Teoria de grafs

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso
Dept. Matemàtiques

Setembre 2023

Tema 1

Conceptes bàsics de grafs

1. Primeres definicions
2. Graus
3. Isomorfisme de grafs
4. Tipus de grafs
5. Subgrafs

1. Primeres definicions

Un graf G és un parell (V, A) amb V un conjunt finit no buit i A un conjunt de parells no ordenats d'elements diferents de V, és a dir, $A \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$

S'anomena

vèrtexs als elements de V
arestes als elements de A
ordre de G al nombre de vèrtexs, $|V|$
mida de G al nombre d'arestes, $|A|$

Siguin $u, v \in V$ vèrtexs i $a, e \in A$ arestes de G, direm que:

u i v són adjacents o veïns si $\{u, v\} \in A$, es denota $u \sim v$ o $uv \in A$;
si u i v no són adjacents, es denota $u \not\sim v$ o $uv \notin A$
u i e són incidents si $e = \{u, w\}$, per algun $w \in V$
e i a són incidents si tenen un vèrtex en comú
grau de u és el nombre de vèrtexs adjacents a u, $g(u) = \#\{v \in V | u \sim v\}$

Observació: Si $n = |V|$ i $m = |A|$, aleshores $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

Representació gràfica d'un graf $G = (V, A)$

Els vèrtexs es representen mitjançant un punt i les arestes mitjançant una corba que uneix els dos punts que representen els vèrtexs incidents a l'aresta

Llista d'adjacències (o taula d'adjacències) d'un graf $G = (V, A)$

Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_n$ els vèrtexs de G. La llista d'adjacències de G és una llista de longitud n on a la posició i hi ha el conjunt dels vèrtexs adjacents a v_i, per a tot $i \in [n]$

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m amb $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Matriu d'adjacència de G és la matriu $M_A = M_A(G)$ de tipus $n \times n$, tal que l'element m_{ij} de la fila i columna j és

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

– M_A és binària, amb zeros a la diagonal, i simètrica
– El nombre d'uns de la fila i és el grau de v_i
– No és única, depèn de l'ordenació que s'escull al conjunt de vèrtexs

Variants de la definició de graf:

- Multigraf: graf que admet arestes múltiples, és a dir, dos vèrtexs adjacents per més d'una aresta
- Pseudograf: graf que admet arestes múltiples i llaços (aresta que uneix un vèrtex amb ell mateix)
- Graf dirigit: graf on les arestes estan orientades

2. Graus

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i $v \in V$ un vèrtex, anomenem

grau de v, $g(v)$: al nombre d'arestes incidents a v

grau mínim de G, $\delta(G)$: al mínim dels graus dels vèrtexs

grau màxim de G, $\Delta(G)$: al màxim dels graus dels vèrtexs

seqüència de graus de G:a la successió dels graus dels vèrtexs de G ordenats de forma decreixent

graf regular: al graf tal que $\delta(G) = \Delta(G)$, és a dir, tots els vèrtexs tenen el mateix grau

Remarques:

– $0 \leq g(v) \leq n - 1$

– Tot graf d'ordre ≥ 2 té almenys dos vèrtexs amb el mateix grau

Lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$

Corol.lari: Tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar

Una seqüència d'enters decreixent és gràfica si hi ha algun graf que la té com a seqüència de graus

3. Isomorfisme de grafs

Siguin $G = (V, A)$ i $G' = (V', A')$ dos grafs, direm que

▷ G i G' són grafs iguals, $G = G'$, si $V = V'$ i $A = A'$

▷ G i G' són grafs isomorfs, $G \cong G'$, si existeix una aplicació bijectiva $f : V \to V'$ tal que, per a tot $u, v \in V$,

$$u \sim v \Leftrightarrow f(u) \sim f(v),$$

a l'aplicació f se l'anomena isomorfisme de G en G'

Remarques:

– Un vèrtex i la seva imatge per un isomorfisme tenen el mateix grau

– Dos grafs isomorfs tenen la mateixa mida i el mateix ordre. El recíproc és fals

– Dos grafs isomorfs tenen la mateixa seqüència de graus. El recíproc és fals

– *Ser isomorfs* és una relació d'equivalència

4. Tipus de grafs

Siguin n un enter positiu i $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Graf nul d'ordre n, N_n: és un graf d'ordre n i mida 0
Graf trivial: N_1

