Departament d'Estadística i Investigació Operativa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Probabilitat i variables aleatòries
Conceptes

Bloc A – Probabilitat i Estadística

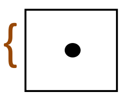
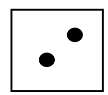
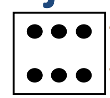
2025

Índex

1.a. Experiència aleatòria. Definicions

- Els **fenòmens deterministes** porten a uns mateixos resultats a partir d'unes mateixes condicions inicials. [Ex: si poso la mà al foc, em cremaré]

- Els **fenòmens aleatoris** tenen una certa incertesa en el resultat d'una propera realització de l'experiència aleatòria. [Ex: Si llenço un dau, no sé quin número sortirà]

- Tota experiència aleatòria té associat un **conjunt de resultats possibles** (Ω ={w1,w2,…}) [Ex: en un dau, Ω ={ … }]

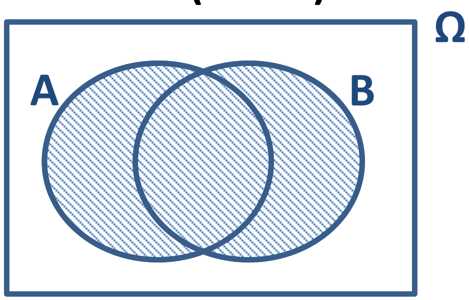
- Qualsevol subconjunt de Ω és un **esdeveniment o succés** (A,B,…). [Ex: Ω (segur) o $\varnothing$ (impossible)]

- Una **partició** és un conjunt d'esdeveniments $A_i \neq \varnothing$, disjunts i que la seva unió és Ω. [Ex: en un dau,
A_1 = parell ; A_2 = senar → $A_1 \cup A_2 = \Omega$ i $A_1 \cap A_2 = \varnothing$]

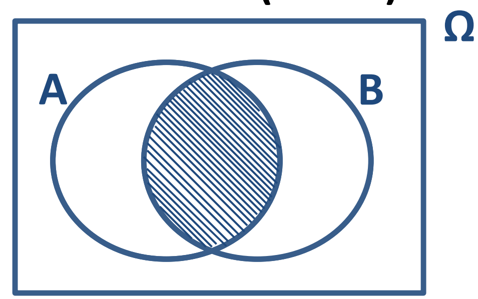
1.a. Experiència aleatòria. Operacions amb conjunts

Com que els esdeveniments són conjunts, totes les operacions dels conjunts es poden aplicar, i el resultat és un altre esdeveniment.

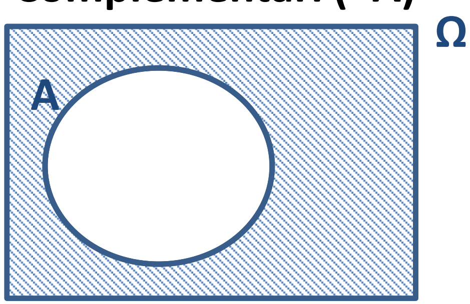
Unió (A U B)



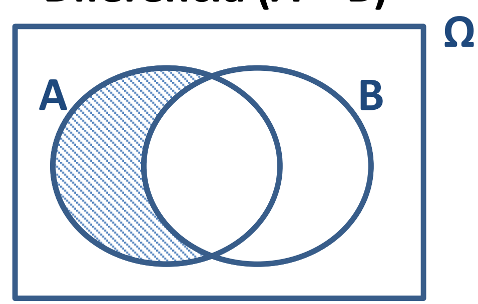
Intersecció (A ∩ B)



Complementari (¬A)



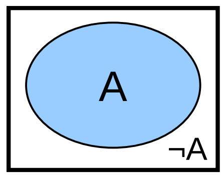
Diferència (A – B)

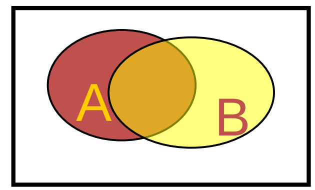


Definicions: Dos conjunts, A i B són **complementaris** (o formen una **partició**) si $A \cap B = \varnothing$ i $A \cup B = \Omega$
Dos conjunts, A i B són **disjunts** si $A \cap B = \varnothing$

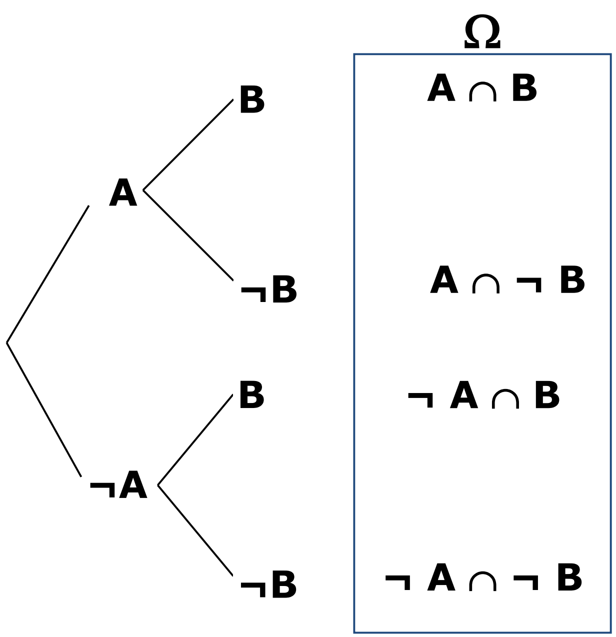
1.a. Experiència aleatòria. Representacions

