l'origen.

**7.23** Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de  $\mathbb{R}^2$  següents:

- 1) una rotació de  $30^\circ$  en sentit antihorari seguida d'una reflexió respecte a l'eix  $OY$ ;
- 2) una projecció ortogonal sobre l'eix  $y$ , seguida d'un escalat de factor  $k = 1/2$ ;
- 3) un escalat de factor  $k = 2$ , seguida d'una rotació de  $45^\circ$  en sentit antihorari seguit d'una reflexió respecte a l'eix  $OY$ .



**7.24** Siguin  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  i  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplicacions lineals. Determineu si  $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$  quan:

- 1)  $f_1$  és la projecció ortogonal sobre l'eix  $OY$  i  $f_2$  és la projecció ortogonal sobre l'eix  $OX$ ;
- 2)  $f_1$  és la rotació en sentit antihorari d'angle  $\theta_1$  i  $f_2$  és la rotació en sentit antihorari d'angle  $\theta_2$ ;
- 3)  $f_1$  és la reflexió respecte l'eix  $OX$  i  $f_2$  és la reflexió respecte l'eix  $OY$ ;
- 4)  $f_1$  és la projecció ortogonal sobre l'eix  $OY$  i  $f_2$  la rotació en sentit antihorari d'angle  $\theta$ .

**7.25** Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 7) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 8) \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
 3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Observeu que si les apliquem a un vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  s'obté respectivament

- 1) la reflexió respecte del pla  $z = 0$ ;
- 2) la reflexió respecte del pla  $y = 0$ ;
- 3) la reflexió respecte del pla  $x = 0$ ;
- 4) la projecció ortogonal sobre el pla  $z = 0$ ;
- 5) la projecció ortogonal sobre el pla  $y = 0$ ;
- 6) la projecció ortogonal sobre el pla  $x = 0$ ;
- 7) una rotació d'angle  $\alpha$  respecte a l'eix  $OZ$  en sentit antihorari si observem el pla  $z = 0$  des del semiplà  $z > 0$ ;
- 8) una rotació d'angle  $\alpha$  respecte a l'eix  $OY$  en sentit antihorari si observem el pla  $y = 0$  des del semiplà  $y > 0$ ;
- 9) una rotació d'angle  $\alpha$  respecte a l'eix  $OX$  en sentit antihorari si observem el pla  $x = 0$  des del semiplà  $x > 0$ .

**7.26** Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de  $\mathbb{R}^3$  següents:

- 1) una reflexió respecte el pla  $x = 0$ , seguida d'una projecció ortogonal sobre el pla  $y = 0$ ;
- 2) una rotació de  $45^\circ$  en sentit antihorari respecte l'eix  $OY$ , seguida d'un escalat de factor  $k = \sqrt{2}$ ;
- 3) una rotació de  $30^\circ$  en sentit antihorari respecte l'eix  $OX$ , seguida d'una rotació de  $30^\circ$  en sentit antihorari respecte l'eix  $OZ$ , seguida d'un escalat de factor  $k = 1/3$ .

**7.27** Siguin  $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  aplicacions lineals. Determineu si  $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$  quan:

- 1)  $f_1$  és un escalat de factor  $k$  i  $f_2$  és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix  $OZ$  d'angle  $\theta$ ;
- 2)  $f_1$  és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix  $OX$  d'angle  $\theta_1$  i  $f_2$  és la rotació en sentit antihorari respecte l'eix  $OZ$  d'angle  $\theta_2$ .

# 8

## Diagonalització

### Exercicis

**8.1** Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els subespais de vectors propis de les matrius següents. Determineu quines són diagonalitzables i doneu, quan sigui possible, una base en la que diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$	5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix},$	8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6 \end{pmatrix},$
2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$	6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$	9) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$
3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$	7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$	
4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$		

**8.2** Sigui  $J$  la matriu de  $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$  formada íntegrament per uns. Trobeu una base de  $\mathbb{R}^5$  que estigui formada per un vector propi de  $J$  de valor propi 5 i per quatre vectors propis de valor propi 0.

