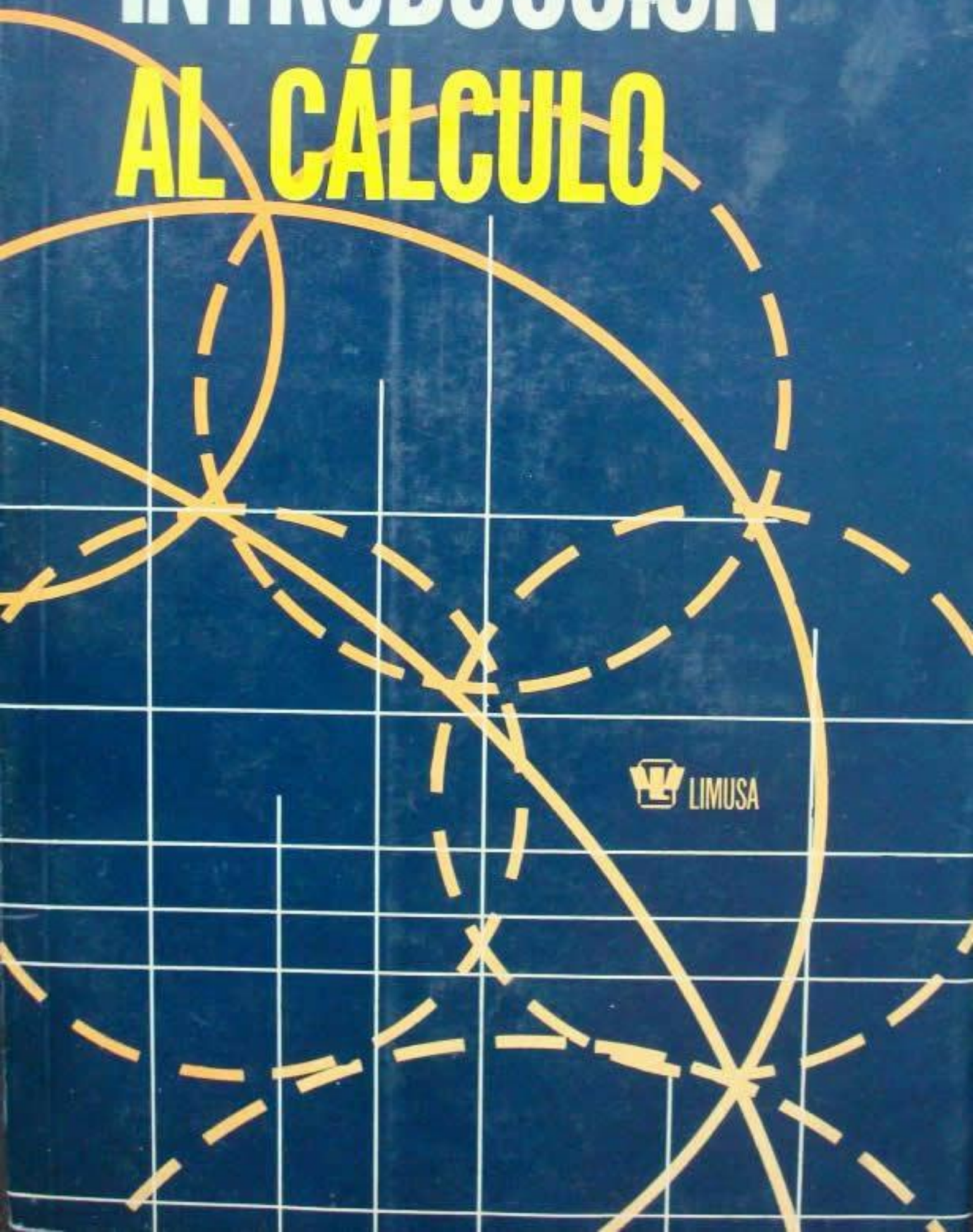
KURATOWSKI

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO



LIMUSA

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

KAZIMIERZ KURATOWSKI

Profesor de Matemáticas de la Universidad de Varsovia, Miembro de la Academia Polaca de Ciencias

LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA PUBLICADA EN INGLÉS POR PANSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE (PWN–POLISH SCIENTIFIC PUPLISHERS) WARSZAWA, POLAND, CON EL TÍTULO:
INTRODUCTION TO CALCULUS
© PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS, WARSZAWA, POLAND.

COLABORADOR EN LA TRADUCCIÓN:
ING. RAMÓN MAGAÑA MADRIGAL
CATEDRÁTICO DE LA ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL DE MÉXICO.

REVISIÓN:
DR. CARLOS IMAZ
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. PROFESOR TITULAR DE MATEMÁTICAS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL DE MÉXICO.

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 1995, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
TELÉFONO 521-21-05
FAX 512-29-03

CANIEM NÚM. 121

NOVENA REIMPRESIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-0662-X

CONTENIDO

Prefacio a la edición en inglés 9
Prefacio a la edición en polaco 10

I. SUCESIONES Y SERIES

1. Introducción

1.1. Diversas clases de números 11
1.2. El principio de inducción matemática 12
1.3. La fórmula del binomio de Newton 14
1.4.* Desigualdad de Schwarz 17
1.5. El principio de continuidad (Dedekind) 18
1.6. Valor absoluto de un número 18
1.7. Conjuntos acotados. Cota superior e inferior de un conjunto 19
1.8.* El tratamiento axiomático de los números reales 21
1.9.* Números reales como conjuntos de números racionales 22
Ejercicios del § 1 24

2. Sucesiones infinitas

2.1. Definición y ejemplos 25
2.2. Noción de límite 27
2.3. Sucesiones acotadas 30
2.4. Operaciones son sucesiones 30
2.5. Otras propiedades del límite 34
2.6. Subsucesiones 35
2.7. Teorema de Cauchy 39
2.8. Divergencia a ∞ 41
2.9. Ejemplos 42
2.10. El número e 44
2.11.* Sucesiones de las medias aritméticas y geométricas

de una sucesión dada 46
Ejercicios del § 2 48

3. Series infinitas

3.1. Definiciones y ejemplos 51
3.2. Propiedades generales de las series 52
3.3. Series alternantes. Teorema de Abel 54
3.4. Series con términos positivos. Criterios de convergencia de D'Alembert y Cauchy 57
3.5. Aplicaciones y ejemplos 60
3.6. Otros criterios de convergencia 62
3.7. Series absolutamente convergentes 63
3.8. Multiplicación de series 66
3.9.* Productos infinitos 69
Ejercicios del § 3 73

II. FUNCIONES

4. Funciones y sus límites

4.1. Definiciones 75
4.2. Funciones monótonas 77
4.3. Funciones biunívocas. Funciones inversas 79
4.4. Funciones elementales 80
4.5. El límite de una función f en un punto a 82
4.6. Operaciones en el límite 85
4.7. Condiciones para la existencia del límite 90
Ejercicios del § 4 93

5. Funciones continuas

5.1. Definición 94
5.2. Caracterización de continuidad de Cauchy. Interpretación geométrica 96
5.3. Continuidad de funciones elementales 97
5.4. Propiedades generales de las funciones continuas 100
5.5. Continuidad de funciones inversas 104
Ejercicios del § 5 107

6. Sucesiones y series de funciones

6.1. Convergencia uniforme 108
6.2. Series uniformemente convergentes 111
6.3. Series de potencias 112

6.4. Aproximación de funciones continuas por funciones poligonales 116
6.5.* El simbolismo de la lógica matemática 118
Ejercicios del § 6 124

III. CALCULO DIFERENCIAL

7. Derivadas de primer orden

7.1. Definiciones 127
7.2. Derivación de funciones elementales 131
7.3. Derivación de funciones inversas 136
7.4. Extremos de funciones. Teorema de Rolle 138
7.5. Teoremas de Lagrange [1] y de Cauchy 141
7.6. Derivación de funciones compuestas 144
7.7. Interpretación geométrica del signo de una derivada 149
7.8. Expresiones indeterminadas 151
7.9. La derivada de un límite 155
7.10. La derivada de una serie de potencias 157
7.11. El desarrollo de las funciones $\log(1 + x)$ y $\arctan x$ en series de potencias 159
7.12.* Asíntotas 161
7.13.* El concepto de una diferencial 162
Ejercicios del § 7 165

8. Derivadas de órdenes superiores

8.1. Definición y ejemplos 167
8.2.* Diferenciales de órdenes superiores 169
8.3. Operaciones aritméticas 170
8.4. Fórmula de Taylor [1] 171
8.5. Desarrollo en series de potencias 177
8.6. Un criterio para extremos 181
8.7. Interpretación geométrica de la segunda derivada. Puntos de inflexión 182
Ejercicios del § 8 185

IV. CALCULO INTEGRAL

9. Integrales indefinidas

9.1. Definición 187
9.2. La integral del límite, integrabilidad de funciones continuas 190

9.3. Fórmulas generales de integración ... 191
9.4. Integración de funciones racionales ... 196
9.5. Integración de funciones irracionales de segundo grado ... 200
9.6. Integración de funciones trigonométricas ... 204
Ejercicios del § 9 ... 209

10. Integrales definidas

10.1. Definición y ejemplos ... 210
10.2. Fórmulas para cálculo ... 212
10.3. La integral definida como límite de sumas ... 218
10.4. La integral como un área ... 220
10.5. La longitud de un arco ... 225
10.6. Volumen y área superficial de un sólido de revolución 230
10.7. Dos teoremas del valor medio ... 234
10.8. Métodos de integración aproximada. Interpolación de Lagrange ... 238
10.9. Fórmula de Wallis ... 240
10.10. Fórmula de Stirling ... 242
10.11.* Integral de Riemann. Integrales superior e inferior de Darboux ... 244
Ejercicios del § 10 ... 250

11. Integrales impropias y su relación con las series infinitas

11.1. Integrales con un intervalo de integración no acotado 254
11.2. Integrales de funciones no definidas en un punto ... 256
11.3. Fórmulas de cálculo ... 259
11.4. Ejemplos ... 261
11.5. La función Gamma ... 271
11.6. La relación entre la convergencia de una integral y la convergencia de una serie infinita ... 272
11.7. Series de Fourier ... 277
11.8. Aplicaciones y ejemplos ... 281
Ejercicios del § 11 ... 286

Suplemento ... 289

Indice ... 307

PREFACIO A LA EDICION EN INGLES

La edición en inglés no difiere esencialmente de la polaca. Del nuevo material más importante menciono el § 6.5 que contiene información elemental referente a la notación de la lógica matemática. Tuve la inclinación de añadir este material debido a la experiencia de muchos años como profesor.

Para muchos estudiantes (quizá no para todos) la notación de las definiciones de algunas nociones por medio de los símbolos lógicos, facilita su comprensión (por ejemplo, las nociones de continuidad uniforme o de convergencia uniforme). Además, este suplemento está incluido en el libro de tal manera que puede omitirse al efectuar la lectura total de la obra. Entre otros cambios hechos en el texto en inglés, mencionaré la adición de varios ejercicios y problemas, la simplificación de algunas demostraciones, y finalmente la eliminación de errores que tenía el texto original. Esta labor se realizó con la cooperación del traductor, doctor J. Musielak, a quien expreso mi agradecimiento por su trabajo y por el éxito de su traducción. También manifiesto mi gratitud al doctor A. Schinzel, por sus correcciones.

K. KURATOWSKI.

Varsovia

PREFACIO A LA EDICION EN POLACO

Este libro contiene las notas de clase de cálculo diferencial e integral, que he impartido durante muchos años en la Universidad de Varsovia.

Los ejemplos que están al final de cada sección forman el complemento necesario del curso. Por otra parte, el texto marcado con asterisco puede omitirse en la primera lectura.

Este volumen trata del cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

De los textos consultados, mencionaré los siguientes que han sido muy útiles para la preparación de esta obra: Banach, Courant, Goursat, Hardy, Kowalewski, Mazurkiewicsz, Sierpinski, Borsuk (una colección de ejercicios).

Manifiesto el mayor agradecimiento a mis colegas, los profesores Karol Borsuk y Wladyslaw Nikliboro y asistentes Zygmunt Charzynski y Roman Sikorski, por sus numerosas sugerencias, ayuda y observaciones en la preparación de mis notas para publicarlas. Expreso también mi agradecimiento al Departamento de Ciencias del Ministerio de Educación, los Editores de la Cooperativa "Czytelnik", el Comité Sueco de Ayuda y a "Monografie Matematyczne". Les estoy muy reconocido a todos ellos por su ayuda en la publicación de esta obra.

Varsovia

K. KURATOWSKI.

CAPÍTULO 1

SUCESIONES Y SERIES

§ 1. INTRODUCCIÓN

1.1 Diversas clases de números

Supondremos que la noción de número real (esto es, hablando en forma imprecisa, un número que tenga un desarrollo decimal finito o infinito), se tiene desde los cursos de enseñanza media [1]. Recordaremos la terminología y algunas propiedades de los números reales.

Los números 1, 2, 3, ..., se llaman *enteros positivos*. El número 0 no pertenece a los positivos ni a los negativos. Los números fraccionarios esto es, números de la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son enteros y $q \neq 0$, se llaman también *números racionales*. Con los números racionales se pueden efectuar siempre las cuatro operaciones aritméticas: adición, substracción, multiplicación y división (excepto la división por 0); al símbolo $\frac{p}{0}$ no le corresponde valor numérico. Por tanto, el símbolo ∞, que utilizaremos a menudo, no significa ningún número "infinito".

Geométricamente, los números reales pueden interpretarse como puntos de una recta, sobre la cual se fijan dos puntos, que representan 0 y 1. Estos dos puntos permiten que se construyan fácilmente todos los puntos racionales de esta recta, llamada *recta numérica*. Ya que si tenemos un número racional u, tomamos un segmento de longitud u a la derecha de 0 (o a la izquierda si u es negativo). El extremo de este segmento es el punto correspondiente al número u. Es bien conocido que no todos los puntos de la recta corresponden a números raccionales, por ejemplo

[1] En §§ 1.8 y 1.9 de esta sección, damos la idea general de dos métodos rigurosos de introducción de números reales: un método axiomático y otro más que reduce la noción de un número real a la noción de un número racional.

el número $\sqrt{2}$, esto es, la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno, es un número irracional.

Razones de naturaleza geométrica, así como algebraica, sugieren que incluyamos en la noción de *número*, a todos los reales, esto es, racionales e irracionales. En esta forma aumenta el campo de las operaciones algebraicas: en el dominio de los reales, existen también raíces y logaritmos de números positivos.

También deberá observarse que en el dominio de los reales no pueden efectuarse, todas las operaciones, por ejemplo, no existen las raíces cuadradas de los números negativos, y en consecuencia, las ecuaciones de segundo grado no necesariamente tienen raíces reales. Para evitar situaciones de esta clase, se introducen los números complejos. Sin embargo, no consideraremos por ahora los números complejos. Cuando utilicemos aquí la palabra "número", tendremos siempre en mente los números reales.

1.2. El principio de inducción matemática

Entre las propiedades de los enteros positivos, mencionaremos la siguiente, ya que la emplearemos a menudo. Se denomina *principio de inducción matemática*. El principio puede enunciarse como sigue:

Supongamos que se da una propiedad de los enteros positivos, que satisface las siguientes condiciones:

(i) El número 1 tiene esta propiedad.

(ii) Si el número n tiene esta propiedad, entonces el número $n+1$ también la tiene.

El principio de inducción establece que, con estas suposiciones, cualquier entero positivo tiene la propiedad establecida.

El principio concuerda con el siguiente argumento intuitivo: si el número 1 tiene la propiedad considerada, entonces la segunda condición implica que el número 2 también la tiene; pero entonces, nuevamente por la segunda condición, el número 3 tiene dicha propiedad; similarmente, esto implica que el número 4 tiene la propiedad, etc. Obviamente no podemos efectuar este razonamiento al infinito. El principio de inducción le da una formulación matemática a nuestro razonamiento intuitivo.

Como ejemplo de la aplicación del principio de inducción, citaremos la demostración de la llamada *desigualdad de Bernoulli*: *para todo*

entero positivo n y para cualquier número real $a \geq -1$, se verifica *la fórmula* [1]

$$(1+a)^n \geq 1+na \tag{1}$$

Empezaremos por observar que la expresión $x \geq y$ significa que x es mayor o igual que y, o que x no es menor que y. Así $3 \geq 2$ se verifica tanto como $3 \geq 3$.

Para demostrar la desigualdad de Bernoulli utilizando el principio de inducción debemos demostrar:

(i) Que el número 1 pertenece al conjunto de números n que tienen la propiedad expresada por la desigualdad (1); esto es obvio ya que substituyendo n por 1 en la desigualdad (1), obtenemos la desigualdad $1+a \geq 1+a$, que se verifica para toda a.

(ii) Que la fórmula implica la obtenida de (1) substituyendo n por $n+1$ en (1), esto es, la fórmula

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a. \tag{1'}$$

Para demostrar esta fórmula, multipliquemos por $1+a$ ambos miembros de la desigualdad (1). Como $1+a \geq 0$ por suposición, obtenemos

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2,$$

sin embargo, $na^2 \geq 0$; por consiguiente

$$1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a,$$

con lo cual se llega a la fórmula (1').

Como segundo ejemplo de la aplicación del principio de inducción, demostraremos la siguiente relación trigonométrica

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt = \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}, \tag{2}$$

que se satisface para todo entero $n \geq 0$ y todo número real t que no sea un múltiplo entero del número 2π.

En este caso empezaremos la inducción con cero en vez de 1.

[1] James Bernoulli, matemático suizo de la primera mitad del siglo XVIII.

$1+a+na+na^2$

$1+a(1+n)+na^2$

Cuando $n = 0$, la fórmula (2) es una identidad $\frac{1}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} = \frac{1}{2}$.

Sólo falta demostrar que la fórmula (2) implica la (2') obtenida por la substitución de n por $n+1$ en (2).

Aplicando la fórmula (2), podemos escribir la (2') en la siguiente forma:

$$(2') \qquad \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} + \cos(n+1)t = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+3}{2} t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}},$$

o (reduciendo a un común denominador)

$$\operatorname{sen} \frac{2n+3}{2} t - \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} t = 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos(n+1)t.$$

Pero la última fórmula se sigue de la conocida fórmula para la diferencia de senos. Por consiguiente, hemos demostrado que la identidad (2) implica (2'); en consecuencia la fórmula (2) vale para toda $n \geq 0$, por el principio de inducción.

1.3. La fórmula del binomio de Newton [1]

En primer lugar, definiremos los llamados *coeficientes binomiales* o *de Newton* por medio de la siguiente fórmula:

$$(3) \qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k}$$

Por lo que se ve que el denominador es un producto de enteros positivos, sucesivos, desde 1 hasta k, y el numerador es un producto de k enteros positivos sucesivos, decrecientes, desde n hasta $n-k+1$. Suponemos aquí que n y k son enteros positivos y que $n \geq k$.

Comprobamos de inmediato que $\binom{n}{1} = n$ y $\binom{n}{n} = 1$. Extendemos la definición del símbolo $\binom{n}{k}$ al caso en que $k = 0$, escribiendo $\binom{n}{0} = 1$; adoptamos esta convención para simplificar la técnica de los cálculos.

[1] Isaac Newton, 1642-1727, uno de los más eminentes científicos en la historia. Uno de los inventores del cálculo diferencial e integral.

Finalmente, observemos que $\binom{n}{k}$ es el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k; no utilizaremos este hecho aquí.

Se verifica la siguiente fórmula (para un entero positivo k arbitrario):

$$(4) \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

En efecto,

$$\frac{n\cdot\cdots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot\cdots\cdot(k-1)k} + \frac{n\cdot\cdots\cdot(n-k+2)}{1\cdot\cdots\cdot(k-1)}\cdot\frac{k}{k}$$

$$= \frac{n\cdot\cdots\cdot(n-k+2)(n-k+1+k)}{1\cdot\cdots\cdot(k-1)k} = \binom{n+1}{k}$$

En el razonamiento anterior aplicamos la fórmula (3); por lo que tuvimos que suponer que $k-1$ es un entero positivo, esto es $k > 1$. Sin embargo, si $k = 1$, la fórmula (4) puede verificarse directamente substituyendo $k = 1$.

Demostraremos ahora la fórmula del binomio de Newton, esto es, la siguiente fórmula:

$$(5) \qquad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n.$$

Se ve fácilmente que el segundo miembro es una suma de $n+1$ componentes: el primero es a^n y el último b^n, ya que $\binom{n}{n} = 1$. Esta fórmula es obvia para $n = 1$. Para $n = 2$ y $n = 3$, se conoce de los cursos de enseñanza media.

Como la fórmula (5) se verifica para $n = 1$ según el principio de inducción, suponiendo (5), resta sólo demostrar que la fórmula obtenida el substituir n por $n+1$ en (5), es verdadera. Pero

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b,$$

de donde

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \cdots + \binom{n}{n}ab^n +$$

$$+ a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + \cdots +$$

$$+ \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + b^{n+1},$$

en la que hemos aplicado la fórmula (4). La ecuación así obtenida es justamente la obtenida de (5) substituyendo n por $n+1$. Por consiguiente, se ha demostrado la fórmula del binomio de Newton.

Debemos observar que la fórmula del binomio de Newton puede escribirse con mayor claridad, como sigue:

(6) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

(cuando $a \neq 0 \neq b$) [1].

El símbolo $\sum_{k=0}^{n}$ significa que debemos tomar la suma de $n+1$ términos que se obtienen de la expresión que sigue al símbolo substituyendo k, y sumando los términos así obtenidos.