Graf complet d'ordre n, K_n: és un graf d'ordre n amb totes les arestes possibles
– Mida de $K_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Graf trajecte d'ordre n, $T_n = (V, A)$: és un graf d'ordre n i mida $n-1$ amb conjunt d'arestes $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$
– $\delta(T_n) = 1$ i $\Delta(T_n) = 2$, si $n \geq 3$

Graf cicle d'ordre n, $n \geq 3$, $C_n = (V, A)$, amb $n \geq 3$: és un graf d'ordre n i mida n amb conjunt d'arestes $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$
– $\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$

Graf roda d'ordre n, $n \geq 4$, $W_n = (V, A)$: és un graf d'ordre n i mida $2n-2$ tal que $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_1\} \cup \{x_nx_1, x_nx_2, \dots, x_nx_{n-1}\}$

Siguin r i s enters positius

Graf r-regular d'ordre n: és un graf regular on r és el grau dels vèrtexs
– El graf complet K_n és un graf $(n-1)$-regular
– El graf cicle C_n és un graf 2-regular
– Si $G=(V,A)$ és un graf r-regular: $2|A| = r|V|$

Graf bipartit: és un graf $G=(V,A)$ tal que hi ha dos subconjunts no buits V_1 i V_2 de V tals que $V = V_1 \cup V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i per a tota aresta $uv \in A$ es té que $u \in V_1$ i $v \in V_2$, o viceversa.
Anomenem parts estables del graf a V_1 i V_2
– $\displaystyle\sum_{v\in V_1} g(v) = \sum_{v\in V_2} g(v) = |A|$

Graf bipartit complet, $K_{r,s} = (V,A)$: graf bipartit amb parts estables V_1 i V_2 tals que $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$ i tots els vèrtexs de V_1 són adjacents a tots els vèrtexs de V_2. És a dir, $A = \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$
– L'ordre de $K_{r,s}$ és $r+s$ i la mida és rs
– El graf $K_{1,s}$ se l'anomena graf estrella

5. Subgrafs

Sigui $G = (V, A)$ un graf

Subgraf de G, $G' = (V', A')$: és un graf amb $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$

Subgraf generador de G, $G' = (V', A')$: és un subgraf tal que $V' = V$

Subgraf induït (o generat) per $S \subseteq V$: és el graf $G[S] = (S, A')$ tal que $A' = \{uv \in A : u, v \in S\}$

5.1. Grafs derivats d'un graf

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m

Graf complementari de G, $G^c = (V^c, A^c)$: és el graf amb conjunt de vèrtexs $V^c = V$ i conjunt d'arestes $A^c = \{uv | u, v \in V \text{ i } uv \notin A\}$
– Ordre de G^c = Ordre de G
– Mida de $G^c = \frac{n(n-1)}{2} - |A|$
– $(G^c)^c = G$
– Sigui H un graf. Aleshores: $G \cong H \Leftrightarrow G^c \cong H^c$

El graf G és autocomplementari si $G \cong G^c$

Graf que s'obté per la supressió dels vèrtexs de S, $S \subset V$: graf denotat per $G - S$ amb conjunt de vèrtexs $V \setminus S$ i arestes les de G que no són incidents a cap vèrtexs de S. En cas que $S = \{v\}$, el denotem per $G - v$
– Ordre de $(G - u) = n - 1$. Mida de $(G - u) = m - g(u)$

Graf que s'obté per la supressió de les arestes de S, $S \subseteq A$: graf denotat per $G - S$ amb conjunt de vèrtexs V i conjunt d'arestes $A \setminus S$. En cas que $S = \{a\}$, el denotem per $G - a$
– Ordre de $(G - a) = n$. Mida de $(G - a) = m - 1$

Graf que s'obté per l'addició d'una aresta $a \notin A$: graf denotat per $G + a$ amb conjunt de vèrtexs V i conjunt d'arestes $A' = A \cup \{a\}$
– Ordre de $(G + a) = n$. Mida de $(G + a) = m + 1$

5.2. Operacions amb grafs

Siguin $G = (V, A)$ i $G' = (V', A')$ dos grafs

Graf reunió de G i G', $G \cup G'$: graf amb conjunt de vèrtexs $V \cup V'$ i conjunt d'arestes $A \cup A'$
– Si $V \cap V' = \emptyset$, l'ordre de $G \cup G'$ és $|V| + |V'|$ i la mida $|A| + |A'|$

