6
Espais vectorials

6.1 Siguin $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ vectors de $\mathbb{R}^3$. Calculeu:

1) $u - v$; 2) $5v + 3w$; 3) $5(v + 3w)$ 4) $(2w - u) - 3(2v + u)$.

Solució:

(1) $u - v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(2) $5v + 3w = 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -3 \\ -52 \end{pmatrix}$.

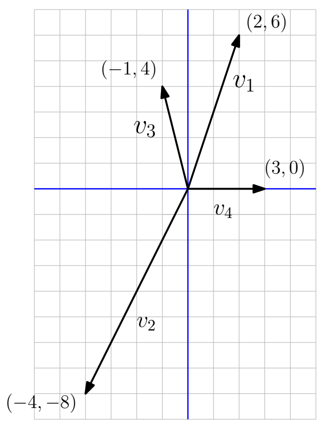
(3) $5(v + 3w) = 5v + 15w = 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ -15 \\ -100 \end{pmatrix}$.

(4) $(2w - u) - 3(2v + u) = -4u - 6v + 2w = -4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix}$.

6.2 Dibuixeu en el pla els vectors següents de $\mathbb{R}^2$.

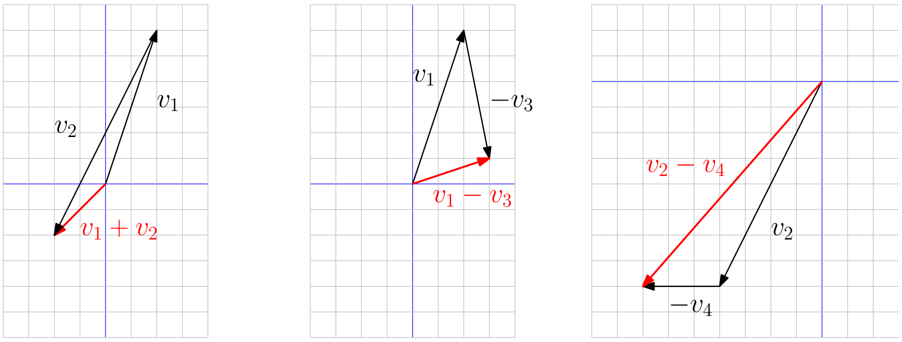
1) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; 2) $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$; 3) $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; 4) $v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solució:



6.3 Per als vectors de l'exercici anterior, calculeu $v_1 + v_2$, $v_1 - v_3$ i $v_2 - v_4$ gràficament i comproveu les vostres respostes algebraicament.

Solució: $v_1 + v_2 = \binom{-2}{-2}$, $v_1 - v_3 = \binom{3}{1}$ i $v_2 - v_4 = \binom{-7}{-8}$.



$v_1 + v_2 = (-2, -2)$ $v_1 - v_3 = (3, 1)$ $v_2 - v_4 = (-7, -8)$

6.4 Siguin u, v, w elements d'un espai vectorial i siguin α, β, γ elements del cos d'escalars amb $\alpha \neq 0$. Suposem que es compleix la relació $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Escriviu els vectors u, $u - v$ i $u + \alpha^{-1}\beta v$ en funció de v i w.

Solució: Com que $\alpha \neq 0$, es pot aïllar u de la condició de l'enunciat i s'obté:

$$u = \frac{-\beta}{\alpha}v - \frac{\gamma}{\alpha}w.$$

Per tal d'obtenir ara $u - v$ en funció només de v, w només cal substituir aquesta expressió de u a $u - v$ i agrupar els termes en v i en w, la qual cosa dona:

$$u - v = \frac{-\beta}{\alpha}v - \frac{\gamma}{\alpha}w - v = -\frac{\beta + \alpha}{\alpha}v - \frac{\gamma}{\alpha}w.$$

Finalment, per tal d'obtenir $u + \alpha^{-1}\beta v$ en termes de v, w fem el mateix:

$$u + \alpha^{-1}\beta v = \frac{-\beta}{\alpha}v - \frac{\gamma}{\alpha}w + \alpha^{-1}\beta v = -\frac{\gamma}{\alpha}w.$$

6.5 Sigui $P(\mathbb{R})_p$ el conjunt de tots els polinomis amb coeficients a $\mathbb{R}$ i on totes les potències de x tenen grau parell. Esbrineu si $P(\mathbb{R})_p$ és un espai vectorial amb les operacions de suma i producte per escalar habituals. (Considerem que el polinomi 0 té grau 0.)

Solució: Correspon a comprovar que $P(\mathbb{R})_p$ és un subespai vectorial de l'espai vectorial $P(\mathbb{R})$ de tots els polinomis. Per tant, cal comprovar que: 1) $P(\mathbb{R})_p \neq \emptyset$, 2) $P(\mathbb{R})_p$ és tancat per sumes (és a dir, la suma de polinomis de $P(\mathbb{R})_p$ continua sent un element de $P(\mathbb{R})_p$), i 3) és tancat per producte per escalars (i.e. el producte per escalars de qualsevol polinomi de $P(\mathbb{R})_p$ continua sent un element de $P(\mathbb{R})_p$).

1) És no buit ja que, per exemple, $p(x) = 1 \in P(\mathbb{R})_p$.

2) És tancat per sumes ja que si $p(x), q(x)$ són dos polinomis qualssevol amb tots els termes de grau parell, la seva suma $p(x)+q(x)$ continua essent un polinomi amb tots els termes de grau parell.

3) És tancat pel producte per escalars ja que si $p(x)$ és un polinomi amb tots els termes dde grau parell, el polinomi $\lambda p(x)$ continua tenint tots els termes de grau parell per a qualsevol $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.6 Considereu el conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ format per totes les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donades dues funcions $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim les funcions $f+g$ i λf com:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Demostreu que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ amb aquestes operacions és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Solució: És evident que el producte per un escalar d'una funció real de variable real té com a resultat una funció real de variable real, igual que la suma. L'element neutre és la funció constant $f(x) = 0$. L'element oposat de $f(x)$ existeix sempre i és $-f(x)$. La comprovació de les altres propietats es pot demostrar utilitzant les propietats dels reals.

6.7 Esbrineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$. (Justifiqueu les respostes.)

$$E_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x + \pi y = 0\}, \qquad E_5 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0, x - t = 0\},$$

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + z = \pi\}, \qquad E_6 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 = 0\},$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}, \qquad E_7 = \{\begin{pmatrix} a+b \\ a-2b \\ c \\ 2a+c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

$$E_4 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}, \qquad E_8 = \{\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ b+a \\ 2+a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Solució: En cada cas cal comprovar que són conjunts no buits i tancats per sumes i per producte per escalars. Per conveniència, denotarem els vectors per $(a_1, \dots, a_n)$ enlloc de representar-los per matrius columna.

