

Grau en Enginyeria Informàtica  
Facultat d'Informàtica de Barcelona

## **Matemàtiques 1**

### **Part I: Teoria de Grafs**

Exercicis i problemes

Curs 2023-2024

Departament de Matemàtiques  
Universitat Politècnica de Catalunya

Els problemes d'aquesta col·lecció han estat recopilats per Anna de Mier i Montserrat Maureso el curs 2011/2012. En part provenen de reculls de problemes elaborats pels membres del Departament de Matemàtica Aplicada 2 per a les diverses assignatures que s'han impartit al llarg dels anys. D'altres provenen de la bibliografia de l'assignatura o d'altres llibres, i n'hi ha que són de nova collita. Aprofitem per fer constar i agrair la tasca del becari docent Gabriel Bernardino en la redacció de les solucions. El curs 2018/2019 s'ha fet una revisió general.

Anna de Mier

Mercè Mora

Febrer 2019

# Índex

<b>1</b>	<b>Conceptes bàsics de grafs</b>	<b>1</b>
1.1	Tipus de grafs. Subgrafs. Grafs derivats. Operacions. . . . .	1
1.2	Exercicis . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Recorreguts, connexió i distància</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Grafs eulerians i hamiltonians</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Arbres</b>	<b>12</b>
	<b>Exercicis de repàs i consolidació</b>	<b>15</b>



# 1

## Conceptes bàsics de grafs

### 1.1 Tipus de grafs. Subgrafs. Grafs derivats. Operacions.

#### TIPUS DE GRAFS

Els següents són grafs destacats que emprarem tot sovint. Sigui  $n$  un enter positiu i  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

El *graf nul* d'ordre  $n$ , que denotem per  $N_n$ , és el graf d'ordre  $n$  i mida 0. Al graf  $N_1$  se l'anomena *graf trivial*.

El *graf complet* d'ordre  $n$ , que denotem per  $K_n$ , és el graf d'ordre  $n$  que té totes les arestes possibles. Observem que  $K_1$  és també el graf trivial.

El *graf trajecte* d'ordre  $n$ , que denotem per  $T_n = (V, A)$ , és el graf que té per conjunt d'arestes  $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$ .

El *graf cicle* d'ordre  $n \geq 3$ , que denotem per  $C_n = (V, A)$ , és el graf amb conjunt d'arestes  $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$ .

El *graf roda* d'ordre  $n \geq 4$ , que denotem per  $W_n = (V, A)$ , és el graf amb conjunt d'arestes  $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_1\} \cup \{x_nx_1, x_nx_2, \dots, x_nx_{n-1}\}$ .

Sigui  $r$  i  $s$  enters positius.

Un graf és *r-regular* si tots els vèrtexs tenen grau  $r$ .

Un graf  $G = (V, A)$  és *bipartit* si hi ha dos subconjunts no buits  $V_1$  i  $V_2$  tals que  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  i de forma que, per a tota aresta  $uv \in A$ , es té que  $u \in V_1$  i  $v \in V_2$ , o viceversa. És a dir, no hi ha arestes  $uv$  amb  $u, v \in V_1$  o  $u, v \in V_2$ . Els conjunts  $V_1$  i  $V_2$  s'anomenen les *parts estables* de  $G$ . En cas que cada vèrtex de  $V_1$  sigui adjacent a tots els vèrtexs de  $V_2$ , direm que el graf és *bipartit complet* i el denotarem per  $K_{r,s} = (V, A)$ , on  $|V_1| = r$  i  $|V_2| = s$ . Al graf  $K_{1,s}$  se l'anomena *graf estrella*.

---

## SUBGRAFS

Considerem un graf  $G = (V, A)$ .

Un graf  $G' = (V', A')$  és un *subgraf de*  $G$  si  $V' \subseteq V$  i  $A' \subseteq A$ . Si  $V' = V$ , se l'anomena *subgraf generador* de  $G$ .

Sigui  $S \subseteq V$ ,  $S \neq \emptyset$ . S'anomena *subgraf induït (o generat) pels vèrtexs de*  $S$  al graf  $G[S] = (S, A')$  tal que  $A' = \{uv \in A : u, v \in S\}$ .

## GRAFS DERIVATS D'UN GRAF

Considerem un graf  $G = (V, A)$ .

El *graf complementari* de  $G$ , que denotem per  $G^c$ , és el graf amb conjunt de vèrtexs  $V$  i conjunt d'arestes  $A^c = \{uv \mid uv \notin A\}$ .

Sigui  $S \subset V$ . El graf que s'obté per *eliminació o supressió dels vèrtexs* de  $S$ , que denotem per  $G - S$ , és el graf que té per conjunt de vèrtexs  $V \setminus S$  i per arestes les de  $G$  que no són incidents a cap vèrtex de  $S$ . En cas que  $S = \{v\}$ , el denotem per  $G - v$ .

Sigui  $S \subset A$ . El graf que s'obté per *eliminació o supressió de les arestes* de  $S$ , que denotem per  $G - S$ , és el graf que s'obté de  $G$  suprimint totes les arestes de  $S$ . És a dir,  $G - S = (V, A \setminus S)$ . En cas que  $S = \{a\}$ , el denotem per  $G - a$ .

Siguin  $u, v$  vèrtexs de  $G$  no adjacents. El graf que s'obté per l'*addició de l'aresta*  $uv$  és el graf  $G + uv = (V, A \cup \{uv\})$ .