– Conjunts/diagrames de Venn

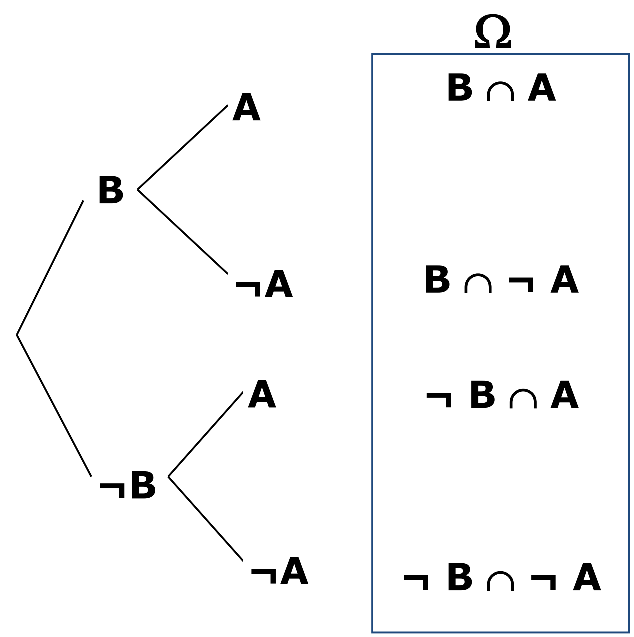




– Arbres



o bé



1.b. Probabilitat. Definició i propietats

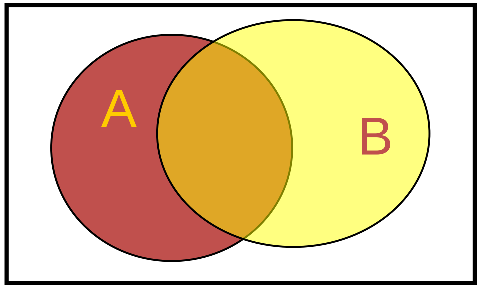
- Per quantificar la incertesa podem definir **una aplicació** que **a cada succés li fa correspondre un valor entre 0 i 1** que anomenem **probabilitat**
- Propietats per definició:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots + P(A_n)$ si $A_i \cap A_j = \varnothing$ per $i \neq j$
  - $P(\Omega) = 1$
- Propietats deduïdes:
  - $P(\neg A)=1 - P(A)$
  - $P(\varnothing) = 0$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

NOTA: El cas particular en que la probabilitat s'obté de casos favorables/casos totals es presenta en condicions d'*equiprobabilitat* (tots els successos elementals tenen la mateixa probabilitat). No es pot generalitzar a qualsevol experiència! [Ex: es podria aplicar a un llançament d'una moneda però no als possibles resultats d'una travessa]

1.b. Probabilitat condicionada (Veure aquest *vídeo*)

- Si l'expectativa d'un esdeveniment es representa en funció d'un altre parlem de **probabilitat condicionada P(A|B)** (es llegeix com a "probabilitat d'observar A tenint en compte que s'ha realitzat B" o "probabilitat de A condicionada per B") [Ex: A="Ploure"/B="Estar ennuvolat"]
- Per definició, si P(B)>0, llavors **P(A|B)** és:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



- A la pràctica, **condicionar per B significa reduir a B el conjunt de resultats observables**, i les probabilitats han de recalcular-se
- En considerar P(A|B), **cada esdeveniment juga un paper diferent**: A és incert però B és conegut
- En general, **P(A|B) ≠ P(B|A) ≠ P(A ∩ B)** [Ex: A="Fumar"/B="Tenir càncer de pulmó". La probabilitat de ser fumador si tens càncer de pulmó és més alta que no la inversa]

1.b. Probabilitat condicionada

- Condicionar pot augmentar la probabilitat d'un esdeveniment (P(A|B)>P(A), B "afavoreix" A), també la pot disminuir (P(A|B)<P(A), B "desafavoreix" A), o pot deixar-la igual (P(A|B)=P(A), B és "indiferent" a A)

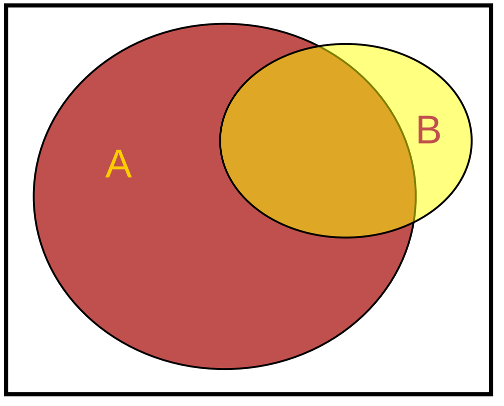
- Noteu que:

$$\mathbf{P(A) > P(B)}$$

$$\frac{1}{P(A)} < \frac{1}{P(B)}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} < \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) < \mathbf{P(A|B)}$$



Per exemple,

pot passar que sigui més freqüent un positiu (A) a una prova diagnòstica que tenir la pròpia malaltia (B)

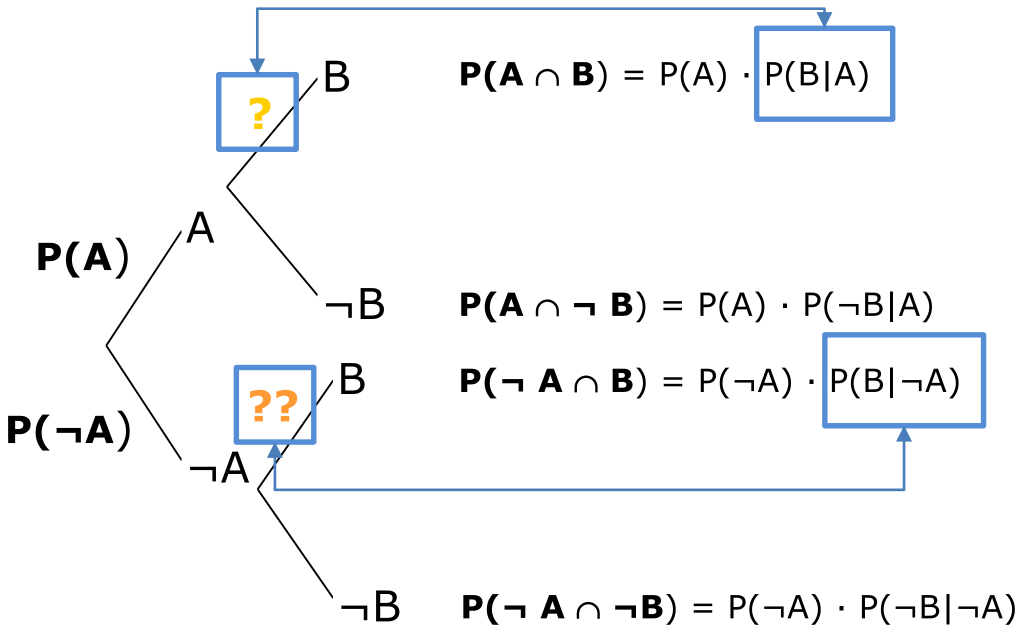
P(A) > P(B)