**8.3** Trobeu els valors i vectors propis dels endomorfismes següents. En cas que siguin diagonalitzables, doneu una base en què diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

1)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4z \\ 3x - 4y + 12z \\ x - 2y + 5z \end{pmatrix}.$

2)  $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ , on

$$f(a + bx + cx^2) = (5a + 6b + 2c) - (b + 8c)x + (a - 2c)x^2.$$

3)  $f: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ , on

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b + c + d) + 2(b + c + d)x + 3(c + d)x^2 + 4dx^3.$$

**8.4** Trobeu els valors i vectors propis de l'endomorfisme  $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  definit per

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

**8.5** Discuti la diagonalització de les matrius següents sobre  $\mathbb{R}$  en funció dels seus paràmetres:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$                       | 4) $\begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix},$                           | 6) $\begin{pmatrix} 2a-1 & 1-a & 1-a \\ a-1 & 1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & 1 \end{pmatrix},$ |
| 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix},$  |  | 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$                |
| 3) $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ | 5) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$ |  |

**8.6** Sigui  $f$  un endomorfisme d'un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial  $E$  i  $u \in E$  un vector propi de  $f$  de valor propi  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Demostreu que:

- 1)  $-u$  és un vector propi de  $f$  de valor propi  $\lambda$ ;
- 2)  $u$  és un vector propi de  $f^2$  de valor propi  $\lambda^2$ .

**8.7** Sigui  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial i  $f$  un endomorfisme de  $E$ . Demostreu que  $f$  és bijectiu si i només si  $0$  no és valor propi d' $f$ .

**8.8** Demostreu que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  és una matriu triangular superior, amb els elements de la diagonal principal diferents dos a dos, aleshores  $A$  és diagonalitzable.

**8.9** Raoneu si existeix algun endomorfisme  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que verifiqui les condicions que s'especifiquen a continuació. En cas que existeixi, determineu-lo, calculeu el seu polinomi característic i digueu si és o no diagonalitzable.

- 1) Tal que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  són vectors propis de valor propi 1 i  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  és un vector propi de valor propi 0.
- 2) Tal que  $\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 2z = 0 \right\}$  i  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  és un vector propi de valor propi  $-1/2$ .
- 3) Tal que  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  i  $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- 4) Tal que  $\text{Ker } f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  i  $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \right\}$  sigui el subespai vectorial dels vectors propis de valor propi 2.

**8.10** Considereu l'endomorfisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  definit per  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - y \\ x + y + z \\ 2z \end{pmatrix}$ , on  $a$  és un paràmetre real.

- 1) Doneu la dimensió de  $\text{Im } f$  segons els valors de  $a \in \mathbb{R}$ .
- 2) És  $f$  diagonalitzable per a  $a = 3$ ?
- 3) Doneu condicions sobre  $a$  per tal que  $f$  tingui tots els seus valors propis reals.

**8.11** Sigui  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1) Quina relació hi ha entre els valors propis d' $A$  i els d' $A^k$ ? I entre els vectors propis?
- 2) Demostreu que si la matriu  $A$  es pot escriure com  $A = PDP^{-1}$ , on  $P$  és una matriu invertible, aleshores  $A^k = PD^kP^{-1}$ .
- 3) Fent ús de l'apartat anterior, calculeu

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^{100}, \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{2001}, \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{70}.$$

**8.12** Un OVNI surt d'un planeta en el qual tenen el seu origen els vectors  $v_1, v_2, v_3$ . Aquests vectors són utilitzats com base d'un sistema de coordenades de l'univers ( $\mathbb{R}^3$ ). Després d'arribar

al punt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  la nau es deixa portar per una estranya força tal que cada dia la transporta de la situació  $v$  a la  $Av$ , on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) On estarà al cap de 10 dies?
- 2) Arribarà algun dia a la Terra, que està situada al punt  $\begin{pmatrix} -4098 \\ 2049 \\ 4149 \end{pmatrix}$  segons les seves coordenades?