## OPERACIONS ENTRE GRAFS

Considerem dos grafs  $G_1 = (V_1, A_1)$  i  $G_2 = (V_2, A_2)$ .

El *graf unió* de  $G_1$  i  $G_2$ , que denotem per  $G_1 \cup G_2$ , és el graf que té per conjunt de vèrtexs  $V_1 \cup V_2$  i per conjunt d'arestes  $A_1 \cup A_2$ .

El *graf producte* de  $G_1$  i  $G_2$ , que denotem per  $G_1 \times G_2$ , és el graf que té per conjunt de vèrtexs  $V_1 \times V_2$  i les adjacències vénen donades per

$$(u_1, u_2) \sim (v_1, v_2) \Leftrightarrow (u_1 v_1 \in A_1 \text{ i } u_2 = v_2) \text{ o } (u_1 = v_1 \text{ i } u_2 v_2 \in A_2).$$

## 1.2 Exercicis

**1.1** Per a cadascun dels grafs  $N_n$ ,  $K_n$ ,  $T_n$ ,  $C_n$  i  $W_n$ , doneu-ne:

- 1) una representació gràfica per a  $n = 4$  i  $n = 6$ ;
- 2) la matriu d'adjacència per a  $n = 5$ ;
- 3) l'ordre, la mida, el grau màxim i el grau mínim en funció de  $n$ .

**1.2** Per a cadascun dels enunciats següents, doneu un graf amb la propietat que es demana, explicitant-ne la llista d'adjacències i una representació gràfica.

- 1) Un graf 3-regular d'ordre com a mínim 5.
- 2) Un graf bipartit d'ordre 6.
- 3) Un graf bipartit complet d'ordre 7.
- 4) Un graf estrella d'ordre 7.

**1.3** Esbrineu si els grafs complet, trajecte i cicle d'ordre  $n$ , amb  $n \geq 1$  o  $n \geq 3$  segons el cas, són bipartits i/o regulars.

**1.4** Doneu la mida:

- 1) d'un graf  $r$ -regular d'ordre  $n$ ;
- 2) del graf bipartit complet  $K_{r,s}$ .

**1.5** Siguin  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $A = \{ab, af, ad, be, de, ef\}$  i  $G = (V, A)$ . Determineu tots els subgrafs de  $G$  d'ordre 4 i mida 4.

**1.6** Els cinc apartats següents fan referència al graf  $G$  definit com segueix. El conjunt de vèrtexs és  $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , i dos vèrtexs  $u$  i  $v$  són adjacents si  $|u - v| \in \{1, 4, 5, 8\}$ . Determineu l'ordre i la mida dels subgrafs de  $G$  següents:

- 1) El subgraf induït pels vèrtexs parells.
- 2) El subgraf induït pels vèrtexs senars.
- 3) El subgraf induït pel conjunt  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 4) Un subgraf generador que tingui el màxim nombre possible d'arestes però no contingui cicles.

**1.7** Considereu un graf  $G = (V, A)$  amb  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i  $A = \{12, 13, 23, 24, 34, 45\}$ . Doneu el conjunt d'arestes, la matriu d'adjacència i una representació gràfica dels grafs  $G^c$ ,  $G - 4$ ,  $G - 45$  i  $G + 25$ .

**1.8** Considereu un graf  $G = (V, A)$  d'ordre  $n$  i mida  $m$ . Siguin  $v$  un vèrtex i  $a$  una aresta de  $G$ . Doneu l'ordre i la mida de  $G^c$ ,  $G - v$  i  $G - a$ .

**1.9** Esbrineu si el complementari d'un graf regular és regular, i si el complementari d'un graf bipartit és bipartit. En cas afirmatiu, demostreu-ho; en cas negatiu, doneu un contraexemple.

**1.10** Doneu el conjunt d'arestes i una representació gràfica dels grafs  $K_3 \cup T_3$  i  $T_3 \times K_3$ , suposant que els conjunts de vèrtexs de  $K_3$  i de  $T_3$  són disjunts.

**1.11** Considereu els grafs  $G_1 = (V_1, A_1)$  i  $G_2 = (V_2, A_2)$ . Doneu l'ordre, el grau dels vèrtexs i la mida de  $G_1 \times G_2$  en funció dels de  $G_1$  i  $G_2$ .

**1.12** Proveu o refuteu les afirmacions següents:

- 1) Si  $G_1$  i  $G_2$  són grafs regulars, aleshores  $G_1 \times G_2$  és regular.
- 2) Si  $G_1$  i  $G_2$  són grafs bipartits, aleshores  $G_1 \times G_2$  és bipartit.

**1.13** Doneu tots els grafs que tenen  $V = \{a, b, c\}$  com a conjunt de vèrtexs i representeu-los gràficament.

**1.14** Considereu els grafs que tenen conjunt de vèrtexs  $[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Calculeu quants grafs n'hi ha ...

- 1) ... amb exactament 20 arestes.
- 2) ... en total.

**1.15** Per a cadascuna de les seqüències següents, esbrineu si existeixen grafs d'ordre 5 de forma que els graus dels vèrtexs siguin els valors donats. Si existeixen, doneu-ne un exemple.