I al mateix temps la probabilitat de tenir la malaltia (B) sabent que el resultat és positiu (A), és a dir P(B|A), ser inferior a la probabilitat de donar positiu (A) sabent que es té la malaltia, és a dir P(A|B)

P(B|A) < P(A|B)

1.b. Probabilitat condicionada. Representació

Els arbres d'esdeveniments incorporen probabilitats condicionades.

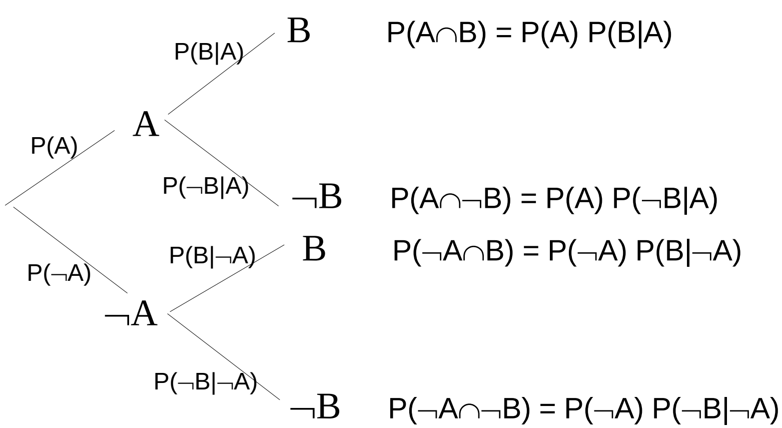


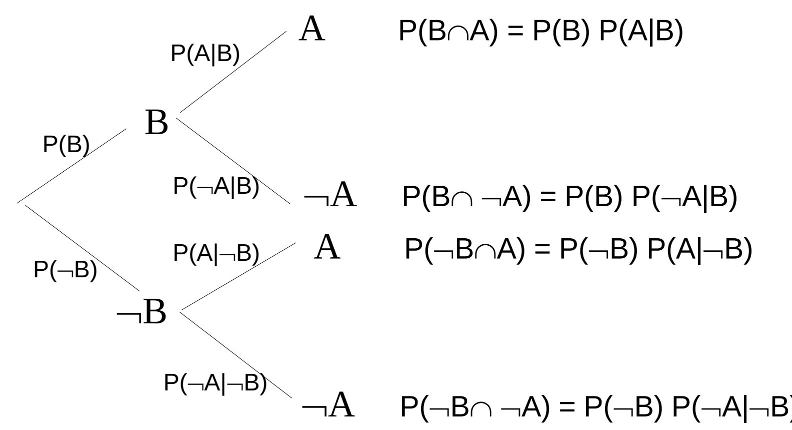
La branca que va de 'A' a 'B' porta una probabilitat condicionada P(B|A) (?): estem suposant que 'A' ha passat.

P(A∩B) es pot obtenir com el producte de les probabilitats en el camí des del node arrel fins al node A∩B:

P(A∩B) = P(A) P(B|A)

1.b. Probabilitat condicionada. Representació





probabilitats conjuntes

	B	$\neg B$	
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap\neg B)$	$P(A)$
$\neg A$	$P(\neg A\cap B)$	$P(\neg A\cap\neg B)$	$P(\neg A)$
	$P(B)$	$P(\neg B)$	1

probabilitats marginals

	B	$\neg B$
A	$P(A\mid B)$	$P(A\mid\neg B)$
$\neg A$	$P(\neg A\mid B)$	$P(\neg A\mid\neg B)$
	1	1

probabilitats condicionades

	B	$\neg B$	
A	$P(B\mid A)$	$P(\neg B\mid A)$	1
$\neg A$	$P(B\mid\neg A)$	$P(\neg B\mid\neg A)$	1

1.b. Probabilitat a posteriori. Fórmula de Bayes

A partir de la definició de probabilitat condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

i de la probabilitat de la intersecció aïllada de la condicionada complementària:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

es dedueix la fórmula de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

que, coneixent P(A) i P(B), permet passar de P(A|B) a P(B|A)

i viceversa (usualment en l'enunciat del cas, les probabilitats condicionades en un sentit són conegudes i interessa calcular les altres condicionades). [Exemple: si conec la probabilitat de pluja si està ennuvolat i vull conèixer la probabilitat d'ennuvolat si plou]

1.b. Probabilitat a posteriori. Llei Probabilitats totals

Podem calcular la probabilitat d'un succés B_k a partir de les probabilitats de les interseccions d'aquest amb una partició $A_1, A_2, \ldots A_j$ de Ω:

$$P(B_k) = P(B_k \cap A_1) + P(B_k \cap A_2) + \ldots + P(B_k \cap A_j) =$$

$$= P(B_k | A_1) \cdot P(A_1) + P(B_k | A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B_k | A_j) \cdot P(A_j)$$

Llei de probabilitats totals (LPT). S'aplica quan disposem d'una partició, i la probabilitat del succés d'interès és senzilla d'obtenir si està condicionat per un element qualsevol de la partició.