Además, los coeficientes binomiales pueden escribirse como sigue. Representemos por $n!$ (leáse: n factorial) el producto de todos los enteros positivos sucesivos de 1 a n:

(7) $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad \text{(y convengamos en que } 0! = 1\text{)}$$

Se ve fácilmente que tenemos

(8) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

[1] Cuando $a = 0$ o $b = 0$, la fórmula (6) puede ser aplicada también con la restricción de que el símbolo indeterminado 0^0 (el cual es obtenido para $k = n$ ó $k = 0$) tiene que ser reemplazado por 1.

1.4.* Desigualdad de Schwarz

Aplicando el principio de inducción demostraremos la siguiente desigualdad:

(9) $$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Para $n = 1$ la fórmula (9) es evidente: $(x_1 y_1)^2 \leqslant x_1^2 y_1^2$. Por tanto, tenemos que demostrar esta fórmula para $n+1$, suponiendo que vale para n.

Ahora,

(10) $$(x_1 y_1 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1})^2 = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 +$$
$$+ 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) x_{n+1} y_{n+1} + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2.$$

Además, $2ab \leqslant a^2 + b^2$, ya que $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$; de aquí, escribiendo $a = x_k y_{n+1}$ y $b = x_{n+1} y_k$, tenemos

$$2 x_k y_k x_{n+1} y_{n+1} \leqslant x_k^2 y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_k^2$$

y sumando para $k = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos

$$2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) x_{n+1} y_{n+1}$$
$$\leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2) y_{n+1}^2 + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) x_{n+1}^2.$$

Aplicando (9) y (10) se tiene

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1})^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) +$$
$$+ (x_1^2 + \cdots + x_n^2) y_{n+1}^2 + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) x_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2$$
$$= (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2) + (y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2) x_{n+1}^2$$
$$= (x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2)(y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2).$$

Esto da

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1})^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2)(y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2).$$

Pero ésta es la fórmula que se obtiene de (9) al substituir n por $n+1$, por lo tanto, se ha concluido la demostración.

1.5. El principio de continuidad (Dedekind [1])

Entre las propiedades de los números reales, mencionaremos el llamado *principio de continuidad*. Este principio establece que si dividimos el conjunto de todos los números reales en dos conjuntos A y B tales que, cualquier número que pertenezca al conjunto A sea menor que cualquier número que pertenezca al conjunto B, entonces hay dos posibilidades: o existe un número máximo del conjunto A, o bien un número mínimo del conjunto B (se supone que ambos conjuntos son no vacíos). En otras palabras, si dividimos la recta en dos partes A y B, tales que cualquier punto de la parte A esté colocado a la izquierda de cualquier punto de la parte B, entonces, o bien existe un punto final en la parte A o bien existe un punto inicial en la parte B. No se encuentra ningún "hueco" en el "corte" que hemos realizado. Esto implica la continuidad del conjunto de los números reales, lo que distingue este conjunto del conjunto del de los números racionales, donde tales huecos sí existen; por ejemplo, dividiendo el conjunto de los números racionales en dos partes, tales que todos los números racionales menores que $\sqrt{2}$ pertenezcan a la primera parte, y los números racionales restantes, esto es, números mayores que $\sqrt{2}$, pertenezcan a la segunda parte, se ve fácilmente que cualquier número de la primera parte es menor que cualquiera de la segunda parte, pero no existe ningún número racional que sea máximo en la primera parte o mínimo en la segunda (esto viene del hecho de que el número irracional $\sqrt{2}$ puede ser aproximado tanto como se quiera por números racionales menores y mayores, por ejemplo por los desarrollos decimales).

1.6. Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número a, esto es $|a|$, se define por las condiciones: si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a$; si $a < 0$, entonces $|a| = -a$. Las fórmulas siguientes, explicadas, en un curso de matemáticas elementales, se cumplen

(11) $$|a| = |-a|,$$

(12) $$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$

(13) $$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

[1] Richard Dedekind, matemático de la segunda mitad del siglo XIX.

(14) $$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|,$$

(15) $$|ab| = |a|\cdot|b|,$$

(16) *las desigualdades* $|a| \leqslant c$ *y* $|b| \leqslant d$ *implican* $|a+b| \leqslant c+d$; las demostraciones se dejan al lector.

La última fórmula (16) es la de adición de desigualdades "bajo el signo de valor absoluto" que aplicaremos frecuentemente. Se deduce de la fórmula (13) ya que $|a+b| \leqslant |a|+|b| \leqslant c+d$. Esta fórmula sigue siendo válida si el signo $\leqslant$ se substituye por $<$.

Finalmente, observemos que:

(17) *La desigualdad* $|a| < b$ *es equivalente a la doble desigualdad*

$$-b < a < b$$

y en consecuencia a la colección de dos desigualdades: $a < b$ *y* $-a < b$.

1.7. Conjuntos acotados, cotas superior e inferior de un conjunto

Decimos que un conjunto de números reales Z está *acotado*, si existen dos números m y M tales que para todo número x del conjunto Z se satisface la doble desigualdad $m \leqslant x \leqslant M$. Si únicamente existe un número M que satisface la desigualdad $M \geqslant x$ para toda x que pertenece al conjunto Z, llamamos al conjunto Z *acotado superiormente*. Similarmente, un conjunto Z es *acotado inferiormente* si existe un número m que satisface la condición $m \leqslant x$.

El significado geométrico de estas ideas es el siguiente. Si un conjunto está acotado, significa que está contenido en cierto segmento de la recta numérica. Un conjunto está acotado superior o inferiormente, cuando está contenido en un radio infinito dirigido a la izquierda o a la derecha respectivamente.

Aplicando el principio de continuidad demostraremos el siguiente teorema:

Si un conjunto Z no vacío está acotado superiormente, entonces entre los números M, que satisfacen la desigualdad $M \geqslant x$ para toda x que pertenece a Z, existe uno menor. Este número se llamará cota superior del conjunto Z.

Similarmente, *si un conjunto Z está acotado inferiormente, entonces entre los números m que satisfacen la desigualdad $m \leqslant x$ para toda x que pertenece a Z existe uno mayor, llamado cota inferior del conjunto Z.*

Demostración. Supongamos que el conjunto Z está acotado superiormente. Dividamos el conjunto de todos los números reales en dos clases, como sigue: a la segunda clase pertenecerán todos los números M que satisfacen la desigualdad $M \geqslant x$ para toda x de Z. A la primera clase pertenecerán todos los demás números reales; esto significa que un número a pertenece a la primera clase cuando en el conjunto Z existe un número mayor que a. Tal división del conjunto de los números reales en dos clases se llama *cortadura*, esto es, cualquier número que pertenezca a la primera clase es menor que cualquiera que pertenezca a la segunda. En efecto, suponiendo que un número M de la segunda clase sea menor que un número a de la primera, y sabiendo que existe un número x en el conjunto Z, tal que $a < x$, tendríamos que $M < x$, pero esto contradice la definición de la segunda clase.

Además, observemos que ambas clases son no vacías. En efecto, si un número z, está en el conjunto Z (y dicho número existe, ya que el conjunto Z es no vacío por hipótesis), entonces el número $z-1$ pertenece a la primera clase. La segunda clase también es no vacía, ya que el conjunto Z está acotado superiormente.

Según el principio de continuidad existe un número máximo en la primera clase, o uno mínimo en la segunda clase. Sin embargo, la primera eventualidad no es posible. Es decir, si a pertenece a la primera clase y $a < x$ (estando x en Z), entonces representando por a' cualquier número que esté entre a y x, por ejemplo $a' = \dfrac{a+x}{2}$, tenemos también que $a' < x$, pero esto significa que a' pertenece también a la primera clase. Por consiguiente, para cualquier número a de la primera clase, podemos encontrar un número a' mayor que a en esta clase. Esto significa que en la primera no existe un número máximo. De aquí que exista en la segunda clase un número mínimo, esto es el mínimo entre los números M que satisfacen la desigualdad $M \geqslant x$ para toda x del conjunto Z. Por tanto, se ha demostrado el teorema.

La demostración de la existencia de una cota inferior es completamente análoga.

Observemos que las cotas superior e inferior de un conjunto Z no necesariamente pertenecen al conjunto. Por ejemplo, las cotas de un intervalo abierto [1] $a < x < b$ son los números a y b, que no pertenecen al intervalo.

[1] Por un intervalo entendamos el conjunto de números x tales que $a < x < b$, por un intervalo cerrado entendamos el intervalo abierto con extremos, esto es, el conjunto de x tales que $a \leqslant x \leqslant b$.

1.8.* El tratamiento axiomático de los números reales

La noción de número real que supusimos se tiene desde los cursos de enseñanza media, puede presentarse en forma axiomática como sigue.

Suponemos que en el conjunto de los números reales se pueden efectuar dos operaciones: adición $x+y$ y multiplicación xy. Estas operaciones satisfacen las leyes de *conmutatividad* y *asociatividad*:

$$x+y = y+x, \quad xy = yx,$$
$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad (xy)z = x(yz).$$

Además, la multiplicación es *distributiva* con respecto a la suma:

$$x(y+z) = xy+xz.$$

Dos números (diferentes) 0 y 1 modulan la suma y la multiplicación respectivamente, esto es

$$x+0 = x, \quad x\cdot 1 = x.$$

También suponemos que en el conjunto de los números reales, la resta y la división son siempre posibles, excepto la división por 0. En otras palabras, consideramos que para cualquier pareja de números reales x y y existe un número z (llamado la *diferencia* $x-y$) tal que

$$x = y+z$$

y en el caso en que $y \neq 0$, existe un número w (llamado el *cociente* de x por y) tal que

$$x = yw.$$

Además de los axiomas anteriores relativos a las operaciones, tomaremos los siguientes, referentes a la relación de orden $x < y$. Supondremos que dos números reales distintos x y y están en esta relación en un sentido u otro, esto es, $x < y$ o bien $y < x$. Esta relación es *transitiva*, esto es

las condiciones $x < y$ y $y < z$ implican $x < z$ y *asimétrica*, esto es, *si* $x < y$, *entonces no es válida la relación* $y < x$.

La relación de orden se relaciona con las operaciones básicas por el siguiente axioma:

si $y < z$, *entonces* $x+y < x+z$ *y si, además,* $0 < x$, *entonces* $xy < xz$.

Finalmente, el último axioma de la teoría de los números reales que aceptaremos es el *principio de continuidad de Dedekind* formulado en el § 1.5.

Todos los teoremas aritméticos y algebraicos conocidos desde los cursos de enseñanza media pueden deducirse de los axiomas anteriores.

1.9.* Números reales como conjuntos de números racionales (¹)

La noción de un número real puede definirse con base en la teoría de los números racionales como sigue.

Puede suponerse que los números reales son idénticos a los conjuntos de números racionales, que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) El conjunto R no contiene un número máximo, esto es, para cualquier número del conjunto R existe un número mayor en R;

(ii) Si un número x está en R, entonces cualquier número racional menor que x pertenece a R;

(iii) El conjunto R es no vacío y no es igual al conjunto de todos los números racionales.

Para los números reales así definidos, definimos primero la relación de orden. Es decir, escribimos $R < R'$, cuando el conjunto R es una parte de R' (diferente de R'); o, cuando el conjunto R' contiene números que no pertenecen a R (es fácil ver que para dos conjuntos cualesquiera que satisfacen las condiciones (i)-(iii) siempre, uno está contenido en el otro). Ambas definiciones son equivalentes.

Vemos fácilmente que la relación de orden así definida satisface los axiomas dados en § 1.8, es decir, es una relación asimétrica y transitiva, válida para cualquier par de conjuntos diferentes R y R' ya sea en un sentido u otro.

Definiremos ahora la adición de números reales, esto es, la suma de los conjuntos R y R' (que satisfacen las condiciones (i)-(iii)). Representamos por $R+R'$ el conjunto de todos los números, que son sumas de dos números, el primero de los cuales pertenece a R y el segundo, a R'. Se ve fácilmente que el conjunto $R+R'$ satisface las condiciones (i)-(iii) Por otra parte, los axiomas referentes a la adición (conmutatividad, asociatividad, etc.) se satisfacen. El número real 0 se define como el conjunto de todos los números racionales negativos. Similarmente, el

(¹) Damos aquí un esbozo de la llamada teoría de Dedekind de los números reales.

número real 1 es el conjunto de todos los números racionales menores que el racional uno. En general, si r es un número racional, entonces entendemos por "el número real r" el conjunto de todos los racionales menores que el racional r (en la práctica, identificamos el número racional r y el número real r). $-R$ significa el conjunto de todos los racionales de la forma $-x$, donde x toma todos los valores que no pertenecen a R; sin embargo si el conjunto de números que no pertenecen a R contienen un número mínimo r, entonces no incluiremos el $-r$ en el conjunto $-R$ (éste es el caso, cuando R es "el número real r". Se puede demostrar que $R+(-R) = 0$.

La multiplicación de números reales se definirá de la siguiente manera: si $R \geqslant 0$ y $R' \geqslant 0$, entonces RR' es el conjunto que contiene todos los números racionales negativos y los de la forma rr', donde r es un número no-negativo que pertenece a R y, análogamente, r' es un número no-negativo que pertenece a R'. Además supondremos que

$$(-R)(-R') = RR', \quad (-R)R' = -(RR') = R(-R').$$

Se puede demostrar fácilmente que se satisfacen todos los axiomas referentes a la multiplicación.

Finalmente, se satisface el axioma de continuidad. En efecto, dados A, B tales que representen una cortadura en el dominio de los números reales. Designemos por R el conjunto de números reales con la propiedad de que r pertenece a R si y sólo si pertenece a uno de los números reales de la clase A.

Se demuestra que el conjunto R así definido satisface las condiciones (i)-(iii) de modo que es un número real. Entonces demostramos que R "está en la cortadura A, B", esto es, es el número máximo del conjunto A, o el mínimo del conjunto B.

Por consiguiente, vemos que, si entendemos por un número real un conjunto de números racionales que satisfacen las condiciones (i)-(iii), entonces se satisfacen todos los axiomas de la teoría de los números reales formulada en § 1.8.

Agreguemos, que el conjunto de todos los números racionales satisface todos estos axiomas, con excepción de uno, el axioma de continuidad.

De aquí que el axioma de continuidad sea independiente de los otros axiomas de la teoría de los números reales; ya que si fuese una consecuencia de los otros (esto es, un teorema y no un axioma), entonces satisfaría en cada sistema en el que valiesen los otros axiomas.

Ejercicios del § 1

1. Demuéstrese que para todo entero positivo n y para todo real $a \geqslant -1$ (es válida la siguiente fórmula (que es una generalización de la fórmula de Bernoulli (1)):

$$(1+a)^n \geqslant 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3.$$

Sugerencia: Demuéstrese por inducción matemática.

2. Demuéstrense las identidades:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sugerencia: En la demostración de la segunda igualdad, se puede aplicar la identidad:

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1.$$

3. Similarmente: hállese la fórmula de la suma

$$1^3+2^3+\ldots+n^3.$$

4. Dedúzcanse las fórmulas:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n,$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots\pm\binom{n}{n}=0.$$

Sugerencia: aplíquese la fórmula del binomio de Newton

5. Aplicando el principio de continuidad, demuéstrese que $\sqrt[n]{a}$ existe para todo entero positivo n y para todo a positivo.

6. Demuéstrese que $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$, y que la ecuación

$$|a+b|=|a|+|b|$$

es válida si y sólo si $ab \geqslant 0$.

7. Represéntense, por A y G las medias aritmética y geométrica de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente, esto es

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}.$$

Demuéstrese que si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son positivos, entonces $G \leqslant A$.

Sugerencia: precédase la demostración de la siguiente observación: si $a_1 < A < a_2$, entonces la media aritmética de los números A, a_1+ $+a_2-A, a_3, a_4, \ldots, a_n$ es A y su media geométrica es $> G$.

8. Designando por H la media armónica de los números anteriores $a_1, a_2, \ldots, a_n$, esto es, escribiendo:

$$H=n:\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

demuéstrese que: $H \leqslant G$.

§ 2. SUCESIONES INFINITAS

2.1. Definición y ejemplos

Si a cada entero positivo, le corresponde un número real, decimos que se define una sucesión infinita.

Por ejemplo, los números positivos pares constituyen una sucesión infinita $2, 4, 6, \ldots, 2n \ldots$; a saber, al número 1 le corresponde el 2; al número 2, el 4; al número 3, el 6 y, generalmente, al entero positivo n le corresponde el número $2n$.

Se suele expresar una sucesión infinita en la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ o $\{a_n\}$. Los números que aparecen en la sucesión se llaman términos de la sucesión; la expresión a_n se llama *término general* de la sucesión. Por consiguiente para la sucesión de todos los números positivos pares, el término general es $2n$; para la de los números impares, el término general es $2n-1$.

En una sucesión infinita, algunos términos pueden repetirse. Por ejemplo, si el número 0 corresponde a los enteros positivos impares y el número 1 a los enteros positivos pares, entonces se obtiene la sucesión 0, 1, 0, 1, ... Esta sucesión consiste de dos términos alternados.

En particular, todos los términos de una sucesión pueden ser idénticos: $c, c, c, \ldots$

Como ejemplos de sucesiones mencionaremos las progresiones aritmética y geométrica. La aritmética es una sucesión de la forma $c, c+d, c+2d, \ldots$, esto es una sucesión cuyo término general es $c+(n-1)d$. Similarmente, el término general de una progresión geométrica es

$$a_n = cq^{n-1}.$$

A menudo se emplea *una definición de sucesión por inducción* (esto es, una definición de *recurrencia*). Es decir, definimos directamente el término a_1, pero a_n se define por medio de los términos anteriores, por ejemplo $a_1 = 1$, $a_n = 2^{a_{n-1}}$. Los primeros términos de esta sucesión son: $1, 2, 4, 16, 2^{16}, \ldots$.

Finalmente, obsérvese que no siempre es posible expresar el término general con una fórmula. Por ejemplo, los números primos constituyen, como es bien sabido, una sucesión infinita, pero no conocemos ninguna fórmula matemática que defina el n-ésimo número primo.

Geométricamente, interpretamos una sucesión infinita como un conjunto de puntos en el plano (en el que se dan el eje de las abscisas y el de las ordenadas; ver Fig. 1, p. 28). De hecho la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es el conjunto de puntos $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$ Por ejemplo, el conjunto de enteros positivos es la intersección de la recta $y = x$ y del haz de rectas paralelas el eje Y que pasa por los puntos de los enteros positivos del eje X. Similarmente, la sucesión con un término constante c, es la intersección del haz anterior y la recta paralela al eje X. Si tomamos sobre las rectas de este haz puntos con abscisas 0 y 1 alternadamente, obtenemos la sucesión oscilante $0, 1, 0, 1, \ldots$

Como se puede ver de las observaciones anteriores, una sucesión infinita y el conjunto de los términos de esta sucesión son dos nociones distintas: una sucesión es un conjunto de puntos del plano, y el conjunto de términos de una sucesión es cierto conjunto de números reales, esto es, desde el punto de vista geométrico, un conjunto de la recta. Dos sucesiones diferentes pueden consistir de los mismos términos: la sucesión oscilatoria y adefinida $0, 1, 0, 1, \ldots$ y la sucesión $0, 1, 1, 1, \ldots$ (teniendo en primer lugar 0 y en todos los demás 1) tienen los mismos términos, sin embargo, son sucesiones con propiedades fundamentalmente distintas.

Se dice que una sucesión es *creciente*, si $a_1 < a_2 < a_3 \ldots$, en general: si $a_n < a_{n+1}$. Similarmente, una sucesión es *decreciente* si $a_n > a_{n+1}$. Si substituimos el signo $<$ por $\leqslant$ (o $>$ por $\geqslant$), obtenemos sucesiones

crecientes (o decrecientes) en un sentido más amplio, llamadas también, sucesiones *no decrecientes* (o *no crecientes*). Las sucesiones crecientes y decrecientes en el sentido más amplio se llaman en general *sucesiones monótonas*.

La sucesión de números pares es una creciente, la sucesión $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ es una sucesión creciente en el sentido más amplio. La sucesión oscilatoria $0, 1, 0, 1, \ldots$ no es creciente ni decreciente.

2.2. Noción de límite

Un número g se llama *límite* de la sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ si para todo número positivo ε existe un número k tal que para $n > k$, se verifica la desigualdad

$$|a_n - g| < \varepsilon, \tag{1}$$

esto es a_n está entre $g-\varepsilon$ y $g+\varepsilon$.

Designamos el límite de una sucesión con el símbolo

$$g = \lim_{n=\infty} a_n. \tag{2}$$

Tomemos la sucesión con término general $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ como ejemplo de sucesión con límite, esto es, la sucesión $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, \cdots, 1\frac{1}{n}, \cdots$ Demostraremos que su límite es 1.

Dado un número $\varepsilon > 0$, escogemos k de tal forma que para $n > k$, se verifique la desigualdad $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ es decir $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Ahora, sea k un entero positivo mayor que $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Entonces tenemos $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$; por consiguiente la doble desigualdad $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{k} < \varepsilon$ es válida para $n > k$, de donde $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, como queríamos demostrar.

Obsérvese que hemos demostrado simultáneamente que

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

El número k escogido para la ε dada, depende de ε. Generalmente si disminuimos ε, k se incrementa (este hecho se observa fácilmente en el ejemplo anterior).

Para expresarlo más objetivamente, la condición para que g sea el límite de una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ puede formularse como sigue: para toda $\varepsilon > 0$, la desigualdad (1) se satisface para todo valor de n suficientemente grande.

Una sucesión que tiene un límite se llama *convergente*. Una sucesión *divergente* es la que no tiene límite. Como ejemplo de una sucesión divergente, tomemos la de todos los enteros positivos.

