

Tema 4. Cues amb prioritats

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Transparències d' **Antoni Lozano**
(amb edicions menors d'altres professors)

Q1 2024 – 25

Tema 4. Cues amb prioritats

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritats

- Introducció
- Heaps
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 Heapsort

- Algorisme bàsic
- Millores de l'algorisme bàsic

4 Altres aplicacions

- El problema de selecció

Tema 4. Cues amb prioritats

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritats

- Introducció
- Heaps
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 Heapsort

- Algorisme bàsic
- Millores de l'algorisme bàsic

4 Altres aplicacions

- El problema de selecció

Arbres binaris perfectes

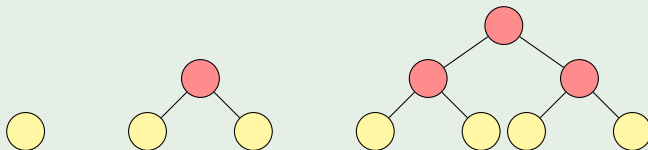
Definició

El **nivell** d'un node en un arbre és la distància de l'arrel al node.

Definició

Un **arbre binari** és **perfecte** si totes les fulles estan al mateix nivell.

Exemples



Definició

L' **alçada** d'un arbre és el nivell màxim dels nodes.

Arbres binaris perfectes

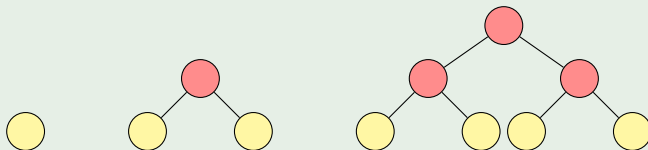
Definició

El **nivell** d'un node en un arbre és la distància de l'arrel al node.

Definició

Un **arbre binari** és **perfecte** si totes les fulles estan al mateix nivell.

Exemples



Definició

L' **alçada** d'un arbre és el nivell màxim dels nodes.

Arbres binaris perfectes

Proposició

Un arbre binari perfecte d'alçada h té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Farem inducció en l'alçada. Sigui T un arbre binari perfecte d'alçada h .

- Base d'inducció: $h = 0$.

L'arbre ha de tenir un sol node, però $1 = 2^{0+1} - 1$.

- Pas d'inducció: $h > 0$.

Els subarbres esquerre i dret tenen alçada $h - 1$ i, per hipòtesi d'inducció, cadascun té $2^h - 1$ nodes. El nombre de nodes de T és la suma d'aquests nodes més un (de l'arrel):

$$\text{nodes de } T = 2(2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1.$$

Arbres binaris perfectes

Proposició

Un arbre binari perfecte d'alçada h té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Farem inducció en l'alçada. Sigui T un arbre binari perfecte d'alçada h .

- **Base d'inducció:** $h = 0$.

L'arbre ha de tenir un sol node, però $1 = 2^{0+1} - 1$.

- **Pas d'inducció:** $h > 0$.

Els subarbres esquerre i dret tenen alçada $h - 1$ i, per hipòtesi d'inducció, cadascun té $2^h - 1$ nodes. El nombre de nodes de T és la suma d'aquests nodes més un (de l'arrel):

$$\text{nodes de } T = 2(2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1.$$

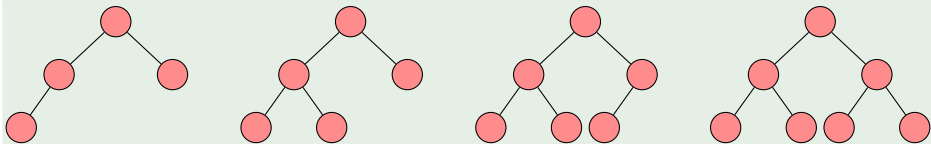
Arbres binaris complets

Definició

Un **arbre binari** d'alçada h és **complet** si

- 1 els $h - 1$ primers nivells estan plens
- 2 el nivell h té les fulles el màxim a l'esquerra.