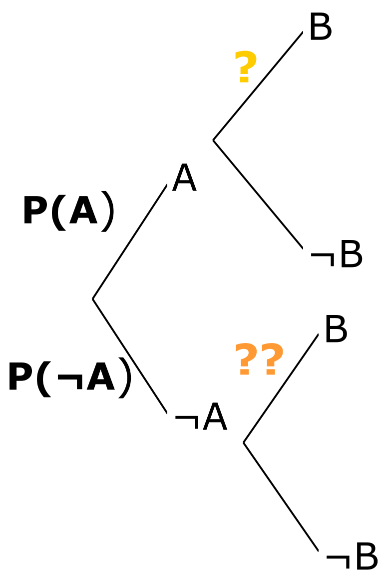
Combinant la fórmula de Bayes amb la llei de probabilitats totals (i una partició $\{A_i\}$ adequada) s'obté el teorema de Bayes:

$$P(A_i | B_k) = \frac{P(B_k | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(B_k | A_j) \cdot P(A_j)}$$

1.c. Independència

Independència aplicat a 2 (o més) esdeveniments és defineix com:

$$\textit{A i B són independents} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



$\mathbf{P(A \cap B)} = P(A) \cdot P(B)$

$\mathbf{P(A \cap \neg B)} = P(A) \cdot P(\neg B)$

$\mathbf{P(\neg A \cap B)} = P(\neg A) \cdot P(B)$

$\mathbf{P(\neg A \cap \neg B)} = P(\neg A) \cdot P(\neg B)$

Quan A i B són independents,

a) P(B | A) = “?” és P(B)

b) P(B | ¬A) = “??” és P(B)

c) Per tant, P(B | A) = P(B | ¬A) = P(B)

1.c. Independència i probabilitat condicionada

- Si A i B són independents

Independents

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \cdot P(B)/P(B) = P(A)$$

- Que passi B no canvia l'expectativa de A i viceversa, que passi A no canvia l'expectativa de B. Si A i B són independents, llavors:

$$P(B|A) = P(B|\neg A) = P(B)$$

- La idea d'esdeveniments independents està lligada a la de la *informació* que un aporta sobre l'altre: A i B són independents quan la probabilitat d'A és la mateixa, indiferentment del que passi amb B.

Índex

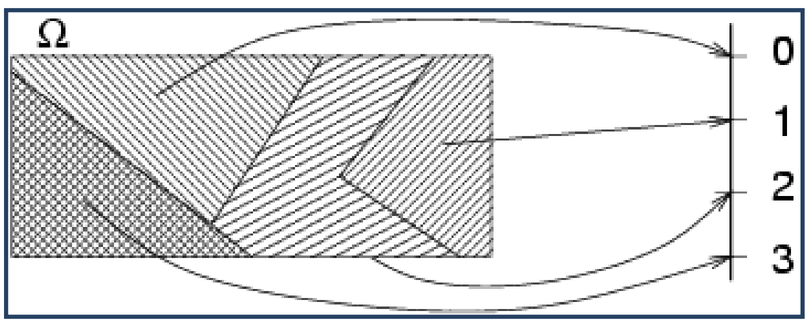
2.a. Variable aleatòria. Definició

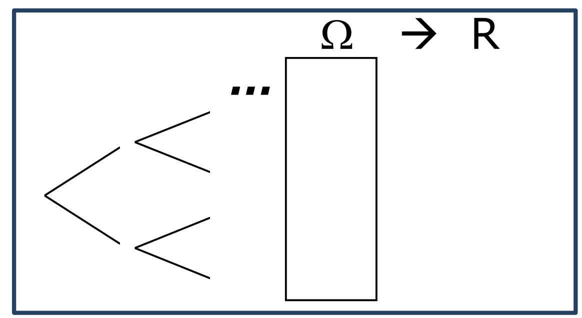
- La majoria d'experiències aleatòries porten a resultats interpretables com un número. Ens interessa l'estudi de l'experiment des del **punt de vista numèric**.
- Una **variable aleatòria** X és una aplicació entre el conjunt Ω i la recta real:

$$X: \ \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

Notació: Les variables aleatòries les denotarem amb un símbol tal com *X, Y, Z,* ...(lletra llatina majúscula). I els seus i possibles valors amb minúscula x_i, y_i, z_i

- Una variable X indueix una partició de Ω amb els valors x_i que adopta:





- Les probabilitats definides en Ω es transfereixen als valors de la VA *X*, definint unes **funcions de probabilitat** (o de densitat) i de **distribució de probabilitat**:

$$\Omega \xrightarrow{\mathbf{X}} \mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{prob.}} [0,1]$$

2.a. Variable aleatòria : discreta (VAD) i contínua (VAC)

Distingim dos tipus de VA:

- Si el conjunt de valors que poden agafar és enumerable (per exemple: un conjunt de valors enters (0..n), el conjunt dels naturals N,...), la VA és **Discreta (VAD)**

  Per exemple, en l'experiència de llençar una moneda 3 vegades:

  – VAD X = "cara o creu en l'últim llançament" (possibles valors: 0,1; probabilitats: ½, ½)

  – VAD Y = "número de cares" (possibles valors: 0,1,2,3; probabilitats: ?)

  O en un servidor durant un període de temps:

  – VAD Z = "número de caigudes del sistema" (possibles valors: 0,1,2,3,4,5,6,...; probabilitats:?)

- Si agafa valors d'un conjunt no discret (és a dir, normalment la recta real o un segment d'ella) la VA és **Contínua (VAC)**

  – VAC X = "temps entre caigudes del sistema" (possibles valors: R^+)

  – En general, les VAC són mesures físiques de temps, longituds,....