- |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) 3, 3, 2, 2, 2. | 3) 4, 3, 3, 2, 2. | 5) 3, 3, 3, 3, 2. |
| 2) 4, 4, 3, 2, 1. | 4) 3, 3, 3, 2, 2. | 6) 5, 3, 2, 2, 2. |

**1.16** Demostreu que si un graf és regular de grau senar, aleshores té ordre parell.

**1.17** Sigui  $G$  un graf bipartit d'ordre  $n$  i regular de grau  $d \geq 1$ . Quina és la mida de  $G$ ? Pot ser que l'ordre de  $G$  sigui senar?

**1.18** Demostreu que en un graf bipartit d'ordre  $n$  la mida és menor o igual que  $n^2/4$ .



**1.19** Sigui  $G$  un graf d'ordre 9 tal que tots els vèrtexs tenen grau 5 o 6. Proveu que hi ha un mínim de 5 vèrtexs de grau 6 o un mínim de 6 vèrtexs de grau 5.

**1.20** L'Aran i la seva parella organitzen una festa on es reuneixen un total de 5 parelles. Es produeixen un cert nombre de salutacions però, com és natural, ningú no saluda la pròpia parella. A la sortida l'Aran pregunta a tothom quantes persones ha saludat i rep nou respostes diferents. Quantes persones ha saludat l'Aran i quantes la seva parella?

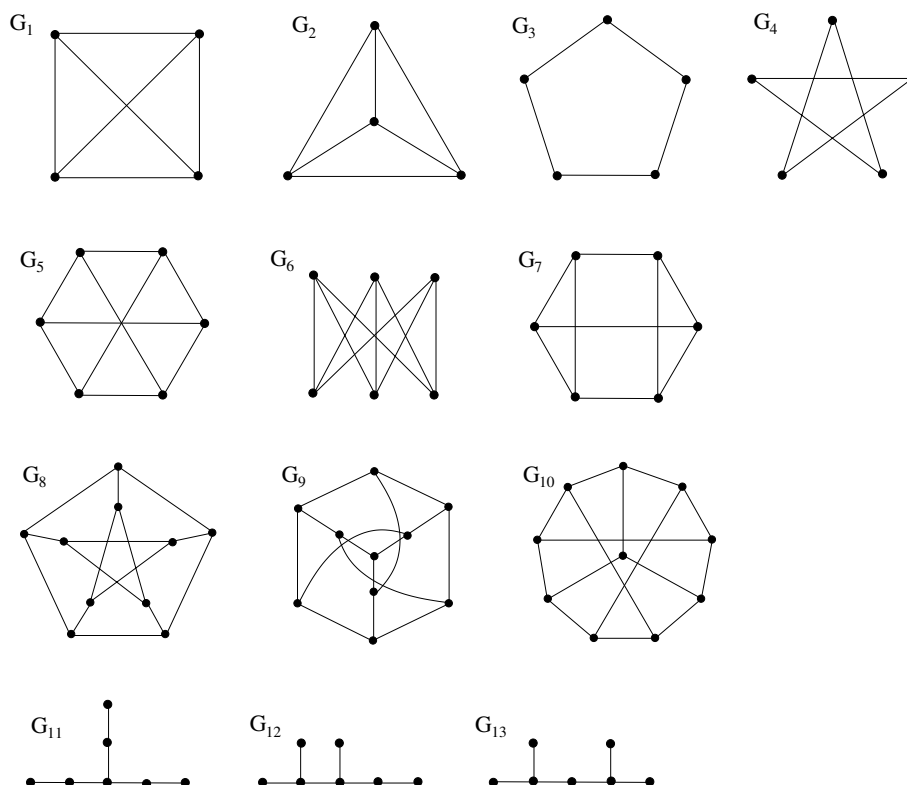
*Indicació:* Descriviu un graf que modela la situació. Esbrineu quantes salutacions fa cada membre d'una parella.

**1.21** Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els grafs d'ordre quatre i mida dos.

**1.22** Sigui  $V = \{a, b, c, d\}$  i  $A = \{ab, ac, ad, dc\}$ . Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els subgrafs del graf  $G = (V, A)$ .

**1.23** Classifiqueu per classes d'isomorfia els grafs de la figura 1.1.

Figura 1.1:



**1.24** Siguin  $G = (V, A)$  i  $H = (W, B)$  dos grafs. Demostreu que  $G$  i  $H$  són isomorfs, si i només si,  $G^c$  i  $H^c$  són isomorfs.

**1.25** Determineu el nombre de grafs no isomorfs d'ordre 20 i mida 188.

**1.26** Un graf és *autocomplementari* si és isomorf al seu graf complementari. Demostreu que no hi ha grafs autocomplementaris d'ordre 3, però sí d'ordres 4 i 5.

**1.27** Un graf és *autocomplementari* si és isomorf al seu graf complementari.

- 1) Quantes arestes té un graf autocomplementari d'ordre  $n$ ?
- 2) Demostreu que si  $n$  és l'ordre d'un graf autocomplementari, aleshores  $n$  és congruent amb 0 o amb 1 mòdul 4.
- 3) Comproveu que si  $n = 4k$  per  $k \geq 1$ , la construcció següent dona un graf autocomplementari: prenem  $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ , on cada  $V_i$  conté  $k$  vèrtexs; els vèrtexs de  $V_1$  i de  $V_2$  indueixen grafs complets; a més, tenim totes les arestes entre  $V_1$  i  $V_3$ , entre  $V_3$  i  $V_4$ , i entre  $V_4$  i  $V_2$ .
- 4) Com podem modificar la construcció anterior per obtenir un graf autocomplementari amb  $n = 4k + 1$  vèrtexs?