Exemples



Proposició

Un arbre binari complet d'alçada h té entre 2^h i $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Sigui T un arbre binari complet d'alçada h :

- El **mínim** nombre de nodes de T es produeix quan té un sol node a alçada h . Com que fins a alçada $h - 1$, T té $2^h - 1$ nodes, sumant l'únic node a alçada h , s'obtenen 2^h nodes.
- El **màxim** nombre de nodes de T correspon a un arbre perfecte d'alçada h , que té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Proposició

Un arbre binari complet d'alçada h té entre 2^h i $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Sigui T un arbre binari complet d'alçada h :

- El **mínim** nombre de nodes de T es produeix quan té un sol node a alçada h . Com que fins a alçada $h - 1$, T té $2^h - 1$ nodes, sumant l'únic node a alçada h , s'obtenen 2^h nodes.
- El **màxim** nombre de nodes de T correspon a un arbre perfecte d'alçada h , que té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Corol·lari

L'alçada d'un arbre binari complet de n nodes és $\lfloor \log n \rfloor \in \Theta(\log n)$.

Demostració

Pel resultat anterior, un arbre binari complet d'alçada h i n nodes compleix:

$$2^h \leq n < 2^{h+1}.$$

Si prenem logaritmes en base 2, tenim

$$h \leq \log n < h + 1.$$

I prenent la part baixa del logaritme,

$$h = \lfloor \log n \rfloor.$$

Per tant, $h \in \Theta(\log n)$.

Corol·lari

L'alçada d'un arbre binari complet de n nodes és $\lfloor \log n \rfloor \in \Theta(\log n)$.

Demostració

Pel resultat anterior, un arbre binari complet d'alçada h i n nodes compleix:

$$2^h \leq n < 2^{h+1}.$$

Si prenem logaritmes en base 2, tenim

$$h \leq \log n < h + 1.$$

I prenent la part baixa del logaritme,

$$h = \lfloor \log n \rfloor.$$

Per tant, $h \in \Theta(\log n)$.

Tema 4. Cues amb prioritats

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritats

- Introducció
- Heaps
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 Heapsort

- Algorisme bàsic
- Millores de l'algorisme bàsic

4 Altres aplicacions

- El problema de selecció

Moltes aplicacions requereixen processar les entrades seguint un ordre parcial determinat per **prioritats**.

- **Programació de tasques:** s'executen abans les més importants/curtes/...
- **Sistemes de simulació:** se simulen esdeveniments en ordre cronològic.
- **Algorismes voraços:** en cada moment es prova la millor opció disponible.

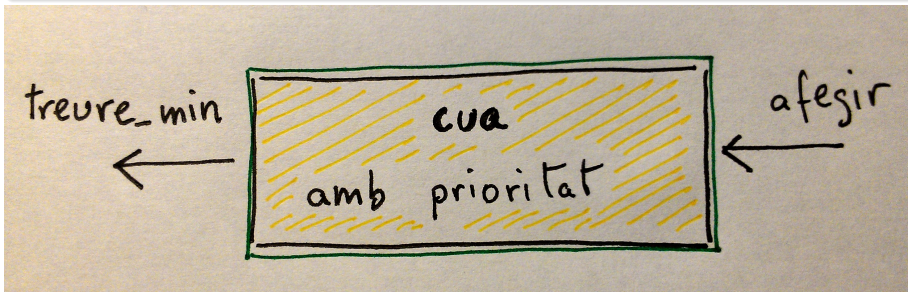
Les cues amb prioritat són una eina bàsica en el disseny d'algorismes.

Operacions

Definició

Una **cua amb prioritat** és una estructura de dades que disposa de dues operacions bàsiques:

- **afegir**: afegir un element i
- **treure_min**: treure i retornar l'element més petit.



Implementacions senzilles

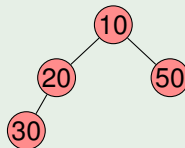
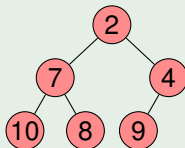
implementacions	afegir	treure_min
seqüencial desordenada	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
seqüencial ordenada (creixent)	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
seqüencial ordenada (decreixent)	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
heaps	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

Definició

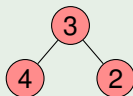
Un *min-heap* és un arbre binari complet on el valor d'un node és sempre més petit o igual que els valors dels nodes dels seus fills.