2.a. Variable aleatòria. Funció de prob. i distr. en VAD

Les funcions de **probabilitat i distribució** es defineixen segons si són VAC o VAD

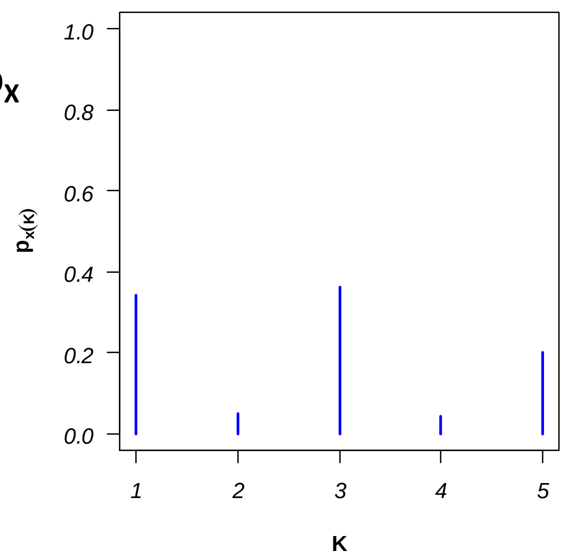
- La **funció de probabilitat** (*p_X*) en una VA DISCRETA (VAD) defineix la probabilitat puntual de cada un dels possibles valors k

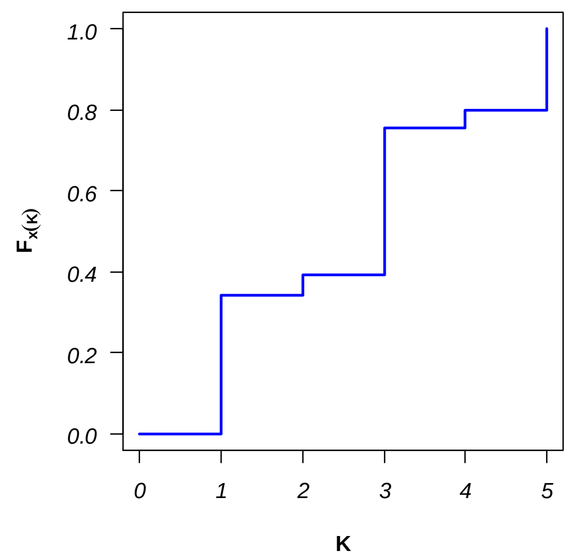
$$p_X(k) = P(X = k) \text{ (complint } \textstyle\sum_k p_X(k) = 1)$$

- La **funció de distribució** (F_X) de probabilitat en una VAD defineix la probabilitat acumulada, és a dir:

$$F_{X(k)} = P(X \leq k) = \sum_{j \leq k} p_X(j)$$

Funció de probabilitat p_X





Funció de distribució de probabilitat F_X

app

2.a. Variable aleatòria. Funció de prob. i distr. en VAC

- La **funció de densitat** de probabilitat (*f_X*) d'una VA CONTINUA és la funció (positiva, $f_X(x) \geq 0$) que cobreix l'espai on està definida la variable, complint:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

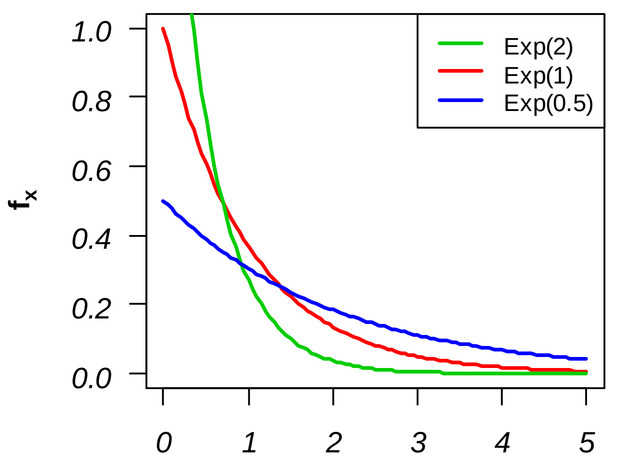
Observem que $f_X(k)$ és el valor de la funció en k, però no és una probabilitat puntual, $f_X(k) \neq P(X=k)$, i $P(X=k)$ val 0

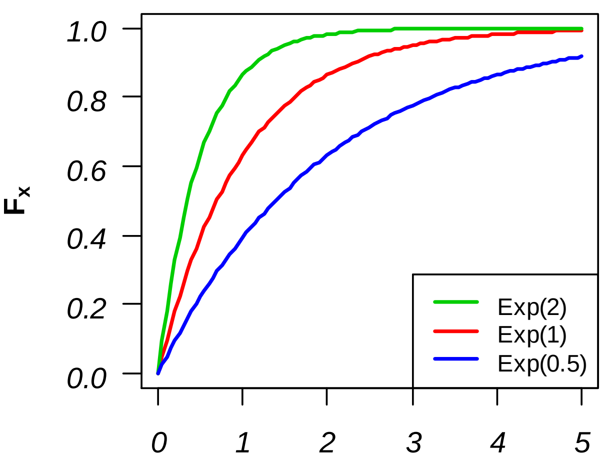
- La **funció de distribució** de probabilitat (**F_X**) d'una VA CONTINUA defineix la probabilitat acumulada, és a dir:

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(x)\,\mathrm{dx}$$

Observem que $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

Funció de densitat f_X





Funció de distribució F_X

2.a. Variable aleatòria. Funció de prob. i distr. en VAC

És a dir, en el cas VA CONTINUA, una **funció positiva**, $f_X(x) \geq 0$, que compleix:

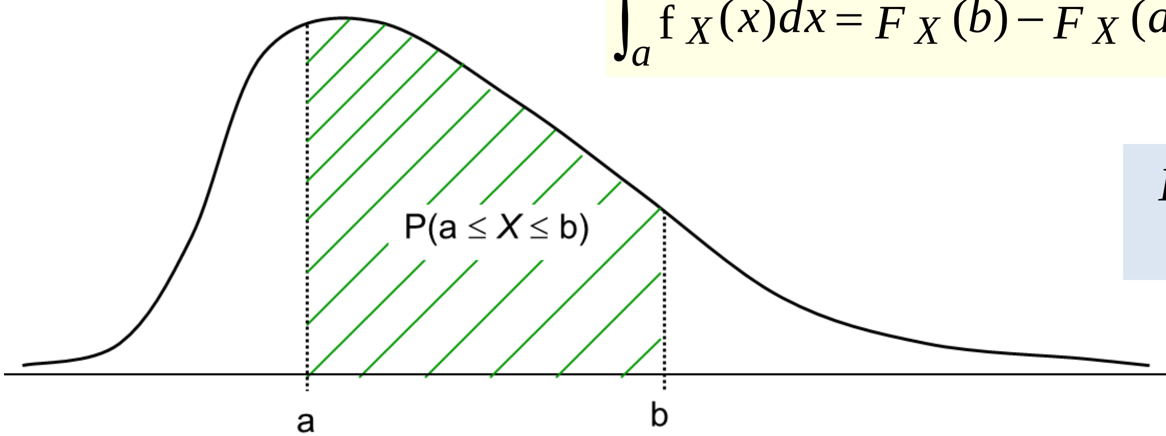
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