# Exercicis de repàs i consolidació

## Matrius, sistemes i determinants

**B.1** Donades  $A$  i  $B$  matrius diagonals del mateix tipus, proveu que  $AB = BA$ .

**B.2** Siguin  $A$  i  $B$  dues matrius triangulars superiors (inferiors) del mateix tipus. Proveu que  $AB$  és una matriu triangular superior (inferior).

**B.3** Proveu que si  $A$  és una matriu  $m \times n$ , aleshores  $AA^t$  i  $A^tA$  són matrius simètriques.

**B.4** Sigui  $A$  una matriu  $n \times n$  simètrica i tal que  $A^2 = A$ . Proveu que si per algun  $i$  es té  $a_{ii} = 0$ , aleshores tots els elements de la fila  $i$  i tots els elements de la columna  $i$  són zeros.

**B.5** Trobeu el conjunt de les matrius  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tals  $A^2 = I$ .

**B.6** Siguin  $A$ ,  $B$  i  $C$  matrius. Proveu que

- 1) si  $A$  és equivalent per files a  $B$ , aleshores  $B$  és equivalent per files a  $A$ ;
- 2) si  $A$  és equivalent per files a  $B$  i  $B$  és equivalent per files a  $C$ , aleshores  $A$  és equivalent per files a  $C$ .

**B.7** Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té 2 graus de llibertat.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - y + z + 2t + 2u & = & 1 \\ y + z - 2u & = & 1 \\ 2x + z + t & = & 1 \\ x - y + t + 2u & = & 0 \\ 5x + y + 3z + 2t - 2u & = & 3 \end{array} \right.$$

Responen les preguntes següents.

- 1) Quin és el nombre màxim d'equacions independents?
- 2) Esbrineu si la segona equació és combinació lineal de les altres. Feu el mateix per a la quarta.

- 3) Esbrineu si hi ha alguna solució del sistema en la qual  $x = 2\pi$ . El mateix per a  $y = 2\sqrt{3}$ .
- 4) Esbrineu si hi ha alguna solució del sistema en la qual  $x = 0$  i  $y = 2\sqrt{3}$ . El mateix per a  $z = 2\pi$  i  $t = 2\sqrt{3}$ .

**B.8** Sigui  $A$  una matriu i sigui  $B$  una matriu que s'obté d' $A$  multiplicant una fila d' $A$  per una constant  $c$ . Demostreu que  $\det B = c \det A$ .

**B.9** Resoleu el sistema lineal homogeni següent. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1) \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 2 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x - 2y + 2z - 4w = 12 \\ -x + y - z + 2w = -4 \\ -3x + y - 8z - 10w = -29 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ 5x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 6y - z - 4w = 0 \\ -2x - 12y + 5z + 17w = 0 \\ 3x + 18y - z - 6w = 0 \\ 5x + 30y - 6z - 23w = 0 \end{cases}$$

**B.10** Discutiu els sistemes següents, segons els valors a  $\mathbb{R}$  dels paràmetres.

$$1) \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 3x + 2y = a \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (a-1)x - ay = 2 \\ 6ax - (a-2)y = 5-a \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} ax + 2y + 3z + u = 6 \\ x + 3y - z + 2u = b \\ 3x - ay + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z + 3u = 9 \end{cases}$$

## Espais vectorials

**B.11** Considereu l'espai vectorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  definit al problema 6.6. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ . (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = f(2)\} \\ F_2 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = f(2) + 1\} \\ F_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 0\} \\ F_4 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\} \\ F_5 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ és contínua}\} \end{aligned}$$

**B.12** Demostreu que el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals amb  $n$  incògnites és un subespai vectorial de  $\mathbb{R}^n$  si i només si el sistema és homogeni.

**B.13** A l'espai vectorial  $\mathbb{R}^3$  considerem els subespais

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ i } G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Determineu per a quins valors de  $a$  es té  $F = G$ .

**B.14** Siguin  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial i  $u, v, w$  tres vectors que compleixen la relació  $2u + 2v - w = -4u - 5v + w$ . Demostreu que  $\{u, v, w\}$  formen un sistema linealment dependent.