Exemples

Són min-heaps:



No són min-heaps:



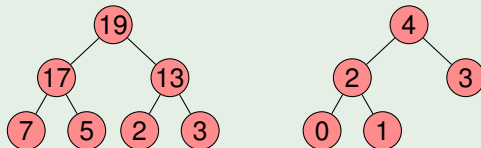
Heaps

Definició

Un *max-heap* és un arbre binari complet on el valor d'un node és sempre més gran o igual que els valors dels nodes dels seus fills.

Exemples

Són max-heaps:



No són max-heaps:



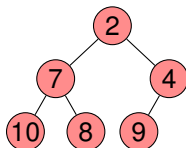
Terminologia

- Quan parlem de **heaps** sense especificar res més, aquí ens referirem als **min-heaps**.
- En català, dels heaps en diem **munts** o **monticles**.

Heaps

Els heaps es representen de manera compacta mitjançant vectors.

Per exemple, el heap



es representa amb el vector

	2	7	4	10	8	9		
0	1	2	3	4	5	6	7	8

No calen punters perquè:

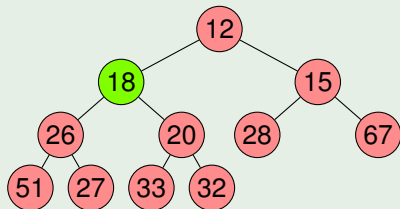
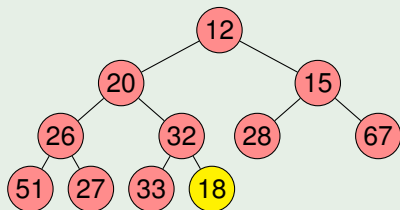
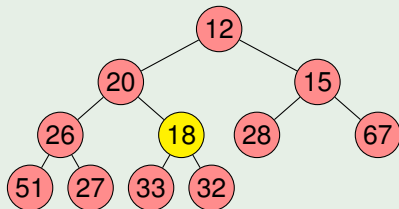
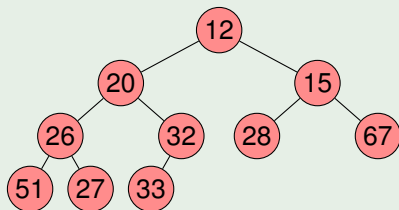
- el **pare** del node de la posició i és a la posició $\lfloor i/2 \rfloor$
- el **fill esquerre** del node de la posició i és a la posició $2i$
- el **fill dret** del node de la posició i és a la posició $2i + 1$

Operacions bàsiques

Operació **afegir**

El més senzill és afegir l'element en la següent posició lliure del vector i fer-lo ascendir fins la posició en què es torna a complir la propietat del heap.

Exemple (afegir la clau 18)

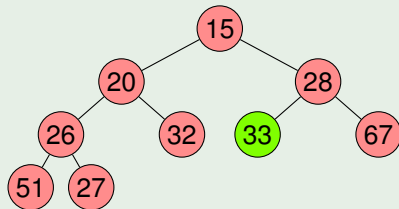
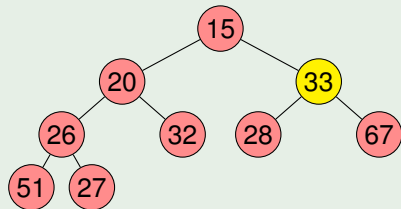
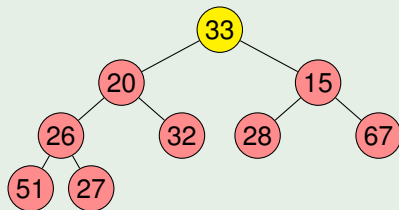
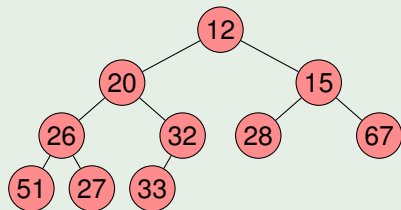


Operacions bàsiques

Operació **treure-min**

L'element en l'última posició del vector es trasllada a la primera i es fa descendir fins que troba la seva posició. Es retorna l'antiga arrel.