**1.28** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n \geq 6$ .

- 1) Demostreu que  $G$  o  $G^c$  conté un vèrtex  $v$  de grau almenys 3.
- 2) Demostreu que  $G$  o  $G^c$  conté un cicle de longitud 3. (Considereu les adjacències entre els veïns del vèrtex  $v$  del primer apartat.)
- 3) Demostreu que en una reunió de  $n \geq 6$  persones, sempre n'hi ha 3 que es coneixen dos a dos o 3 que no es coneixen dos a dos.



**2.5** Demostreu que si un graf té exactament dos vèrtexs de grau senar, aleshores existeix un camí que va d'un a l'altre.

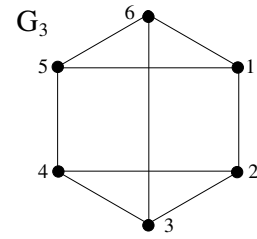
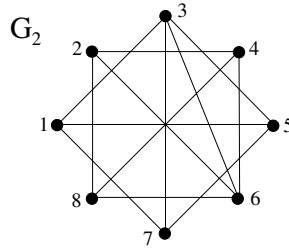
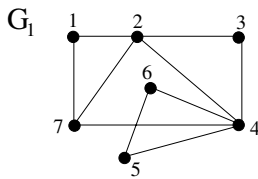
**2.6** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n$  que té exactament dos components connexos i tots dos són grafs complets. Demostreu que la mida de  $G$  és, almenys,  $(n^2 - 2n)/4$ .

**2.7** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n$  amb exactament  $k$  components connexos. Demostreu que la mida de  $G$  és més gran o igual que  $n - k$ .

**2.8** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n$  amb exactament  $k + 1$  components connexos. En aquest exercici volem trobar una fita superior per la mida de  $G$ . Per a fer-ho definim el graf auxiliar  $H$  d'ordre  $n$  amb  $k + 1$  components connexos,  $k \geq 1$ :  $k$  són isomorfs a  $K_1$  i un component és isomorf a  $K_{n-k}$ .

- 1) Calculeu la mida de  $H$ .
- 2) Demostreu que la mida de  $H$  és més gran o igual que la mida de  $G$ .

**2.9** Trobeu tots els vèrtexs de tall i arestes pont dels grafs següents.



**2.10** Sigui  $G = (V, A)$  un graf connex d'ordre almenys 2. Prenem  $z \notin V$  i definim  $G + z$  com el graf que té  $V \cup \{z\}$  com a conjunt de vèrtexs i  $A \cup \{zv : v \in V\}$  com a conjunt d'arestes. Demostreu que  $G + z$  no té vèrtexs de tall.

**2.11** Trobeu el més petit  $n$  tal que existeix un graf 3-regular d'ordre  $n$  que té una aresta pont.

**2.12** Demostreu que un graf 3-regular té un vèrtex de tall si, i només si, té alguna aresta pont.

**2.13** Sigui  $G = (V, A)$  un graf i  $v$  un vèrtex de  $G$ . Proveu que

- 1) si  $G$  és no connex, aleshores  $G^c$  és connex;
- 2)  $(G - v)^c = G^c - v$ ;
- 3) si  $G$  és connex i  $v$  és un vèrtex de tall de  $G$ , aleshores  $v$  no és un vèrtex de tall de  $G^c$ .

**2.14** Considereu els grafs de l'exercici 2.4. Doneu la distància dels vèrtexs  $a$  i  $b$  a tots els vèrtexs del component connex on es troben aplicant l'algorisme BFS.

**2.15** Trobeu el diàmetre dels grafs següents.

- |                             |                |            |
|-----------------------------|----------------|------------|
| 1) $K_n$ .                  | 3) $K_{r,s}$ . | 5) $W_n$ . |
| 2) Grafs de l'exercici 2.1. | 4) $C_n$ .     | 6) $T_n$ . |

**2.16** Per a cadascuna de les relacions següents sobre el diàmetre, doneu un graf  $G = (V, A)$  connex i un vèrtex  $u \in V$  que les satisfacin.

- |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $D(G) = D(G - u)$ . | 2) $D(G) < D(G - u)$ . | 3) $D(G) > D(G - u)$ . |
|------------------------|------------------------|------------------------|

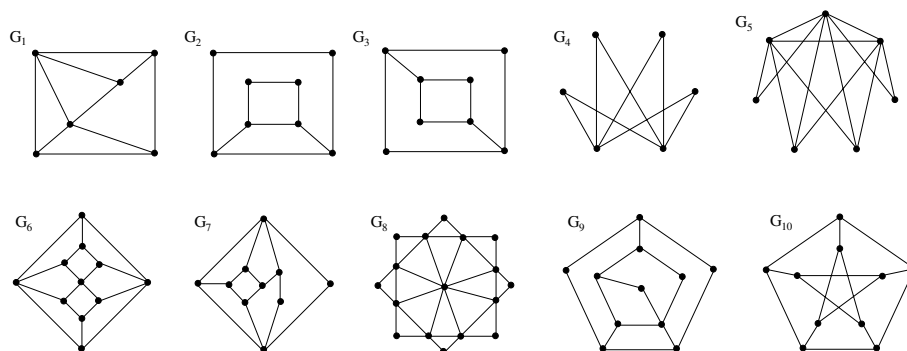
**2.17**

- 1) Trobeu l'excentricitat de tots els vèrtexs, el radi, els vèrtexs centrals i el centre: a) dels grafs de l'exercici 2.1; b) del graf  $G = ([8], \{12, 14, 15, 23, 34, 38, 46, 47, 56, 67, 78\})$ .
- 2) Doneu un exemple d'un graf connex amb el radi i el diàmetre iguals.
- 3) Doneu un exemple d'un graf connex tal que el diàmetre sigui el doble del radi.