E_1: És no buit, per exemple, $(0,0) \in E_1$. Suposem que $(x,y), (x',y') \in E_1$. Vol dir que $x + \pi y = 0$ i que $x' + \pi y' = 0$. Sumant aquestes dues equacions i agrupant termes resulta que:
$$(x + x') + \pi(y + y') = 0,$$
que és justament la condició per tal que $(x+x', y+y') \in E_1$. Per tant, E_1 és tancat per sumes. Anàlogament, si $(x,y) \in E_1$ és que $x + \pi y = 0$. Per tant, qualsevol que sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ també es complirà que $\lambda(x + \pi y) = 0$, i això vol dir que:
$$\lambda x + \pi(\lambda y) = 0,$$
que és justament la condició per tal que $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ pertanyi a E_1. Per tant, E_1 també és tancat per producte per escalars i E_1 és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

E_2: És no buit, però no és tancat per sumes. Per exemple, $(1, 0, \pi - 1)$ i $(0, 0, \pi)$ són vectors de E_2 però la seva suma:

$$(1, 0, \pi - 1) + (0, 0, \pi) = (1, 0, 2\pi - 1)$$

no és de E_2, ja que en aquest cas $x + z = 2\pi \neq \pi$. De fet, tampoc és tancat per producte per escalars. Per tant, E_2 no és subespai de $\mathbb{R}^3$.

També es pot deduir que E_2 no és subespai vectorial tenint en compte que tot subespai ha de contenir el vector zero, i en aquest cas $(0, 0, 0) \notin E_2$, ja que $0 + 0 \neq \pi$.

E_3: Tampoc és tancat per sumes. Per exemple, $(0, 1, 0), (1, 0, 0)$ són vectors de E_3 (les seves coordenades compleixen $xy = 0$), però la seva suma $(1, 1, 0)$ no ho és, ja que ara $xy = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$. Per tant, E_3 no és subespai de $\mathbb{R}^3$.

E_4: És tancat per sumes perquè la suma de dos racionals sempre és un racional, perè no ho és pel producte per escalars, ja que els escalars són nombres reals qualssevol, en particular, poden no ser racionals. Per exemple, $(1, 0)$ és de E_4, però en canvi no ho és el seu múltiple $\sqrt{2}(1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$. Per tant, E_4 no és subespai de $\mathbb{R}^2$.

E_5: És no buit perquè conté almenys la solució trivial $(0, 0, 0, 0)$. És tancat per sumes ja que si $(a, b, c, d), (a', b', c', d')$ són dues solucions del sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ x - t &= 0 \end{aligned}$$

de manera que:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ a - d &= 0 \\ a' + b' + c' + d' &= 0 \\ a' - d' &= 0 \end{aligned}$$

sumant la primera i tercera equacions i la segona i quarta i agrupant termes resulta que:

$$\begin{aligned} (a + a') + (b + b') + (c + c') + (d + d') &= 0 \\ (a + a') - (d + d') &= 0, \end{aligned}$$

és a dir, $(a + a', b + b', c + c', d + d')$ també és solució del sistema. Finalment, també és tancat pel producte per escalars ja que si $(a, b, c, d) \in E_5$ és que $a+b+c+d = 0$ i $a-d = 0$ i aleshores també es compleix que

$$(\lambda a) + (\lambda b) + (\lambda c) + (\lambda d) = \lambda(a + b + c + d) = \lambda 0 = 0$$

i que:

$$(\lambda a) - (\lambda d) = \lambda(a - d) = \lambda 0 = 0$$

qualsevol que sigui $\lambda \in \mathbb{R}$. Per tant, $\lambda(a, b, c, d) \in E_5$. En general, un raonament similar prova que el conjunt de solucions de qualsevol sistema d'equacions lineals *homogeni* amb n incògnites és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

E_6: És el conjunt de vectors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 = 0$ o, equivalentment, tals que $x + y = 0$. Per tant, E_6 és de fet el format per tots els vectors de la forma $(a, -a)$ per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$, i aquest conjunt és clarament no buit i tancat per sumes i per producte per escalars. Per tant, E_6 és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

E_7: És el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ de la forma:

$$\begin{aligned}(a+b, a-2b, c, 2a+c) &= (a, a, 0, 2a) + (b, -2b, 0, 0) + (0, 0, c, c) \\ &= a(1, 1, 0, 2) + b(1, -2, 0, 0) + c(0, 0, 1, 1)\end{aligned}$$

per $a, b, c \in \mathbb{R}$ qualssevol, és a dir, és el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $(1, 1, 0, 2), (1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$. Ara, en general, el conjunt de totes les combinacions lineals de qualsevol família donada de vectors d'un espai vectorial, en aquest cas de $\mathbb{R}^4$, sempre és un subespai vectorial de l'espai vectorial en qüestió. És el que s'anomena el *subespai vectorial generat per la família donada de vectors*. Per tant, E_7 és un subespai de $\mathbb{R}^4$.

E_8: A diferència del cas anterior, ara E_8 no és el conjunt de combinacions lineals de quatre vectors donats degut a què a la primera coordenada el paràmetre a apareix elevat al quadrat (i que a la quarta coordenada apareix un 2 sumat a a). De fet, E_8 no és tancat per sumes. Per ex., $(0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 3) \in E_8$ (corresponen als vectors amb $a = b = 0$ el primer i $a = 0$ i $b = 1$ el segon). En canvi, la seva suma $(0, 0, 1, 5)$ no és de E_8 ja que el sistema d'equacions:

$$a^2 = 0, \quad a = 0, \quad b + a = 1, \quad 2 + a = 5$$

no té solució. Per tant, E_8 no és subespai.

Observació. També es pot justificar que E_1, E_5 i E_6 són subespais com a conseqüència d'un resultat vist a teoria: *el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n incògnites és subespai de $\mathbb{R}^n$*. Els conjunts E_1 i E_5 estan donats directament com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni. El conjunt E_6 hem vist que equival al conjunt de solucions del sistema homogeni que té només una equació, $x + y = 0$. Per tant, tots tres són subespais vectorials.

6.8 Denotem per $P(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals i variable x. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $P(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned}F_1 &= \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P(\mathbb{R}) : a_2 = a_0\} \\ F_2 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau } 3\} \\ F_3 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau parell}\} \\ F_4 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \\ F_5 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\} \\ F_6 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p'(5) = 0\}\end{aligned}$$

Solució:

1) Un polinomi arbitrari $p(x)$ de F_1 s'expressa com:

$$p(x) = a_3x^3 + a_0x^2 + a_1x + a_0 = a_3x^3 + a_0(x^2 + 1) + a_1x;$$

és a dir, $p(x)$ és una combinació lineal dels polinomis x^3, $x^2 + 1$ i x. Està clar que una combinació lineal d'aquests polinomis pertany a F_1. Per tant:

$$F_1 = \langle x^3, x^2 + 1, x \rangle$$

i, per tant, F_1 és un subespaci vectorial.

2) No, perquè, per exemple, la suma de $x^3 + x$ i $-x^3 + x$ és $2x$, que no té grau 3.

3) No, perquè, per exemple, la suma de $x^2 + x$ i $-x^2 + x$ és $2x$, que no té grau parell.

4) F_4 sí és un subespaci vectorial. En primer lloc, $x - 1 \in F_4$ i, per tant, $F_4 \neq \emptyset$. Segon, si $p(x), q(x) \in F_4$, llavors $p(1) = q(1) = 0$ i per tant $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$. Finalment, si $p(x) \in F_4$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors $\lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$ i, per tant, $\lambda p(x) \in F_4$.