En efecto, supongamos que g es el límite de la sucesión de los enteros positivos. Escribiendo 1 en lugar de ε, tenemos por (1), la desigualdad $|n-g| < 1$ para n suficientemente grande, por consiguiente $n < g+1$. Esto es una contradicción ya que, justamente la desigualdad inversa $n > g+1$ es válida para n suficientemente grande. Esta contradicción demuestra que nuestra suposición de que la sucesión de enteros positivos tenía límite era falsa. Por consiguiente; es una sucesión divergente.

Similarmente, se puede demostrar que la sucesión oscilatoria 0, 1, 0, 1, ... es divergente.

Además,

$$\lim_{n=\infty} c = c, \tag{3}$$

esto es, la sucesión con término constante c tiene por límite c.

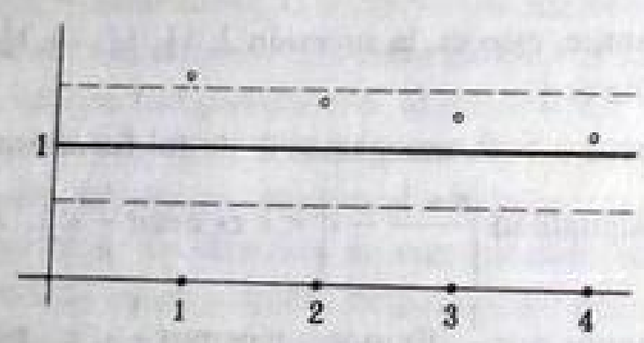


FIG. 1

De hecho tenemos siempre $a_n - c = 0$. Por consiguiente, la desigualdad (1) es válida para toda n.

Geométricamente, la noción de límite puede interpretarse como sigue. Sea una sucesión dada $a_1, a_2, \ldots$ por ejemplo, la sucesión de término general $\dfrac{n+1}{n}$. Imaginemos su interpretación geométrica en el

plano, según el §2.1. Tracemos una recta paralela al eje X que pase por el punto g del eje Y (por ejemplo $g = 1$). Además, dibujemos dos rectas paralelas a la anterior en los dos lados distintos de ella y a la misma distancia. La condición para que la desigualdad (2) sea válida es que para n suficientemente grande (esto es, para n mayor que alguna k), todos los términos de nuestra sucesión están en la franja determinada por las dos rectas paralelas acabadas de definir.

Las condiciones geométricas anteriores se pueden obtener fácilmente de la condición analítica formulada en la definición de límite designando la anchura de la franja por 2ε.

En otras palabras, la condición para que una sucesión converja a g puede formularse como sigue: cada intervalo con centro en g, contiene todos los elementos de la sucesión a partir de cierto índice.

En los ejemplos anteriores hemos visto que una sucesión puede no tener límite (si es divergente); surge la pregunta, de que si un límite existe (es decir, si la sucesión es convergente), entonces es único. Demostraremos que éste es realmente el caso.

Para ello supongamos que una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ tiene dos límites distintos g y g'. Entonces, tenemos $|g-g'| > 0$, sea $\varepsilon = \frac{1}{2}|g-g'|$. Según la definición de límite, existen dos números k y k' tales que para $n > k$ se cumpla la desigualdad

$$|a_n - g| < \varepsilon, \tag{4}$$

y para $n > k'$,

$$|a_n - g'| < \varepsilon. \tag{5}$$

Por consiguiente, designando por m el mayor de los dos números k y k', las desigualdades (4) y (5) son válidas para $n > m$, simultáneamente. Sumemos ambos miembros de estas desigualdades bajo el signo de valor absoluto (ver §1(15)), después de cambiar el signo del valor absoluto en la fórmula (4). Obtenemos $|g-g'| < 2\varepsilon$, pero

$$2\varepsilon = |g-g'|.$$

Por tanto llegamos a una contradicción.

Observación. Se ve fácilmente que la noción de límite no cambia, si substituimos en la definición de límite el signo $>$ por el de $\geqslant$ ó $<$ por $\leqslant$.

2.3. Sucesiones acotadas

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ es *acotada*, si el conjunto de sus términos está acotado, esto es, si existe un número M tal que la desigualdad $|a_n| < M$ sea válida para todo valor de n. En otras palabras, la desigualdad $-M < a_n < M$ se satisface para todos los términos de la sucesión.

La interpretación geométrica de esta condición es que toda la sucesión (considerada como un conjunto en el plano) está contenida entre dos rectas $y = M$ y $y = -M$.

Decimos también que una sucesión está *acotada superiormente* si existe un número M tal que $a_n < M$ para toda n, esto es, si la sucesión está por debajo de la recta $y = M$. La noción de una sucesión *acotada inferiormente* puede definirse en forma análoga. Claramente, una sucesión acotada superior e inferiormente, es simplemente una sucesión acotada.

Ejemplos. La sucesión $0, 1, 0, 1, \ldots$ está acotada. La sucesión de enteros positivos no está acotada, sin embargo está acotada inferiormente. La sucesión $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ no está acotada ni superior ni inferiormente.

Teorema. *Toda sucesión convergente está acotada.*

En efecto, consideremos que la ecuación (2) se verifica y sustituyamos ε por el valor 1. Entonces existe un número k tal que tenemos $|a_n - g| < 1$ para $n > k$. Como $|a_n| - |g| \leqslant |an - g|$ (ver §1 (13)), tenemos $|a_n| < |g| + 1$. Designemos por M un número mayor que cualquiera de los siguientes $k+1$ números: $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|, |g|+1$. Como el último es mayor que $|a_{k+1}|, |a_{k+2}|$ etc., vemos que $M > |a_n|$ para toda n. Luego la sucesión está acotada.

2.4. Operaciones con sucesiones

Teorema. *Suponiendo que las sucesiones $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ son convergentes, se cumplen las cuatro fórmulas siguientes* (¹):

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n, \tag{6}$$

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n, \tag{7}$$

(¹) Para simplificar el simbolismo a menudo se omitirá la anotación $n = \infty$ bajo el símbolo lím.

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n, \tag{8}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \ (\textit{cuando} \lim b_n \neq 0). \tag{9}$$

Esto significa que con nuestras hipótesis el límite de la suma existe, y es igual a la suma de los límites, el límite de la diferencia existe y es igual a la diferencia de los límites, etc.

Demostración. Escribamos $\lim a_n = g$ y $\lim b_n = h$. Demos un número $\varepsilon > 0$. Entonces existe un número k tal que las desigualdades $|a_n - g| < \varepsilon/2$ y $|b_n - h| < \varepsilon/2$ son válidas para $n > k$. Si sumamos estas desigualdades bajo el signo de valor absoluto, obtenemos

$$|(a_n + b_n) - (g + h)| < \varepsilon.$$

Esto significa que la sucesión con término general $c_n = a_n + b_n$ converge al límite $g + h$. Por consiguiente, hemos demostrado la fórmula (6).

En particular, si b_n toma un valor constante: $b_n = c$, las fórmulas (6) y (3) implican

$$\lim (a_n + c) = c + \lim a_n. \tag{10}$$

Ahora demostraremos la fórmula (8). Debemos "estimar" la diferencia $|a_n b_n - gh|$. Para poder aplicar el criterio de convergencia de las sucesiones $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ transformamos esta diferencia como sigue:

$$a_n b_n - gh = a_n b_n - a_n h + a_n h - gh = a_n(b_n - h) + h(a_n - g).$$

Como la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ es convergente, está acotada, y existe un número M tal que $|a_n| < M$. Aplicando a la ecuación anterior las fórmulas para el valor absoluto de una suma y de un producto, tenemos:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - gh| &\leqslant |a_n(b_n - h)| + |h(a_n - g)| \\ &\leqslant M \cdot |b_n - h| + |h| \cdot |a_n - g|. \end{aligned}$$

Ahora, tomemos un número $\eta > 0$ independiente de ε. Entonces existe un número k tal que $|a_n - g| < \eta$ y $|b_n - h| < \eta$ para $n > k$. Por consiguiente,

$$|a_n b_n - gh| < M\eta + |h|\eta = (M + |h|)\eta.$$

Hasta ahora no hemos supuesto nada respecto al número positivo η. Supongamos ahora que $\eta = \varepsilon/(M + |h|)$. Concluimos que la desi-

gualdad $|a_n b_n - gh| < \varepsilon$ es válida para $n > k$. Por tanto, hemos demostrado la fórmula (8).

En particular, si escribimos $b_n = c$ tenemos

$$\lim (c \cdot a_n) = c \lim a_n, \tag{11}$$

$$\lim (-a_n) = -\lim a_n, \tag{12}$$

donde la fórmula (12) se sigue de la (11) por la substitución $c = -1$.

Las fórmulas (6) y (12) implican la (7) ya que

$$\lim (a_n - b_n) = \lim [a_n + (-b_n)]$$
$$= \lim a_n + \lim (-b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

Antes de continuar la demostración de la fórmula (9), demostraremos el siguiente caso especial de ésta:

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n} \ (\textit{cuando} \lim b_n \neq 0). \tag{13}$$

Primero, observamos que para n suficientemente grande, la desigualdad $b_n \neq 0$ es válida. Demostraremos una aseveración aún más fuerte: $|b_n| > \frac{1}{2}|h|$ para n suficientemente grande. En efecto, como $\frac{1}{2}|h| > 0$, existe un número k tal que $|b_n - h| < \frac{1}{2}|h|$ para $n > k$ de aquí $|h| - |b_n| \leqslant |h - b_n| < \frac{1}{2}|h|$ y por consiguiente $|b_n| > \frac{1}{2}|h|$.

Para demostrar la fórmula (13), estimaremos la diferencia

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| = \left|\frac{h - b_n}{h \cdot b_n}\right| = \left|\frac{h - b_n}{|k| \cdot |b_n|}\right|$$

Pero para n suficientemente grande, tenemos $|h - b_n| < \eta$ y $|b_n| > \frac{1}{2}|h|$, esto es, $1/|b_n| < 2/|h|$. Por consiguiente

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \frac{2\eta}{h^2}.$$

Escribiendo $\eta = \frac{1}{2}\varepsilon h^2$, se tiene

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \varepsilon,$$

de donde se sigue la fórmula (13).

La fórmula (9) se sigue de la (8) y la (13):

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

Observaciones. (α) Hemos supuesto que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes. Esta consideración es esencial, ya que puede suceder que la sucesión $\{a_n + b_n\}$ sea convergente, aunque ambas sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sean divergentes; entonces la fórmula (6) no puede aplicarse. Como ejemplo, podemos tomar: $a_n = n$, $b_n = -n$.

Sin embargo, si la sucesión $\{a_n + b_n\}$ y una de las dos sucesiones, por ejemplo la $\{a_n\}$ son convergentes, entonces la segunda es también convergente. Puesto que $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, y así la sucesión $\{b_n\}$ es convergente como una diferencia de dos sucesiones convergentes.

Observaciones análogas pueden aplicarse a las fórmulas (7)-(9). (β). En la definición de una sucesión hemos supuesto que la enumeración de los elementos empieza con 1. Conviene generalizar esta definición considerando que la enumeración empieza con un entero positivo arbitrario (incluso con un entero arbitrario), por ejemplo con 2, 3 u otro número entero positivo. Como sucede con el ejemplo de la demostración de la fórmula (13). Hemos demostrado que $b_n \neq 0$ a partir de cierta k. Por consiguiente, la sucesión $\frac{1}{b_n}$ está definida justamente empezando con esta k, (ya que si $b_n = 0$, entonces $\frac{1}{b_n}$ no significa ningún número.

Esta observación está relacionada con la siguiente propiedad de sucesiones, fácil de demostrar: *el cambio de un número finito de términos de una sucesión no tiene influencia ni en la convergencia de la sucesión ni en su límite*. Lo mismo puede decirse de la adición u omisión de un número finito de términos en una sucesión.

Ejemplos. Calcúlese $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{6n+2}{7n-3}$. En este caso no podemos aplicar la fórmula (9) directamente, ya que ni el numerador ni el denominador son convergentes, cuando n tiende a ∞. Sin embargo, podemos transformar el término general de la sucesión $a_n = \frac{6n+2}{7n-3}$ de modo que se convierta en un cociente de dos expresiones, cada una de las cuales tenga un límite. Para este fin es suficiente dividir el numerador y el denomina-

dor por n. Entonces obtenemos $a_n = \dfrac{6+2/n}{7-3/n}$ y podemos aplicar la fórmula (9). Como

$$\lim_{n=\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right) = 6 \text{ y } \lim_{n=\infty}\left(7-\frac{3}{n}\right) = 7,$$

tenemos

$$\lim_{n=\infty} a_n = \frac{6}{7}.$$

Similarmente,

$$\lim_{n=\infty}\frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n=8}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 0,$$

puesto que

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n^2}.$$

2.5. Otras propiedades del límite

Supóngase que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente. Entonces la sucesión $\{|a_n|\}$ también es convergente y

(14) $$\lim |a_n| = |\lim a_n|.$$

Sea el $\lim a_n = g$ entonces, tenemos $|a_n - g| < \varepsilon$ para n suficientemente grande, por consiguiente

$$|a_n|-|g| \leqslant |a_n-g| < \varepsilon \text{ y } |g|-|a_n| \leqslant |g-a_n| < \varepsilon,$$

de donde (ver §1 (17)): $\big||a_n|-|g|\big| < \varepsilon$. Por tanto, se ha demostrado la fórmula (14).

Suponiendo que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes, se cumple la siguiente relación:

(15) *la desigualdad* $a_n \leqslant b_n$ *implica* $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

En particular, si la sucesión $\{c_n\}$ es convergente, entonces

(16) *la condición* $c_n \geqslant 0$ *implica* $\lim c_n \geqslant 0$.

Demostraremos primero la última fórmula. Sea $\lim c_n = h$, y supongamos además que $h < 0$, esto es $-h > 0$. Entonces tenemos $|c_n - h| < -h$ para n suficientemente grande, y de aquí $c_n - h < -h$, de donde $c_n < 0$, lo cual contradice nuestra suposición.

Aplicando la fórmula (16) demostraremos ahora la (15).

Pongamos $b_n - a_n = c_n$ como $a_n \leqslant b_n$, tenemos $c_n \geqslant 0$ y por lo tanto, en el límite $\lim c_n \geqslant 0$. Además (7) implica:

$$\lim c_n = \lim b_n - \lim a_n,$$

de aquí $\lim b_n - \lim a_n \geqslant 0$, esto es, $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

Observación. En la formulación de la relación (16), la desigualdad $\geqslant$ no puede ser reemplazada por $>$ (similarmente en (15) no puede reemplazarse $\leqslant$ por $<$). Por ejemplo la sucesión $c_n = 1/n$ satisface la desigualdad $c_n > 0$, pero $\lim c_n = 0$.

Por tanto vemos que las relaciones $\leqslant$ y $\geqslant$ "siguen siendo verdaderas en el límite", pero las relaciones $<$ y $>$ no tienen esta propiedad.

A continuación demostraremos la *fórmula de la doble desigualdad*:

(17) *Si* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ *y si* $\lim a_n = \lim b_n$, *entonces la sucesión* $\{c_n\}$ *es convergente y* $\lim c_n = \lim a_n = \lim b_n$.

Supóngase que $\lim a_n = g = \lim b_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces tenemos $|a_n - g| < \varepsilon$ y $|b_n - g| < \varepsilon$ para n suficientemente grande. Según la suposición $a_n - g \leqslant c_n - g \leqslant b_n - g$,

$$\text{y} \quad -\varepsilon < a_n - g \quad \text{y} \quad b_n - g < \varepsilon;$$

de aquí $-\varepsilon < c_n - g < \varepsilon$, esto es, $|c_n - g| < \varepsilon$, de donde $\lim c_n = g$.

(18) *Si* $\lim |a_n| = 0$, *entonces la sucesión* $\{a_n\}$ *es convergente y* $\lim a_n = 0$.

Ya que entonces tenemos $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$

$$\lim(-|a_n|) = 0 = \lim |a_n|.$$

2.6. Subsucesiones

Dadas una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y una sucesión creciente de enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ La sucesión

$$b_1 = a_{m_1}, \quad b_2 = a_{m_2}, \quad \ldots, \quad b_n = a_{m_n}, \quad \ldots$$

es una *subsucesión de la sucesión* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Por ejemplo la sucesión $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$ es una subsucesión de la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ Sin embargo, la sucesión $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots$ no es una subsucesión de ésta, ya que en este caso los índices no forman una sucesión creciente.

Tenemos la fórmula general

$$m_n \geqslant n. \tag{19}$$

Esta es obvia para $n = 1$, esto es, tenemos $m_1 \geqslant 1$ (ya que m_1 es un entero positivo). Aplicando el principio de inducción, consideremos que la fórmula (19) es válida para una n dada. Entonces tenemos

$$m_{n+1} > m_n \geqslant n, \text{ de donde } m_{n+1} \geqslant n+1.$$

Hemos obtenido la fórmula (19) para $n+1$. Por consiguiente, la (19) es válida para toda n.

Según nuestra definición, toda sucesión es subsucesión de sí misma. Podemos decir en general que cada subsucesión se obtiene de una sucesión por la omisión de varios elementos de ésta (este número de elementos puede ser finito, infinito o cero). Por lo tanto, una subsucesión $\{a_{m_{k_n}}\}$ de una subsucesión $\{a_{m_n}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{a_n\}$.

TEOREMA 1. — *Una subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite. En otras palabras*

$$\text{si } \lim_{n=\infty} a_n = g \text{ y si } m_1 < m_2 < \cdots, \text{ entonces } \lim_{n=\infty} a_{m_n} = g. \tag{20}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe un número k tal que la desigualdad $|a_n - g| < \varepsilon$ es válida para $n > k$. Según la fórmula (19), $m_n \geqslant n > k$; en consecuencia $|a_{m_n} - g| < \varepsilon$. Esto implica $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

TEOREMA 2 (BOLZANO WEIERSTRASS [1]). *Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea la sucesión $\{a_n\}$ acotada. Entonces existe un número M tal que la desigualdad $-M < a_n < M$ es válida para toda n.

Aplicaremos ahora el teorema del §1.7. Supóngase que designamos con Z el conjunto de números x para los que la desigualdad $x < a_n$ se verifica para una infinidad de valores de n. El conjunto Z es no vacío,

[1] Matemáticos del siglo XIX. Karl Weierstrass es uno de los grandes analistas.

ya que el número $-M$ pertenece a Z (porque la desigualdad $-M < a_n$ se satisface para toda n). Al mismo tiempo este conjunto tiene cota superior; ya que si x pertenece a Z, entonces $x < M$ pues suponiendo que $x \geqslant M$, la desigualdad $x < a_n$ no se satisfaría por ninguna n (por lo que X no podría pertenecer al conjunto Z).

Como el conjunto Z es no vacío y acotado superiormente, existe la cota superior de este conjunto. Designemos esta cota por g. Se sigue de la definición de cota superior, que para todo número $\varepsilon > 0$ existe una infinidad de valores de n tales que

$$g - \varepsilon < a_n \leqslant g + \varepsilon$$

(porque $g - \varepsilon$ pertenece al conjunto Z y $g + \varepsilon$ no pertenece a Z).

Demostraremos ahora que g es el límite de una cierta subsucesión de la sucesión $\{a_n\}$. Esto es, tenemos que definir una sucesión de enteros positivos $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ de tal forma que $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

Para este fin substituiremos primero 1 por ε. Entonces existe una infinidad de números n tales que

$$g - 1 < a_n \leqslant g + 1.$$

Designando una de estas n por m_1 tenemos:

$$g - 1 < a_{m_1} \leqslant g + 1.$$

Ahora, substitúyase $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Entonces existen muchas n tales que $g - \frac{1}{2} < a_n \leqslant g + \frac{1}{2}$. Entre estas n existen números $> m_1$; alguna de estas n la designamos por m_2 de modo que

$$g - \tfrac{1}{2} < a_{m_2} \leqslant g + \tfrac{1}{2}, \quad m_1 < m_2.$$

Similarmente podemos encontrar un índice m_3 tal que $g - \frac{1}{2} < a_{m_3} \leqslant g + \frac{1}{3}$, $m_2 < m_3$. En general si, m_n está definido, definiremos m_{n+1} de tal manera que

$$g - \frac{1}{n+1} < a_{m_{n+1}} \leqslant g + \frac{1}{n+1}, \; m_n < m_{n+1}. \tag{21}$$

Aplicando la fórmula (17) en la doble desigualdad y como

$$\lim \frac{1}{n} = 0,$$

tenemos

$$\lim\left(g-\frac{1}{n}\right)=g=\lim\left(g+\frac{1}{n}\right).$$

Por lo tanto la fórmula (21) (después de substituir n por $n+1$) implica $\lim_{n=\infty} a_{m_n}=g$. Finalmente, se sigue de la desigualdad $m_n<m_{n+1}$, que la sucesión $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$ es una subsucesión de la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ y el teorema está demostrado.

Como un corolario del teorema anterior podemos deducir

TEOREMA 3. — *Toda sucesión monótona acotada es convergente. Además si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ entonces $a_n \leqslant \lim a_n$; si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$, entonces $a_n \geqslant \lim a_n$.*

Considérese que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada y es creciente en el sentido amplio. Desígnese por Z el conjunto de números que pertenecen a la sucesión, y por g su cota superior (véase §1.7). Entonces tenemos

$$g \geqslant a_n \quad \text{para toda } n;$$

Al mismo tiempo para cualquier $\varepsilon>0$ existe una k tal que $g-\varepsilon<a_k$ (porque la desigualdad $g-\varepsilon \geqslant a_n$ no puede ser válida para toda n, lo cual se sigue de la definición de cota superior).