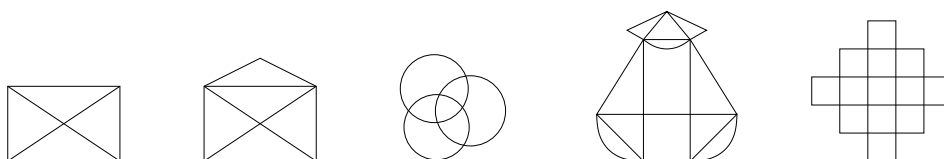
**2.18** Sigui  $G$  un graf d'ordre 1001 tal que cada vèrtex té grau  $\geq 500$ . Demostreu que  $G$  té diàmetre  $\leq 2$ .

# Grafs eulerians i hamiltonians

**3.1** Per a cadascun dels grafs següents, trobeu-ne un circuit eulerià, o demostreu-ne la no existència.

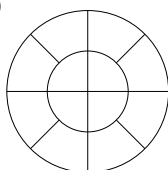


**3.2** Esbrineu si els dibuixos següents es poden dibuixar sense aixecar el llapis del paper i sense repetir cap línia

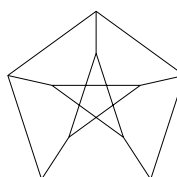


**3.3** Trobeu el mínim nombre de vegades que s'ha d'aixecar el llapis del paper per dibuixar cadascuna de les figures sense repetir cap línia.

1)



2)



- 3.4** Trobeu els valors de  $r$  i  $s$  tals que el graf bipartit complet  $K_{r,s}$  és eulerià.
- 3.5** Sigui  $G$  un graf que té exactament dos components connexos que són eulerians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf eulerià.
- 3.6** Demostreu que un graf connex amb tots els vèrtexs de grau parell no té arestes pont.
- 3.7** Esbrineu si és possible posar en successió totes les fitxes d'un dòmino de forma que coincideixen les puntuacions dels extrems en contacte i que els dos extrems lliures tinguin la mateixa puntuació. Si és possible, explicitau una solució.
- 3.8** El graf  $n$ -cub  $Q_n$  té per conjunt de vèrtexs  $\{0, 1\}^n$  i dos vèrtexs  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$  són adjacents si difereixen en exactament una coordenada.
- 1) Representeu  $Q_i$  per  $1 \leq i \leq 4$ .
  - 2) Determineu l'ordre, la mida i la seqüència de graus de  $Q_n$ .
  - 3) Trobeu els valors de  $n$  tals que  $Q_n$  és eulerià.
- 3.9** A cadascun del grafs de l'exercici 3.1 trobeu-hi un cicle hamiltonià, o demostreu-ne la no existència.
- 3.10** Demostreu que si un graf bipartit és hamiltonià, aleshores les parts estables tenen el mateix cardinal.
- 3.11** Demostreu que un graf bipartit  $K_{r,s}$  d'ordre  $\geq 3$  és hamiltonià si, i només si,  $r = s$ .
- 3.12** Sigui  $G$  un graf que té exactament dos components connexos que són grafs hamiltonians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf hamiltonià.
- 3.13** Sigui  $G$  un graf hamiltonià que no és un graf cicle. Demostreu que  $G$  té almenys dos vèrtexs de grau  $\geq 3$ .
- 3.14** L'Àlex i l'Aran han llogat un pis per compartir. El dia de la inauguració, conviden 10 companys de facultat a sopar. En el grup de 12 persones, cadascuna en coneix almenys 6 (no cal que tots els convidats coneguin l'Àlex i l'Aran). Demostreu que es poden seure els 12 al voltant d'una taula rodona de forma que tothom conegui les dues persones que té assegudes al costat.
- A l'última hora arriba un company que també coneix almenys 6 de les persones que hi ha al sopar. Podeu ara assegurar que es poden seure seguint la condició anterior?
- 3.15** Sigui  $G$  un graf  $d$ -regular d'ordre  $\geq 2d + 2$ , amb  $d \geq 1$ . Demostreu que el complementari de  $G$  és hamiltonià.
- 3.16** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n \geq 2$  tal que cada vèrtex té grau  $\geq (n - 1)/2$ . Demostreu que  $G$  té un camí hamiltonià.

## 4 Arbres

**4.1** Per a cada enter  $n \geq 1$ , sigui  $a_n$  el nombre d'arbres no isomorfs d'ordre  $n$ . Comproveu els valors de la taula següent:

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$a_n$	1	1	1	2	3	6	11

**4.2** Proveu que tot arbre d'ordre  $n \geq 2$  és un graf bipartit.

**4.3** Sigui  $T_1$  un arbre d'ordre  $n$  i mida 17 i  $T_2$  un arbre d'ordre  $2n$ . Calculeu  $n$  i l'ordre i la mida de  $T_2$ .