Exemple



Definició de la classe CuaPrio

```
template <typename Elem>
class CuaPrio {

private:
vector<Elem> t; // Taula on es forma el heap
                // (la posició 0 no s'utilitza)
```

Implementació recursiva: funcions públiques

Constructora

Crea una cua amb prioritat buida. Cost: $\Theta(1)$.

```
CuaPrio () {  
    t.push_back(Elem());  
}
```

Consultar la talla

Retorna la talla de la cua amb prioritat. Cost: $\Theta(1)$.

```
int talla () {  
    return t.size()-1;  
}
```


Implementació recursiva: funcions públiques

Consultar si és buida

Indica si la cua amb prioritats és buida. Cost: $\Theta(1)$.

```
bool buida () {  
    return t.talla()==0;  
}
```

Retornar element mínim

Retorna un element amb prioritats mínima. Cost: $\Theta(1)$.

```
Elem minim () {  
    if (buida()) throw ErrorPrec("CuaPrio buida");  
    return t[1];  
}
```

afegir

Afegeix un nou element. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void afegir (Elem& x) {  
    t.push_back(x);  
    surar(talla());  
}
```

treure_min

Treu i retorna l'element mínim. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
Elem treure_min () {  
    if (buida()) throw ErrorPrec("CuaPrio buida");  
    Elem x = t[1];  
    t[1] = t.back();  
    t.pop_back();  
    enfonsar(1);  
    return x;  
}
```

surar

Fer ascendir un element fins que ocupi una posició compatible amb la condició d'ordenació del heap. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void surar (int i) {  
    if (i!=1 and t[i/2]>t[i]) {  
        swap(t[i],t[i/2]);  
        surar(i/2);  
    }  
}
```

enfonsar

Fer descendir un element fins que ocupi una posició compatible amb la condició d'ordenació del heap. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void enfonsar (int i) {  
    int n = talla();  
    int c = 2*i;  
    if (c<=n) {  
        if (c+1<=n and t[c+1]<t[c]) c++;  
        if (t[i]>t[c]) {  
            swap(t[i],t[c]);  
            enfonsar(c);  
        }  
    }  
}
```

Implementació iterativa

Les operacions que canvien són **afegir** i **treure_min**, on les antigues **surar** i **enfonsar** estan optimitzades. Els costos asimptòtics són els mateixos que en el cas recursiu: $\Theta(\log n)$.

afegir

```
void afegir (Elem& x) {  
    t.push_back(x);  
    int i = talla();  
    while (i!=1 and t[i/2]>x) {  
        t[i] = t[i/2];  
        i = i/2;  
    }  
    t[i] = x;  
}
```

treure_min

```
Elem treure_min () {  
    if (buida()) throw ErrorPrec("CuaDePrio buida");  
    int n = talla();  
    Elem e = t[1], x = t[n];  
    t.pop_back(); --n;  
    int i = 1; c = 2*i;  
    while (c<=n) {  
        if (c+1<=n and t[c+1]<t[c]) ++c;  
        if (x<=t[c]) break;  
        t[i] = t[c];  
        i = c;  
        c = 2*i;  
    }  
    t[i] = x;  
    return e;  
}
```

Tema 4. Cues amb prioritats

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritats

- Introducció
- Heaps
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 Heapsort

- Algorisme bàsic
- Millores de l'algorisme bàsic

4 Altres aplicacions

- El problema de selecció

Les cues amb prioritats es poden fer servir per ordenar en temps $\Theta(n \log n)$.

L'algorisme es diu **heapsort** i va ser presentat el 1964 per J.W.J. Williams.

Donat un vector de n elements,

- 1 s'afegeixen els n elements a un *heap*: $\Theta(n \log n)$
- 2 es fan n operacions **treure_min** per construir un vector ordenat: $\Theta(n \log n)$

El temps total és $\Theta(n \log n)$, que és òptim per a un algorisme d'ordenació.