Graf producte $G \times G'$: graf amb conjunt de vèrtexs $V \times V'$ i les adjacències

$$(u, u') \sim (v, v') \Leftrightarrow (uv \in A \text{ i } u' = v') \text{ o } (u = v \text{ i } u'v' \in A')$$

– L'ordre de $G \times G'$ és $|V|\,|V'|$ i la mida és $|V|\,|A'| + |V'|\,|A|$

Tema 2

Recorreguts, connexió i distància

1. Recorreguts
2. Grafs connexos
3. Vèrtexs de tall i arestes pont
4. Distància
5. Caracterització de grafs bipartits

1. Recorreguts

Sigui $G = (V, A)$ un graf, i siguin $u, v \in V$

Un recorregut de u a v o un u-v recorregut de longitud k és una seqüència de vèrtexs i arestes del graf

$$\mathcal{R} : u_0 a_1 u_1 a_2 u_2 \dots u_{k-1} a_k u_k$$

tals que $u_0 = u$, $u_k = v$ i $a_i = u_{i-1}u_i \in A$, per a tot $i \in [k]$. En general, el denotarem per $u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_k$

Direm que el recorregut $\mathcal{R}$ passa pels vèrtexs u_i i passa per les arestes $a_i = u_{i-1}u_i$

Si $u = v$ direm que és un recorregut tancat, i si $u \neq v$ direm que és un recorregut obert

Un vèrtex es considera un recorregut de longitud zero

Tipus de recorreguts: un u-v recorregut és un

- camí si tots els vèrtexs són diferents
- cicle si és un recorregut tancat de longitud ≥ 3 amb tots els vèrtexs diferents (llevat del primer i l'últim, que coincidiran per ser tancat)

Un vèrtex es considera un camí de longitud zero

Remarca Un cicle passa per dos vèrtexs u i v si, i només si, hi ha dos u-v camins que no tenen cap vèrtex en comú llevat de u i de v

Un graf sense cicles s'anomena graf acíclic

Proposició 1
Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs diferents. Si a G hi ha un u-v recorregut de longitud k, aleshores hi ha un u-v camí de longitud $\leq k$ que passa per vèrtexs i arestes del recorregut.

Proposició 2
Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs diferents. Si G té dos u-v camins diferents, llavors G conté un cicle

2. Grafs connexos

Un graf $G = (V, A)$ direm que és connex si per a tot parell de vèrtexs diferents u i v hi ha un u-v camí. Altrament direm que el graf és no connex

Remarca Si $G = (V, A)$ és un graf connex d'ordre més gran que 1, llavors $g(v) \geq 1$, per a tot $v \in V$

Definim la relació **R** a V: per a tot $x, y \in V$

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow \text{ existeix un } x - y \text{ camí a } G$$

R és una relació d'equivalència:
– Reflexiva, $x\mathbf{R}x$: existeix un x-x camí de longitud zero
– Simètrica: Si $x\mathbf{R}y$, llavors $y\mathbf{R}x$: tot x-y camí recorregut en sentit invers és un y-x camí
– Transitiva: Si $x\mathbf{R}y$ i $y\mathbf{R}z$, llavors $x\mathbf{R}z$. Amb un x-y camí $xx_1 \dots x_ny$ i un y-z camí $yy_1 \dots y_mz$, es construeix un x-v recorregut $xx_1 \dots x_nyy_1 \dots y_mz$, per tant, hi ha un x-z camí

Si $G = (V, A)$ és un graf no connex hi ha una partició de V en $k > 1$ subconjunts $V_1, V_2, \dots, V_k$, les classes d'equivalència de la relació **R**. Per tant, per tot $1 \leq i, j \leq k$,

1. $V_i \neq \emptyset$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ per a tot $i \neq j$, i $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$
2. $G[V_i]$ (el subgraf induït per V_i) és connex
3. No hi ha cap camí entre vèrtexs de $G[V_i]$ i els de $G[V_j]$, amb $i \neq j$
4. $G = \bigcup_{i=1}^{k} G[V_i]$

Anomenem components connexos del graf G als subgrafs $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$

Remarca

Sigui $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$, on G_i són els components connexos de G, llavors

$$\begin{aligned} \text{ordre } G &= \text{ordre } G_1 + \cdots + \text{ordre } G_k \\ \text{mida } G &= \text{mida } G_1 + \cdots + \text{mida } G_k \end{aligned}$$