**4.4** Trobeu quants arbres d'ordre  $n$  no isomorfs hi ha tals que ...

- 1) ...el seu grau màxim és  $n - 2$ .
- 2) ...el seu grau màxim és  $n - 3$ .

**4.5** Sigui  $T$  un arbre d'ordre 12 que té exactament 3 vèrtexs de grau 3 i exactament un vèrtex de grau 2.

- 1) Trobeu la seqüència de graus de  $T$ .
- 2) Trobeu dos arbres no isomorfs amb aquesta seqüència de graus.

**4.6** Trobeu un graf connex tal que tot vèrtex de grau  $\geq 2$  sigui de tall però no sigui arbre.

**4.7**

- 1) Sigui  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 2$ . Proveu que el nombre de fulles de  $T$  és

$$2 + \sum_{g(u) \geq 3} (g(u) - 2).$$



- 2) Sigui  $\Delta$  el grau màxim de  $T$  i sigui  $n_i$  el nombre de vèrtexs de grau  $i$  de  $T$ . Vegeu que la fórmula anterior es pot escriure com

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i.$$

- 3) Sigui ara  $G$  un graf connex, de grau màxim  $\Delta$  i amb  $n_i$  vèrtexs de grau  $i$ , per a tot  $i$ . Demostreu que si es compleix la igualtat

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i,$$

aleshores  $G$  és un arbre.

**4.8** Sigui  $G$  un graf connex que només té vèrtexs de grau 1 i de grau 4. Sigui  $k$  el nombre de vèrtexs de grau 4. Demostreu que  $G$  és un arbre si, i només si, el nombre de fulles és  $2k + 2$ .

**4.9** Sigui  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 2$  i de grau màxim  $\Delta$ . Proveu que  $T$  té un mínim de  $\Delta$  fulles.

**4.10** Demostreu que les afirmacions següents són equivalents per a un arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 3$ :

- a)  $T$  és isomorf al graf estrella  $K_{1,n-1}$ .
- b)  $T$  té exactament  $n - 1$  fulles.
- c)  $T$  té grau màxim  $n - 1$ .
- d)  $T$  té diàmetre igual a 2.

**4.11** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n$  i mida  $m$ . Demostreu que les propietats següents són equivalents:

- a) El graf  $G$  és connex i té un únic cicle.
- b) Existeix una aresta  $a$  de  $G$  tal que  $G - a$  és un arbre.
- c) El graf  $G$  és connex i  $n = m$ .

#### 4.12

- 1) Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents del graf cicle  $C_n$ . Quants n'hi ha llevat isomorfismes?
- 2) Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents del graf bipartit complet  $K_{2,r}$ . Quants n'hi ha llevat isomorfismes?

#### 4.13

- 1) Justifiqueu que si  $T$  és un arbre generador de  $G$  obtingut en aplicar l'algorisme BFS començant amb el vèrtex  $u$ , aleshores  $g_T(u) = g_G(u)$ .
- 2) En aplicar l'algorisme *BFS* a un graf  $G$  d'ordre  $n \geq 4$  amb vèrtex inicial  $v$  s'obté un graf estrella  $K_{1,n-1}$  del que  $v$  n'és una fulla. Doneu almenys dos grafs no isomorfs amb aquesta propietat.

**4.14** Considereu el graf  $K_{r,r+3}$ . Quants arbres no isomorfs es poden obtenir en aplicar l'algorisme DFS segons quin sigui el vèrtex inicial?

**4.15** Demostreu que si  $T$  és un arbre generador de  $G$ , aleshores les fulles de  $T$  no són vèrtexs de tall de  $G$ . Concloueu que tot graf connex d'ordre  $\geq 2$  té almenys dos vèrtexs que no són vèrtexs de tall.

**4.16** Trobeu les seqüències de Prüfer dels arbres següents:

$$\begin{aligned} T_1 &= ([6], \{12, 13, 14, 15, 56\}). \\ T_2 &= ([8], \{12, 13, 14, 18, 25, 26, 27\}). \\ T_3 &= ([11], \{12, 13, 24, 25, 36, 37, 48, 49, 510, 511\}). \end{aligned}$$

**4.17** Trobeu els arbres que tenen les seqüències de Prüfer següents:

- 1) (4,4,3,1,1),                      2) (6,5,6,5,1),                      3) (1,8,1,5,2,5),                      4) (4,5,7,2,1,1,6,6,7).

**4.18** Determineu els arbres que tenen seqüències de Prüfer de longitud 1.

**4.19** Determineu els arbres tals que

- 1) tots els valors de la seqüència de Prüfer són iguals;
- 2) a la seqüència de Prüfer apareixen exactament 2 valors diferents.

# Exercicis de repàs i consolidació

**A.1** Trobeu la matriu d'adjacència i la d'incidència del graf  $G = (V, A)$  on  $V = \{a, b, c, d, e\}$  i  $A = \{ab, ac, bc, bd, cd, ce, de\}$ .

**A.2** Doneu la llista d'adjacència i una representació gràfica del graf  $G = ([5], A)$  que té matriu d'adjacència

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**A.3** Demostreu que si un graf és d'ordre múltiple de 4 i mida senar, aleshores no és regular.

**A.4** Si un graf té grau mínim 1, grau màxim  $k$  i ordre  $n > 2k$ , aleshores  $G$  té almenys 3 vèrtexs amb el mateix grau.