és una funció de densitat vàlida, és a dir, caracteritza la variable. La funció de distribució s'obté amb:

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx$$

Tota l'àrea sota la funció de densitat és sempre igual a 1. En particular, l'àrea que hi ha sota la funció de densitat entre els límits *a* per l'esquerra i *b* per la dreta és:

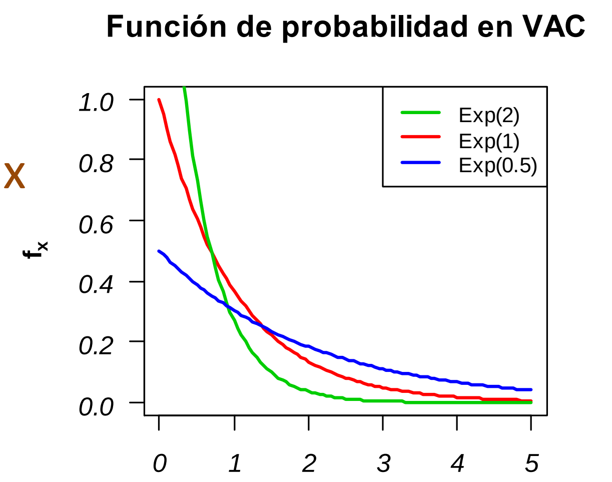
$$\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$



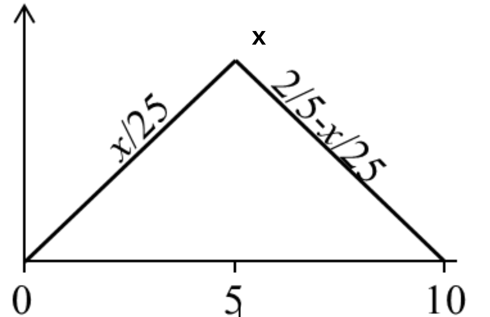
L'àrea sota f_X equival a una probabilitat!

app

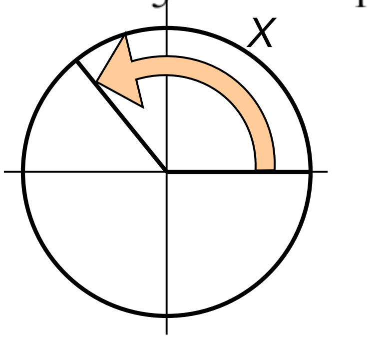
2.a. Variable aleatòria. Exemples de VAC



Exemple 1. La "vida útil d'un transistor en anys" segueix una distribució que decreix exponencialment.



Exemple 2. "L'esforç requerit per desenvolupar un projecte" es pot mesurar en persones/mes, per exemple segons la figura.



Exemple 3. "L'angle X senyalat per la agulla d'una ruleta al parar-se", $0 \leq X \leq 2\pi$.

$F_X(k) = P(X \leq k) = k/(2\pi)$.

2.b. Probabilitats en variables aleatòries

Siguin *X* i *Y* variables aleatòries, i siguin *k*, *a* i *b* escalars:

- **Probabilitats en VAD**
  - $P(X = k) = p_X(k)$
  - $P(X \leq k) = F_X(k) = \sum_j^k p_X(j)$
  - $P(X < k) = P(X \leq k\text{-}1) = F_X(k\text{-}1)$
  - $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a\text{-}1)$
  - $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F_X(b\text{-}1) - F_X(a)$

  Quan el valor previ a k és k-1

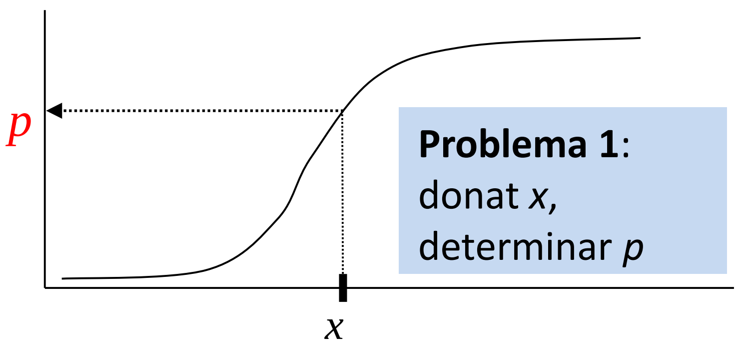
- **Probabilitats en VAC**
  - $P(X = k) = 0 \quad (\neq f_X(k))$
  - $P(X \leq k) = F_X(k)$
  - $P(X<k) = P(X \leq k) = F_X(k)$
  - $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

- **Probabilitats condicionades i independència**
  - $P(X \leq a \mid X \leq b) = P(X \leq a \cap X \leq b) / P(X \leq b)$
  - Si X,Y són independents: $P(X \leq a \cap Y \leq b) = P(X \leq a) \cdot P(Y \leq b)$

    i $P(X \leq a \mid Y \leq b) = P(X \leq a)$)