5) F_5 no és un subespai perquè si $p(0) = q(0) = 1$, llavors $(p+q)(0) = p(0)+q(0) = 1+1 = 2$; és a dir, si $p(x), q(x) \in F_5$, llavors $p(x) + q(x) \notin F_5$.

6) F_6 sí és un subespaci vectorial. En primer lloc, $(x - 5)^2 \in F_6$ i, per tant, $F_6 \neq \emptyset$. Segon, si $p(x), q(x) \in F_6$, llavors $p'(5) = q'(5) = 0$ i per tant $(p + q)'(5) = p'(5) + q'(5) = 0 + 0 = 0$. Finalment, si $p(x) \in F_6$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors $\lambda p'(5) = \lambda \cdot 0 = 0$ i, per tant, $\lambda p(x) \in F_6$.

6.9 Considerem $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius $n \times m$ amb coeficients reals. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\
M_2 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : A = A^t\} \\
M_3 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : a_{1\,i} = 0 \ \forall i \in [m]\} \\
M_4 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : a_{1\,i} = 1 \ \forall i \in [m]\} \\
M_5 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : AB = 0\} \quad \text{(on } B \text{ és una matriu fixa)}
\end{aligned}
$$

Solució: A tots els apartats, O denota la matriu nul·la del tipus $n \times m$ indicat a l'apartat, és a dir, la matriu $n \times m$ amb tots els elements iguals a 0.

M_1: Sí. Si $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores $M_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : AM = MA\}$, i és un subespai de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ja que es compleix:

- $M_1 \neq \emptyset$, ja que $OM = MO = O$, i per tant $O \in M_1$.
- Si $A, A' \in M_1$ aleshores $AM = MA$ i $A'M = MA'$, d'on deduïm que $(A + A')M = AM + A'M = MA + MA' = M(A + A')$. Per tant, $A + A' \in M_1$.
- Si $A \in M_1$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $AM = MA$, d'on deduïm que $(\lambda A)M = \lambda(AM) = \lambda(MA) = M(\lambda A)$. Per tant, $\lambda A \in M_1$.

M_2: Si $m \neq n$, aleshores M_2 és buit, i no és subespai. Si $n = m$, aleshores M_2 és subespai $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ja que:

- $M_2 \neq \emptyset$, ja que $O = O^t$ i per tant $O \in M_2$.
- Si $A, B \in M_2$ aleshores $A = A^t$ i $B = B^t$, d'on deduïm que $A+B = A^t+B^t = (A+B)^t$. Per tant, $A + B \in M_2$.
- Si $A \in M_2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $\lambda A = \lambda A^t = (\lambda A)^t$. Per tant, $\lambda A \in M_2$.

M_3: Sí. Observem que M_3 conté totes les matrius tals que tots els elements de la primera fila són nuls i es compleix:

- $M_3 \neq \emptyset$, ja que $O \in M_3$.
- Si $A, B \in M_3$, aleshores els elements de la primera fila de A i de B són nuls, d'on deduïm que els elements de la primera fila de $A+B$ també ho són. Per tant, $A+B \in M_3$.
- Si $A \in M_3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores els elements de la primera fila de A són nuls, d'on deduïm que els elements de la primera fila de λA també ho són. Per tant, $\lambda A \in M_3$.

M_4: No és subespai. La matriu nul·la $n \times m$, no és del conjunt M_4, per tant, M_4 no és subespai de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

M_5: Sí, ja que es compleix:

- $M_5 \neq \emptyset$, ja que $OB = O$ i per tant $O \in M_5$.
- Si $A, A' \in M_5$ aleshores $AB = O$ i $A'B = O$, d'on deduïm que $(A+A')B = AB+A'B = O+O = O$. Per tant, $A + A' \in M_5$.
- Si $A \in M_5$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $AB = O$, d'on deduïm que $(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda O = O$. Per tant, $\lambda A \in M_5$.

6.10 Considerem el conjunt $T \subset \mathbb{R}^4$. Proveu que el vector u es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt T almenys de dues maneres diferents.

$$T = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solució: Si escrivim el vector u com a combinació lineal dels vectors de T, obtenim el sistema d'equacions següent, que és compatible indeterminat, donat que el rang de la matriu del sistema és 3 i el rang de la matriu ampliada és 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solució s'expressa com:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dues solucions: fem $s=0$ i $s=1$ i obtenim:

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Per tant, el vector u es pot expressar com:

$$u=\begin{pmatrix}0\\3\\5\\1\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

6.11 Per a quins valors del paràmetre $a\in\mathbb{R}$ el vector $u\in\mathbb{R}^3$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt T?

$$u=\begin{pmatrix}1\\5\\a\end{pmatrix}, \quad T=\{\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\}$$

Solució: És equivalent a dir que el sistema:

$$\begin{cases} 3x-z &= 1\\ x+7y+2z &= 5\\ -x-y &= a\end{cases}$$

és compatible. Tenim:

$$\begin{pmatrix}3&0&-1&1\\1&7&2&5\\-1&-1&0&a\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&7&2&5\\-1&-1&0&a\\3&0&-1&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&7&2&5\\0&6&2&5+a\\0&-21&-7&-14\end{pmatrix}$$
$$\equiv\begin{pmatrix}1&7&2&5\\0&3&1&(5+a)/2\\0&3&1&2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&7&2&5\\0&3&1&(5+a)/2\\0&0&0&2-(5+a)/2\end{pmatrix}.$$

El sistema és compatible si i només si el rang de la matriu del sistema coincideix amb el rang de la matriu ampliada i això passa si i només si $a=-1$. Finalment, la solució és $x=1-y$, $z=2-3y$, amb y lliure.

6.12 Doneu els valors dels paràmetres a i b per als quals la matriu $\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}$ és combinació lineal de $\begin{pmatrix}1&4\\-5&2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$.

Solució: És equivalent a dir que el sistema:

$$\begin{cases} \lambda+\beta &= 1\\ 4\lambda+2\beta &= 0\\ -5\lambda+3\beta &= a\\ 2\lambda-\beta &= b\end{cases}$$

és compatible. Resolent per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & a \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & a+5 \\ 0 & -3 & b-2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & a+5 \\ 0 & -3 & b-2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-11 \\ 0 & 0 & b+4 \end{pmatrix}$$

obtenim que per ser compatible si i només si $a = 11$ i $b = -4$.

6.13 Donats els vectors $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^3$, trobeu quina condició han de complir les components d'un vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ per a que pertanyi al subespai generat per $\{u, v\}$.