Proposició 3

Un graf és 2-regular si, i només si, els seus components connexos són cicles

Proposició 4

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i siguin $e = xy \in A$ i $u \in V$. Aleshores

1. el graf $G - e$ té com a molt 2 components connexos; si en té 2, a un hi ha el vèrtex x i a l'altre el vèrtex y

2. el graf $G - u$ té com a molt $g(u)$ components connexos

Proposició 5

Tot graf connex d'ordre n té com a mínim $n - 1$ arestes

2.1 Algoritme DFS: Cerca en profunditat (Depth-first search)

```
Llista DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vèrtex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: la llista dels vèrtexs de G que pertanyen al mateix component connex que v
{
 Pila P;
 P.empilar(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 int x;
 while (not P.es_buida) {
  x=P.cim;
  if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
  P.empilar(y);
  W.afegir(y);
  }
  else {
  P.desempilar;
  }
 }
 return W;
}
```

Teorema 6 Sigui $G = (V, A)$ un graf i v un vèrtex de G. El subgraf $G[W]$ induït pels vèrtexs de G visitats emprant l'algorisme DFS és el component connex de G que conté v

3. Vèrtexs de tall i arestes pont

Sigui $G = (V, A)$ un graf. Siguin $v \in V$ i $a \in A$, direm que

- v és un vèrtex de tall o vèrtex d'articulació si $G - v$ té més components connexos que G
- a és una aresta pont si $G - a$ té més components connexos que G

Remarques

1. Si G és connex i u és un vèrtex de tall, llavors $G - u$ és un graf no connex amb com a molt $g(u)$ components connexos
2. Els vèrtexs de grau 1 no són vèrtex de tall
3. Si G és connex i a és una aresta pont, llavors $G - a$ és un graf no connex amb exactament 2 components connexos

Teorema 7 Caracterització dels vèrtexs de tall

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex. Un vèrtex u de G és de tall si, i només si, existeixen un parell de vèrtexs x, y diferents d'u tals que tot x-y camí passa per u

Teorema 8 Caracterització de les arestes pont

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i $a = uv$ una aresta de G. Són equivalents:

(a) a és una aresta pont

(b) existeixen un parell de vèrtexs x, y tals que tot x-y camí passa per a

(c) per l'aresta a no passa cap cicle

Remarques

1. Un graf pot tenir vèrtexs de tall però cap aresta pont
2. Sigui $a = uv$ una aresta pont. Si $g(u) = 1$, u no és un vèrtex de tall; si $g(u) \geq 2$, el vèrtex u és de tall
3. L'únic graf connex amb una aresta pont i cap vèrtex de tall és el K_2

4. Distància

Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs de G

- Si u, v són al mateix component connex, definim distància entre u i v, $d(u, v)$, com el valor mínim entre les longituds de tots els u-v camins. Altrament direm que la distància és ∞
- Excentricitat del vèrtex u, $e(u)$: la distància més gran entre u i qualsevol altre vèrtex de G, és a dir, $e(u) = \text{màx}\{d(u, v) | v \in V\}$
- Diàmetre de G, $D(G)$: la màxima de les distàncies entre els vèrtexs de G, que equival al màxim de les excentricitats dels vèrtexs de G, és a dir,

$$D(G) = \text{màx}\{d(u, v) | u, v \in V\} = \text{màx}\{e(u) | u \in V\}$$

- Radi de G, $r(G)$: mínim de les excentricitats dels vèrtexs de G,

$$r(G) = \text{mín}\{e(u) | u \in V\}$$

- Vèrtexs centrals de G: vèrtexs de G tals que la seva excentricitat és igual al radi de G,

$$\{u \in V : e(u) = r(G))\}$$

- Centre de G: subgraf induït pels vèrtexs centrals

Remarques

1. $xy \in A \Leftrightarrow d(x, y) = 1$
2. G és no connex $\Leftrightarrow D(G) = \infty \Leftrightarrow r(G) = \infty \Leftrightarrow e(u) = \infty, \forall u \in V$
3. Es compleix $r(G) \leq D(G) \leq 2\, r(G)$.