Heapsort

Amb vectors separats per al *heap* i l'entrada/sortida.

Temps: $\Theta(n \log n)$.

Espai auxiliar: n .

```
template <typename elem>
void heapsort (vector<elem>& T) {
    CuaPrio<elem> h;
    for (int i=0; i<n; ++i)
        h.afegir(T[i]);
    for (int i=0; i<n; ++i)
        T[i] = h.treure_min();
}
```

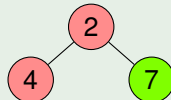
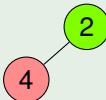
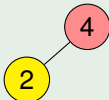
Exemple

Suposem que partim del vector:

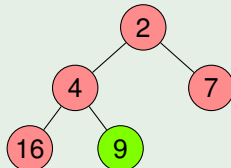
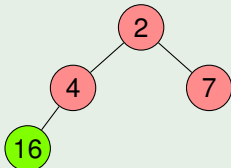
4	2	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

i afegim els elements a un heap, un per un.

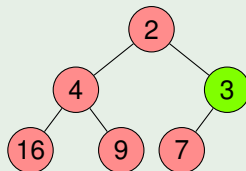
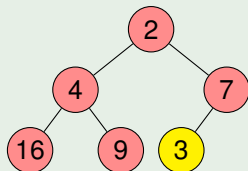
+4, +2, +7:



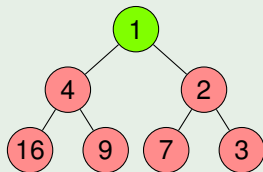
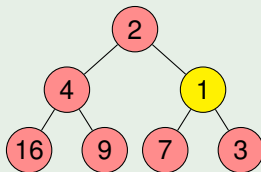
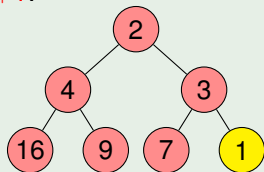
+16, +9:



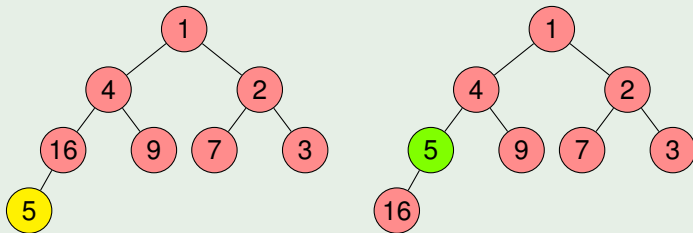
+3:



+1:



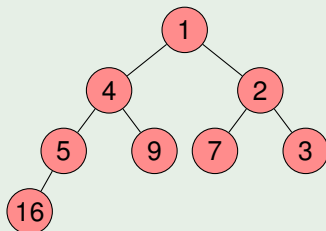
+5:



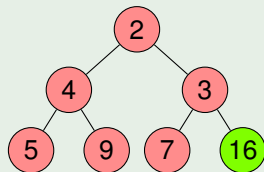
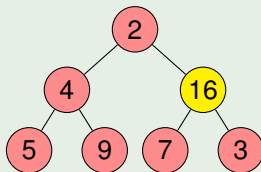
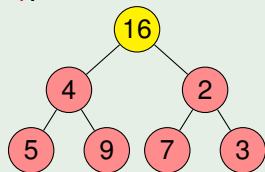
El *heap* resultant s'emmagatzema en el vector:

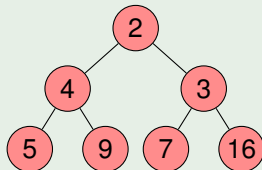
1	4	2	5	9	7	3	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Ara traspassem els elements en ordre al vector original.