Solució: Sigui $F = \langle u, v \rangle$ el subespai generat pels dos vectors. Per definició, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in F$ si i només si és combinació lineal de u, v; és a dir, si i només si existeixen escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tals que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta equació vectorial en λ, μ equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} \lambda &= x \\ \lambda + \mu &= y \\ 2\lambda + \mu &= z \end{aligned}$$

Per tant, el vector és de F si i només si aquest sistema d'equacions lineals en λ, μ té solució, i el que busquem és la condició o condicions de compatibilitat d'aquest sistema. La matriu ampliada, un cop esglaonada, és:

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y-x \end{array}\right).$$

Per tant, el sistema és compatible si i només si $z - y - x = 0$, que és la condició necessària i suficient buscada per tal que el vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ sigui de F.

6.14 Doneu la forma genèrica dels polinomis de $P(\mathbb{R})$ que pertanyen al subespai vectorial generat pel conjunt $\{1 + x, x^2\}$.

Solució: El subespai generat en qüestió és el format per totes les combinacions lineals dels dos polinomis. Per tant, un polinomi genèric d'aquest subespai és de la forma:

$$\lambda\,(1 + x) + \mu\, x^2 = \lambda + \lambda\, x + \mu\, x^2$$

per a qualssevol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6.15 Siguin $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $G = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ subespais de $\mathbb{R}^3$.

1) Demostreu que $F = G$.

2) Sigui $e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Proveu que $e \in F$ i expresseu-lo com a combinació lineal dels conjunts de vectors que generen F.

Solució:

1) Cal provar les dues inclusions $F \subseteq G$ i $G \subseteq F$. Per tal de provar qualsevol d'aquestes inclusions, per exemple que $F \subseteq G$, n'hi ha prou amb provar que els generadors de F pertanyen a G, que vol dir que són combinació lineal dels generadors de G. En efecte, si és així, un vector qualsevol de F, en ser una combinació lineal dels generadors de F, és una combinació lineal de combinacions lineals dels generadors de G, i això acaba sent una combinació lineal dels generadors de G i, per tant, també un element de G. Anàlogament, la inclusió $G \subset F$ queda provada comprovant simplement que els generadors de G són de F. Comprovem les dues coses.

- Els generadors de F són combinació lineal dels generadors de G: en efecte, només cal comprovar que les equacions vectorials:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  en a, b, c, d com a incògnites tenen solució. Escrivint els sistemes d'equacions lineals corresponents a cada equació i analitzant-los s'obté que efectivament tenen solució i és:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Els generadors de G són combinació lineal dels de F: ara cal resoldre les equacions vectorials:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = c' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + d' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  en a', b', c', d' com a incògnites. Escrivint els sistemes d'equacions lineals corresponents a cada equació i resolent-los s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativament, com que només ens interessa saber si els generadors de F són combinació lineal dels de G, i els de G ho són dels de F, sense necessitat de trobar quines combinacions lineals són, n'hi ha prou amb estudiar el rang de la matriu que té per columnes els quatre vectors, els dos generadors de F més els dos generadors de G. Esglaonant-la s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, és matriu de rang 2. Però el rang d'una matriu dóna el nombre màxim de columnes linealment independents. Com que les dues últimes columnes (generadors de G) ja ho són, deduïm que les dues primeres (generadors de F) són necessàriament combinació lineal de les dues últimes i, per tant, que $F \subseteq G$. Anàlogament, com que les dues primeres columnes (generadors de F) també són linealment independents, deduïm que les dues últimes (generadors de G són combinació lineal de les primeres i, per tant, que també $G \subseteq F$.

2) Per tal de veure que $e \in F$ només cal comprovar que e és combinació lineal dels generadors de F, cosa que es pot fer comprovant que la matriu que té per columnes els dos generadors de F més el vector e és de rang 2. Però com que ens demanen també trobar quina combinació lineal és, ho fem plantejant directament l'equació vectorial:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en a, b com a incògnites i resolent el corresponent sistema d'equacions lineals. Aquest és el de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & -1 & 1-\sqrt{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant:

$$e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (8+\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Anàlogament, es pot comprovar que e també es pot obtenir com la combinació lineal dels generadors de G:

$$e = \frac{17+\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6.16 Esbrineu si els conjunts de vectors següents són linealment independents a l'espai vectorial que s'indica.

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ a $\mathbb{R}^3$;

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a $\mathbb{R}^3$;

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a $\mathbb{R}^3$;

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ a $\mathbb{R}^4$;

5) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$ a $\mathbb{R}^5$.

Solució: En cada cas hem de calcular el rang de la matriu associada als vectors.

1) El rang de la matriu és 2 i per tant els vectors són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) El rang de la matriu és 3 i per tant els vectors són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 13 & 7 \\ 0 & 14 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

3) En aquest cas, el rang de la matriu associada és 2 i, per tant, són linealment dependents:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -27 \\ 0 & 2 & -18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A més, la relació de dependència lineal és:

$$-7\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) El rang de la matriu associada és 3 i, per tant, són linealment dependents:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 9 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 8/9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 8/9 \\ 0 & 0 & 2 & 43/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5) El rang de la matriu associada és 4 i, per tant, són linealment independents:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.17 A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\a\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}3\\-1\\b\\-1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}-3\\5\\a\\-4\end{smallmatrix}\right)$. Determineu a i b per tal que siguin un conjunt linealment dependent, i en aquest cas expresseu el vector $0_{\mathbb{R}^4}$ com a combinació lineal no nul·la dels vectors.

Solució: Escrivim la matriu associada als vectors i l'esglaonem:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 1 & -1 & 5\\ 0 & b & a\\ a & -1 & -4\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & b & a\\ 0 & -1-3a & -4+3a\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & b & a\\ 0 & -1-3a & -4+3a\end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & a+2b\\ 0 & 0 & -4+3a-2(1+3a)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & a+2b\\ 0 & 0 & -6-3a\end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & a+2b\\ 0 & 0 & -6-3a\end{pmatrix}$$

Ara, els vectors són linealment dependents si i només si el rang d'aquesta matriu és més petit que 3 i això passa si i només si $a = -2b$ i $a = -2$; és a dir, si i només si $a = -2$ i $b = 1$. La solució del sistema homogeni en aquest cas és:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Una solució és: $-3u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$.

6.18 Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i u, v, w tres vectors qualssevol d'E. Demostreu que el conjunt $\{u-v, v-w, w-u\}$ és linealment dependent.

Solució: Cal provar que existeix una combinació lineal dels tres vectors no trivial (és a dir, amb almenys un coeficient diferent de zero) que dóna el vector zero o, equivalentment, que almenys un dels vectors es pot obtenir com a combinació lineal de la resta (no que qualsevol d'ells és combinació lineal dels altres). Ara, per les propietats de la suma i el producte per escalars de qualsevol espai vectorial es té que:

$$u - v = u - w + w - v = -(w-u) - (v-w) = (-1)(w-u) + (-1)(v-w).$$

6.19 Demostreu que les matrius A, B i C següents formen un conjunt linealment independent a $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Proveu que per a qualsevol valor de λ la matriu següent és combinació lineal d'A i B.

$$\begin{pmatrix}\lambda & 2 & -4\\ 2-\lambda & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Solució: Escrivim en primer lloc la matriu associada a A, B i C en la base canònica i comprovem que té rang 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, les matrius A, B i C són linealment independents.