**B.15** Siguin  $E$  un espai vectorial i  $v_1, v_2, v_3$  vectors d' $E$ . Demostreu que les afirmacions següents són equivalents.

- a)  $\{v_1, v_2, v_3\}$  és linealment independent.
- b)  $\{v_1 + v_2, v_2, v_2 + v_3\}$  és linealment independent.
- c)  $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$  és linealment independent.

**B.16** Demostreu que el conjunt  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  és una base de  $\mathbb{R}^4$ . Escriviu el

vector  $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$  com a combinació lineal dels vectors d'aquesta base.

**B.17** Sigui  $F$  el subespai de  $\mathbb{R}^4$  donat per

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 42 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 37 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- 1) Trobeu una base de  $F$ .
- 2) Comproveu que  $e = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \\ 79 \end{pmatrix} \in F$  i calculeu les coordenades de  $e$  en la base de l'apartat anterior.
- 3) Trobeu una base de  $F$  que contingui  $e$ .

**B.18** Sigui  $\{u, v\}$  una base de  $\mathbb{R}^2$ . Proveu que el conjunt  $\{\alpha u + \beta v : \alpha + \beta = 0\}$  és un subespai vectorial. Descriviu aquest subespai geomètricament i trobeu-ne una base.

**B.19** Sigui  $E$  un espai vectorial. Demostreu:



- 1) Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  és un conjunt generador d' $E$  tal que en treure-li qualsevol dels  $e_i$  ja no és generador, aleshores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  és una base d' $E$ .
- 2) Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  és un conjunt independent d' $E$  tal que en afegir-li qualsevol altre vector d' $E$  el resultat esdevé un conjunt dependent, aleshores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  és una base d' $E$ .

**B.20** Trobeu una base i la dimensió dels subespais següents.

- 1)  $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y = 2z \right\}.$
- 2)  $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y - 3z, z = t \right\}.$
- 3)  $E_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  a  $(\mathbb{R})^3$ .
- 4)  $E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$  a  $(\mathbb{R})^3$ .
- 5)  $E_1 \cap E_2$ .
- 6)  $E_3 \cap E_4$ .

**B.21** Considereu els subespais  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  i  $E_4$  de l'exercici anterior. Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai on es troben.

**B.22** Sigui  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2b-a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ . Demostreu que és un subespai vectorial de  $\mathbb{Q}^3$ , i trobeu-ne una base i la dimensió.

Responen les mateixes preguntes si enlloc de considerar  $\mathbb{Q}$  prenem  $\mathbb{Z}_2$ .

**B.23** Diem que una matriu  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  és *màgica* si la suma dels elements de cada fila, de cada columna i de cada diagonal principal és sempre la mateixa. Demostreu que el conjunt de les matrius màgiques és un subespai de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Per  $n = 2, 3$  trobeu-ne una base i la dimensió.

**B.24** Siguin  $B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  i  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) Comproveu que efectivament són bases.

- 2) Doneu la matriu del canvi de la base  $B$  a la base  $B'$  ( $P_{B'}^B$ ) i la matriu del canvi de  $B'$  a  $B$  ( $P_B^{B'}$ ).
- 3) Calculeu les coordenades en les bases  $B$  i  $B'$  del vector  $v$  que en base canònica té coordenades  $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

**B.25** Sigui  $E$  un espai vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensió 3 i sigui  $\{e_1, e_2, e_3\}$  una base d' $E$ . El vector  $v$  té coordenades  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  en aquesta base. Calculeu les coordenades de  $v$  en la base:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 &= e_1 - e_2 \\ u_3 &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$

(No cal que demostreu que és una base.)

**B.26** Siguin

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dues bases de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Doneu les matrius de canvi de base  $P_{B'}^B$  i  $P_B^{B'}$ .

## Aplicacions lineals

**B.27** Sigui  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$ , on  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  i  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ . Hi ha alguna aplicació lineal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , i  $f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ? En cas afirmatiu, doneu la imatge del vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  per aquesta aplicació  $f$ .