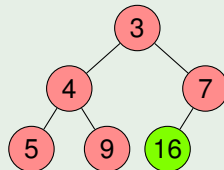
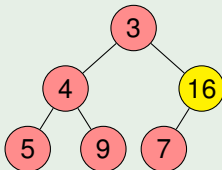
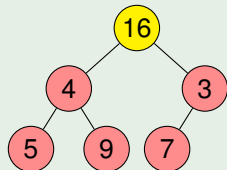


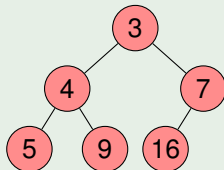
-1:



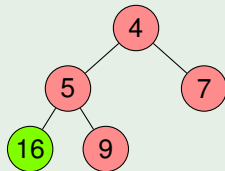
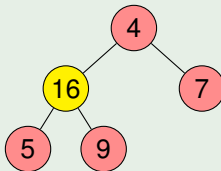
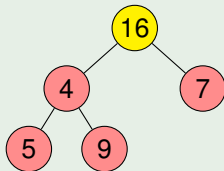


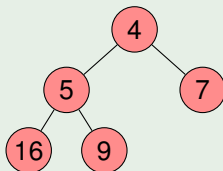
-2:



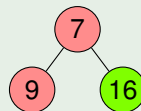
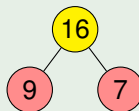
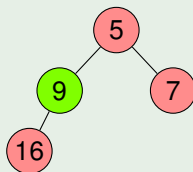
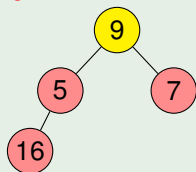


−3:

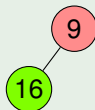
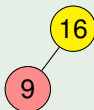




-4, -5:



-7, -9, -16:



Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

4	2	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

--	--	--	--	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

	2	7	16	9	3	1	5
--	---	---	----	---	---	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

4							
---	--	--	--	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

		7	16	9	3	1	5
--	--	---	----	---	---	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

2	4						
---	---	--	--	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

			16	9	3	1	5
--	--	--	----	---	---	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

2	4	7					
---	---	---	--	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

				9	3	1	5
--	--	--	--	---	---	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

2	4	7	16				
---	---	---	----	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

					3	1	5
--	--	--	--	--	---	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

2	4	7	16	9			
---	---	---	----	---	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

						1	5
--	--	--	--	--	--	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

2	4	3	16	9	7		
---	---	---	----	---	---	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

							5
--	--	--	--	--	--	--	---

1 2 3 4 5 6 7 8

1	4	2	16	9	7	3	
---	---	---	----	---	---	---	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

--	--	--	--	--	--	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

1	4	2	5	9	7	3	16
---	---	---	---	---	---	---	----

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

--	--	--	--	--	--	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

1	4	2	5	9	7	3	16
---	---	---	---	---	---	---	----

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1							
---	--	--	--	--	--	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

2	4	3	5	9	7	16	
---	---	---	---	---	---	----	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2						
---	---	--	--	--	--	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

3	4	7	5	9	16		
---	---	---	---	---	----	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3					
---	---	---	--	--	--	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

4	5	7	16	9			
---	---	---	----	---	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4				
---	---	---	---	--	--	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

5	9	7	16				
---	---	---	----	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5			
---	---	---	---	---	--	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

7	9	16					
---	---	----	--	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	7		
---	---	---	---	---	---	--	--

1 2 3 4 5 6 7 8

9	16						
---	----	--	--	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	7	9	
---	---	---	---	---	---	---	--

1 2 3 4 5 6 7 8

16							
----	--	--	--	--	--	--	--

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	7	9	16
---	---	---	---	---	---	---	----

1 2 3 4 5 6 7 8

--	--	--	--	--	--	--	--

heap

Primera millora

Implementar l'algorisme sobre un únic vector fent una divisió en:

- una part esquerra per mantenir el *heap*
- una part dreta per a l'entrada/sortida

Cada cop que es fa una operació de **treure_min**, s'escriu el mínim com a primer element de la part dreta. Els elements queden ordenats de manera **descendent**.

Si es volen en ordre ascendent, es pot fer servir un **max-heap**.