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente (en el sentido amplio), la desigualdad $n>k$ implica $a_k \leqslant a_n$, de aquí $g-\varepsilon<a_n$. Por consiguiente concluimos que para cualquier $\varepsilon>0$ existe una k tal que para $n>k$ la doble desigualdad $g-\varepsilon<a_n \leqslant g$ es válida, y por tanto la desigualdad $|a_n-g|<\varepsilon$ también es válida. Esto significa que $g=\lim_{n=\infty} a_n$.

Para demostrar que la desigualdad $a_n \leqslant g$ se satisface para toda n, considérese un entero positivo fijo n_0. Se tiene que demostrar que $a_{n_0} \leqslant g$. Ahora, se infiere de las hipótesis que

$$a_{n_0} \leqslant a_{n_0+1},\ a_{n_0} \leqslant a_{n_0+2}, \ldots,\ a_{n_0} \leqslant a_{n_0+k}, \ldots$$

Por consiguiente, por la fórmula (15) $a_{n_0} \leqslant \lim_{k=\infty} a_{n_0+k}=g$.

De esta forma se demuestra el Teorema 3 para sucesiones no decrecientes. La demostración para sucesiones no crecientes es análoga.

Es consecuencia inmediata del Teorema 1, que una sucesión convergente no puede contener dos subsucesiones que converjan a diferentes límites (especialmente esto implica la divergencia de la sucesión 0, 1, 0, 1, ...). Para sucesiones acotadas este teorema puede invertirse. De hecho, tenemos

TEOREMA 4 (¹). *Si una sucesión $\{a_n\}$ está acotada y si todas las subsucesiones de esta sucesión convergen al mismo límite g, entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge al límite g.*

En otras palabras, toda sucesión divergente acotada contiene dos subsucesiones que convergen a diferentes límites.

Demostración. Supóngase que g no es el límite de la sucesión $\{a_n\}$. Entonces existe un número $\varepsilon>0$ tal que para toda k existe $n>k$ tal que la desigualdad $|a_n-g| \geqslant \varepsilon$ es válida. De aquí concluimos que existe una subsucesión $\{a_{m_n}\}$ tal que $|a_{m_n}-g| \geqslant \varepsilon$ para toda n. Substituyendo k por 1 encontramos que existe $m_1>1$ tal que $|a_{m_1}-g| \geqslant \varepsilon$. Además, substituyendo $k=m_1$ vemos que $m_2>m_1$ para el cual $|a_{m_2}-g| \geqslant \varepsilon$. Similarmente existe $m_3>m_2$ tal que $|a_{m_3}-g| \geqslant \varepsilon$ etc.

Como la sucesión $\{a_n\}$ está acotada, la sucesión $\{a_{m_n}\}$ también está acotada. Por tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, contiene una subsucesión convergente. Designemos esta subsucesión por $\{a_{m_{r_n}}\}$. Como ésta es también una subsucesión de la sucesión $\{a_n\}$, nuestras hipótesis implican que $\lim_{n=\infty} a_{m_{r_n}}=g$, esto es, $\lim_{n=\infty}(a_{m_{r_n}}-g)=0$.

Pero, por otra parte, los números $m_{r_1}, m_{r_2}, \ldots$ pertenecen a la sucesión $m_1, m_2, \ldots$ y, consecuentemente, la desigualdad $|a_{m_n}-g| \geqslant \varepsilon$ implica la desigualdad $|a_{m_{r_n}}-g| \geqslant \varepsilon$ para toda n que es una contradicción. De modo que hemos demostrado por contradicción que $\lim a_n=g$.

2.7. Teorema de Cauchy (²)

Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es que para toda $\varepsilon>0$ exista un número r tal que la desigualdad

$$|a_n-a_r|<\varepsilon \tag{22}$$

sea válida para $n>r$.

(¹) Aplicaremos este teorema en § 5.5.

(²) Augustin Cauchy, 1789-1857. Uno de los matemáticos franceses más eminentes. Las nociones fundamentales y los teoremas de la teoría de sucesiones y series y de la teoría de funciones continuas, se deben a él.

tenemos

$$\lim\left(g-\frac{1}{n}\right)=g=\lim\left(g+\frac{1}{n}\right).$$

Por lo tanto la fórmula (21) (después de substituir n por $n+1$) implica $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n}=g$. Finalmente, se sigue de la desigualdad $m_n<m_{n+1}$, que la sucesión $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$ es una subsucesión de la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ y el teorema está demostrado.

Como un corolario del teorema anterior podemos deducir

TEOREMA 3. — *Toda sucesión monótona acotada es convergente. Además si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ entonces $a_n \leqslant \lim a_n$; si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$, entonces $a_n \geqslant \lim a_n$.*

Considérese que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada y es creciente en el sentido amplio. Designese por Z el conjunto de números que pertenecen a la sucesión, y por g su cota superior (véase §1.7). Entonces tenemos

$$g \geqslant a_n \quad \text{para toda } n;$$

Al mismo tiempo para cualquier $\varepsilon>0$ existe una k tal que $g-\varepsilon<a_k$ (porque la desigualdad $g-\varepsilon \geqslant a_n$ no puede ser válida para toda n, lo cual se sigue de la definición de cota superior).

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente (en el sentido amplio), la desigualdad $n>k$ implica $a_k \leqslant a_n$, de aquí $g-\varepsilon<a_n$. Por consiguiente concluimos que para cualquier $\varepsilon>0$ existe una k tal que para $n>k$ la doble desigualdad $g-\varepsilon<a_n \leqslant g$ es válida, y por tanto la desigualdad $|a_n-g|<\varepsilon$ también es válida. Esto significa que $g=\lim\limits_{n=\infty} a_n$.

Para demostrar que la desigualdad $a_n \leqslant g$ se satisface para toda n, considérese un entero positivo fijo n_0. Se tiene que demostrar que $a_{n_0} \leqslant g$. Ahora, se infiere de las hipótesis que

$$a_{n_0} \leqslant a_{n_0+1},\ a_{n_0} \leqslant a_{n_0+2}, \ldots,\ a_{n_0} \leqslant a_{n_0+k}, \ldots$$

Por consiguiente, por la fórmula (15) $a_{n_0} \leqslant \lim\limits_{k=\infty} a_{n_0+k}=g$.

De esta forma se demuestra el Teorema 3 para sucesiones no decrecientes. La demostración para sucesiones no crecientes es análoga.

Es consecuencia inmediata del Teorema 1, que una sucesión convergente no puede contener dos subsucesiones que converjan a diferentes límites (especialmente esto implica la divergencia de la sucesión 0, 1, 0, 1, ...). Para sucesiones acotadas este teorema puede invertirse. De hecho, tenemos

TEOREMA 4 (¹). *Si una sucesión $\{a_n\}$ está acotada y si todas las subsucesiones de esta sucesión convergen al mismo límite g, entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge al límite g.*

En otras palabras, toda sucesión divergente acotada contiene dos subsucesiones que convergen a diferentes límites.

Demostración. Supóngase que g no es el límite de la sucesión $\{a_n\}$. Entonces existe un número $\varepsilon>0$ tal que para toda k existe $n>k$ tal que la desigualdad $|a_n-g| \geqslant \varepsilon$ es válida. De aquí concluimos que existe una subsucesión $\{a_{m_n}\}$ tal que $|a_{m_n}-g| \geqslant \varepsilon$ para toda n. Substituyendo k por 1 encontramos que existe $m_1>1$ tal que $|a_{m_1}-g| \geqslant \varepsilon$. Además, substituyendo $k=m_1$ vemos que $m_2>m_1$ para el cual $|a_{m_2}-g| \geqslant \varepsilon$. Similarmente existe $m_3>m_2$ tal que $|a_{m_3}-g| \geqslant \varepsilon$ etc.

Como la sucesión $\{a_n\}$ está acotada, la sucesión $\{a_{m_n}\}$ también está acotada. Por tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, contiene una subsucesión convergente. Designemos esta subsucesión por $\{a_{m_{r_n}}\}$. Como ésta es también una subsucesión de la sucesión $\{a_n\}$, nuestras hipótesis implican que $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_{r_n}}=g$, esto es, $\lim\limits_{n=\infty}(a_{m_{r_n}}-g)=0$.

Pero, por otra parte, los números $m_{r_1}, m_{r_2}, \ldots$ pertenecen a la sucesión $m_1, m_2, \ldots$ y, consecuentemente, la desigualdad $|a_{m_n}-g| \geqslant \varepsilon$ implica la desigualdad $|a_{m_{r_n}}-g| \geqslant \varepsilon$ para toda n que es una contradicción. De modo que hemos demostrado por contradicción que $\lim a_n=g$.

2.7. Teorema de Cauchy (²)

Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es que para toda $\varepsilon>0$ exista un número r tal que la desigualdad

$$|a_n-a_r|<\varepsilon \tag{22}$$

sea válida para $n>r$.

(¹) Aplicaremos este teorema en § 5.5.

(²) Augustin Cauchy, 1789-1857. Uno de los matemáticos franceses más eminentes. Las nociones fundamentales y los teoremas de la teoría de sucesiones y series y de la teoría de funciones continuas, se deben a él.

La demostración consiste de dos partes. En la primera demostraremos que la convergencia de una sucesión implica la condición formulada en el teorema, la llamada "condición de Cauchy"; en otras palabras, demostraremos que esta condición es una condición necesaria para la convergencia de esta sucesión. En la segunda parte demostraremos que si se satisface la condición de Cauchy, entonces la sucesión es convergente, esto es, ésta es una condición suficiente para la convergencia de la sucesión.

1°. Dados $\lim a_n = g$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un número r tal que $|a_n - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$ es válido para $n \geqslant r$. En particular, la desigualdad se verifica para $n = r$, esto es $|a_r - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Sumando ambas desigualdades con el signo de valor absoluto obtenemos la fórmula (22).

2°. Supongamos ahora que se satisface la condición de Cauchy. Tenemos que demostrar la convergencia de la sucesión. Primero, demostraremos que es una sucesión acotada. La demostración será análoga a la de §2.3. Esto es, substituimos $\varepsilon = 1$. Entonces existe un número r tal que $|a_n - a_r| < 1$ para $n > r$. De aquí $|a_n| - |a_r| \leqslant |a_n - a_r| < 1$, de donde $|a_n| < |a_r| + 1$. Vamos a denotar por M un número mayor que cualquiera de los siguientes r números: $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{r-1}|, |a_r| + 1$. De tal forma que tendremos $M > |a_n|$ para toda n. Esto significa que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada.

De aquí concluimos por el Teorema de Bolzano-Weierstrass que esta sucesión contiene una subsucesión convergente.

Por consiguiente, dado $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$, donde $m_1 < m_2 < \cdots$ demostraremos que $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$.

Ahora sea $\varepsilon > 0$. Según la condición de Cauchy, existe un número r tal que la desigualdad

$$|a_n - a_r| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{23}$$

se satisface para $n > r$.

La ecuación $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$ implica la existencia de un k tal que

$$|a_{m_n} - g| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{24}$$

Para $n > k$. Claramente, k puede escogerse de tal forma que $k > r$. Entonces ambas desigualdades (23) y (24) se satisfacen para $n > k$.

Además, se puede substituir n por m_n en la fórmula (23), ya que $m_n \geqslant n > r$ (ver (19)). Esto da

$$|a_{m_n} - a_r| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{25}$$

Sumando las desigualdades (23)-(25), después de cambiar el signo dentro del valor absoluto en (25), obtenemos la desigualdad $|a_n - g| < \varepsilon$, válida para toda $n > k$. Esto significa que $\lim a_n = g$.

Observaciones. (α) En el Teorema de Cauchy, así como en la definición de límite, el signo $>$ en la desigualdad $n > k$, así como el $<$ en la fórmula (22), pueden ser substituidos por $\geqslant$ y $\leqslant$ respectivamente.

(β) La condición de Cauchy puede formularse también como sigue: *para toda $\varepsilon > 0$ existe un número r tal que las condiciones $n > r$ y $n' > r$ impliquen $|a_n - a_{n'}| < \varepsilon$.*

Esto es, la condición de Cauchy implica la existencia de una tal que las desigualdades $|a_n - a_r| < \frac{1}{2}\varepsilon$ y $|a_{n'} - a_r| < \frac{1}{2}\varepsilon$ se verifiquen para $n > r$ y $n' > r$. Sumando estas desigualdades obtenemos

$$|a_n - a_{n'}| < \varepsilon.$$

2.8. Divergencia a ∞

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *diverge* a ∞, si para todo número r existe un entero positivo k tal que $a_n > r$ para $n > k$. Este hecho lo designamos simbólicamente por medio de la ecuación: $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$.

Por consiguiente, una sucesión que diverge a ∞ es una sucesión en la cual los términos que tienen índices suficientemente grandes son arbitrariamente grandes.

Análogamente definimos el significado de la expresión

$$\lim_{n=\infty} a_n = -\infty.$$

Esto significa que para todo número negativo r existe un k tal que $a_n < r$ para $n > k$.

Decimos que sucesiones que divergen a ∞ ó a $-\infty$ tienen límites *impropios*.

EJEMPLOS: $\lim\limits_{n=\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n=\infty} (-n) = -\infty$.

1. *Una sucesión creciente (en el sentido amplio), no acotada superiormente diverge a ∞.*

En efecto, como la sucesión $\{a_n\}$ no está acotada superiormente, existe para toda r, un número k tal que $a_n \geqslant a_k$ para $n > k$, de donde $a_n > r$.

Por consiguiente $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.

Un teorema análogo es válido para sucesiones decrecientes.

Comparando este teorema con el 3, §2.6, concluimos que *toda sucesión monótona tiene un límite, propio o impropio* (dependiendo de que esté acotada, o no, respectivamente).

2. *Si* $\lim_{n=\infty} a_n = \pm\infty$, *entonces* $\lim_{n=\infty} (1/a_n) = 0$.

En efecto, sean $\lim a_n = \infty$, y $\varepsilon > 0$. Escribiendo $r = 1/\varepsilon$ concluimos que existe un k tal que $a_n > 1/\varepsilon$ vale para $n > k$, esto es, $1/a_n < \varepsilon$ para $n > k$; pero esto significa que $\lim (1/a_n) = 0$.

El teorema recíproco no es verdadero: la sucesión $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ converge a 0, pero la sucesión de sus recíprocos $1, -2, 3, -4, \ldots$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

Mencionemos el siguiente teorema referente a operaciones de sucesiones divergentes. *La suma y el producto de dos sucesiones que divergen a* $+\infty$ *son divergentes a* $+\infty$. Demostraremos este teorema en la forma siguiente, que es algo más fuerte que la anterior.

3. *Si* $\lim a_n = \infty$ *y si la sucesión* $\{b_n\}$ *está acotada inferiormente entonces* $\lim (a_n + b_n) = \infty$.

Sea $M < b_n$. Como $\lim a_n = \infty$, entonces para una r dada existe un número k tal que tenemos $a_n > r - M$ para $n > k$. De aquí $a_n + b_n > r$ y consecuentemente, $\lim (a_n + b_n) = \infty$.

4. *Si* $\lim a_n = \infty$ *y si* $b_n \geqslant c$ *siempre, donde* $c > 0$, *entonces* $\lim (a_n \cdot b_n) = \infty$.

Sea $r > 0$ un número dado. Existe un número k tal que para $n > k$, tenemos $a_n > r/c$. Multiplicando esta desigualdad por la $b_n \geqslant c$ obtenemos $a_n b_n > r$. De aquí $\lim (a_n \cdot b_n) = \infty$.

Un teorema correspondiente al (15) es el siguiente:

5. *Si* $\lim a_n = \infty$ *y* $a_n \leqslant b_n$, *entonces* $\lim b_n = \infty$.

Es decir, si $a_n > r$ entonces $b_n > r$.

2.9. Ejemplos

(α) *Si* $c > 0$, *entonces* $\lim_{n=\infty} nc = \infty$.

Esto se sigue inmediatamente de 4.

(β) *Si* $a > 1$, *entonces* $\lim_{n=\infty} a^n = \infty$.

Es decir, al expresar $c = a - 1$, obtenemos $c > 0$, de donde

$$\lim_{n=\infty} nc = \infty.$$

Por otra parte, aplicando la desigualdad de Bernoulli (§1 (1)), obtenemos $a_n = (1+c)^n \geqslant 1 + nc$, de donde $\lim_{n=\infty} a^n = \infty$ según (5).

(γ) *Si* $|q| < 1$, *entonces* $\lim q^n = 0$.

Primero, consideremos que $0 < q < 1$. Entonces $1/q > 1$ y, consecuentemente, $\lim_{n=\infty} (1/q^n) = \infty$. De aquí obtenemos según el Teorema 2, $\lim_{n=\infty} q^n = 0$.

Por tanto, se sigue que en el caso general, considerando únicamente $|q| < 1$, la ecuación $\lim_{n=\infty} |q|^n = 0$ se satisface, esto es, $\lim_{n=\infty} |q^n| = 0$. Pero la ecuación anterior implica $\lim_{n=\infty} q^n = 0$ (ver (18)).

(δ) *Si* $a > 0$, *entonces* $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Primero, consideremos que $a > 1$ y escribamos $u_n = \sqrt[n]{a}$. Demostraremos que la sucesión $\{u_n\}$ es decreciente. En efecto $a > 1$ implica $a^n < a^{n+1}$. Tomando en ambos miembros la $n(n+1)$ ésima raíz, obtenemos $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$, esto es, $u_n > u_{n+1}$. Además, le sucesión $\{u_n\}$ está acotada, puesto que $u_n > 1$. Por consiguiente concluimos que es una sucesión convergente (ver 2.6, Teorema 3). Se tiene que demostrar que 1 es el límite de esta sucesión. Escribamos $\lim u_n = 1 + h$. Por el teorema antes citado $u_n > 1$ implica $h \geqslant 0$. Demostraremos que la suposición $h > 0$ conduce a una contradicción.

En efecto, la desigualdad $1 + h < \sqrt[n]{a}$ da $(1+h)^n < a$ y como $(1+h)^n > 1 + nh$, concluimos que $1 + nh < a$ para toda n. Pero esto es imposible, puesto que $\lim_{n=\infty} nh = \infty$.

Hemos demostrado que $a > 1$ implica $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Pero si $0 < a \leqslant 1$ entonces $1/a \geqslant 1$ y $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$, esto es, $\lim_{n=\infty} (1/\sqrt[n]{a}) = 1$. Por tanto $1/\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ esto es, $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ε) *Si* $|q| < 1$, *entonces* $\lim_{n=\infty} a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \dfrac{a}{1-q}$.

Esta es la expresión para la suma de una progresión geométrica cuya razón es numéricamente menor que la unidad.

Es decir, tenemos $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$ y $\lim q^n=0$ (ver (γ)).

(ζ) *Si $a>0$ y si $\{r_n\}$ es una sucesión de números racionales que converge a cero, entonces,* $\lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}=1$.

Esta es una generalización de la fórmula (δ) y se deduce fácilmente de ella.

2.10. El número e

Demostraremos la existencia de $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, y designaremos este límite por e.

Escríbase $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Entonces se tiene

$$a_1=2,\quad a_2=(1+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{9}{4},\quad a_3=(1+\tfrac{1}{3})^3=\tfrac{64}{27}=2\tfrac{10}{27}.$$

Demostraremos que esta sucesión es creciente. Para este propósito aplicaremos la fórmula del binomio de Newton. (§1.3):

$$a_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!},$$

Por tanto

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{3!}+\cdots+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)}{n!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}$$

Se ve de inmediato que los términos de la suma que constituyan a_n son menores o iguales que los primeros que constituyen a_{n+1}, respectivamente. Por tanto $a_n<a_{n+1}$.

En consecuencia la sucesión es creciente. Pero también está acotada ya que

$$a_n<2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

debido a que (ver §2.9 (ε)).

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

La sucesión $\{a_n\}$, por ser creciente y acotada, es convergente. Por tanto, se ha demostrado la existencia del número e y puede calcularse que, aproximadamente, $e=2{,}718\ldots$ Podemos demostrar también (como veremos después) que

$$e=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

El número e juega un papel importante en análisis. En particular, se utiliza como base de logaritmos (los llamados *logaritmos naturales*)

Demostraremos ahora que

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}. \tag{26}$$

En efecto, tenemos

$$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}},$$

de donde

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e},$$

puesto que

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1.$$

2.11* Sucesiones de las medias aritméticas y geométricas de una sucesión dada

Dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, considérese la sucesión de la media aritmética $a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \ldots, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \ldots$

1. *Si* $\lim_{n=\infty} a_n = g$, *entonces* $\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = g$; *este teorema sigue siendo válido en el caso* $g = \pm\infty$.

Demostración. Considérese primero que g es un número finito. Entonces, para una $\varepsilon > 0$ dada, existe un número k, tal que las desigualdades

$$g-\varepsilon < a_{k+1} < g+\varepsilon, \quad g-\varepsilon < a_{k+2} < g+\varepsilon, \quad \ldots, g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon$$

se satisfacen para toda $n > k$.

Sumando el sistema de estas $n-k$ desigualdades obtenemos: esto es

$$g-\varepsilon < \frac{a_{k+1}+\cdots+a_n}{n-k} < g+\varepsilon,$$

$$(g-\varepsilon)\frac{n-k}{n} < \frac{a_{k+1}+\cdots+a_n}{n} < (g+\varepsilon)\frac{n-k}{n}.$$

Al mismo tiempo, $\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\cdots+a_k}{n} = 0$, de donde tenemos

$$-\varepsilon < \frac{a_1+\cdots+a_k}{n} < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. De aquí

$$(g-\varepsilon)\frac{n-k}{n} - \varepsilon < \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} < (g+\varepsilon)\frac{n-k}{n} + \varepsilon,$$

pero como $\lim_{n=\infty} \frac{n-k}{n} = 1$, tenemos $g-3\varepsilon < \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} < g+3\varepsilon$ para n suficientemente grande.