Si la matriu donada en funció de λ ha de ser combinació lineal d'A i B, llavors $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 2-\lambda & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \lambda_1 A + \lambda_2 B$, per algun $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. De la igualtat surt el sistema següent:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \lambda \\ \lambda_2 & = & 2-\lambda \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 & = & -4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

Aquest sistema té solució per a tot λ, ja que $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 2 - \lambda$, i substituint a la tercera equació, que és equivalent a la resta, surt $\lambda + 2 - \lambda = 2$, que és equivalent a $0 = 0$.

Una altra manera és considerar la matriu associada a A, B i la matriu donada i veure que té rang 2 per a qualsevol valor de λ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.20 Demostreu que els polinomis $-1 + 2x + x^2$, $1 + x^2$ i $x + x^2$ són linealment dependents a l'espai $P(\mathbb{R})$.

Solució: Cal provar que existeix una combinació lineal dels tres vectors no trivial (és a dir, amb almenys un coeficient diferent de zero) que dóna el vector zero o, equivalentment, que almenys un dels vectors es pot obtenir com a combinació lineal de la resta (no que qualsevol d'ells és combinació lineal dels altres). Si no es veu a simple vista, el procediment a seguir és plantejar l'equació:

$$a(-1 + 2x + x^2) + b(1 + x^2) + c(x + x^2) = 0$$

en a, b, c com a incògnites. Ara, per com estan definides la suma i el producte per escalars de polinomis, el membre de l'esquerra és el polinomi:

$$a(-1 + 2x + x^2) + b(1 + x^2) + c(x + x^2) = (-a + b) + (2a + c)x + (a + b + c)x^2.$$

Per tant, l'equació anterior equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} -a+b&=0\\ 2a+c&=0\\ a+b+c&=0 \end{aligned}$$

la matriu ampliada del qual és:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema és compatible indeterminat, cosa que mostra que efectivament té solució no trivial. Una solució és, per exemple, $a=b=1$ i $c=-2$.

6.21 Si $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ és un conjunt de vectors linealment dependent d'un espai vectorial, és cert que qualsevol e_i es pot escriure com a combinació lineal dels altres vectors del conjunt? Demostreu-ho o doneu un contraexemple.

Solució: No és cert. La condició de linealment dependents equival a què hi hagi algun vector que és combinació lineal de la resta, però no a què ho sigui qualsevol. Per exemple, a $P(\mathbb{R})$ els polinomies $e_1 = 1$, $e_2 = x + x^2$ i $e_3 = 2x + 2x^2$ són linealment dependents, ja que $0\,e_1 + 2\,e_2 - e_3 = 0$, i efectivament e_3 és combinació lineal de e_1, e_2 perquè és $e_3 = 0\,e_1 + 2\,e_2$. Però el vector e_1 no es pot obtenir com a combinació lineal de e_2, e_3 ja que una combinació lineal genèrica d'aquests dos vectors és:

$$ae_2 + be_3 = a(x+x^2) + b(2x+2x^2) = (a+2b)(x+x^2) \neq 1$$

siguin quins siguin els reals a, b.

6.22 Esbrineu si les afirmacions següents sobre conjunts de vectors en un espai vectorial E són certes, demostrant-ho si és el cas i donant-ne un contraexemple altrament.

1) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \neq e_i$ per a tot i, aleshores el conjunt $\{e_1, \ldots, e_r, v\}$ és linealment independent.

2) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \notin \langle e_1, \ldots, e_r\rangle$, aleshores $\{e_1, \ldots, e_r, v\}$ és linealment independent.

3) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt generador d'E i $v \neq e_i$ per a tot i, aleshores $\{e_1, \ldots, e_r, v\}$ és un conjunt generador d'E.

4) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és un conjunt generador d'E i $e_r \in \langle e_1, \ldots, e_{r-1}\rangle$, aleshores $\{e_1, \ldots, e_{r-1}\}$ és un conjunt generador d'E.

5) Tot conjunt amb un sol vector és linealment independent.

Solució:

1) No és cert. Per exemple, si B és la base canònica de $\mathbb{R}^r$, que en particular és una família linealment independent de vectors, qualsevol vector $v \in \mathbb{R}^r$ tal que $v \notin B$ és combinació lineal dels vectors de B i, per tant, $B \cup \{v\}$ és un conjunt linealment dependent.

2) És cert. En efecte, suposem que la família ampliada és linealment dependent. Hi haurà aleshores una combinació lineal no trivial de tots ells que donarà el vector zero, és a dir, existiran $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_v$ no tots nuls tals que:

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_v v = 0_E.$$

De fet, com que $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és per hipòtesi linealment independent, ha de ser necessàriament $\lambda_v \neq 0$. Per tant, passant el terme $\lambda_v v$ a l'altra banda, i aïllant v tenim v com a combinació lineal del conjunt inicial de vectors, la qual cosa es contradiu amb la hipòtesi que $v \notin \langle e_1, \ldots, e_{r-1} \rangle$.

3) És cert, ja que podem expressar qualsevol vector d'E com a combinació lineal del conjunt anterior sense necessitat d'utilitzar el vector v.

4) També és cert ja que qualsevol vector v combinació lineal de tots els e_i's també ho és de només els $r-1$ primers vectors. En efecte, si:

$$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1} + \lambda_r e_r,$$

només cal substituir e_r per la combinació lineal corresponent dels $r-1$ primers vectors $e_r = a_1 e_1 + \cdots + a_{r-1} e_{r-1}$ (una tal combinació lineal existeix perquè estem suposant que $e_r \in \langle e_1, \ldots, e_{r-1} \rangle$) i queda que:

$$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1} + \lambda_r (a_1 e_1 + \cdots + a_{r-1} e_{r-1}) = (\lambda_1 + a_1 \lambda_r) e_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} + a_{r-1} \lambda_r) e_{r-1},$$

on a la darrera igualtat hem utilitzat les propietats de la suma i el producte per escalars de qualsevol espai vectorial.

5) No, ja que aquest pot ser el vector zero, i qualsevol combinació lineal del vector zero, trivial o no, és el vector zero.

6.23 Considereu el conjunt de vectors $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \}$.

1) Demostreu que formen una base de $\mathbb{R}^4$.

2) Trobeu les coordenades del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en aquesta base.

3) Trobeu les coordenades d'un vector arbitrari $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ en aquesta base.

Solució:

1) Com que estem en dimensió 4, i són 4 vectors, n'hi ha prou amb veure que són linealment independents (en general, n vectors linealment independents en un espai de dimensió n són

automàticament base). Això vol dir comprovar que la matriu que els té per columnes és de rang 4. Ara, esglaonant aquesta matriu s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

així que és de rang 4. Per tant, són una base.

2) Busquem els escalars $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculant la combinació lineal de la dreta i igualant les seves components amb les del vector de l'esquerra, aquesta equació vectorial equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a + c &= 1 \\ a &= 0 \\ b &= 2 \\ b + 4c + 2d &= -3, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = -9/2$, que són les coordenades buscades.