En un graf $G = (V, A)$ (connex) per a vèrtexs u, v, w qualssevol es satisfà:

1. $d(u, v) \geq 0$, i $d(u, v) = 0$ si, i només si, $u = v$
2. $d(u, v) = d(v, u)$
3. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (desigualtat triangular)

4.1 Algorisme BFS: Cerca en amplada (Breadth First Search)

```
vector BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: un vector D tal que D[x]=d(v,x)
{
 Cua C;
 C.demanar_torn(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 vector<int> D(n);
 D[v]=0;
 int x;
 while (not C.es_buida) {
  x=C.primer;
  if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
  C.demanar_torn(y);
  W.afegir(y);
  D[y]=D[x]+1;
  }
  else {
  C.avançar;
  }
 }
 return D;
}
```

Teorema 9 Sigui $G = (V, A)$ un graf i $v \in V$. El vector D donat per l'algorisme BFS emmagatzema la distància del vèrtex v a qualsevol altre vèrtex del graf

5. Caracterització dels grafs bipartits

Lema 10
Sigui $G = (V, A)$ un graf
1. Si a G hi ha un recorregut tancat de longitud senar, aleshores a G hi ha un cicle de longitud senar.
2. L'existència de recorreguts tancats de longitud parella a G no assegura la existència de cicles a G.

Teorema 11 Caracterització dels grafs bipartits

Un graf d'ordre ≥ 2 és bipartit si, i només si, no té cicles de longitud senar

Tema 3

Grafs eulerians i grafs hamiltonians

1. Grafs eulerians
2. Grafs hamiltonians

1. Grafs eulerians

Un recorregut d'un graf s'anomena senderó si és obert i no repeteix arestes, i s'anomena circuit si és tancat, no trivial i no repeteix arestes

Sigui G un graf connex, s'anomena

– senderó eulerià a un senderó que passa per totes les arestes de G

– circuit eulerià a un circuit que passa per totes les arestes de G

– graf eulerià a G si té un circuit eulerià

Teorema Caracterització dels grafs eulerians

Sigui G un graf connex no trivial. Aleshores,

G és eulerià si, i només si, tots els vèrtexs tenen grau parell

Corol.lari

Un graf connex té un senderó eulerià si, i només si, té exactament dos vèrtexs de grau senar
En aquest cas, el senderó eulerià comença en un vèrtex de grau senar i acaba en l'altre vèrtex de grau senar

2. Grafs hamiltonians

Sigui G un graf connex, s'anomena

– camí hamiltonià a un camí no tancat que passa per tots el vèrtexs de G

– cicle hamiltonià a un cicle que passa per tots els vèrtexs de G

– graf hamiltonià a G si té un cicle hamiltonià

Condicions necessàries

Sigui $G = (V, A)$ un graf hamiltonià d'ordre n, aleshores

(1) $g(v) \geq 2$, per a tot $v \in V$

(2) si $S \subset V$ i $k = |S|$, el graf $G - S$ té com a molt k components connexos

Condicions suficients

Teorema de Ore $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tot $u, v \in V$ diferents i no adjacents es té $g(u) + g(v) \geq n$. Aleshores, G és un graf hamiltonià

Teorema de Dirac $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(u) \geq n/2$, per a tot $u \in V$. Aleshores, G és hamiltonià

Tema 4

Arbres

1. Arbres i teorema de caracterització
2. Arbres generadors
3. Enumeració d'arbres

1. Arbres i teorema de caracterització

Anomenarem

– arbre a un graf connex i acíclic

– bosc a un graf acíclic

– fulla a tot vèrtex d'un arbre o d'un bosc que tingui grau 1

Observació: Els components connexos d'un bosc són arbres

Remarques: Siguin $T = (V, A)$ un arbre, a una aresta i u un vèrtex de T. Llavors

1. T conté almenys una fulla
2. a és aresta pont
3. $T - a$ és un bosc de 2 components connexos
4. si $g(u) \geq 2$, u és un vèrtex de tall
5. $T - u$ és un bosc de $g(u)$ components connexos
6. si u és una fulla, aleshores $T - u$ és un arbre

Proposició 1
Tot graf acíclic d'ordre n té mida com a molt $n-1$.