Esto significa que $\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = g$.

Ahora considérese que $g = \infty$ (la demostración del caso en que $g = -\infty$ es análoga). Entonces para un número dado $r > 0$ existe un número k tal que $a_{k+1} > r, a_{k+2} > r, \ldots$ Por consiguiente, tenemos $a_{k+1}+\ldots+a_n > (n-k)r$ para toda $n > k$, de donde

$$\frac{a_{k+1}+\cdots+a_n}{n} > \frac{n-k}{n}r.$$

Pero $\frac{a_1+\cdots+a_k}{n} > -\frac{r}{2}$ para n grande; de donde

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} > \frac{n-k}{n}r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} - \frac{k}{n}r,$$

por tanto obtenemos $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} > \frac{r}{3}$ para n suficientemente grande. En consecuencia concluimos que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \infty.$$

Observación. El teorema recíproco no es verdadero; una sucesión puede ser divergente aunque la de las medias aritméticas sea convergente. Por ejemplo, la sucesión 1, 0, 1, 0, ... es divergente, pero la de sus medias aritméticas converge a 1/2.

Un teorema análogo se verifica para las medias geométricas:

2. *Si* $a_n > 0$ *y* $\lim_{n=\infty} a_n = g$ (*g finito o infinito*), *entonces*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = g.$$

Este teorema se demuestra en una forma completamente análoga a la del teorema 1. El teorema 2 puede reducirse también al teorema 1, tomando logaritmos (aplicando la continuidad de la función $\log x$, ver § 5.5).

3. *Si* $\lim_{n=\infty}(a_{n+1}-a_n)=g$, *entonces* $\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n}=g$.

En efecto, escríbase, $b_n=a_n-a_{n-1}$ para $n>1$ y $b_1=a_1$. Entonces tenemos

$$\lim_{n=\infty} b_n = g \text{ y } \frac{b_1+\cdots+b_n}{n}=\frac{a_n}{n}.$$

Por tanto, $\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n}=g$ por el teorema 1.

4. *Si* $a_n>0$ y $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=g$, *entonces* $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}=g$.

Este teorema se obtiene del teorema 2 escribiendo $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ para $n>1$ y $b_1=a_1$; se sigue de la ecuación $\sqrt[n]{b_1b_2\cdot\cdots\cdot b_n}=\sqrt[n]{a_n}$.

EJEMPLOS. (α) Expresando $a_n=n$, tenemos $\lim_{n=\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

Por tanto $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(β) $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$, ya que $\lim_{n=\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n=\infty}(n+1)=\infty$.

(γ) El ejemplo de la sucesión 1, 1, 1/2, 1/2, 1/4, 1/4, ... demuestra que puede existir $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}$, aunque no exista $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

EJERCICIOS DEL §2

1. Evalúense los siguientes límites:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n}{n+1},\quad \lim_{n=\infty}\frac{5n+1}{7n-2},$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{2n^2+5}{3n^3-1},\quad \lim_{n=\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

2. Dada una sucesión convergente $\{a_n\}$, demuéstrese que si se sustituye un número finito de términos de esta sucesión por otros, la sucesión así obtenida también es convergente y tiene el mismo límite que la sucesión dada.

Análogamente la eliminación o adición de un número finito de términos a una sucesión no afecta a su convergencia ni al valor de su límite.

3. Demuéstrese que si $\lim_{n=\infty}a_n=0$ y si la sucesión $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\lim_{n=\infty}a_nb_n=0$.

4. Demuéstrese que si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen al mismo límite, entonces la sucesión $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ converge también al mismo límite.

5. Demuéstrese la siguiente generalización del teorema de límite de subsucesiones (§2.6, Teorema 1): *Si* $\lim_{n=\infty}a_n=g$ (*donde g tiene un valor finito o infinito*) y si $\lim_{n=\infty}m_n=\infty$, entonces $\lim_{n=\infty}a_{m_n}=g$.

6. Evalúese $\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

7. Definimos una sucesión $\{a_n\}$ por inducción, como sigue:

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}.$$

Demuéstrese que $\lim_{n=\infty}a_n=\frac{2}{3}$.

8. Dada una sucesión acotada $\{a_n\}$; demuéstrese que entre los números que son límites de subsucesiones convergentes de esta sucesión existe un número máximo y uno mínimo (estos números se llaman límite superior y límite inferior de la sucesión $\{a_n\}$, respectivamente).

Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea convergente es que el límite superior sea igual al límite inferior.

Demuéstrese que si $c=\lim\sup a_n$ entonces para toda $\varepsilon>0$ existe un número k tal que $a_n<c+\varepsilon$ para $n>k$ y que $a_m>c-\varepsilon$ es válida para una infinidad de índices m.

9. Demuéstrese que para toda sucesión de intervalos cerrados, tales que cada uno esté contenido en el anterior, existe al menos un punto común (Teorema de Ascoli).

En el teorema anterior se consideran los intervalos cerrados, esto es, intervalos con sus puntos extremos; demuéstrese con un ejemplo que este teorema no es válido para intervalos abiertos (esto es, intervalos en los que se excluyen los puntos extremos).

10. Hállese el límite de la sucesión $\{a_n\}$ definida por inducción:

$$a_1 = \sqrt{c},\ a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

11. Demuéstrese que si $\lim\limits_{n=\infty} a_n = g$ y si $\lim\limits_{n=\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \infty$, donde $b_n \geqslant 0$, entonces

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = g.$$

12. Demuéstrese que si $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = g$ y $\lim\limits_{n=\infty} v_n = \infty$, donde la sucesión $\{v_n\}$ es creciente, entonces $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = g$. (Substitúyase en el ejercicio anterior: $a_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$, $b_n = v_n - v_{n-1}$).

13. Triángulo de Pascal [1]. Consideremos la siguiente tabla (esto es, sucesión doble $\{a_{nk}\}$):

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...
...	...	...	...	...	...

Esta tabla se define como sigue: la primera línea consiste sólo de 1, esto es $a_{1,k} = 1$; el k-ésimo término de la n-ésima línea es la suma de los k primeros términos de la $(n-1)$-ésima línea, esto es

$$a_{nk} = a_{n-1,1} + a_{n-1,2} + \ldots + a_{n-1,k}.$$

[1] Blaise Pascal, matemático francés, 1623-1662, conocido por sus obras, que iniciaron el Cálculo de Probabilidades. Antecesor de Newton en algunas investigaciones de análisis.

Demuéstrese que

$$a_{nk} = \frac{(k+n-2)!}{(k-1)!\,(n-1)!}$$

y que los términos $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1,n}$ son coeficientes sucesivos del desarrollo de Newton, de la expresión $(a+b)^{n-1}$ (como se ve fácilmente, son los términos de la tabla que están en la recta que une el n-ésimo término de la primera línea con el primero de la n-ésima).

(14) Demuéstrese que

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

15. Demuéstrese que si una sucesión de números racionales $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ (donde p_n y q_n son enteros positivos) tiende a un número irracional, entonces

$$\lim_{n=\infty} p_n = \infty = \lim_{n=\infty} q_n.$$

§ 3. SERIES INFINITAS

3.1. Definiciones y ejemplos

Dada una sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ consideramos la siguiente sucesión infinita:

(1) $$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

Si la sucesión $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ tiene un límite, entonces lo designamos por el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n=\infty} s_n$$

y lo llamamos *suma de la serie infinita* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

En este caso, decimos también que la *serie es convergente*.

Si el límite anterior, no existe, entonces la serie se llama *divergente*.

En el caso en que todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ a partir de cierta k, sean $= 0$, tenemos una suma ordinaria de un número finito de términos. Por consiguiente, la suma de una serie infinita es una gene-

ralización de esta suma cuando el número de términos es infinito (en la cual se hace énfasis con la notación). Sin embargo, a diferencia de la adición de un número finito de términos, no siempre es posible hallar la suma de un número infinito de términos, esto es, la sucesión (1) no es siempre convergente (aun cuando tomemos en cuenta límites infinitos).

Para ilustrar esto, daremos varios ejemplos.

La serie geométrica $a+aq+aq^2+\dots+aq^n+\dots$ con razón q que satisface la desigualdad $|q|<1$ es convergente. Es decir (ver §2.9, (ε)),

$$a+aq+aq^2+\dots=\frac{a}{1-q}.$$

La serie $1+1+1+\dots$ diverge a ∞ porque $s_n=n$.

La serie $1-1+1-1+\dots$ no tiene límite propio ni impropio, puesto que en este caso la sucesión (1) es la: 1, 0, 1, 0, ...

La sucesión $\{s_n\}$ se llamará *sucesión de las sumas parciales* de una serie infinita dada.

Por el n-ésimo residuo de la serie $a_1+a_2+\dots$ entenderemos la serie

$$r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\dots=\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m. \tag{2}$$

Si la serie $a_1+a_2+\dots$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n=\infty} r_n=0$.

Antes que nada, observemos que si la serie $a_1+a_2+\dots$ es convergente, entonces la serie (2) también es convergente para todo valor de n. Ya que

$$r_n=\lim_{k=\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+k})=\lim_{k=\infty}s_{n+k}-s_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_m-s_n,$$

por tanto

$$\lim_{n=\infty}r_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_m-\lim_{n=\infty}s_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_m-\sum_{m=1}^{\infty}a_m=0.$$

3.2. Propiedades generales de las series

Daremos ahora algunas propiedades de las series infinitas, que son consecuencia directa de las propiedades relevantes de las sucesiones infinitas.

1. Condición de Cauchy. *Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la serie $a_1+a_2+\dots$ es que para toda $\varepsilon>0$ exista un número k tal que la desigualdad*

$$|a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_{k+m}|<\varepsilon \tag{3}$$

se verifica para toda m.

En efecto, la convergencia de la serie dada significa la convergencia de sus sumas parciales $s_1, s_2, \dots$, y el Teorema de Cauchy (§2.7) implica que esta sucesión es convergente si y sólo si para toda $\varepsilon>0$ existe una k tal que se satisfaga la desigualdad $|s_{k+m}-s_k|<\varepsilon$ para toda m (esto es, la desigualdad (3))

2. *Si la serie $a_1+a_2+\cdots$ es convergente, entonces* $\lim\limits_{n=\infty}a_n=0$. Es decir $a_n=s_n-s_{n-1}$; por tanto: $\lim\limits_{n=\infty}a_n=\lim\limits_{n=\infty}s_n-\lim\limits_{n=\infty}s_{n-1}$, pero

$$\lim_{n=\infty}s_n=\lim_{n=\infty}s_{n-1}.$$

Observación. El teorema 2 no es recíproco. A saber, *existen series divergentes cuyos términos tienden a* 0. Una serie de este tipo, es la armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

en efecto,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2},\ \dots,$$

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{1}{2},$$

esto es

$$s_{2^{n+1}}-s_{2^n}>\tfrac{1}{2}.$$

Por tanto $s_{2^n}>\dfrac{n}{2}$. En consecuencia $\lim\limits_{n=\infty}s_{2^n}=\infty$, de donde concluimos que la sucesión de las sumas parciales de la serie armónica y la serie misma, son divergentes. Esta es una serie que diverge a ∞.

Se dice que una serie es *acotada*, si la sucesión de sus sumas parciales está acotada, esto es, si existe un número M tal que $M>|s_n|$ para toda n.

3. *Toda serie convergente es acotada.*

Esta es una consecuencia inmediata del teorema §2.3.

Daremos ahora dos teoremas relativos a operaciones con series:

4. *Si las series $a_1+a_2+\dots$ y $b_1+b_2+\dots$ son convergentes, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n=\infty}(a_1+b_1+a_2+b_2+\dots+a_n+b_n)$$

$$=\lim_{n=\infty}(a_1+a_2+\dots+a_n)+\lim_{n=\infty}(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

La demostración para la diferencia, es análoga.

5. *Si la serie $a_1+a_2+\dots$ es convergente, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)=\lim_{n=\infty}(c\cdot a_1+c\cdot a_2+\dots+c\cdot a_n)$$

$$=c\cdot\lim_{n=\infty}(a_1+a_2+\dots+a_n)=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

3.3. Series alternantes. Teorema de Abel

Llamaremos *series alternantes* a las de la forma

(4) $$a_1-a_2+a_3-a_4+\dots,\qquad \text{donde } a_n\geqslant 0.$$

TEOREMA 1. *Una serie alternante* (1) *que satisface las condiciones*

(5) $$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\dots \text{ y } \lim_{n=\infty}a_n=0$$

es convergente. Además, las sumas parciales $s_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\dots\pm a_n$ satisfacen las desigualdades

(6) $$s_{2n}\leqslant a_1-a_2+a_3-\dots\leqslant s_{2n+1}.$$

En efecto, la sucesión de las sumas parciales con índices pares, es creciente (en el sentido amplio), ya que

$$s_{2n+2}=s_{2n}+(a_{2n+1}-a_{2n+2})\quad\text{y}\quad a_{2n+1}-a_{2n+2}\geqslant 0.$$

Al mismo tiempo, ésta es una sucesión acotada, puesto que

$$s_{2n}=a_1-[(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\dots+a_{2n}]\leqslant a_1.$$

Por consiguiente, es una sucesión convergente. Sea $\lim_{n=\infty}s_{2n}=g$.

Para demostrar la convergencia de la serie (4), es suficiente demostrar que $\lim_{n=\infty}s_{2n+1}=g$.

Ahora, $s_{2n+1}=s_{2n}+a_{2n+1}$, de donde $\lim_{n=\infty}s_{2n+1}=\lim_{n=\infty}s_{2n}+$ $+\lim_{n=\infty}a_{2n+1}=g$, porque $\lim_{n=\infty}a_{2n+1}=0$ por (5).

Finalmente, la doble desigualdad (6) se sigue del hecho de que la sucesión $\{s_{2n}\}$ es creciente y la $\{s_{2n+1}\}$ es decreciente (ver §2.6, Teorema 3).

EJEMPLOS. La serie (anarmónica)

(7) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

es convergente, y como veremos después, su suma es igual a $\log_e 2$.

La serie

(8) $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

también es convergente (su suma es igual a $\frac{1}{4}\pi$).

TEOREMA 2. (ABEL [1]). *Si la sucesión $\{a_n\}$ satisface las condiciones* (5) *y si la serie $b_1+b_2+\dots$ (convergente o divergente) es acotada,*

[1] Niels Henrik Abel (1802-1829) un famoso matemático noruego.

entonces la serie

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n+\ldots \tag{9}$$

es convergente.

Escribamos $s_n = b_1+b_2+\ldots+b_n$. Según las suposiciones que hemos hecho, existe una M tal que $|s_n| < M$.

Para demostrar la convergencia de la serie (9), estimamos la suma

$$a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}+\ldots+a_nb_n$$

para $n>k$. Para este fin observamos primero que

$$-2M < b_m+b_{m+1}+\ldots+b_n < 2M \tag{10}$$

para toda m y $n \geqslant m$, ya que

$$|b_m+\ldots+b_n| = |s_n-s_{m-1}| \leqslant |s_n|+|s_{m-1}| < 2M.$$

Ahora

$$\begin{aligned} a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}+\ldots+a_nb_n \\ = (a_k-a_{k+1})b_k+(a_{k+1}-a_{k+2})(b_k+b_{k+1})+ \\ +(a_{k+2}-a_{k+3})(b_k+b_{k+1}+b_{k+2})+\ldots+a_n(b_k+b_{k+1}+ \\ +\ldots+b_n) \leqslant 2M[(a_k-a_{k+1})+(a_{k+1}-a_{k+2})+\ldots+a_n] \\ = 2Ma_k \end{aligned} \tag{11}$$

según (10).

Similarmente $a_kb_k+\ldots+a_nb_n \geqslant -2M\cdot a_k$; de aquí

$$|a_kb_k+\ldots+a_nb_n| \leqslant 2M\cdot a_k. \tag{12}$$

Ahora se da $\varepsilon > 0$. Por la ecuación (5), existe una k, tal que $a_k < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

Como se demostró, la desigualdad (12), esto es $|a_kb_k+\cdots+a_nb_n|<\varepsilon$, es válida para toda $n > k$. Según el Teorema de Cauchy (§ 3.2, Teorema 1), esto implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$.

Observaciones. (α) De la fórmula (12) se sigue que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n\right| \leqslant 2M\cdot a_1. \tag{13}$$

A saber, por la fórmula (12), la desigualdad $|a_1b_1+\ldots+a_nb_n| \leqslant 2M\cdot a_1$ es válida para toda n.

(β) El Teorema 1 es un caso especial del Teorema 2. A saber, consideramos la sucesión $1, -1, 1, -1, \ldots$ en lugar de la $\{b_n\}$.

(γ) En la fórmula (11) hemos aplicado la llamada *transformación de Abel*. Puede escribirse también en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_1v_1+\ldots+u_mv_m = u_1(v_1-v_2)+(u_1+u_2)(v_2-v_3)+\ldots+ \\ +(u_1+\ldots+u_{m-1})(v_{m-1}-v_m)+(u_1+\ldots+u_m)v_m. \end{aligned}$$

3.4. Series con términos positivos. Criterios de convergencia de D'Alembert y Cauchy.

Suponiendo que todos los términos de la serie $a_1+a_2+\ldots$ son positivos, la sucesión de sus sumas parciales es creciente. De lo que se sigue de inmediato que:

1. *Una serie con términos positivos converge o diverge a* ∞

2. Teorema de comparación de series. *Si* $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ *y si la serie* $a_1+a_2+\ldots$ *es convergente, entonces la serie* $b_1+b_2+\ldots$ *es también convergente. Además,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Sean $s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$, $t_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$. Entonces tenemos que $t_n \leqslant s_n$ y, como (ver § 2.6, 3) $s_n \leqslant \lim_{n=\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tenemos $t_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esta desigualdad comprueba la acotación y por tanto, la convergencia de la serie $b_1+b_2+\cdots$ (por el Teorema 1); por otra parte, implica la desigualdad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (por § 2.6, 3).

El Teorema 2 permite a menudo demostrar la convergencia de una serie, de una manera simple, por comparación de esta serie con una serie cuya convergencia ya esté establecida. Por ejemplo para demostrar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\ ^{(1)}, \tag{14}$$

(1) Demostraremos después (§ 11, (46)) que $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$.

la comparamos con la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{15}$$

Es decir, tenemos

$$\frac{1}{2^2}\leqslant\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{3^2}\leqslant\frac{1}{2\cdot 3},\ \ldots,\ \frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{n(n+1)}.$$

Al mismo tiempo la convergencia de la serie (15) se sigue de inmediato de la identidad:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n},$$

por lo que $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 1$.

Los dos siguientes criterios para la convergencia de series con términos positivos se basan en la comparación de las series dadas con la serie geométrica.

3. Criterio de D'Alembert [1]. *Una serie $a_1+a_2+\ldots$ con términos positivos, que satisface la condición*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1, \tag{16}$$

es convergente.

Por la condición (16) supóngase que h satisface la desigualdad

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<h<1.$$

Por tanto existe un número k tal que para $n>k$ tenemos $\frac{a_{n+1}}{a_n}<h$, esto es, $a_{n+1}<a_n\cdot h$.

[1] Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) un famoso matemático francés y enciclopedista.

Por consiguiente, la serie $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots$ tiene términos menores que los de la serie geométrica $a_k+a_k\cdot h+a_k\cdot h^2+\ldots$, respectivamente. Pero la última serie es convergente, porque $0<h<1$. Por consiguiente, el Teorema 2 implica la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ y en consecuencia también la de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Criterio de Cauchy. *Una serie $a_1+a_2+\ldots$ con términos positivos que satisface la condición*

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}<1, \tag{17}$$

es convergente.

Al igual que entes, existe una $h<1$ y una k tal que para $n\geqslant k$, tenemos $\sqrt[n]{a_n}<h$, esto es, $a_n<h^n$. Comparando la serie $a_k+a_{k+1}+\cdots$ con la serie geométrica $h^k+h^{k+1}+\ldots$, concluimos la convergencia de la primera serie de la convergencia de la segunda.

5. Criterio de divergencia. *Si la serie $a_1+a_2+\ldots$ con términos positivos, satisface una de las dos desigualdades*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \ \text{ó}\ \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}>1, \tag{18}$$

entonces la serie es divergente.

Si se verifica la primera de las desigualdades (18) entonces para n suficientemente grandes tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1,\ \text{esto es},\ a_{n+1}>a_n,$$

de donde la sucesión $\{a_n\}$ no converge a 0 y consecuentemente, la serie $a_1+a_2+\ldots$ es divergente. Si se verifica la segunda de las desigualdades (18), entonces para n suficientemente grandes tenemos $\sqrt[n]{a_n}>1$, esto es, $a_n>1$ y la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero tampoco.

Observación. Puede suceder que

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1=\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

En este caso nuestro criterio no determina si la serie dada es convergente o divergente. Entonces estamos tratando con el llamado caso "dudoso", decimos también que la serie no reacciona al criterio anterior.

3.5. Aplicaciones y ejemplos

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$, *donde* $c > 0$, *es convergente*

En efecto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{n+1}}{c^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{c}{n+1}, \text{ de donde } \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Por el criterio de D'Alembert concluimos que la serie dada es convergente.

2. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ *es convergente.*

Sea $a_n = \frac{n!}{n^n}$. De aqui $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Por consiguiente

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

3. $$\lim_{n=\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 = \lim_{n=\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Esto establece simplemente que el término general a_n de una serie convergente, converge a 0.