**B.28** Esbrineu quins dels espais vectorials següents són isomorfs a  $\mathbb{R}^6$ :  $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}_6[x]$ ,  $\mathcal{M}_{6 \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $W = \{(x_1, x_2, x_3, 0, x_5, x_6, x_7) : x_i \in \mathbb{R}\}$ .

**B.29** Sigui  $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  definida per  $f(A) = A - A^t$ . Determineu el nucli d' $f$  i la seva dimensió.

**B.30** Sigui  $B = \{u, v, w\}$  una base d'un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial  $E$ , i sigui  $f$  un endomorfisme d' $E$  tal que:

$$f(u) = u + v, \quad f(w) = u, \quad \text{Ker } f = \langle u + v \rangle.$$

Doneu una base i la dimensió dels subespais  $\text{Im} f$ ,  $\text{Ker} f$ ,  $\text{Im} f^2$  i  $\text{Ker} f^2$ .

**B.31** Sigui  $f$  un endomorfisme de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  i  $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0 \right\}$ . Trobeu

- 1) la matriu associada a  $f$  en la base canònica;
- 2) la dimensió del nucli i de la imatge;
- 3) l'expressió explícita de la imatge d'un vector qualsevol;
- 4) si és injectiu, exhaustiu, bijectiu, o cap de les tres coses.

**B.32** Siguin  $f_r$  els endomorfismes de  $\mathbb{R}^3$  definits per

$$f_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + 2z \\ x + y \\ x + 2y + rz \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

- 1) Trobeu el valor de  $r$  per al qual  $\text{Im} f_r$  té la dimensió més petita possible.
- 2) Pels valors de  $r$  obtinguts a l'apartat anterior, doneu una base i la dimensió del nucli d' $f_r$ .
- 3) Donat  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ , vegeu si existeix algun  $t$  tal que  $\text{Ker} f_r = \langle v \rangle$ .
- 4) Sigui  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , calculeu  $f_r(w)$  i  $f_r^{-1}(f_r(w))$ .

**B.33** Siguin  $E$  i  $F$  dos  $\mathbb{K}$ -espais vectorials i  $f: E \rightarrow F$  una aplicació lineal. Siguin  $v_1, v_2$  dos vectors d' $E$ . Demostreu les proposicions següents:

- 1) si  $v_1$  i  $v_2$  són linealment dependents, aleshores  $f(v_1)$  i  $f(v_2)$  també ho són;
- 2) si  $f(v_1)$  i  $f(v_2)$  són linealment independents, aleshores  $v_1$  i  $v_2$  també ho són;
- 3) suposem que  $f$  és injectiva, si  $f(v_1)$  i  $f(v_2)$  són linealment dependents, aleshores  $v_1$  i  $v_2$  també ho són.

**B.34** Sigui  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial i siguin  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectors d' $E$ . Considereu l'aplicació  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  donada per  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)^t = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ . Proveu les proposicions següents.

- 1)  $f$  és injectiva si, i només si, els vectors  $v_1, v_2, \dots, v_n$  són linealment independents.
- 2)  $f$  és exhaustiva si, i només si, els vectors  $v_1, v_2, \dots, v_n$  generen  $E$ .

3)  $f$  és bijectiva si, i només si, els vectors  $v_1, v_2, \dots, v_n$  són una base d' $E$ .

**B.35** Donada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  la matriu associada a  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en les bases  $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  de  $\mathbb{R}^3$  i  $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

1) Trobeu la matriu associada a  $f$  en les bases canòniques de  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^2$ .

2) Trobeu la matriu associada a  $f$  en les bases  $B'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  de  $\mathbb{R}^3$  i  $B'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

3) Sigui  $v \in \mathbb{R}^3$  de coordenades  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en la base  $B_1$ . Doneu les coordenades d' $f(v)$  en la base  $B'_2$ .

**B.36** Sigui  $f$  un endomorfisme de  $\mathbb{R}^3$ , que en la base  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , té per matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1) Trobeu la matriu associada a  $f$  en la base canònica.