Teorema 2 Caracterització d'arbres
Sigui $T=(V,A)$ un graf d'ordre n i mida m. Aleshores, són equivalents

(a) T és un arbre
(b) T és acíclic i $m=n-1$
(c) T és connex i $m=n-1$
(d) T és connex i tota aresta és pont
(e) per cada parell de vèrtexs u i v hi ha un únic u-v camí a T
(f) T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle

Corol·lari 3
Un bosc G d'ordre n i k components connexos té mida $n-k$

Corol·lari 4
Si T és un arbre d'ordre $n \geq 2$, T té almenys dos vèrtexs de grau 1

2. Arbres generadors

Anomenarem arbres generadors (o d'expansió) als subgrafs d'un graf que són subgrafs generadors i a més arbres

Teorema 5
$G = (V, A)$ és un graf connex si, i només si, G té un arbre generador

2.1 Algoritme DFS per a obtenir arbres generadors

```
arbre DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
 Pila P;
 P.empilar(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 Llista B;
 int x;
 while (not P.es_buida) {
  x=P.cim;
  if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
  P.empilar(y);
  W.afegir(y);
  B.afegir(xy);
  }
  else {
  P.desmpilar;
  }
 }
 return (W,B);
}
```

Teorema 6
$T = (W, B)$ és un arbre generador del component connex de G que conté v

2.2 Algoritme BFS per a obtenir arbres generadors

```
arbre BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d’ordre n i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
 Cua C;
 C.demanar_torn(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 Llista B;
  int x;
 while (not C.es_buida) {
  x=C.primer;
  if(’’hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W’’) {
  C.demanar_torn(y);
  W.afegir(y);
  B.afegir(xy);
  }
  else {
  C.avançar;
  }
 }
 return (W,B);
}
```

Teorema 7
$T = (W, B)$ és un arbre generador del component connex de G que conté v

3. Enumeració d'arbres

Teorema de Cayley
El nombre d'arbres generadors diferents del graf complet K_n és n^{n-2}

El teorema equival a dir que el nombre d'arbres diferents d'ordre n amb conjunt de vèrtexs $[n]$ és n^{n-2}

La prova es basa en la construcció d'una aplicació bijectiva

$$Pr : \{T : T \text{ arbre generador de } K_n\} \longrightarrow [n]^{n-2},$$

suposant que el conjunt de vèrtexs de K_n és $[n]$

S'anomena seqüència de Prüfer de T a la imatge de T per l'aplicació Pr:

$$Pr(T) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})$$

- Construcció de la seqüència de Prüfer d'un arbre $T = ([n], A)$

Construcció recursiva

```
vector seqPrufer(arbre T, int n)
/* Pre: un arbre T amb conjunt de vèrtexs {1,2,...,n}
/* Post: un vector de longitud n-2 contenint la seqüència de Prüfer de T

{
 arbre Taux=T;
 int k=0;
 int fulla;
 vector<int> seq(n);
 while(k < n-2) {
  fulla=''fulla de Taux amb etiqueta més petita'';
  seq[k]=''vèrtex adjacent a fulla'';
  Taux=Taux-fulla;
  k++;
}
return seq;
}
```

Observacions:

Siguin $b_1, \ldots, b_{n-2}$ els vèrtexs de T que en algun moment han estat fulla en l'algorisme

- `Taux` és un arbre en cada pas de l'algorisme
- els vèrtexs $b_1, \ldots, b_{n-2}$ són 2 a 2 diferents
- $T - \{b_1, \ldots, b_{n-2}\} \simeq K_2$
- n és un dels vèrtexs de $T - \{b_1, \ldots, b_{n-2}\}$
- $x \in [n]$ apareix a la seqüència de Prüfer tants cops com $g(x) - 1$
- els vèrtexs que no apareixen a la seqüència de Prüfer són fulles de T

• Reconstrucció de l'arbre T a partir d'una paraula $(a_1, \dots, a_{n-2})$ en l'alfabet $[n]$. És a dir, definir l'aplicació inversa de Pr

```
arbre arbrePrufer(vector<int> seq, int n)
/* Pre: un vector de n-2 enters entre 1 i n
/* Post: l'arbre que té seq com a seqüència de Prüfer

{
 Llista A;
 vector<int> fulles(n-1);
 fulles[0]=min([n]-{seq[0],seq[1],...,seq[n-3]});
 A.afegir({seq[0],fulles[0]});
 int k=1;
 while(k < n-2) {
  fulles[k]=min([n]-{seq[k],seq[k+1],...,seq[n-3],fulles[0],...,fulles[k-1]});
  A.afegir({seq[k],fulles[k]});
  k++;
  }
 fulles[n-2]=min([n]-{fulles[0],...,fulles[n-3]});
 A.afegir({fulles[n-2],n});
 return ([n],A);
}
```