8 DERIVADAS PARCIALES Y DIRECCIONALES. GRADIENTE

(Resumen teórico)

Índice

8.1. Derivadas direccionales, derivadas parciales

A partir de ahora, generalmente consideraremos que los dominios de las funciones son conjuntos abiertos, ya que en los conceptos subsiguientes es conveniente que todos los puntos del dominio admitan entornos contenidos en el mismo.

Sea f una función de dominio un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y consideremos un punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ de U y un vector unitario $\mathbf{v}$. La gráfica de f es una superficie, y U es un subconjunto del plano XY; en este plano, consideremos la recta r que pasa por $\mathbf{a}$ y tiene la dirección de $\mathbf{v}$. El plano perpendicular al plano XY y que contiene la recta r corta a la gráfica de f según una curva que pasa por el punto $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$; la pendiente de la recta tangente a esta curva en ese punto es la derivada direccional de f según $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{a}$. A continuación, formalizamos este concepto y lo generalizamos a n variables.

Sea f una función real de n variables definida en un abierto U y sean $\mathbf{a} \in U$, y $\mathbf{v}$ un vector unitario. La función f tiene *derivada en* $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{v}$ si existe el límite siguiente y es un número real:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{\lambda}.$$

Si $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, la derivada direccional de f en $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{e}_i$ se denomina *i-ésima derivada parcial* o *derivada parcial respecto a la i-ésima variable*, para la que se utilizan indistintamente las siguientes notaciones:

$$D_i f(\mathbf{a}), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \qquad f_{x_i}(\mathbf{a}),$$

las dos últimas en el supuesto de que f esté definida como función de las variables $(x_1, \dots, x_n)$.

Observemos que la i-ésima derivada parcial de f en $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \lambda, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\lambda},$$

y que esta definición corresponde a la de la derivada en el punto a_i de la función de una variable definida por $x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Así, el cálculo de derivadas parciales se reduce al cálculo de derivadas de funciones de una variable.

Si $f\colon U \to \mathbb{R}$ es una función que tiene derivada parcial i-ésima en cada punto de U, entonces queda definida la función i-ésima derivada parcial $D_i f$, $\partial f/\partial x_i$ o f_{x_i}, que hace corresponder a cada punto de $\mathbf{x} \in U$ la i-ésima derivada parcial de f en $\mathbf{x}$.

Si f admite derivadas parciales en $\mathbf{a}$ respecto de todas las variables, se denomina *vector gradiente* de f en $\mathbf{a}$, y se denota por $\nabla f(\mathbf{a})$, el vector

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Si f es una función m-vectorial y todas sus funciones coordenadas admiten derivadas parciales en $\mathbf{a}$ respecto de todas las variables, se denomina *matriz jacobiana* de f en $\mathbf{a}$ la matriz de m filas y n columnas

$$\mathcal{J}f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

donde, como puede verse, cada fila es el gradiente de cada una de las funciones coordenadas de f en $\mathbf{a}$. El determinante de la matriz $\mathcal{J}f(\mathbf{a})$ se denomina *jacobiano* de f en $\mathbf{a}$.

8.2. Diferenciabilidad, plano tangente

Recordemos que una función real de variable real f es derivable en un punto a si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y es un número real. Esto es equivalente a que exista un número $f'(a)$ tal que

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| = 0,$$

es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = 0.$$

Esta formulación es la adecuada para generalizar el concepto de derivabilidad a $n \geq 2$ variables.

Para una función de dos variables, el concepto de diferenciabilidad en un punto está ligado a la existencia de plano tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente.

Sea f una función real de dos variables (x, y) y supongamos que existen las dos derivadas parciales de f respecto a x e y en un punto (a, b). La función f es *diferenciable* en (a, b) si

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Esto significa que, en las proximidades de (a, b), se tiene

$$\begin{aligned} f(x,y) &\simeq f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) \\ &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b). \end{aligned}$$

Desde el punto de vista geométrico, la relación anterior se interpreta como que la superficie $z = f(x, y)$ es, cerca de $(a, b, f(a, b))$, aproximadamente igual al plano de ecuación

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

que se denomina *plano tangente* a la superficie en dicho punto.

Generalizamos la definición para funciones de n variables. Sea f una función real de n variables tal que existen las n derivadas parciales de f en $\mathbf{a}$. Se dice que f es *diferenciable* en $\mathbf{a}$ si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Sean f una función de n variables y $\mathbf{a}$ un punto de su dominio. Se cumplen las tres propiedades siguientes.

- Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces f es continua en $\mathbf{a}$.
- Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ es un vector unitario, entonces la derivada de f en $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ existe y es

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

- Si existen las n derivadas parciales de f en un entorno de $\mathbf{a}$ y son continuas en $\mathbf{a}$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{a}$.

La primera propiedad es análoga al caso de una variable. El recíproco no es cierto.

Respecto a la segunda propiedad, puesto que la derivada direccional es el producto escalar $\nabla f(a) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(a)\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman el vector gradiente y $\mathbf{v}$, vemos que la *derivada direccional máxima* en un punto tiene lugar para $\alpha = 0$, es decir, en la dirección y el sentido del gradiente en dicho punto, y su valor es precisamente la norma del vector gradiente. La derivada direccional es nula si $\alpha = \pi/2$, es decir, en la dirección ortogonal al gradiente.

Respecto a la tercera propiedad, señalemos que la hipótesis de continuidad de las derivadas parciales no es obviable: pueden existir las n derivadas parciales y, sin embargo, la función no ser diferenciable.

Para una función m-vectorial, el concepto de diferenciabilidad se remite al de sus funciones coordenadas: sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\mathbf{a} \in U$, y $f = (f_1, \ldots, f_m): U \to \mathbb{R}^m$ una función m-vectorial. Se dice que f es *diferenciable* en $\mathbf{a}$ si las m funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_m$ son diferenciables en $\mathbf{a}$.

La suma y el producto de dos funciones diferenciables en un punto son también diferenciables en dicho punto. Respecto de la composición, se tiene la denominada regla de la cadena.

Regla de la cadena. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos, $f: U \to \mathbb{R}^m$ y $g: V \to \mathbb{R}^p$ funciones vectoriales.

Si f es diferenciable en $\mathbf{a} \in U$ y g es diferenciable en $f(\mathbf{a}) \in V$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y se verifica la siguiente relación entre las respectivas matrices jacobianas:

$$\mathcal{J}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{J}g(f(\mathbf{a})) \cdot \mathcal{J}f(\mathbf{a}).$$

(Nótese que $\mathcal{J}f(a)$ es una matriz $m \times n$, $\mathcal{J}g(f(a))$ es una matriz $p \times m$, y $\mathcal{J}(g \circ f)(a)$ es una matriz $p \times n$.)