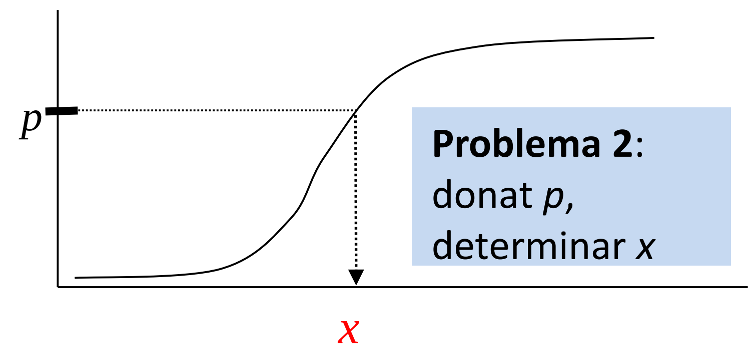
2.b. Quantils

- Sigui X una variable aleatòria, i α un valor real $(0 \leq \alpha \leq 1)$ diem que x_α és el **quantil α** de X si es compleix: $F_X(x_\alpha) = \alpha$
- Calcular un quantil és el problema invers al càlcul de **probabilitats acumulades**. La funció inversa de la funció de distribució ens retorna x_α
- En el cas de VAC, és habitual plantejar problemes en els dos sentits:



Donat ***x*** calcular la probabilitat ***p*** tq:

$$p = F_X(x) = P(X \leq x)$$



Donada una probabilitat ***p*** calcular ***x*** tq:

$$x = F_X^{-1}(p)$$

Exemple: si els llits dels hotels mesuren 200 cm, quina proporció de congressistes poden dormir ben estirats?

Exemple: si desitgem que pugin dormir ben estirats el 98% dels congressistes, quina longitud han de tenir els llits?

2.c. Indicadors en variables aleatòries

- Indicadors en una variable aleatòria:
  - De tendència central, usem el **valor esperat o esperança**
    - **Notació: E(X) o μ_X**
  - De dispersió, usem la **variància** o la seva arrel quadrada, la **desviació estàndard, o *tipus***
    - **Notació per la variància: V(X) o σ_X^2**
    - **Notació per la desviació estàndard: σ_X**
- Indicadors en una mostra: Una mostra de valors expressa amb *n* observacions la variabilitat d'una experiència; si volem resumir aquestes dades utilitzarem la **mitjana mostral** $\bar{x}$ i la **desviació estàndard mostral** s_x [tal com es veu a l'Estadística descriptiva]

2.c. Indicadors en variables aleatòries

- **Esperança de X**

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow E(X) = \mu_X = \sum_{\forall k} (k \cdot p_X(k))$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

- **Variància de X**

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{\forall k} \left[\left(k - E(X)\right)^2 \cdot p_X(k) \right] \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f_X(x)dx \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

- **Relació entre Esperança i Variància (en VAD i VAC):**

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2 \right] = E(X^2) - E(X)^2$$

2.c. Indicadors en variables aleatòries. Propietats

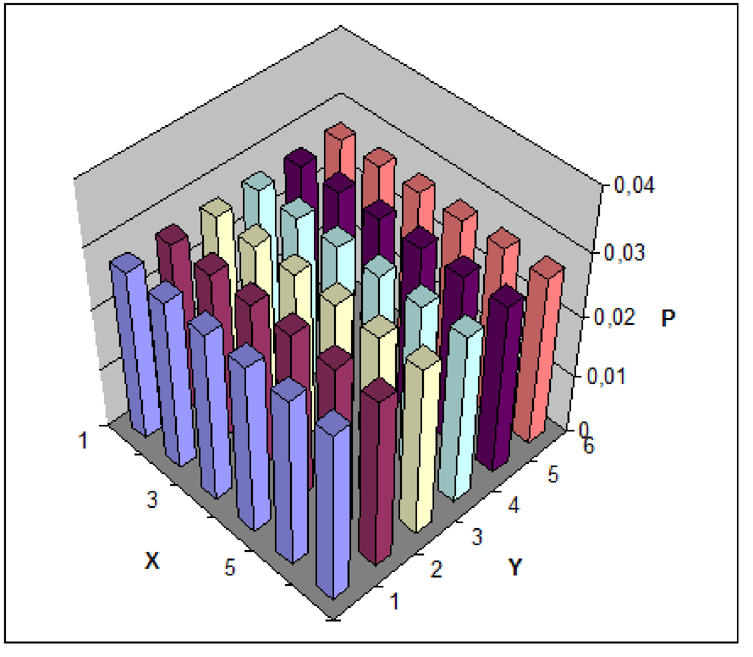
Siguin *X* i *Y* dues variables aleatòries, i *a* i *b* dos escalars

Propietats de l'Esperança	Propietats de la Variància
$E(a+X) = a + E(X)$	$V(a+X) = V(X)$
$E(bX) = b \cdot E(X)$	$V(bX) = b^2 \cdot V(X)$
$E(a+bX) = a + b\,E(X)$	$V(a+bX) = b^2 \cdot V(X)$
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ si X, Y són independents
$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ si X, Y són independents	$V(X \cdot Y) = ?$

2.d. Parell de variables. Parell de VAD

- Quan d'una experiència s'obtenen dues variables *X* i *Y*, quines relacions aleatòries es duen a terme entre elles?
- Per exemple, llancem dues vegades un dau equilibrat, i anomenem *X* al "primer resultat" i *Y* al "segon resultat".
- Raonablement, els dos llançaments són independents, llavors:

$$P(X{=}x \cap Y{=}y) = P(X{=}x)\cdot P(Y{=}y) = 1/6\cdot 1/6 = 1/36, \quad \text{per} \quad x, y = 1, 2, \ldots, 6.$$



2.d. Parell de variables. Funcions de prob. en parell de VAD

- Definim **funció de probabilitat conjunta** de *X* i *Y:*

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x \cap Y=y)$$

- Definim la **funció de probabilitat de X condicionada per Y**:

$$P_{X/Y=y}(x) = P_{X,Y}(x,y) \,/\, P_Y(y)$$

- *X* i *Y* són **V.A. independents si:**

$$P_{X,Y}(x,y)= P_X(x)\cdot P_Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad P_{X/Y=y}(x)= P_X(x) \quad \Leftrightarrow \quad P_{Y/X=x}(y)= P_Y(y)$$