Definiendo que una sucesión $\{a_n\}$ que diverge a ∞ *tiende más rápidamente a* ∞ que una sucesión $\{b_n\}$ si se verifica la condición $\lim_{n=\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, podemos reescribir la fórmula 3 de la siguiente manera: $n!$ *tiende más rápidamente a* ∞ *que* c^n, y n^n *tiende más rápidamente a infinito que el factorial* $n!$

4. *La serie armónica* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ *no reacciona al criteria de D'Alembert. Lo mismo sucede para la serie* (14).

Ya que,

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Como sabemos, la primera de las dos series anteriores es divergente y la segunda es convergente.

5. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-n+1)|}{n!} c^n$ *es convergente para* $0 < c < 1$. Puesto que para x no negativa y no entera, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-n|}{n+1} c = \frac{\left|\frac{x}{n} - 1\right|}{1+\frac{1}{n}} c.$$

De aqui $$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c.$$

La convergencia de esta serie implica

6. $$\lim_{n=\infty} \frac{x(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-n+1)}{n!} c^n = 0 \text{ para } |c| < 1.$$

7. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{c^n}$ *es convergente para* $c > 1$ (donde p es un entero).

Por tanto $\lim_{n=\infty} \frac{n^p}{c^n} = 0$.

ya que $$\lim_{n=\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \cdot \frac{c^n}{c^{n+1}} = \frac{1}{c} < 1.$$

8. La divergencia de la serie armónica y el criterio de Cauchy implican de inmediato la fórmula $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ya que la sucesión $\sqrt[n]{n}$ es decreciente para n suficientemente grandes y consiste de términos > 1, de modo que $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} \geq 1$ existe.

Suponiendo que $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} > 1$ tendríamos $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{1/n} < 1$ y el criterio de Cauchy implicaría la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Observación *. El criterio de Cauchy es más fuerte que el de D'Alembert. Ya que la existencia del $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ implica la existencia del $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (y ambos límites son iguales, ver §2.11, 4). Sin embargo, el último límite puede existir aunque el primero no exista.

3.6. Otros criterios de convergencia

TEOREMA DE KUMMER [1]. *Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la serie $a_1 + a_2 + \ldots$ con términos positivos, es que exista una sucesión de números positivos $b_1, b_2, \ldots$, tal que*

$$\lim_{n=\infty} \left(b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right) > 0. \tag{19}$$

Para demostrar la necesidad de la condición formulada en el teorema, supongamos la convergencia de nuestra serie y escribamos $b_n = \frac{s - s_n}{a_n}$, donde s es la suma de la serie y s_n es su n-ésima suma parcial. Entonces

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{s - s_n}{a_{n+1}} - \frac{s - s_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

Por consiguiente, se satisface la condición (19).

Ahora demostraremos la suficiencia de esta condición. Para este fin supongamos que se cumple la desigualdad (19). Entonces, existe una $h > 0$ y un subíndice k tal que la desigualdad

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > h$$

se verifica para $n \geqslant k$.

[1] Ernst Kummer, un famoso matemático alemán del Siglo XIX, (1810-1893) y eminente investigador en la teoría de los números.

Por consiguiente tenemos

$$\begin{cases} h \cdot a_{k+1} < b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1}, \\ h \cdot a_{k+2} < b_{k+1} a_{k+1} - b_{k+2} a_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h \cdot a_n < b_{n-1} a_{n-1} - b_n a_n. \end{cases}$$

Sumando estas desigualdades tenemos

$$h(s_n - s_k) < b_k a_k - b_n a_n < b_k a_k, \text{ de donde } s_n < s_k + \frac{b_k a_k}{h}.$$

La última desigualdad comprueba que la serie $a_1 + a_2 + \ldots$ es acotada. Por tanto, es convergente, ya que es una serie acotada con términos positivos.

Como corolario del Teorema de Kummer, obtenemos el siguiente:

CRITERIO DE REABE. *Una serie $a_1 + a_2 + \ldots$ con términos positivos que satisfacen la condición*

$$\lim_{n=\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \tag{20}$$

es convergente.

En efecto escribamos $b_n = n$. Tenemos que demostrar que la condición (20) implica la (19). Ahora,

$$\lim_{n=\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right) = \lim_{n=\infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \right)$$

$$= \lim_{n=\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 > 0.$$

3.7. Series absolutamente convergentes

Una serie $a_1 + a_2 + \ldots$ se llama *absolutamente convergente*, si la serie $|a_1| + |a_2| + \ldots$ es convergente. Una serie convergente, que no es absolutamente convergente se llama *condicionalmente convergente*.

1. *Si una serie $a_1 + a_2 + \ldots$ es absolutamente convergente, entonces es convergente en el sentido usual.*

Además,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{21}$$

Según el Teorema de Cauchy, se tiene que estimar la expresión $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$. Ahora,

$$|a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n| \leqslant |a_k| + |a_{k+1}| + \cdots + |a_n| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$$

y la última suma tiende a 0, a medida que k tiende a ∞ como residuo r_{k-1} de una serie convergente (ver §3.1). Por tanto, para toda $\varepsilon > 0$ existe una k tal que $r_k - 1 < \varepsilon$, de donde $|a_k + a_k + 1 + \ldots + a_n| < \varepsilon$ para toda $n > k$.

Por consiguiente, se ha demostrado la convergencia de la serie $a_1 + a_2 + \ldots$ Al mismo tiempo, escribiendo $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ y $t_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$, tenemos $|s_n| \leqslant t_n$ y en el límite, obtenemos $|\lim s_n| = \lim |s_n| \leqslant \lim t_n$, esto es, la fórmula (21).

Ejemplos. La serie geométrica $a + aq + aq^2 + \ldots$, donde $|q| < 1$, es absolutamente convergente porque la serie $|a| + |aq| + |aq^2| + \ldots$ es convergente (ver §3.1).

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente para toda x (ver § 3.5, y como demostraremos después, su suma es igual a e^x).

La serie anarmónica (7) es condicionalmente convergente, puesto que la serie de los valores absolutos de sus componentes es divergente (es la serie armónica, ver §3.2).

Ahora, consideraremos el problema de la *conmutatividad* de series infinitas. Es bien conocido que la suma de un número finito de términos es conmutativa, esto es, no depende de la disposición de los términos. Demostraremos que esta propiedad sigue siendo verdadera para series absolutamente convergentes; pero no para series condicionalmente convergentes. Sin embargo, esto requiere que se establezca primero lo que se entenderá por una redisposición de términos, cuando el número de éstos sea infinito (tomando en cuenta que algunos términos pueden repetirse con una frecuencia arbitraria).

Por *permutación* de la sucesión de enteros positivos, entenderemos una sucesión de enteros positivos $m_1, m_2, \ldots$, tal que todo entero positivo aparezca en esta sucesión una sola vez. Si $m_1, m_2, \ldots$ es una permutación de la sucesión de enteros positivos, decimos que la serie $a_{m_1} + a_{m_2} + \ldots + a_{m_n} \ldots$ se obtiene de la serie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ por una redisposición de sus componentes.

2. *Toda serie absolutamente convergente es conmutativa.*

En otras palabras, si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente y si $m_1, m_2, \ldots$ es una permutación de la sucesión de enteros positivos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{22}$$

Dado $\varepsilon > 0$. Si la serie $a_1 + a_2 + \ldots$ es convergente, existe una k tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon. \tag{23}$$

Como la sucesión m_n contiene todos los enteros positivos, existe un número r tal que los números $1, 2, 3, \ldots, k$, aparecen todos entre los $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Pero cada entero positivo aparece en la sucesión m_n únicamente una vez; por lo tanto, tenemos $m_n > k$ para toda $n > r$. De modo que para una $n > r$ dada, si cancelamos los números $1, 2, \ldots, k$ en el sistema $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots, m_n$, entonces quedan en este sistema únicamente números $> k$ (y diferentes unos de otros). Por consiguiente, escribiendo $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ y $t_n = a_{m_1} + a_{m_2} + \ldots + a_{m_n}$ y reduciendo en la diferencia $t_n - s_n$ los términos con índices iguales, obtenemos como términos restantes sólo los de índices $> k$. Esto (y la fórmula para el valor absoluto de una suma) implican

$$|t_n - s_n| \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i|, \text{ de donde } |t_n - s_n| < \varepsilon \text{ por (23)}.$$

Como la última desigualdad se verifica para toda $n > r$, obtenemos

$$\lim_{n=\infty} t_n = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Esto es equivalente a la fórmula (22).

Observacion. El teorema anterior no puede ser extendido a una serie arbitrariamente convergente. Por ejemplo, reordenemos los términos de la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ en la siguiente forma

$$1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k_1 - 1}\right) - \frac{1}{4} + \tag{24}$$

$$+ \left(\frac{1}{2k_1 + 1} + \frac{1}{2k_1 + 3} + \cdots + \frac{1}{2k_2 - 1}\right) - \frac{1}{6} + \cdots,$$

donde los números $k_1, k_2, \ldots$ se eligen de tal manera que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k_1-1}>1, \cdots,$$

$$\frac{1}{2k_n+1}+\frac{1}{2k_n+3}+\cdots+\frac{1}{2k_{n+1}-1}>1, \cdots$$

Entonces, se ve fácilmente que la serie (24) diverge a ∞.

Escribiendo $c = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots$ (como se sabe $c = \log 2$) se puede demostrar fácilmente que

$$\frac{3}{2}c = c+\frac{1}{2}c = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$

De aquí podemos ver que por una redisposición de términos podemos obtener de la serie anarmónica una serie divergente o una convergente a otro límite. El siguiente teorema general (debido a Riemann [1]), se verifica: *dada una serie condicionalmente convergente, podemos obtener una serie divergente o una convergente a un número previamente asignado (finito o infinito) por una redisposición de los términos de la serie dada.*

3.8. Multiplicación de series

TEOREMA (CAUCHY). *Suponiendo que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *son absolutamente convergentes, tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{25}$$

donde

$$\left|\begin{array}{l} c_1 = a_1 b_1, \\ c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{26}$$

(esto es, la suma de los índices de cada término en la n-ésima línea es igual a $n+1$).

[1] Bernhard Riemann (1826-1866), famoso por sus trabajos en el campo de la geometría, la teoría de funciones analíticas y la teoría de los números.

Escribamos $s_n = a_1+\ldots+a_n$, $t_n = b_1+\ldots+b_n$, y $u_n = c_1+\ldots+c_n$, esto es,

$$u_n = a_1 t_n + a_2 t_{n-1} + a_3 t_{n-2} + \ldots + a_n t_1.$$

Estimaremos la diferencia

$$\begin{aligned} s_n t_n - u_n &= a_1 t_n + a_2 t_n + \ldots + a_n t_n - u_n \\ &= a_2(t_n - t_{n-1}) + a_3(t_n - t_{n-2}) + \ldots + a_n(t_n - t_1). \end{aligned} \tag{27}$$

Puesto que las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ son convergentes y consecuentemente acotadas, existe un número M tal que

$$|t_j| < M \quad \text{y} \quad |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_j| < M \tag{28}$$

para toda j.

Al mismo tiempo, dada $\varepsilon > 0$, existe una k tal que la condición $a > m > k$ implica (ver §2.7, Observación (β)):

$$|t_n - t_m| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |a_{k+1}|+|a_{k+2}|+\ldots+|a_n| < \varepsilon. \tag{29}$$

En lo que sigue, supóngase que $n > 2k$. Entonces se tiene, por (27),

$$\begin{aligned} |s_n t_n - u_n| \leqslant\ & (|a_2|\cdot|t_n - t_{n-1}| + \ldots + |a_k|\cdot|t_n - t_{n-k+1}|) + \\ & + (|a_{k+1}|\cdot|t_n - t_{n-k}| + \ldots + |a_n|\cdot|t_n - t_1|). \end{aligned}$$

Aplicando al primer paréntesis la fórmula (29) y al segundo, (28), obtenemos (tomando en cuenta que $n-k+1 > k$ y que $|t_n - t_j| \leqslant |t_n|+|t_j| < 2M$):

$$\begin{aligned} |s_n t_n - u_n| &\leqslant [|a_2|+\ldots+|a_k|]\varepsilon + [|a_{k+1}|+\ldots+|a_n|]\cdot 2M \\ &< M\varepsilon + \varepsilon\cdot 2M, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad es una consecuencia de las segundas partes de las fórmulas (28) y (29).

Hemos demostrado así que la desigualdad $|s_n t_n - u_n| < 3M\varepsilon$ se verifica para toda $n > 2k$. Esto significa que $\lim (s_n t_n - u_n) = 0$. Como las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son convergentes, tenemos $\lim s_n t_n = \lim s_n \cdot \lim t_n$, de donde obtenemos $\lim s_n \cdot \lim t_n = \lim s_n t_n = \lim u_n$, esto es, la fórmula (25).

EJEMPLO. Demostraremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Como ambas series son absolutamente convergentes, podemos aplicar la fórmula (25), y obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1 \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(y^n + \frac{n}{1!} x y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 y^{n-2} + \cdots + x^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+x)^n}{n!}$$

por la fórmula del binomio de Newton.

Agreguemos que la fórmula antes demostrada se sigue también de la igualdad $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ (ver §3.7).

Observaciones. El teorema se verifica también con una suposición más débil; a saber, ambas series tienen que ser convergentes, y una de ellas absolutamente convergente (pero no necesariamente ambas). En efecto, únicamente empleamos en nuestra demostración la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Sin embargo, si ambas series son condicionalmente convergentes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ puede ser divergente. Esto puede demostrarse con el siguiente ejemplo:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = b_n;$$

las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, pero se ve fácilmente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es divergente.

Añadamos (sin demostración) que si ambas series son condicionalmente convergentes, entonces su producto puede obtenerse sumando, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ por el método de «primeras medias;» más exactamente se

verifica el siguiente teorema (debido a Cesàro) *si las series* $a_1 + a_2 + \ldots$ *y* $b_1 + b_2 + \ldots$ *son convergentes, entonces*

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

donde $s_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$.

3.9*. Productos infinitos

Así como consideramos que una serie infinita es una generalización de la idea de adición a un número infinito de términos, podemos considerar un producto infinito como otra operación infinita. Aquí nos restringiremos a dar la definición y algunas de las propiedades más importantes de productos infinitos.

Dada una sucesión infinita de números reales distintos de 0: a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formemos la sucesión de productos:

$$p_1 = a_1, p_2 = a_1 \cdot a_2, \ldots, p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, \ldots \tag{30}$$

Si la sucesión (30) es convergente, entonces designamos su límite por el símbolo

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n=\infty} p_n$$

y lo llamamos *producto infinito*. Si este límite es finito y diferente de 0, entonces decimos que el producto infinito considerado es *convergente*.

Llamamos a los números $a_1, a_2, \ldots$, *los factores* del producto infinito $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots$ Los términos de la sucesión (30) se llaman *productos parciales*.

Ejemplos. (α) El producto infinito

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots$$

converge a 1. En efecto,

$$p_{2n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} = 1,$$

$$p_{2n+1} = p_n \cdot \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Por consiguiente $\lim_{n=\infty} p_n = 1$.

(β) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty$, esto es, el producto infinito considerado diverge a ∞, puesto que

$$p_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = n+1, \text{ de donde } \lim_{n=\infty} p_n = \infty.$$

(γ) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$, esto es, el producto infinito diverge a 0, ya que $p_n = \frac{1}{n}$.

(δ) El producto infinito $(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots$ es divergente. Además éste no diverge a 0 ni a ∞. En este caso la sucesión de productos parciales oscila, tomando los valores -1 y $+1$, alternadamente.

1. Condicion de Cauchy. *Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de un producto infinito $a_1\cdot a_2\cdot\ldots$ (donde $a_n \neq 0$) es que para toda $\varepsilon < 0$ exista un número k tal que la desigualdad*

$$|a_k\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n - 1| < \varepsilon \tag{31}$$

se verifique para toda $n > k$.

Para demostrar la necesidad de la condición de Cauchy, supongamos que el producto infinito considerado es convergente, esto es, que

$$\lim_{m=\infty} p_m = p \neq 0. \tag{32}$$

Sea $c = \frac{1}{2}|p|$. Entonces existe un número j tal que $|p_m|\frac{1}{2} > c$ para $m > j$.

Se da un número $\varepsilon > 0$. Por (32), existe un número k tal que $|p_n - p_{k-1}| < c\varepsilon$ para $n > k$. Se puede suponer también que $k-1 > j$, y $|p_{k-1}| > c$. De aquí, obtenemos

$$\left|\frac{p_n}{p_{k-1}} - 1\right| < \frac{c\varepsilon}{|p_{k-1}|} < \varepsilon,$$

esto es, la desigualdad (31).

En esta forma hemos demostrado que la condición de Cauchy es una condición necesaria para la convergencia del producto infinito en consideración. Ahora demostraremos la suficiencia de esta condición.

Supongamos que esta condición se satisface. Primero, demostraremos que la sucesión $\{p_n\}$ está acotada. Substituyendo $\varepsilon = 1$ en la condición de Cauchy concluimos que existe un número r tal que para $n > r$ tenemos

$$|a_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n - 1| < 1, \text{ es decir } \left|\frac{p_n}{p_r} - 1\right| < 1;$$

por consiguiente $|p_n - p_r| < |p_r|$, de donde $|p_n| - |p_r| \leqslant |p_n - p_r| < |p_r|$ y finalmente $|p_n| < 2|p_r|$. De aquí concluimos que la sucesión (30) está acotada. Ahora, sea M un número que satisface la condición $M > |p_n|$ para todo entero positivo n. Según (31), para cualquier número $\varepsilon > 0$ dado, existe una k tal que

$$\left|\frac{p_n}{p_{k-1}} - 1\right| < \varepsilon \tag{33}$$

para $n > k$. De aquí $|p_n - p_{k-1}| < \varepsilon|p_{k-1}| < \varepsilon M$: por consiguiente, la sucesión $\{p_n\}$ es convergente. Queda por demostrar que su límite es $\neq 0$.

Ahora, suponiendo que $\lim_{n=\infty} p_n = 0$, la fórmula (33) (con una k constante) debería dar la desigualdad $1 \leqslant \varepsilon$ lo que contradice la suposición de que ε es un número positivo arbitrario.

2. *Si el producto infinito $a_1\cdot a_2\cdot\ldots$ es convergente, entonces*

$$\lim_{n=\infty} a_n = 1.$$

Es decir, supongamos que $\lim_{n=\infty} p_n = p \neq 0$. Entonces tenemos $\lim_{n=\infty} p_{n-1} = p$ y dividiendo la primera igualdad por la segunda obtenemos

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lim_{n=\infty} p_n}{\lim_{n=\infty} p_{n-1}} = 1.$$

Obsérvese que la ecuación $\lim_{n=\infty} a_n = 1$ siendo (como hemos demostrado) una condición necesaria para la convergencia del producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, no es una condición suficiente. Los ejemplos (β) y (γ) lo demuestran.

Tomando en cuenta el Teorema 2 es adecuado escribir los factores de un producto infinito en la forma $a_n = 1 + b_n$. Esto hace posible una simple formulación de la dependencia entre la convergencia del producto

$\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ y la convergencia de la serie $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$. De hecho, se verifica el siguiente teorema:

3. *Suponiendo que $b_n > 0$ para toda n el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ es convergente si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.*

Lo mismo concierne al producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ (suponiendo que $b_n < 1$).

Una demostración simple de este teorema puede obtenerse por aplicación de las propiedades de la función exponencial y especialmente de la desigualdad $e^x \geqslant 1+x$ que demostraremos en §9 (fórmula (16)). Esta desigualdad da inmediatamente

$$p_n \leqslant e^{s_n}, \quad \text{donde} \quad p_n = (1+b_1)\cdot\ldots\cdot(1+b_n),$$
$$s_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Como por otra parte tenemos, como se ha visto $1+s_n \leqslant p_n$, concluimos que las series p_n y s_n son ambas acotadas o no acotadas. Ahora, ambas son sucesiones crecientes; por lo que ambas son convergentes o ambas divergentes. Finalmente, la sucesión $\{p_n\}$ no puede converger a cero, porque $p_n > 1$.

Por consiguiente, la primera parte de nuestro teorema está demostrada

Antes de continuar la demostración de la segunda parte, nótese que si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ es convergente, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ es también convergente.

Ya que dada una $\varepsilon > 0$ y se elige k (según el Teorema 1) de tal manera que

$$(1+|u_k|)\cdot(1+|u_{k+1}|)\cdot\ldots\cdot(1+|u_n|)-1 < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > k$$

Puesto que como se ve fácilmente,

$$|(1+u_k)\cdot\ldots\cdot(1+u_n)-1| \leqslant (1+|u_k|)\cdot\ldots\cdot(1+|u_n|)-1,$$

de modo que el Teorema 1 implica la convergencia del producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n).$$

Ahora, consideremos que la serie $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

Por la primera parte de nuestro teorema el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ es también convergente y por consiguiente, por las observaciones acabadas de demostrar, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ es convergente también.

Queda por demostrar que la convergencia del producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Sea $q_n = (1-b_1)\cdot\ldots\cdot(1-b_n)$ y $\lim_{n=\infty} q_n = q > 0$. Como $q \leqslant q_n \leqslant e^{-s_n}$, esto es $e^{s_n} \leqslant \frac{1}{q}$, la sucesión $\{s_n\}$ es acotada y por tanto convergente.

Un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ se llama *absolutamente convergente*, cuando el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ es convergente. Como hemos demostrado la convergencia absoluta implica convergencia en el sentido usual. Uno puede también demostrar al igual que en el caso de las series *que el valor de un producto absolutamente convergente no depende de la disposición de los factores.*

Ejercicios del § 3

1. Demuéstrese la ley asociativa para una serie convergente infinita. Dé un ejemplo de una serie divergente $a_1+a_2+a_3+\ldots$ tal que la serie $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots$ sea convergente.

2. Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ es convergente y la $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ es divergente.

3. Dé un ejemplo de una serie alternante divergente cuyo término general tienda a 0.

4. Dé un ejemplo de una serie convergente $a_1+a_2\ldots$ con términos positivos para la cual no exista el $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5. Demuéstrese que si una serie $a_1+a_2+\ldots$ con términos decrecientes positivos es convergente, entonces $\lim_{n=\infty} na_n = 0$.

6. Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ es convergente para $s > 1$, divergente para $s \leqslant 1$.

Sugerencia: apliquese el criterio de Raabe.

7. Demuéstrese que si una serie $a_1 + a_2 + \ldots$ con términos positivos es convergente, entonces las dos series siguientes también lo son:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}}.$$

8. Demuéstrese que la convergencia de la serie $a_1 + a_2 + \ldots$ con términos positivos decrecientes implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ (teorema de condensación de Cauchy).

9. Suponiendo las fórmulas

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \text{ y } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

verifíquese la fórmula $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$ aplicando el teorema de multiplicación de series.

10. Calcúlense los productos infinitos

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right), \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right).$$

11. Examínese la convergencia del producto.

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}).$$

CAPITULO 2

FUNCIONES

§ 4. FUNCIONES Y SUS LIMITES

4.1. Definiciones

Si a todo número real x le corresponde cierto número $y = f(x)$, entonces decimos que se define una función f sobre el conjunto de los números reales.

Por ejemplo, al asociar a un número x su cuadrado $y = x^2$, se define la función $f(x) = x^2$. Similarmente, la ecuación $y = \operatorname{sen} x$ define una función sobre el conjunto de números reales. No todas las funciones se definen sobre todo el conjunto de los números reales; por ejemplo la ecuación $y = 1/x$ define una función sobre todo el conjunto de números reales excepto el 0, porque esta ecuación no asocia ningún número con el 0. Análogamente, la función $\sqrt{x}$ es definida únicamente para $x \geqslant 0$; la función $\tan x$ se define para todos los números reales distintos de múltiplos impares del número $\frac{1}{2}\pi$.

Generalmente, si a cualquier x que pertenezca a cierto conjunto le corresponde un número $y = f(x)$, entonces se define una función sobre este conjunto. Este conjunto se llama el conjunto de *argumentos* de la función. Los números y de la forma $y = f(x)$ son los *valores* de la función f; por ejemplo, para la función $\sqrt{x}$ el conjunto de argumentos es igual al conjunto de números $\geqslant 0$ e igual al conjunto de valores de esta función (de paso, añadamos que el símbolo $\pm\sqrt{x}$ no define una función, ya que no es única; según nuestra definición, una función siempre es única).

Frecuentemente hablaremos de funciones que se definen sobre un intervalo con extremos a y b. Aquí distinguiremos entre el intervalo *cerrado*, esto es, el intervalo con sus extremos, que es el conjunto de las x que satisfacen la condición $a \leqslant x \leqslant b$ y el intervalo *abierto*, esto es,

el intervalo sin los extremos, que es el conjunto de las x tales que $a < x < b$.

Geométricamente, interpretamos una función f como el conjunto de puntos del plano de la forma (x, y), donde $y = f(x)$. Este conjunto se llama *gráfica* de la función f (o la *interpretación geométrica* de la función f, o la curva $y = f(x)$), es decir la gráfica de la función x^2 es, como se sabe, la parábola y la gráfica de la función $1/x$, la hipérbola (ver Fig. 2)

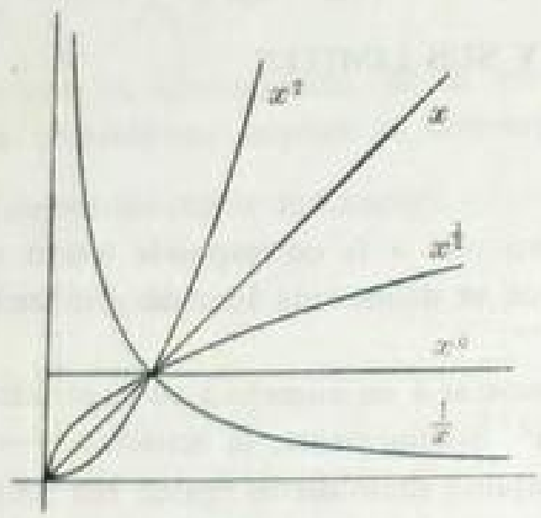


Fig. 2

Al proyectar la gráfica de una función en el eje obtenemos el conjunto de argumentos de la función. Proyectándola en el eje y, obtenemos el conjunto de valores de la función.

Entre los conjuntos que están en el plano, las gráficas de funciones se caracterizan por la propiedad que ninguna recta paralela al eje y contiene dos puntos del conjunto.

Añadamos que, según nuestra definición, una función cuyo conjunto de argumentos son los enteros positivos es una sucesión infinita.

Todas las aplicaciones matemáticas que estudian relaciones entre cantidades son ejemplo de función. Por ejemplo: la distancia s recorrida por un cuerpo que se desplaza con una velocidad constante v en un tiempo t está dada por la fórmula $s = vt$; similarmente la distancia recorrida por un cuerpo que cae bajo el campo de gravitación terrestre es una función del tiempo, a saber, $s = 1/2\, gt^2$.

La variable x de la expresión $y = f(x)$, se llamará también variable *independiente* e y será la variable *dependiente*. Sin embargo, debe recordarse que la función constante $y = c$ (escribimos también $y =$ constante) será considerada entre las funciones; su gráfica es una recta paralela al eje x (o idéntica al eje x).

Las funciones acerca de las cuales hemos hablado antes, son funciones de una variable, a distinción de las funciones de dos o más variables. En una función de una variable, a un número le corresponde a cualquier número real (perteneciente al conjunto de argumentos), en una función de dos variables, al valor $f(x, y)$ le corresponde a los valores de una pareja ordenada x, y. Análogamente, en una función de tres variables, cierto número $f(x, y, z)$ le corresponde a cualquier tríada de números reales.

4.2. Funciones monótonas

Si la condición $x < x'$ implica $f(x) < f(x')$, entonces se dice que la función f es *estrictamente creciente*. Si en la última desigualdad se substituye el signo $<$ por el $\leqslant$, entonces trataremos con una función *creciente en el sentido más amplio*. (Esto es, con una función no decreciente.) Similarmente si la condición $x > x'$ implica $f(x) > f(x')$ o bien, $f(x) \geqslant f(x')$, entonces se dice que la función es *estrictamente decreciente* o *decreciente en el sentido más amplio* (*no creciente*) respectivamente.

Las funciones crecientes y decrecientes (consideradas en el sentido menos o más amplio) están contenidas en el nombre general de *funciones monótonas*.

Ejemplos. La función x^3 es estrictamente creciente, la función x^2 es decreciente en la media recta $x \leqslant 0$ y creciente en la media recta $x \geqslant 0$, en el todo el eje x no es creciente ni decreciente.

Un ejemplo de una función creciente en el sentido más amplio (pero no estrictamente creciente) es la función $[x]$. Por este simbolo indicamos el entero n que satisface la desigualdad $n \leqslant x$ (ver Fig. 3).

La función sen x es "*seccionalmente monótona*": estos es, creciente en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, decreciente en el intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, etc.

Las funciones $\cos x$, $\tan x$, tienen una propiedad similar (como sucede con la mayoria de las que encontramos en la práctica).

Observemos aqui que las funciones trigonométricas mencionadas antes tienen una importante propiedad de periodicidad. Una función $f(x)$ se llama *periódica* si existe un número c (llamado periodo de la función) tal que la ecuación $f(x) = f(x+c)$ es válida para todo valor de x, la fun-

ción seno tiene un período 2π, la función tangente tiene un período π.

Observación. En general una función $f(x)$ se llamará *seccionalmente* monótona en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, si el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ puede dividirse por medio de un sistema finito de puntos.

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \quad \text{donde} \quad a_0 = a \text{ y } a_n = b$$

en intervalos $a_0 a_1, a_1 a_2, \ldots, a_{n-1} a_n$ tales, que la función $f(x)$ esté definida y sea monótona en cada uno de estos intervalos.

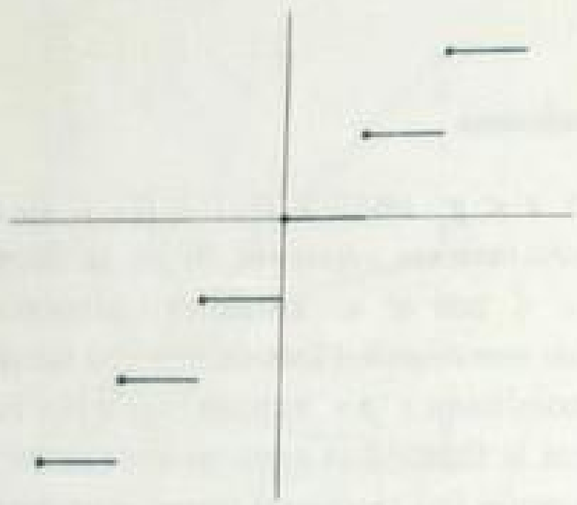


Fig. 3

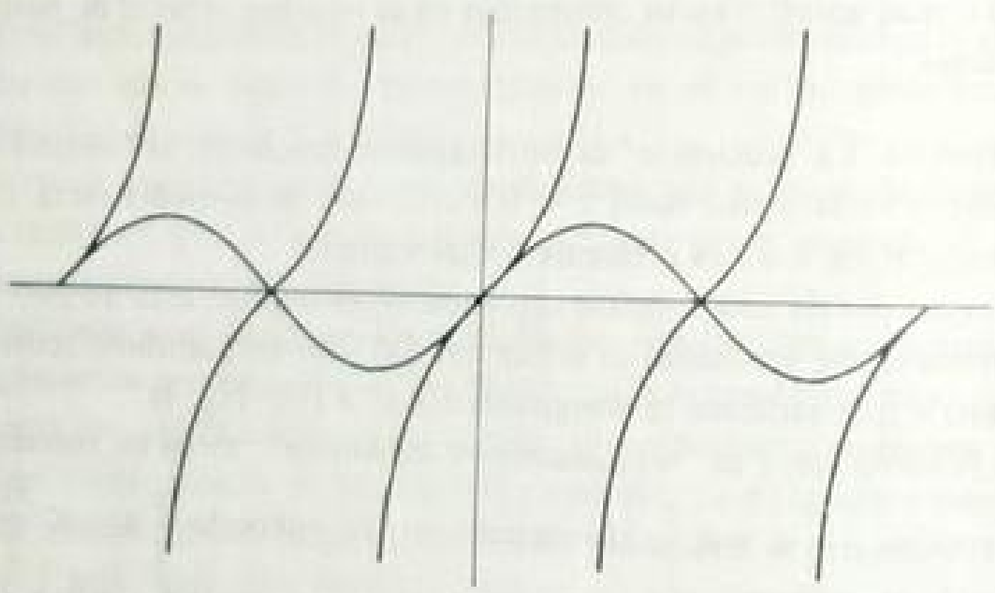


Fig. 4

Por ejemplo, la función definida por las condiciones:

$f(x) = x$ para $0 < x < 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x - 1$ para $1 < x < 2$, es seccionalmente monótona en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2$.

4.3. Funciones biunívocas. Funciones inversas

Si la función f es estrictamente creciente, entonces la ecuación $y = f(x)$ determina x como una función de y, esto es, esta ecuación puede resolverse con respecto a x (tratada como incógnita). En efecto, como a distintas x corresponden distintas y, de modo que para toda y que pertenezca al conjunto de valores de la función f le corresponde una y sólo una x tal que $f(x) = y$, x es una función de y. Por consiguiente, designando esta función por g vemos que las ecuaciones

$$(1) \qquad y = f(x) \quad \text{y} \quad x = g(y)$$

son equivalentes una con la otra. Se dice que la función g es la *inversa* de f (usualmente se indica con el símbolo f^{-1}).

Si suponemos que la función f es estrictamente decreciente en lugar de suponer que f es estrictamente creciente, entonces vemos que f tiene una función inversa, por los mismos argumentos anteriores. Ya que, la existencia de la función inversa, se presenta siempre que la función es biunívoca, esto es, cuando la condición $x \neq x'$ implica que $f(x) \neq (x')$.

Ejemplos. La función $y = 2x + 3$ tiene una función inversa, ya que al despejar x de esta ecuación obtenemos $x = \dfrac{y-3}{2}$.

La función x^2 considerada en todo el eje X no es biunívoca porque $x^2 = (-x)^2$. Sin embargo, si restringimos el conjunto de argumentos a la media recta $x \geqslant 0$, entonces la función x^2 es biunívoca en este conjunto y su función inversa es $\sqrt{x}$. Análogamente, restringiendo los argumentos a la mitad negativa del eje obtendríamos $-\sqrt{x}$ como la función inversa. Por consiguiente, aunque la función x^2 considerada en todo el eje X no tenga una inversión, puede hablarse de varias "ramas" de la inversión de esta función (después de la restricción adecuada del conjunto de estos argumentos).

Geométricamente, la gráfica de una función biunívoca se caracteriza por el hecho que en ninguna recta paralela al eje X contiene dos puntos distintos. Según la caracterización de las gráficas de las funciones dadas en el § 4.1 (es la gráfica de la función $x = g(y)$.

Para obtener de esta función la determinada por la ecuación $y = g(x)$, tiene que efectuarse una rotación de la gráfica alrededor de la recta $y = x$ como eje.

Hagamos notar las fórmulas fácilmente demostrables

$$(2) \qquad g[f(x)] = x, \qquad f[g(y)] = y.$$

4.4. Funciones elementales

Una función de la forma $ax+b$, donde a y b son constantes, se llama *función lineal*. La gráfica geométrica de la función lineal es una recta. Reciprocamente, cualquier recta, excepto las paralelas al eje Y, son gráficas de cierta función lineal. Dependiendo del signo del coeficiente a, la función $ax+b$ es creciente (para $a > 0$) o decreciente (para $a < 0$); si $a = 0$, entonces la función tiene un valor constante b. Por lo que nuestra función tiene una inversa $x = \dfrac{y-b}{a}$, cuando $a \neq 0$.

La siguiente (en consideración a su simplicidad) es la clase de *funciones de segundo grado* ax^2+bx+c. Geométricamente representan parábolas (cuando $a \neq 0$). Los *polinomios* representan una clase más general de funciones esto es, funciones de la forma $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Otra generalización consiste en las *funciones racionales*, esto es, funciones de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Los polinomios se definen para todos los valores de x. Las funciones racionales se definen para toda x, excepto valores para los cuales el denominador se anula, esto es, excepto las raíces de la ecuación $Q(x)=0$. En el dominio de las funciones racionales, las cuatro operaciones aritméticas: de adición, substracción, multiplicación y división se pueden efectuar; en el dominio de los polinomios, sólo las tres primeras.

La función inversa a la potencia x^n es la raíz $\sqrt[n]{x}$. Si n es impar, entonces esta función se define para toda x, y si n es par, se define sólo para $x \geqslant 0$.

Las raíces son potencias de la forma $x^{1/n}$. Con mayor generalidad, consideramos potencias x^a con un exponente real arbitrario para $x > 0$. Esta función es creciente si $a > 0$ y decreciente si $a < 0$ (para $a = 0$ es constante) (ver Fig. 2).

Especialmente, la función racional $\dfrac{1}{x}$ representa geométricamente una hipérbola rectangular.

Considerando al exponente de la potencia como una variable, y a la base como una constante, obtenemos la *función exponencial* a^x, suponemos que $a > 0$. La función exponencial es creciente para $a > 1$ y decreciente para $a < 1$.

La función inversa a la función exponencial es el *logaritmo*: las condiciones $y = \log_a x$ y, $x = a^y$ son equivalentes (para $0 < a \neq 1$).

En particular, la función inversa de $y = e^x$, donde $e = \lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (ver § 2.10) es el *logaritmo natural* de $x = \log y$ (que expresamos sin indicar la base).

Las curvas logarítmicas $y = \log_a x$, se obtienen por rotación de las curvas exponenciales $y = a^x$ alrededor de la recta $y = x$.

Entre las funciones elementales, incluimos también *las funciones trigonométricas* sen x, cos x, tan x, y las funciones inversas a las trigonométricas (esto es, funciones ciclométricas) arc sen x, arc cos x, arctan x. Como las funciones trigonométricas no son biunívocas, en la inversión de éstas tenemos que restringir los argumentos a un intervalo adecuado. Tomemos $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ para sen x, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ para cos x, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ para tan x. En cada uno de estos intervalos, las funciones consideradas son biunívocas y reversibles, respectivamente.

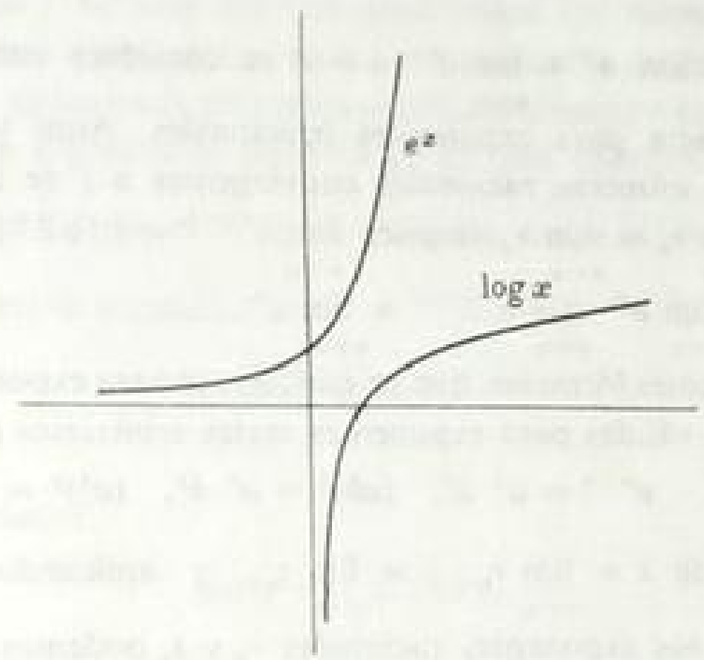


FIG. 5

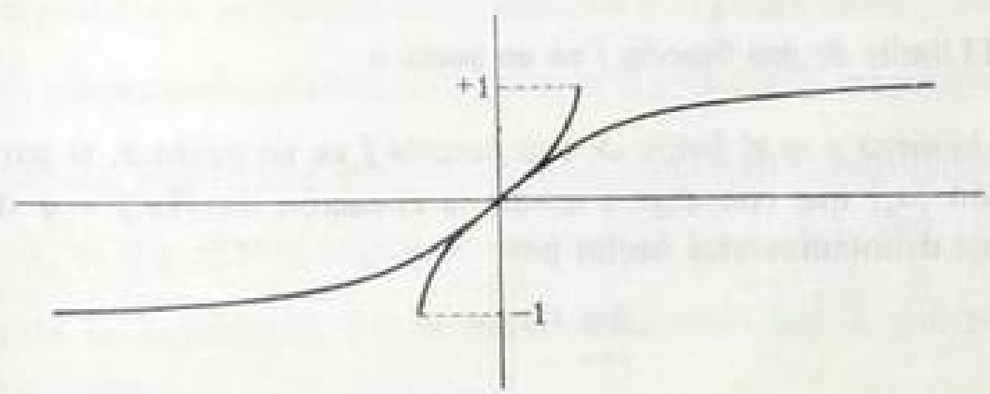


FIG. 6

Es claro que se podrían tomar otros intervalos para el argumento, obteniendo así otras ramas de las funciones inversas.

Obsérvese que el conjunto de los argumentos de las funciones arc sen x y arc cos x, es el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y el conjunto de los argumentos de arc tan x es todo el eje X.

Observación. En cursos elementales, el método de introducción de la potencia a^x con un exponente real irracional se basa usualmente en forma implícita en la existencia del límite $\lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$ donde $\{r_n\}$ es una sucesión monótona de números racionales que converge a x (por ejemplo, la sucesión de los desarrollos decimales del número x). Ahora bien, la existencia de este límite se sigue del teorema de la convergencia de sucesiones monótonas acotadas (§ 2.6, teorema 3) y del teorema de la monotonía de la función a^r para el racional r, conocida por álgebra elemental.

La ecuación $a^x = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$ $(a > 0)$ se considera como la definición de la potencia para exponentes irracionales. Aquí no importa cuál sucesión de números racionales convergentes a r se designe por $\{r_n\}$ ya que $\lim\limits_{n=\infty} r'_n = \lim\limits_{n=\infty} r_n$ implica $\lim\limits_{n=\infty} a^{r'_n - r_n} = 1$ (§ 2.9, (ζ)), de donde $\lim\limits_{n=\infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n} \cdot \lim\limits_{n=\infty} a^{r'_n - r_n} = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$.

Las siguientes fórmulas, que ya conocemos para exponentes racionales también son válidas para exponentes reales arbitrarios (cuando $a > 0$):

(3) $$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Escribiendo $x = \lim\limits_{n=\infty} r_n$, $y = \lim\limits_{n=\infty} s_n$, y aplicando las fórmulas anteriores a los exponentes racionales r_n y s_n podemos llevar a cabo la demostración pasando al límite.