**A.5** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $\geq 7$  tal que tots els vèrtexs tenen grau  $> 5$ . Demostreu que  $G$  té mida  $\geq 21$ .

**A.6** Siguin  $n \geq 3$  i  $0 \leq k \leq n$  enters i considereu el graf complet  $K_n$  amb  $[n]$  com a conjunt de vèrtexs.

- 1) Calculeu la mida del subgraf induït per  $[k]$ .
- 2) Calculeu quantes arestes hi ha que tinguin un extrem a  $[k]$  i l'altre a  $[n] \setminus [k]$ .
- 3) Calculeu la mida del subgraf induït per  $[n] \setminus [k]$ .
- 4) Emprant els resultats anteriors, demostreu que

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}.$$

**A.7** Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els grafs 4-regulars d'ordre 7.

**A.8** Sigui  $G$  un graf autocomplementari d'ordre  $n$ ,  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Demostreu que hi ha un nombre senar de vèrtexs de grau  $(n-1)/2$  i, per tant, que  $G$  conté, com a mínim, un vèrtex de grau  $(n-1)/2$ .

**A.9** Considerem el graf  $G = (V, A)$  on  $V = \{1, 2, \dots, 15\}$  i dos vèrtexs  $i, j$  són adjacents si, i només si, el seu màxim comú divisor és diferent de 1. Digueu quants components connexos té  $G$  i doneu un camí de longitud màxima.

**A.10** Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n$  i mida  $m$  que no té cap cicle de longitud 3.

- 1) Demostreu que si  $u$  i  $v$  són vèrtexs de  $G$  adjacents, aleshores  $g(u) + g(v) \leq n$ .
- 2) Proveu que si  $n = 2k$ , aleshores  $m \leq k^2$ . *Indicació:* Inducció sobre  $k \geq 1$ .

**A.11** Demostreu que en un graf connex dos camins de longitud màxima tenen com a mínim un vèrtex en comú, però no necessàriament una aresta comuna.

*Indicació:* Supposeu que dos camins de longitud màxima no tenen cap vèrtex en comú i veieu que podeu construir un camí més llarg que els de partida.

**A.12** Sigui  $G$  un graf bipartit, connex,  $d$ -regular i d'ordre  $n \geq 3$ . Proveu que  $G$  no té arestes pont.

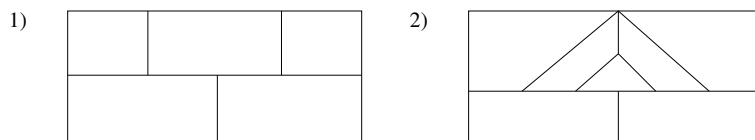
**A.13** Sigui  $G$  un graf connex no bipartit. Demostreu que entre cada dos vèrtexs qualssevol de  $G$  existeixen un recorregut de longitud senar i un de longitud parella.

*Indicació:* pot ser útil el teorema de caracterització dels grafs bipartits.

**A.14** Demostreu que si un graf és regular d'ordre parell i mida senar, aleshores no és eulerià.

**A.15** Sigui  $G$  un graf d'ordre senar tal que  $G$  i  $G^c$  són connexos. Demostreu que  $G$  és eulerià si, i només si,  $G^c$  és eulerià.

**A.16** En cadascun dels casos següents, esbrineu si és possible dibuixar una línia contínua tancada que talli exactament una vegada cada segment interior del rectangle.



**A.17** Sigui  $G$  un graf bipartit que té un camí hamiltonià i siguin  $V_1$  i  $V_2$  les parts estables. Demostreu que  $||V_1| - |V_2|| \leq 1$ .

**A.18** Demostreu que si  $n \geq 1$  i  $m = n + 1$ , aleshores el graf bipartit complet  $K_{m,n}$  té un camí hamiltonià.

**A.19** Set persones que assisteixen a un congrés volen dinar juntes en una taula rodona els tres dies que dura el congrés. Per conèixer-se millor decideixen seure de manera que dues persones siguin l'una al costat de l'altra com a molt un sol dia. Poden aconseguir el seu propòsit? I si el congrés dura 5 dies?

**A.20** Sigui  $G$  un graf hamiltonià que no és un cicle. Demostreu que si  $G$  té dos vèrtexs no adjacents de grau 3, aleshores té almenys un altre vèrtex de grau  $\geq 3$ .

**A.21** Demostreu que si  $G$  és un graf d'ordre  $n$  i mida  $\geq \binom{n-1}{2} + 2$ , aleshores  $G$  és hamiltonià. *Indicació:* useu el teorema d'Ore.

**A.22** Trobeu tots els grafs  $G$  tals que  $G$  i  $G^c$  són arbres.

**A.23** Calculeu el nombre d'arestes que cal afegir a un bosc de  $k$  component connexos per a obtenir un arbre.

**A.24** Sigui  $T$  un arbre d'ordre 7 amb un mínim de tres vèrtexs de grau 1 i un mínim de dos vèrtexs de grau 3.

- 1) Trobeu la seqüència de graus de  $T$ .
- 2) Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres que tenen aquesta seqüència de graus.

**A.25** Demostreu que si  $G$  és un graf d'ordre  $\geq 2$  que té exactament un vèrtex de grau 1, aleshores  $G$  té algun cicle.

**A.26** Demostreu que les afirmacions següents són equivalents per a un arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 3$ :

- a)  $T$  és isomorf al graf trajecte  $T_n$ .
- b)  $T$  té grau màxim 2.
- c)  $T$  té exactament 2 fulles.
- d)  $T$  té diàmetre igual a  $n - 1$ .