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



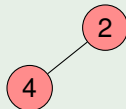
4	2	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

4

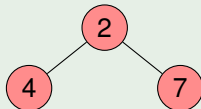
4	2	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

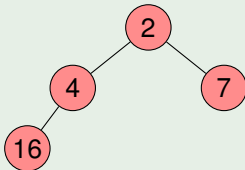
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

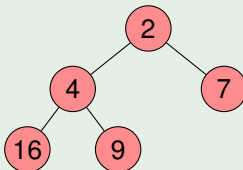
Millores de l'algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

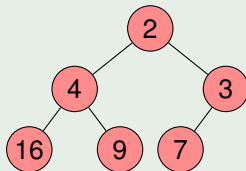
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

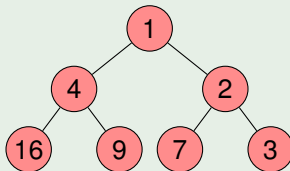
Millores de l'algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



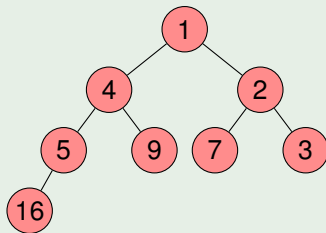
2	4	3	16	9	7	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



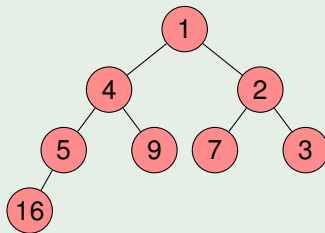
1	4	2	16	9	7	3	5
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



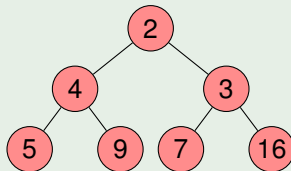
1	4	2	5	9	7	3	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



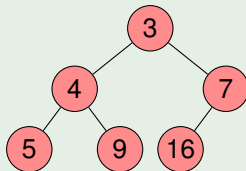
1	4	2	5	9	7	3	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



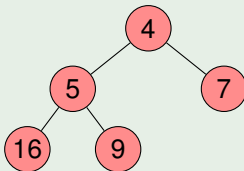
2	4	3	5	9	7	16	1
---	---	---	---	---	---	----	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



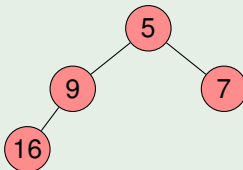
3	4	7	5	9	16	2	1
---	---	---	---	---	----	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



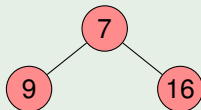
4	5	7	16	9	3	2	1
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



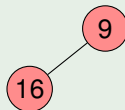
5	9	7	16	4	3	2	1
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



7	9	16	5	4	3	2	1
---	---	----	---	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



9	16	7	5	4	3	2	1
---	----	---	---	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

16

16	9	7	5	4	3	2	1
----	---	---	---	---	---	---	---

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



16	9	7	5	4	3	2	1
----	---	---	---	---	---	---	---

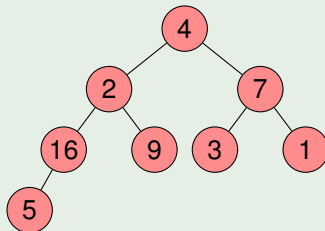
Segona millora

Construir el heap en temps $\Theta(n)$ en lloc de $\Theta(n \log n)$ seguint els passos següents:

- 1 Introduir els elements en el heap en qualsevol ordre (i temps lineal).
- 2 Per cada node x que no sigui una fulla, en ordre decreixent de posició **enfonsar** x

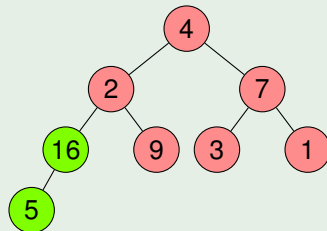
(De tota manera, el cost de l'algorisme continua sent $\Theta(n \log n)$.)