(3) Cal repetir el mateix d'abans però substituint el vector anterior per un de genèric, de manera que l'equació vectorial a resoldre ara és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i el sistema d'equacions lineals equivalent és:

$$\begin{aligned} a + c &= x \\ a &= y \\ b &= z \\ b + 4c + 2d &= t, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = y$, $b = z$, $c = x - y$ i $d = (t - z - 4(x - y))/2 = (t + 4y - 4x - z)/2$.

6.24 Sigui $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Comproveu que és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Doneu les coordenades d'$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en la base B.

Solució: Com a l'exercici anterior, en ser $M_2(\mathbb{R})$ un espai vectorial real de dimensió 4, i com que B consta de 4 vectors, només cal veure que són matrius linealment independents, per la qual cosa cal veure que la matriu que té per columnes els coeficients de les respectives matrius és de rang 4. Aquesta matriu és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la primera columna correspon als coeficients de la primera matriu, la segona als de la segona, etc), i és clarament de rang 4. Per tant, són una base de $M_2(\mathbb{R})$. Les coordenades de la matriu A en aquesta base són els reals a, b, c, d tals que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculant la combinació lineal de la dreta i igualant els coeficients de la matriu resultant amb els corresponents de la matriu de l'esquerra, aquesta equació vectorial equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ b + 2c &= 3 \\ c &= 3 \\ d &= 1, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$ i $d = 1$, que són les coordenades buscades.

6.25 Sigui $P_3(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis de grau com a molt 3. Demostreu que els polinomis $1 + x, -1 + x, 1 + x^2$ i $1 - x + x^3$ formen una base de $P_3(\mathbb{R})$ i doneu les coordenades del polinomi $-5 + 6x + 3x^2 + x^3$ en aquesta base.

Solució: Com en els dos exercicis anteriors, en ser $P_3(\mathbb{R})$ un espai vectorial real de dimensió 4, i com que considerem 4 polinomis, només cal veure que són linealment independents, per la qual cosa cal veure que la matriu que té per columnes els coeficients de les respectius polinomis és de rang 4. Aquesta matriu és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la primera columna de la matriu abans d'esglaonar correspon als coeficients del primer polinomi per grau creixent, la segona columna als del segon, etc), i és clarament de rang 4. Per tant, el quatre polinomis són una base de $P_3(\mathbb{R})$. Les coordenades del polinomi $-5 + 6x + 3x^2x^3$ en aquesta base són aleshores els reals a, b, c, d tals que:

$$-5 + 6x + 3x^2 + x^3 = a\,(1 + x) + b\,(-1 + x) + c\,(1 + x^2) + d\,(1 - x + x^3).$$

Calculant la combinació lineal de la dreta i igualant els coeficients del polinomi resultant amb els del polinomi de l'esquerra, aquesta equació vectorial equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a-b+c+d &= -5 \\ a+b-d &= 6 \\ c &= 3 \\ d &= 1, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a=-1$, $b=8$, $c=3$ i $d=1$, que són les coordenades buscades.

6.26 Considereu el subespai $F = \langle \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle$ a $\mathbb{R}^3$. Trobeu una base de F i la condició (en forma de sistema d'equacions lineals homogènies) que ha de satisfer un vector $\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$ per pertànyer a F.

Solució: Escalonant la matriu que té els vectors generadors de F per columnes obtenim que el rang de la matriu és 2 i, per tant, la dimensió de F és 2. Els vectors primer i tercer formen una base de F perquè no són proporcionals: $B_F = \{ \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \}$.

Sigui $u = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$ un vector arbitrari. Perquè pertanyi a F la matriu formada pels dos vectors de la base de F i u ha de tenir rang 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & x-2y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x-2y+2z \end{pmatrix}.$$

És a dir, s'ha de satisfer que $x-2y+2z=0$.

6.27 Considereu els subespais següents de $\mathbb{R}^4$.

$$F = \langle \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad G = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-2\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Proveu que $F=G$ i que els conjunts de generadors donats són bases. Esbrineu si algun dels vectors $\begin{pmatrix} \sqrt{3}\\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$ pertany a F i, si és el cas, doneu-ne les coordenades en les dues bases.

Solució: Per comprovar que són el mateix, expressem tots els vectors generadors de F com a combinació lineal dels generadors de G:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} &= 1/2 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1\\-2\\2\\0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix} &= 3/2 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1\\-2\\2\\0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} &= 1/2 \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i tots els vectors generadors de G com a combinació lineal dels generadors de F:

$$\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1\\-2\\2\\0 \end{pmatrix} = 3/2\begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} - 1/2\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} - 1/2\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}.$$

Tenim que $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \notin F$ i $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\\ \sqrt{2}-1\\ 1-\sqrt{2}\\ 0 \end{pmatrix} \in F$.

$$v_{B_F} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})/2\\ (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2\\ (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}, \qquad v_{B_G} = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/2+\sqrt{3}\\ (1-\sqrt{2})/2\\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.28 Sigui $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que el conjunt $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$ també és una base d'E.

Solució: Sigui $w_1 = v_1 + 2v_2, w_2 = 2v_2 + 3v_3, w_3 = 3v_3 + v_1$, llavors:

$$v_1 = (w_1 - w_2 + w_3)/2, \quad v_2 = (w_2 - w_3 + w_1)/4, \quad v_3 = (w_3 - w_1 + w_2)/6.$$

Per tant, $E \subseteq \langle v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\rangle$. Com que tenim el mateix nombre de vectors que la base donada, el nou conjunt també és una base.

6.29 Trobeu una base del subespai E de $\mathbb{R}^5$ i completeu-la a una base de $\mathbb{R}^5$.

$$E = \{\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_3 = x_1 + x_2 - x_4,\ x_5 = x_2 - x_1\}.$$

Solució: En general, la dimensió i una base de qualsevol subespai de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ descrit com al conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni, com és el cas de E, venen donades pel nombre de graus de llibertat del sistema i per les solucions que apareixen a la forma paramètrica de la solució general del sistema, respectivament.

En aquest cas, el sistema d'equacions lineals homogeni és el de matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu és 2, i per tant, el sistema té 3(=5-2) graus de llibertat, és a dir, $\dim E = 3$. Si canviem el signe dels elements de la primera fila, les columnes 4a i 5a formen una matriu identitat 2×2:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que podem donar les variables principals, x_4 i x_5, en funció de les variables lliures, x_1, x_2 i x_3:

$$x_4 = x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_5 = -x_1 + x_2$$

que en forma paramètrica és

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una base de E és $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Per tal d'obtenir una base de tot $\mathbb{R}^5$, que estarà formada per 5 vectors linealment independents, cal buscar dos vectors més de $\mathbb{R}^5$ que, juntament amb la base de E anterior, encara formin un sistema linealment independent.

En aquest cas es veu fàcilment que si afegim els vectors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aleshores la matriu que té per columnes els vectors de la base donada de E i aquests dos vectors té determinant diferent de zero, ja que és trangular inferior amb els elements de la diagonal diferents de zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem completar la base donada de E amb aquests dos vectors. Una base de $\mathbb{R}^5$ és

$$B' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

.