Càlculs de probabilitats condicionades i independència amb dues VAD

$$P(X=x \mid Y=y) = P(X=x \cap Y=y) \,/\, P(Y=y) = P_{X|Y=y}(x) = P_{X,Y}(x,y) \,/\, P_Y(y)$$

si X,Y són independents, $P(X=x \cap Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$

o bé $P(X=x \mid Y=y) = P(X=x)$)

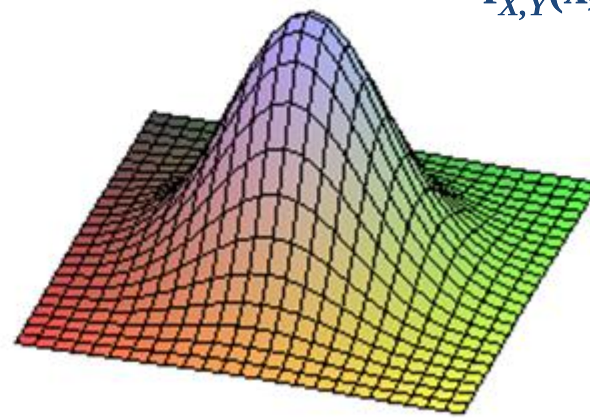
o bé $P(Y=y \mid X=x) = P(Y=y)$)

2.d. Parell de variables. Parell de VAC

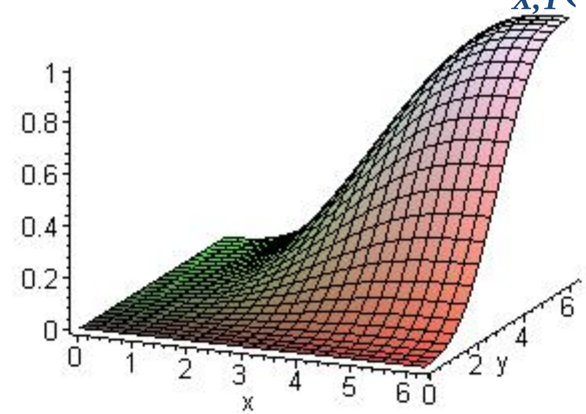
En cas de que existeixin dos variables contínues *X* i *Y* en la mateixa experiència, la relació comuna es reflecteix a través de la **funció de densitat conjunta, $f_{X,Y}(x,y)$.**

- Sigui $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$, *funció de distribució conjunta* de les variables aleatòries
- Si derivem $F_{X,Y}(x,y)$ respecte a les variables (x i y), obtenim $f_{X,Y}(x,y)$
- La definició de funcions condicionades és idéntica que per a V.A.D: $f_{X|Y=y}(x) = f_{X,Y}(x,y) / f_Y(y)$
- El volum total tancat sota $f_{X,Y}(x,y)$ és igual a 1, i una porció d'ell equival a una probabilitat

$f_{X,Y}(x,y)$



$F_{X,Y}(x,y)$



2.d. Parell de variables. Indicadors

- A partir d'un parell de variables *X* i *Y* definim indicadors de la seva relació bivariant (equivalents als mostrals que es veuen a estadística descriptiva)

- La covariància indica si existeix relació lineal o no, a partir del producte, per cada parell de valors, de la diferència respecte al seu valor esperat

$$\boldsymbol{VAD} \rightarrow Cov(X,Y) = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y}(x - E(X))(y - E(Y)) \cdot p_{XY}(x,y)$$

$$\boldsymbol{VAC} \rightarrow Cov(X,Y) = \iint_{\forall x,y}(x - E(X))(y - E(Y)) \cdot f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- La correlació indica si existeix relació lineal o no, relativitzant-ho a valors entre -1 i 1 (a partir de la covariància i dividint per les desviacions corresponents)

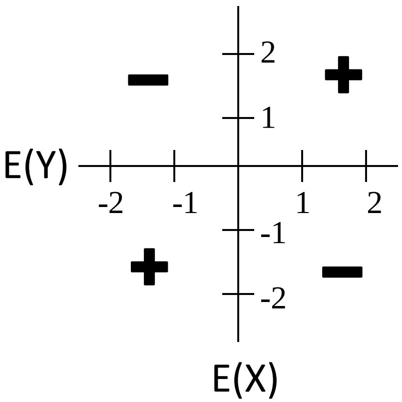
$$corr(X,Y) = \rho_{X,Y} = \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Per qualsevol parell de variables *X* i *Y* → $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

La correlació és més interpretable per estar estandaritzada

2.d. Parell de variables. Indicadors

Si una variable té μ = 0 i σ = 1 es diu que és una variable *centrada* i *reduïda* (estandaritzada). Igualment, diem que la correlació ve estandaritzada perquè pren valors entre -1 i 1.



Aquests quadrants indiquen el signe del producte resultant. Si la probabilitat es reparteix preferentment entre els quadrants positius, la relació entre *X* i *Y* és *directa*. En cas contrari la relació és *inversa* (si *X* augmenta, *Y* tendeix a disminuir).

app

- Si $|\rho_{X,Y}|$=1, la relació és total i lineal: ***Y = a+b·X*** (signe $\rho_{X,Y}$ = signe *b*)
- $|\rho_{X,Y}|$ a prop de 1 $\Rightarrow$ *X* i *Y* estan molt relacionades linealment
- *X* i *Y* independents $\Rightarrow$ $\rho_{X,Y}$=0, però a la inversa no és cert
- La magnitud de la covariància depen de l'escala agafada per les variables [Per exemple, si canvio les unitats de metres a quilòmetres, la covariància canviarà però la correlació, no]

2.d. Parell de variables. Indicadors

Siguin X i Y dues variables aleatòries, i a i b dos escalars:

- **Esperança**
  - $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) + Cov(X,Y)$ (Si X i Y són **independents**, llavors $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$)

- **Variància**
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(X,Y)$
  - $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,Cov(X,Y)$

    (Si X i Y són **independents**, llavors $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

    → ATENCIÓ: a l'expressió de la dreta sempre és un **"+"**)

- **Covariància**
  - $Cov(aX, bY) = a \cdot b \cdot Cov(X,Y)$
  - $Cov(X,X) = V(X)$
  - $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$