Exemple



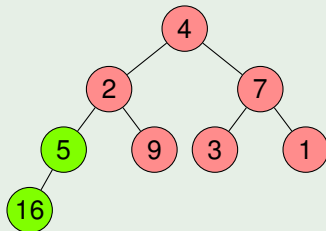
4	2	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple



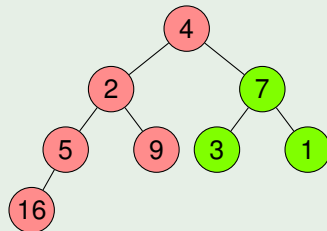
4	2	7	16	9	3	1	5
---	---	---	----	---	---	---	---

Exemple



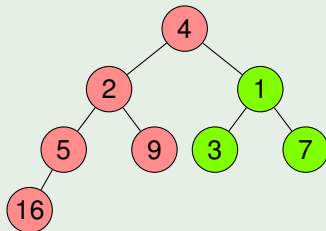
4	2	7	5	9	3	1	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Exemple



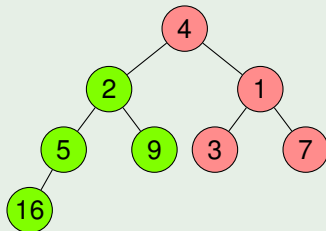
4	2	7	5	9	3	1	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Exemple



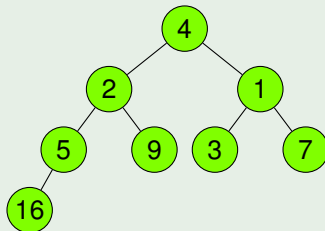
4	2	1	5	9	3	7	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Exemple



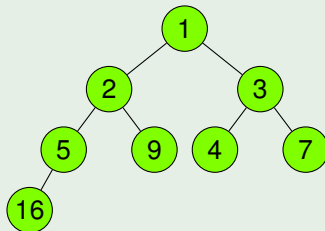
4	2	1	5	9	3	7	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Exemple



4	2	1	5	9	3	7	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Exemple



1	2	3	5	9	4	7	16
---	---	---	---	---	---	---	----

Millors de l'algorisme bàsic

Com que molts dels subheaps són petits, **enfonsar** fa $\Theta(n)$ intercanvis

Exemple

Per a un heap de 127 nodes, hi ha:

- 1 heap de mida 127 i alçada 6
- 2 heaps de mida 63 i alçada 5
- ...
- 32 heaps de mida 3 i alçada 1

Intercanvis en arbres perfectes

Un arbre perfecte d'alçada h té 2^i nodes a nivell i per cada $0 \leq i \leq h-1$.
Cada node a nivell i és arrel d'un subheap amb alçada $h-i$.

Com a molt es fan $\sum_{0 \leq i \leq h-1} 2^i \cdot (h-i) = 2^{h+1} - h - 2 < n$ intercanvis

ja que un arbre perfecte d'alçada h té $2^{h+1} - 1$ nodes.

(Per arbres complets, es demostra la mateixa fita.)

Tema 4. Cues amb prioritats

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritats

- Introducció
- Heaps
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 Heapsort

- Algorisme bàsic
- Millores de l'algorisme bàsic

4 Altres aplicacions

- El problema de selecció

El problema de selecció

Problema de selecció

Donat un vector S de naturals i un $k \in \mathbb{N}$,
determinar el k -èsim element més petit de S .

Fent servir els heaps, podem trobar un nou algorisme:

- 1 Construir un min-heap a partir de S . $\Theta(n)$
- 2 Efectuar k operacions **treure_min** del min-heap. $\Theta(k \log n)$
- 3 Retornar l'últim element extret. $\Theta(1)$

Cost total: $\Theta(n + k \log n)$.

La **mediana** correspon a $k = n/2$. Cost: $\Theta(n \log n)$.

En el cas $k = O(n / \log n)$, el cost és $\Theta(n)$.

El problema de selecció

Problema de selecció

Donat un vector S de naturals i un $k \in \mathbb{N}$,
determinar el k -èsim element més petit de S .

Fent servir els heaps, podem trobar un nou algorisme:

- 1 Construir un min-heap a partir de S . $\Theta(n)$
- 2 Efectuar k operacions **treure_min** del min-heap. $\Theta(k \log n)$
- 3 Retornar l'últim element extret. $\Theta(1)$

Cost total: $\Theta(n + k \log n)$.

La **mediana** correspon a $k = n/2$. Cost: $\Theta(n \log n)$.

En el cas $k = O(n / \log n)$, el cost és $\Theta(n)$.