6.30 Considereu els vectors de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que formen un conjunt linealment independent i trobeu un vector que juntament amb aquests tres formi una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solució: Per tal de provar que una família de matrius és linealment independent només cal comprovar que la matriu que té per columnes els coeficients de les respectives matrius té rang igual al nombre de matrius de la família (i.e. al nombre de columnes). En aquest cas, és la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & -60 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 47/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que és de rang 3. Per tant, les 3 matrius són linealment independents. Com que $M_2(\mathbb{R})$ té dimensió 4, no són base de $M_2(\mathbb{R})$.

Per tal d'obtenir una base, cal afegir una matriu que, juntament amb les anteriors, continui formant una família linealment independent. Ara, si abans d'esglaonar la matriu anterior haguéssim afegit una quarta columna tota de 0's excepte un 1, a la quarta columna de la matriu esglaonada hi hauria només un element diferent de zero a la fila de l'1 després de fer les permutacions de files utilitzades per escalonar la matriu. En aquest cas, tenint en compte les transformacions elementals fetes, les files 1a-2a-3a-4a han quedat ordenades 1a-3a-4a-2a. Si a la matriu escalonada li afegim el vector (0001) en columna, tenim una matriu de rang 4. Com que la 4a fila de la matriu escalonada correspon a la 2a fila de la matriu original, si a la matriu original li afegim el vector (0100) en columna, tenim una matriu de rang 4.

La família de matrius originals es pot completar doncs a una base de $M_2(\mathbb{R})$ afegint-hi simplement la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observació. Una altra manera de completar la base consisteix en posar els vectors de la base per files, escalonar la matriu i afegir les files que tenen tots els elements nuls excepte un 1 a les columnes on no hi ha pivots:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 6 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1/2 & 30/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si afegim la fila $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, tenim una matriu de rang 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1/2 & 30/7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem completar la base donada amb la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.31 Per a quins valors de λ els vectors $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ generen un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 2?

Solució: En general, la dimensió d'un subespai qualsevol de $\mathbb{R}^n$ descrit per generadors és igual al rang de la matriu que té els vectors generadors per columnes, ja que el rang dóna el nombre màxim de generadors linealment independents. Per tant, busquem λ tal que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix} = 2.$$

Per tal de trobar el rang d'aquesta matriu l'esglaonem:

$$\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & \lambda & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

Per tal de continuar, distingim ara els casos $\lambda \neq 1$ i $\lambda = 1$. En el primer cas, es pot dividir l'última fila per $\lambda - 1$ i queda que

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix},$$

que és clarament una matriu de rang 3 qualsevol que sigui $\lambda \neq 1$. En el cas $\lambda = 1$ queda la matriu

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

que és de rang 2. Per tant, només quan $\lambda = 1$ el subespai generat és de dimensió 2. Per a qualsevol altre valor, és de dimensió 3.

6.32 Considerem el subespai $F_a = \langle \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix} \rangle$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, amb $a \in \mathbb{R}$.

1) Trobeu el valor de a per al qual F_a és de dimensió 2.

2) Sigui $a = a_0$ el valor de a obtingut a l'apartat anterior. Trobeu les condicions, en la forma d'un sistema d'equacions lineals homogeni en x, y, z, t, per tal que la matriu $\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ z & t\end{smallmatrix}\right)$ sigui de F_{a_0}.

3) Raoneu que $B = \{\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\}$ i $B' = \{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\}$ són bases de F_{a_0}.

Solució:

1) Com que els dos primers generadors no són proporcionals i, per tant, són linealment independents, la dimensió de F és com a mínim 2. Cal buscar, doncs, per a quin, o quins, valors de a els tres vectors són linealment dependents, que en aquest cas vol dir que la matriu que

té per columnes els corresponents vectors de coordenades en base canònica és de rang 2. Escalonant aquesta matriu dóna:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & (a-4)/3 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, la dimensió de F és 2 si i només si $a = -1$.

2) La matriu $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ és de F_{-1} si i només si és combinació lineal dels dos primers generadors, que per l'apartat anterior sabem que són una base de F_{-1}. Per tant, busquem les condicions de compatibilitat del sistema d'equacions corresponent a l'equació matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

és a dir, del sistema d'equacions en λ, μ:

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= x \\ 2\lambda + \mu &= y \\ 0 &= z \\ 2\lambda + \mu &= t \end{aligned}$$

Per a trobar-les escalonem la matriu ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & (y-2x)/3 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t-y \end{pmatrix}$$

El sistema és compatible, doncs, si $t - y = 0$ i $z = 0$.

3) A l'apartat 1) ja hem vist que B és família linealment independent i que genera F_{-1} perquè el tercer generador n'és combinació lineal. Per tant, és base de F_{-1}. Per tal de provar que els vectors de B' també formen una base, com que no són proporcionals i, per tant, linealment independents, i F_{-1} sabem que és de dimensió 2, només cal comprovar que són tots dos de F_{-1}. Això ho veiem comprovant simplement que els seus coeficients satisfan les dues equacions de l'apartat anterior.

6.33 Doneu una base i la dimensió dels espais E, F i $E \cap F$ en els casos següents:

1) $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z\right\}$ i $F = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, 3x + y + z = 0\right\}$ com a subespais de $\mathbb{R}^3$.

2) $E = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ i $F = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ com a subespais de $\mathbb{R}^3$.

3) $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ a+3b \\ 2a-b \\ c \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ i $F = \left\{\left(\begin{smallmatrix} -2a \\ b \\ 0 \\ 3b \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ com a subespais de$\mathbb{R}^4$.

4) $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b = c\right\}$ i $F = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ com a subespais de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solució:

1) Un vector de E és de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant: $E = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(E) = 1$. Anàlogament, un vector de F és de la forma (resolent el sistema homogeni que defineix F):

$$\begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant: $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(F) = 1$.

El subespai intersecció està definit pels vectors $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ que són solució del sistema d'equacions:

$$2x = 2y = z, \qquad x + y = z, \quad 3x + y + z = 0.$$

És fàcil veure que aquest sistema és compatible i determinat i que té solución única $x = y = z = 0$. Per tant, $E \cap F = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \}$.

2) Es comprova fàcilment que el rang de les matrius següents és 2 i que les dues primeres columnes són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $E = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(E) = 2$; i anàlogament, $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(F) = 2$.

Sigui $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in E \cap F$. Llavors podem escriure:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'aqui resulta un sistema d'equacions amb incògnites $\lambda, \mu, \alpha, \mu$. L'objectiu és trobar una relació entre λ i μ o una relació entre α i β. Per exemple, en aquest cas trobem que $\alpha = 5\beta$. Per tant, un vector de la intersecció s'expressa com:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $E \cap F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(E \cap F) = 1$.

3) Pels vectors del subespai E tenim:

$$\begin{pmatrix} a \\ a + 3b \\ 2a - b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$E = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Es comprova que aquests tres vectors són independents i, per tant, formen una base de E i $\dim(E) = 3$.

Anàlogament, pels vectors de F podem escriure:

$$\begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 0 \\ 3b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$F = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Aquests dos vectors són linealment independents i, per tant, formen una base de F i $\dim(F) = 2$.