**A.27** Sigui  $G$  un graf que no és arbre d'ordre  $n$  i mida  $m = n - 1$ .

- 1) Proveu que  $G$  té almenys un component connex que és arbre i almenys un que no ho és.
- 2) Proveu que si  $G$  té exactament dos components connexos, aleshores el que no és arbre té exactament un cicle.

**A.28** Considereu el graf roda  $W_n$  d'ordre  $n \geq 4$ . Doneu tots els arbres no isomorfs que es poden obtenir en aplicar l'algorisme BFS segons quin sigui el vèrtex inicial.

**A.29** Indiqueu quina seqüència de Prüfer correspon a cadascun dels arbres que tenen el conjunt  $[4]$  com a conjunt de vèrtexs.

**A.30** Determineu els arbres que tenen seqüències de Prüfer amb tots els termes diferents.

**A.31** Volem demostrar que una seqüència d'enters positius  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$  és la seqüència de graus d'un arbre d'ordre  $n \geq 2$  si, i només si, es compleix  $d_1 + \dots + d_n = 2(n-1)$ . Una implicació és conseqüència directa del lema de les encaixades (comproveu-ho!). Per a demostrar l'altra implicació, ho farem per inducció sobre  $n$ , seguint els passos següents:

- 1) Escriviu la implicació que no és conseqüència del lema de les encaixades. Comproveu el cas  $n = 2$ . Escriviu la hipòtesi d'inducció per a  $n - 1$ .
- 2) Sigui  $n \geq 3$ . Demostreu que si  $d_1 + \dots + d_n = 2(n-1)$  i  $d_i \geq 1$  per tot  $i$ , aleshores  $d_n = 1$  i  $d_1 > 1$ .
- 3) Apliqueu la hipòtesi d'inducció a  $d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$  i deduïu-ne el resultat desitjat.

**A.32** Sigui  $S$  un conjunt i  $\mathcal{C}$  un conjunt finit de subconjunts de  $S$ . El *graf intersecció*  $I(\mathcal{C})$  és el graf que té  $\mathcal{C}$  com a conjunt de vèrtexs i dos vèrtexs  $A, B \in \mathcal{C}$  són adjacents si  $A \cap B \neq \emptyset$ .

- 1) Sigui  $S = [6]$  i  $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6\}\}$ . Representeu gràficament el graf  $I(\mathcal{C})$ .
- 2) Considereu el graf  $G$  que té  $[4]$  com a conjunt de vèrtexs i arestes  $12, 23, 34$  i  $41$ . Per a cada  $i \in [4]$ , considereu el conjunt  $S_i$  format pel vèrtex  $i$  i les dues arestes incidents amb  $i$ :  $S_1 = \{1, 12, 41\}, S_2 = \{2, 12, 23\}, S_3 = \{3, 23, 34\}, S_4 = \{4, 34, 41\}$ . Sigui  $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ . Demostreu que  $I(\mathcal{C})$  és isomorf a  $G$ .
- 3) Demostreu que si  $G$  és un graf, aleshores existeixen un conjunt  $S$  i un conjunt finit  $\mathcal{C}$  de subconjunts de  $S$  tals que  $G$  és isomorf al graf intersecció  $I(\mathcal{C})$ .

**A.33** Sigui  $G_1 = (V_1, A_1)$  i  $G_2 = (V_2, A_2)$  dos grafs amb  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Demostreu,

- 1) Si  $G_1$  i  $G_2$  són connexos, aleshores  $G_1 \times G_2$  és connex.
- 2) Si  $G_1$  i  $G_2$  són eulerians, aleshores  $G_1 \times G_2$  és eulerià.
- 3) Si  $G_1 \times G_2$  és eulerià, aleshores  $G_1$  i  $G_2$  són eulerians o bé tenen ordre parell.
- 4) Si  $G$  és hamiltonià, aleshores  $G \times K_2$  és hamiltonià.

**A.34** Si  $G_1$  és un graf connex i  $G_2$  no ho és, ho és el producte  $G_1 \times G_2$ ?

**A.35** Sigui  $G = (V, A)$  un graf. El *graf línia* de  $G$ ,  $LG$  és el graf que té per vèrtexs les arestes de  $G$  i dos vèrtexs de  $LG$  són adjacents si, com a arestes de  $G$ , són incidents.

- 1) Doneu el graf línia de  $K_{1,3}$ , de  $C_5$  i de  $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{12, 23, 24, 25, 34, 35, 45\})$ .
- 2) Doneu l'ordre i el grau dels vèrtexs de  $LG$  en funció dels paràmetres de  $G$ .
- 3) Proveu que si  $G$  és eulerià, aleshores  $LG$  és hamiltonià.

- 4) Trobeu un graf  $G$  tal que  $LG$  sigui hamiltonià però que  $G$  no sigui eulerià.
- 5) Proveu que si  $G$  és eulerià, aleshores  $LG$  és eulerià.
- 6) Trobeu un graf  $G$  tal que  $LG$  sigui eulerià, però  $G$  no.
- 7) Proveu que si  $G$  és hamiltonià, aleshores  $LG$  és hamiltonià.
- 8) Trobeu un graf  $G$  tal que  $LG$  sigui hamiltonià, però  $G$  no.