2) Esbrineu si  $f$  és injectiu, exhaustiu o bijectiu.

3) Trobeu l'antiimatge del vector  $w = au_1 + bu_2 - bu_3$  segons els valors reals de  $a$  i  $b$ . Doneu el resultat en base canònica.

**B.37** Donada una base  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  d'un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial  $E$ , definim una aplicació lineal  $f : E \rightarrow E$  tal que:

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = (x_1 + x_2)e_1 + (x_3 + x_4)e_2.$$

1) Doneu la matriu associada a  $f$  en la base  $B$ .

2) Demostreu que  $f \neq f^2$  i que  $f^2 = f^3 \neq 0$ .

3) Busqueu una base i la dimensió dels subespais  $\text{Ker } f, \text{Im } f, \text{Ker } f^2, \text{Im } f^2$ .

4) Comproveu que els vectors  $e_4, e_1 + e_2, e_2 + e_4, e_1 + e_2 + e_3$  formen una base d' $E$  i escriviu la matriu associada a  $f$  en aquesta base.

**B.38** Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de  $\mathbb{R}^2$  següents:

- 1) una reflexió respecte l'eix  $x$ , seguida d'una dilatació de factor  $k = 3$ ;
- 2) una rotació de  $60^\circ$  en sentit contrari al de les agulles del rellotge, seguida d'una projecció ortogonal sobre l'eix  $x$ , seguida d'una simetria central.

**B.39** Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de  $\mathbb{R}^3$  següents:

- 1) una projecció ortogonal sobre el pla  $xy$ , seguida d'una reflexió respecte al pla  $yz$ , seguida d'una contracció de factor  $k = 3$ ;
- 2) una reflexió respecte al pla  $xy$ , seguida d'una reflexió respecte al pla  $xz$ , seguida d'una d'una rotació de  $60^\circ$  en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix  $z$ .

## Diagonalització

**B.40** Sigui  $f: E \rightarrow E$  un endomorfisme bijectiu. Demostreu que  $f$  diagonalitza en la base  $B$  si, i només si,  $f^{-1}$  diagonalitza en la base  $B$ . Quina relació hi ha entre els valors propis d' $f$  i els d' $f^{-1}$ ?

**B.41** Sigui  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriu tal que  $A^2 = A$ , i sigui  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriu qualsevol. Demostreu que tot valor propi d' $AB$  és valor propi d' $ABA$ .

**B.42** Per a cadascun dels endomorfismes següents, trobeu el polinomi característic, els valors propis i els subespais propis. Determineu si són o no diagonalitzables.

- 1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$ .
- 2)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \\ -z \end{pmatrix}$ .
- 3)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 3y \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- 4)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -8x - 2y + 36z \\ -2x + 4z \end{pmatrix}$ .
- 5)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ 3x + 2y + 3z \\ x + z \end{pmatrix}$ .
- 6)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 5y + 6z + 7t \\ 3x + 8z + 9t \\ 4x + 10t \end{pmatrix}$ .

$$7) f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ x_2 + \dots + x_n \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**B.43** Considerem l'endomorfisme  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  que en la base canònica té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculeu el polinomi característic i els valors propis.
- 2) Trobeu una base de  $\mathbb{R}^4$  formada per vectors propis.
- 3) Doneu la matriu  $P$  del canvi de la base de l'apartat 2) a la base canònica. Calculeu  $P^{-1}$ .
- 4) Escriviu la matriu diagonal associada a  $f$  respecte a la base de l'apartat 2) i comproveu que és igual a  $P^{-1}AP$ .

**B.44** Sigui  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriu no nul·la fixada i  $f_C: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una aplicació definida per  $f_C(A) = CA - AC$ , per a tota matriu  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1) Comproveu que  $f_C$  no és injectiva.
- 2) Si  $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ . Per a quins valors dels paràmetres reals  $a, c$  i  $d$  l'endomorfisme  $f_C$  és diagonalitzable?