Sigui $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) \in E \cap F$. Podem escriure:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+3b \\ 2a-b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ 0 \\ 3\beta \end{pmatrix}$$

per a certs $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. El sistema homogeni que resulta de l'última igualtat té 4 equacions i 5 incògnites. Si el resolem, el rang de la matriu de coeficients és 4 i té un grau de llibertat. Les solucions en funció de α són:

$$a = -2\alpha,\ b = -4\alpha,\ c = -42\alpha, \beta = -14\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Per tant, els vectors de $F \cap G$ són de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ 0 \\ 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -14\alpha \\ 0 \\ -42\alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \\ -42 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una base de $E \cap F$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \\ -42 \end{smallmatrix}\right)\}$ (també podem prendre el vector proporcional, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 21 \end{smallmatrix}\right)$) i $\dim(E \cap F) = 1$.

4) Un vector del subespai E s'espressa com:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquestes dues matrius són linealment independents perquè no són proporcionals. Per tant, $\dim(E) = 2$ i $E = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

Anàlogament, les dues matrius que generen F no són proporcionals i, per tant, són linealment independents. Per tant, formen una base de F i $\dim(F) = 2$.

Escrivim continuació les condicions que ha de satisfer un vector de F per a pertanyer a E:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \alpha \\ 2\alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix} \in E$$
$$\iff \alpha + 2\beta = 2\alpha - \beta = \alpha \iff \alpha = \beta = 0.$$

Per tant, $E \cap F = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \}$.

6.34 Considereu els subespais E de l'exercici anterior (exercici 6.33). Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai vectorial on es troben.

Solució: La solució no és única.

1) $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \}$.

2) $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \}$.

3) $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \}$.

4) $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \}$.

6.35 Considereu la base $B = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Doneu la matriu P_B^C de canvi de base de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ a B.

2) Sigui ara $B' = \{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \}$ una altra base de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu $P_B^{B'}$ de canvi de base de B' a B.

Solució:

1) Tenim:

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B^C = (P_C^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -3/2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Tenim:

$$P_B^{B'} = P_B^C \cdot P_C^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -3/2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 6 & 3 \\ 3/2 & 7 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

6.36 Considereu l'espai vectorial $P_2(\mathbb{R})$ dels polinomis de grau menor o igual a 2 i amb coeficients reals.

1) Proveu que $B = \{-1+2x+3x^2, x-x^2, x-2x^2\}$ és una base de $P_2(\mathbb{R})$ i calculeu la matriu de canvi de base de base canònica a base B.

2) Trobeu les coordenades de $p(x) = 3 - x + 2x^2$ en la base B.

Solució:

1) Com que $P_2(\mathbb{R})$ és de dimensió 3, només cal veure que $B = \{-1+2x+3x^2, x-x^2, x-2x^2\}$ és una família linealment independent (qualsevol família linealment independent de n vectors en un espai de dimensió n també és automàticament conjunt de generadors i, per tant, base). Per tal de veure que són linealment independents comprovem que el rang de la matriu que té els coeficients de cada polinomi per columnes és 3. La matriu és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és efectivament de rang 3.

La matriu $P_B^{B_c}$ de canvi de base canònica a base B és la inversa de $P_{B_c}^B$, que és la matriu que té per columnes els components de B en base B_c. Aquesta és la matriu anterior, així que només cal calcular la matriu inversa de l'anterior. Apliquem mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Per tant, la matriu demanada és:

$$P_B^{B_c} = (P_{B_c}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Només cal utilitzar la matriu canvi de base anterior: les coordenades en la base B s'obtenen multiplicant les coordenades en base canònica per la matriu $P_B^{B_c}$ per l'esquerra. Per tant, són:

$$P_B^{B_c} \begin{pmatrix} r3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

6.37 Siguin $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$ i $B' = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

1) Comproveu que efectivament són bases.

2) Doneu la matriu del canvi de la base B a la base B' ($P_{B'}^{B}$) i la matriu del canvi de B' a B ($P_{B}^{B'}$).

3) Calculeu les coordenades en les bases B i B' del vector que en base canònica té coordenades $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució:

1) Considerem les matrius associades als vectors B i B' en base canònica C, respectivament:

$$P_{C}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{C}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es comprova fàcilment que els rangs d'aquestes matrius és 3 i, per tant, tant B com B' són bases.

2) Tenim:

$$P_{B'}^{B} = (P_{C}^{B'})^{-1} P_{C}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{B}^{B'} = (P_{B'}^{B})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Tenim, d'una banda:

$$u_B = P_{B}^{C} \cdot u_C = (P_{C}^{B})^{-1} \cdot u_C = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix},$$

i de l'altra:

$$u_{B'} = P_{B'}^{B} \cdot u_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

6.38 Siguin

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dues bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Doneu les matrius de canvi de base $P_{B'}^{B}$ i $P_{B}^{B'}$.

Solució: Podem considerar que la base B és la base canònica i, per tant, tenim que la matriu de la base B' en la base B és:

$$P_{B}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$P_{B'}^{B} = (P_{B}^{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.39 Considereu els conjunts B i B' i comproveu que són bases de $\mathbb{R}^3$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sigui u un vector de $\mathbb{R}^3$ que en la base B té coordenades $u_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i en la base B', $u_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Expresseu x, y i z en funció de x', y' i z', i viceversa.

Solució: Ens donen les bases B i B' en funció de la base canònica C; és a dir, tenim les matrius:

$$P_{C}^{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{C}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$P_{B'}^{B} = (P_{C}^{B'})^{-1} P_{C}^{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{B}^{B'} = (P_{B'}^{B})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si $u_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, llavors $u_{B'} = P_{B'}^{B} \cdot u_B = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$; i si $u_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, llavors $u_B = P_{B}^{B'} \cdot u_{B'} = 1/2 \begin{pmatrix} y'+z'-x' \\ z'+x'-y' \\ x'+y'-z' \end{pmatrix}$.

6.40 Sigui $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ una base de $P_2(\mathbb{R})$, l'espai dels polinomis de grau ≤ 2. Considerem els polinomis $u(x) = x^2 + x + 2$, $v(x) = 2x^2 + 3$ i $w(x) = x^2 + x$. Si en la base B les coordenades de $u(x)$, $v(x)$ i $w(x)$ són:

$$u(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w(x)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

respectivament, doneu les coordenades dels vectors de B en base canònica $\{x^2, x, 1\}$.

Solució: La matriu dels vectors $u(x), v(x), w(x)$ en la base B és:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

i es comprova fàcilment que té rang 3. Això vol dir que els vectors $u(x), v(x), w(x)$ formen una base, que li direm B'. Així, $P_{B}^{B'} = A$. A més, de les dades del problema tenim que:

$$P_{C}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

on C indica la base canònica. Per tant:

$$\begin{aligned}
P_C^B = P_C^{B'} P_{B'}^B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1/2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per tant, els vectors de la base B expressats en la base canònica són:

$$p_1(x) = 2x^2 + 1, \quad p_2(x) = -3x^2 + x, \quad p_3(x) = -x^2 + 1/2.$$