4.5. El límite de una función f en un punto a

El número g es el *límite de una función f en un punto a*, si para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a a vale la ecuación $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$ simbólicamente denotamos este hecho por

$$\lim_{x=a} f(x) = g$$

Por consiguiente, existe el límite de la función f en un punto a si existe un límite común para todas las sucesiones $f(x_1), f(x_2), \ldots$ tales que

$$\lim_{n=\infty} x_n = a$$

Por ejemplo $\lim\limits_{x=0} x^2 = 0$, ya que si $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n=\infty} x_n^2 = (\lim\limits_{n=\infty} x_n)^2 = 0$.

$\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$. En efecto, $1-\cos x = 2\,\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}x$ y como por una fórmula conocida $|\mathrm{sen}\, t| \leqslant |t|$, obtenemos $|1-\cos x| \leqslant \frac{1}{2}x^2$, de donde $\lim\limits_{x=0}(1-\cos x) = 0$, esto es, $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$.

Se puede también demostrar fácilmente que

(4) $$\lim_{x=0} a^x = 1 \quad (a > 0).$$

Si una función f no está definida para todos los números reales, entonces suponemos que x_n pertenece a los argumentos de esta función; sin embargo, no suponemos esto para a (únicamente que a es el límite de cierta sucesión de argumentos distintos de a); por ejemplo, la función $\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}$ no está definida para $x = 0$, sin embargo, existe el límite de esta función en el punto 0, a saber,

(5) $$\lim_{x=0} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} = 1.$$

En efecto, tenemos

(6) $$\mathrm{sen}\, x < x < \tan x.$$

Ya que $\frac{\pi}{2} > x > 0$ y por consiguiente $\cos < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < 1$ (la primera de estas desigualdades se obtiene multiplicando la segunda desigualdad (6) por $\frac{\cos x}{x}$ y la segunda, se obtiene dividiendo la primera de las desigualdades (6) por x). Puesto que $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$, entonces concluimos fácilmente que $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$ y $x_n > 0$, implican $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = 1$ (ver § 2, 17). Finalmente la suposición $x > 0$ puede substituirse por $x < 0$, porque $\frac{\mathrm{sen}\,(-x)}{-x} = \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}$.

El símbolo $\lim_{x=a} f(x)$ se usará también para indicar el límite impropio; por ejemplo $\lim_{x=0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Sin embargo $\lim_{x=0} \frac{1}{x}$ no existe, ya que tenemos $\lim_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ para sucesiones $\{x_n\}$ que tienden a 0 por valores positivos y $\lim_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$ para sucesiones con términos negativos, respectivamente.

Sin embargo, en este caso podemos hablar del límite por un lado en el punto 0. A saber, un número g es el *límite por la derecha* (o *por la izquierda*) de una función f en el punto a, si las condiciones $\lim_{n=\infty} x_n = a$ y $x_n > a$ (ó $x_n < a$) implican $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$. Los símbolos

$$\lim_{x=a+0} f(x) \text{ y } \lim_{x=a-0} f(x)$$

representadas también por $f(a+o)$ y $f(a-o)$ indican los límites por la derecha y por la izquierda de la función f en el punto a, respectivamente.

Entonces tenemos $\lim_{x=+0} \frac{1}{x} = \infty$ $\lim_{x=-0} \frac{1}{x} = -\infty$. Análogamente,

$$(7) \quad \lim_{x=+0} \log x = -\infty, \quad \lim_{x=\frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty, \quad \lim_{x=\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty,$$

$$\lim_{x=n-0} [x] = n-1$$

Sin embargo, existen funciones que no tienen límites por un lado (ni propios, ni impropios).

Tal es la función

$$(8) \qquad f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

No tiene límite por un lado en el punto 0. En efecto, el seno tiene el valor 1 en los puntos $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi+2\pi, \frac{1}{2}\pi+4\pi, \ldots, \frac{1}{2}\pi+2n\pi, \ldots$ y así escribiendo $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, tenemos $\lim_{n=\infty} f(x_n) = 1$ y $\lim_{n=\infty} x_n = 0$ al mismo tiempo, escribiendo

$$X'_n = \frac{2}{(4_n+3)\pi} \text{ tenemos } \lim_{n=\infty} f(x'n) = -1 \text{ y } \lim_{n=\infty} x'_n = 0$$

Por consiguiente, no existe el límite por la derecha de la función f en el punto 0; similarmente, tampoco existe el límite por la izquierda en este punto.

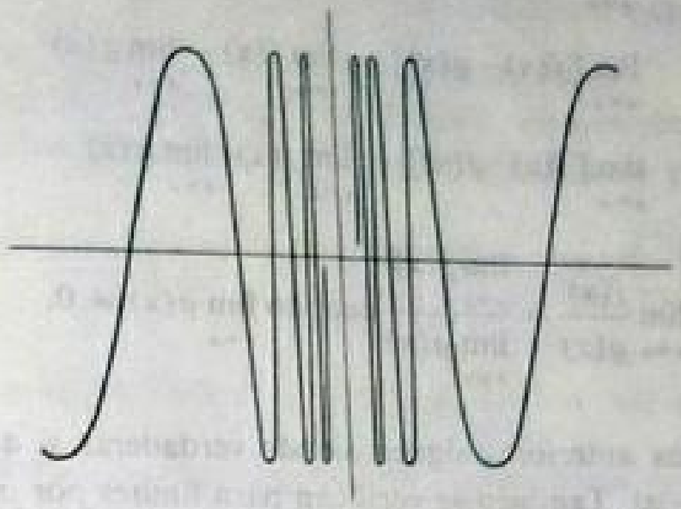


FIG. 7

Otro ejemplo de función singular lo constituye la función que toma el valor 1 en los puntos racionales y el valor 0 en puntos irracionales (*llamada función de Lejeune-Dirichlet* [1]). No tiene ninguno de los límites laterales en ningún punto.

Además del límite de una función en un punto finito a, se considera también el límite en el infinito. A saber, denotamos por $\lim_{x=\infty} f(x)$ el límite común de las sucesiones $f(x_1), f(x_2) \ldots$, tal que $\lim_{n=\infty} x_n = \infty$ (si existe dicho límite común).

Por ejemplo, tenemos

$$(9) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x=\infty} e^x = \infty = \lim_{x=\infty} \log x, \quad \lim_{x=-\infty} e^x = 0.$$

Las funciones trigonométricas sen, cos, tan, no tienen ningún límite en $\pm\infty$.

4.6. Operaciones en el límite

Suponiendo la existencia (finita) de los límites $\lim_{x=a} f(x)$ y $\lim_{x=a} g(x)$,

[1] Peter Lejeune-Dirichlet (1805-1859) famoso matemático alemán.

obtenemos las fórmulas:

(10) $$\lim_{x=a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x=a} f(x) + \lim_{x=a} g(x)$$

(11) $$\lim_{x=a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x=a} f(x) - \lim_{x=a} g(x)$$

(12) $$\lim_{x=a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x=a} f(x)\cdot \lim_{x=a} g(x)$$

(13) $$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x=a} f(x)}{\lim\limits_{x=a} g(x)} \text{ cuando } \lim_{x=a} g(x) \neq 0.$$

Las fórmulas anteriores siguen siendo verdaderas si a se substituye por ∞ o por $-\infty$. También se verifican para límites por un lado.

Estas fórmulas son consecuencias de algunas de las fórmulas para sucesiones infinitas (§ 2, (6)-(q). Por ejemplo, demostraremos la fórmula (13)

Sea $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x=a} g(x) = B \neq 0$ y sea $\lim\limits_{x=a} x_n = a$ donde $x_n \neq a$. Entonces tenemos $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n=\infty} g(x_n) = B$.

Por lo que concluimos de la fórmula para el cociente de límites (§ 2, (q)) que

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n=\infty} g(x_n)}$$

lo que implica la fórmula (13).

Análogamente concluimos de las fórmulas (15) y (17) § 2 que, si existen los límites $\lim\limits_{x=a} f(x)$ y $\lim\limits_{x=a} g(x)$, entonces

(14) *La desigualdad* $f(x) \leqslant g(x)$ *implica* $\lim\limits_{x=a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x=a} g(x)$.

(15) *La desigualdad* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *junto con el* $\lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} g(x)$ implican $\lim\limits_{x=a} h(x) = \lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} g(x)$.

Estas fórmulas siguen válidas para $a = \pm\infty$ y para límites por un lado.

La siguiente fórmula de la composición de funciones, se verifica

(16) *Si* $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ *y* $\lim\limits_{y=A} g(y) = B$, *entonces* $\lim\limits_{x=a} g[f(x)] = B$,

Esta fórmula sigue siendo válida también para valores infinitos A, B y para límites por un lado, si convenimos en que $\lim\limits_{x=a} f(x) = A+0$, si $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ y si $f(x) > A$ en una vecindad de a (una convención análoga para el símbolo $A-0$ y el límite por ese lado).

En particular tenemos la siguiente fórmula, que nos permitirá reducir el cálculo de límites en el ∞, al cálculo de límites en puntos finitos:

(17) *Si existe* $\lim\limits_{x=+0} f\left(\frac{1}{x}\right)$ *entonces*, $\lim\limits_{t=\infty} f(t) = \lim\limits_{x=+0} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

En efecto, substituyendo $x = \frac{1}{t}$ tenemos $\lim\limits_{t=\infty}\frac{1}{t} = +0$, de donde obtenemos la fórmula (17) según la anterior (escribiendo $a = \infty$ y $A = +0$).

Como se ve fácilmente, la relación inversa también es válida:

(18) *Si existe* $\lim\limits_{t=\infty} f(t)$ entonces $\lim\limits_{x=+0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t=\infty} f(t)$.

EJEMPLOS. (α) La siguiente fórmula tiene una importante aplicación en el cálculo diferencial:

(19) $$\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Para deducirla, consideraremos los dos casos siguientes

1) $x > 0$. Escribimos $y = \frac{1}{x}$. Se tiene que demostrar que

(20) $$\lim_{y=\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

según la fórmula (18). Ahora, sea $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$ y escribamos $k_n = [y_n]$ esto es, que k_n es un entero positivo que satisface la doble desigualdad

(21) $$k_n \leqslant y_n < k_n+1.$$

De aquí

$$\frac{1}{k_n+1} \leqslant \frac{1}{y_n} \leqslant \frac{1}{k_n} \text{ (para } y_n \geqslant 1)$$

y por consiguiente

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1},$$

esto es

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{k_n+1}} \leqslant \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \cdot \left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Como $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$ y $k_n > y_n - 1$, tenemos $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \infty$ y como

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

concluimos (ver §2, ejercicio 5) que

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = e.$$

finalmente, ya que

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{k_n+1}} = 1 = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right),$$

obtenemos

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$$

según la fórmula de la doble desigualdad (ver §2, (17)).

Entonces la fórmula (20) y por consiguiente la fórmula (19) también, están demostradas para $x > 0$.

2) Sea $x < 0$. Escribiendo $y = \dfrac{1}{x}$, tenemos

$$\lim_{x=-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=+\infty} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{y=\infty}\left(1-\dfrac{1}{y}\right)^y}.$$

Por lo que falta demostrar que

(22) $$\lim_{y=\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^y = \frac{1}{e}.$$

Sea $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$ la fórmula (21) da

$$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \leqslant \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{k_n+1} \leqslant \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$$

$$\leqslant \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{y_n} \leqslant \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}.$$

Sin embargo, $\lim\limits_{n=\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ (ver §2.10, (26)); de aquí razonando como antes obtenemos $\lim\limits_{n=\infty}\left(1-\dfrac{1}{y_n}\right)^{y_n} = \dfrac{1}{e}$. Por consiguiente la fórmula (22) queda demostrada.

(β) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$, esto es, la función e^x crece más rápidamente que x.

A saber sea $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \infty$ y $k_n = [x_n]$ como antes.

Por consiguiente

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} \geqslant \frac{e^{k_n}}{k_n+1} \geqslant \frac{e^{k_n}}{2k_n} \text{ para } x_n > 1.$$

Como (§3.5, 7) $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{e^n}{n} = \infty$ y $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \infty$, se tiene que $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{e^{k_n}}{k_n} = \infty$ y entonces $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{e^{x_n}}{x_n} = \infty$. De lo que se deduce la fórmula requerida.

(γ) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x}{\log x} = \infty$.

Como $x = e^{\log x}$ y $\lim\limits_{x=\infty} \log x = \infty$, substituyendo $y = \log x$, obtenemos (ver (16)):

$$\lim_{x=\infty} \frac{x}{\log x} = \lim_{x=\infty} \frac{e^{\log x}}{\log x} = \lim_{y=\infty} \frac{e^y}{y} = \infty.$$

(δ) $\lim\limits_{x=+0} (x \log x) = 0$.

Puesto que

$$\lim_{x=+0} (x \log x) = \lim_{t=\infty} \frac{\log \frac{1}{t}}{t} = -\lim_{t=\infty} \frac{\log t}{t} = 0.$$

4.7. Condiciones para la existencia del límite

El siguiente teorema corresponde al teorema de la convergencia de sucesiones monótonas acotadas:

TEOREMA 1. *Si una función f es creciente (en el sentido más amplio y acotada superiormente, entonces existe el* $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$ *en todo punto a.*

Se verifica un teorema análogo para funciones decrecientes.

Por una función *acotada superiormente* (o inferiormente), entendemos una función, el conjunto de cuyos valores es acotado superiormente (inferiormente) esto es, una función f tal que existe un número M para el cual la desigualdad $M > f(x)$ (o $M < f(x)$) se verifica para toda x.

Demostración del Teorema 1. Siendo creciente la sucesión $\left\{a - \frac{1}{n}\right\}$ también lo es la sucesión $\left\{f\left(a - \frac{1}{n}\right)\right\}$. Pero como la última sucesión también es acotada, es convergente. Sea $\lim\limits_{n=\infty} f\left(a - \frac{1}{n}\right) = g$. Queda por demostrar que la condición $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ y $x_n < a$ implica la ecuación.

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = g.$$

Dada una $\varepsilon > 0$, hay una m tal que $g - f\left(a - \frac{1}{m}\right) < \varepsilon$. Para esta m escogemos un número k tal que la desigualdad $n > k$ implique que $a - \frac{1}{m} < x_n$. Por tanto $f\left(a - \frac{1}{m}\right) < f(x_n)$, de donde

$$g - f(x_n) < g - f\left(a - \frac{1}{m}\right) < \varepsilon$$

Además, para toda n existe una r_n tal que $x_n < a - \frac{1}{r_n}$.

En consecuencia

$$f(x_n) < f\left(a - \frac{1}{r_n}\right) \leqslant g, \text{ esto es, } g - f(x_n) > 0$$

De lo que concluimos que $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$.

Observación. El Teorema 1 puede generalizarse al caso de funciones monótonas no acotadas así como al caso $a = \pm\infty$. Puede escribirse también en la siguiente forma ligeramente más general:

Si una función f es monótona (en el sentido más amplio) y acotada, entonces existen los límites $\lim\limits_{x=a\pm 0} f(x)$ *en todo punto a.*

La demostración es completamente análoga.

TEOREMA 2. *Si una función f no tiene límite (finito) en un punto a, entonces existe una sucesion $\{x_n\}$ tal que* $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ *y la sucesion $\{f(x_n)\}$ es divergente.*

Supóngase que la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente para toda sucesión $\{x_n\}$. Como la función f no tiene límite en el punto a, deben existir dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ que satisfagan nuestras condiciones y tales que $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n=\infty} f(x'_n)$. Considérese la sucesión $x_1, x'_1, x_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$ Ésta converge a a y todos sus términos son $\neq a$, pero la sucesión $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2) \ldots$ es divergente.

El siguiente teorema incluye la llamada *definición de Cauchy* del límite de una función en un punto:

TEOREMA 3. *Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación* $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$ *sea válida es que para toda $\varepsilon > 0$ exista un número $\delta > 0$ tal que la desigualad $0 < |x-a| < \delta$ implique $|f(x)-g| < \varepsilon$.*

Primero, supóngase que la condición de Cauchy no se satisface, esto es, que existe una $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe una x para la cual $0 < |x-a| < \delta$, pero $|f(x)-g| \geqslant \varepsilon$. Especialmente, substituyendo $\delta = \frac{1}{n}$ concluimos que existe una sucesión $\{x_n\}$ para la que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \tag{23}$$

y

$$|f(x_n) - g| \geqslant \varepsilon. \tag{24}$$

Se deduce de (23) que $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ y $x_n \neq a$. De aquí, suponiendo que $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$ tendríamos $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$. Pero la última fórmula es contradictoria a la desigualdad (24).

Por consiguiente, hemos demostrado que la condición de Cauchy es una condición necesaria para la validez de la ecuación $\lim_{x=a} f(x) = g$.

Demostraremos ahora que esta condición es suficiente.

Se da $\varepsilon > 0$ y $\lim_{n=\infty} x_n = a$ y $x_n \neq a$.

Entonces por la condición de Cauchy, existe un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $0 < |x_n - a| < \delta$ implica $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Pero considerando la ecuación $\lim_{n=\infty} x_n = a$, la desigualdad $|x_n - a| < \delta$ se verifica, para toda n comenzando con cierta k. Para la misma n tenemos la desigualdad $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Esto significa que $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$. De aquí concluimos que $\lim_{x=a} f(x) = g$.

El siguiente teorema corresponde al Teorema de Cauchy en la teoría de las sucesiones (§ 2.7):

TEOREMA 4. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia del límite (finito) de una función f en un punto a es que para toda $\varepsilon > 0$ exista un número $\delta > 0$ tal que las condiciones*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad 0 < |x' - a| < \delta \tag{25}$$

impliquen $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

En efecto, nuestra condición es necesaria, porque si $\lim_{x=a} f(x) = g$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que la condición $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. De aquí, si las condiciones (25) se satisfacen, entonces las desigualdades $|f(x) - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$ y $|f(x') - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$ se verifican. Sumando ambas desigualdades obtenemos $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

La condición es suficiente. En efecto, supóngase que el límite de la función f en el punto a no existe. Entonces existe, por el Teorema 2, una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Supóngase que la condición formulada en el teorema se satisface. Como la ecuación $\lim_{n=\infty} x_n = a$ implica la existencia de una k tal que para $n \geqslant k$, $x = x_n$ y $x' = x_k$ pueden sustituirse en las desigualdades (25) de modo que tenemos $|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$. Por el Teorema de Cauchy de sucesiones, concluimos la convergencia de la sucesión $\{f(x_n)\}$, en contradicción con nuestra suposición.

Observación. Para $a = \infty$. Los Teoremas 3 y 4 pueden formularse como sigue:

TEOREMA 3'. *Una condición necesaria y suficiente para la ecuación $\lim_{x=\infty} f(x) = g$, es que para toda $\varepsilon > 0$ exista un número r tal que la desigualdad $x > r$ implique $|f(x) - g| < \varepsilon$.*

TEOREMA 4'. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia del límite (finito) $\lim_{x=\infty} f(x)$ es que para toda $\varepsilon > 0$ exista un número r tal que las condiciones $x > r$ y $x' > r$ impliquen $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Las demostraciones de estos teoremas son completamente análogas a las de los Teoremas 3 y 4.

Ejercicios del § 4

1. Constrúyanse las gráficas de las funciones

$$\frac{x}{x+1},\ x - [x],\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x},\ x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x},\ \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

y calcúlense sus límites en el punto 0.

2. Hállense los límites de un polinomio en el ∞. Esto es, $\lim_{x=\pm\infty} (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$ (considérese el caso de n par y el de n impar, independientemente).

3. Evalúense:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x},\ \lim_{x=1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

4. Se da una función $f(x)$ acotada en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Divídase este intervalo en un número finito de intervalos por medio de los puntos $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ (donde $a_0 = a$, $a_n = b$) y considérese la suma

$$s = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + \ldots + |f(a_n) - f(a_{n-1})|.$$

Si el conjunto de los números s correspondiente a todas las posibles particiones del intervalo ab está acotado, entonces la función f se dice que es de *variación acotada*.

Demuéstrese que la suma de dos funciones de variación acotada es una función de variación acotada; una función monótona es de variación acotada.

5. Demuéstrese que si una función f acotada en todo el intervalo

finito satisface la condición $\lim_{x=\infty} [f(x+1) - f(x)] = g$, entonces

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = g.$$

6. Demuéstrese que la fórmula $f(x) = \lim_{n=\infty} \lim_{k=\infty} (\cos n!\,\pi x)^{2k}$ representa la función Dirichlet considerada en § 4.5.

7. Una función $f(x)$ se llama *función par*, si la condición $f(x)=f(-x)$ se verifica para toda x. Análogamente, si la condición $f(x) = -f(-x)$ se satisface, entonces la función f es una *función impar*.

Dense ejemplos de funciones par e impar entre las trigonométricas. Caractericense las funciones par e impar con condiciones geométricas.

8. Demuéstrese que toda función es una suma de una función par y una impar.

(Obsérvese que la función $g(x) = f(x)+f(-x)$ es par.)

§ 5. FUNCIONES CONTINUAS

5.1. Definición

Se dice que una función f es continua en un punto s, si se satisface la condición

$$f(a) = \lim_{x=a} f(x) \tag{1}$$

Según la definición del símbolo $\lim_{x=a} f(x)$, esto significa que la ecuación $\lim_{n=\infty} x_n = a$ implica $\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(a)$. (Obviamente, la consideración $x_n \neq a$ puede omitirse aquí.)

Por consiguiente, si una función f es continua es un punto a, entonces

$$f(\lim_{n=\infty} x_n) = \lim f(x_n), \text{ siempre que } \lim_{n=\infty} x_n = a. \tag{2}$$

Si en la ecuación (1) reemplazamos el límite por un límite lateral, obtenemos la definición de *continuidad lateral*. A saber, una función f es continua por el lado derecho (o continua por el izquierdo) en un punto a si

$$f(a) = \lim_{x=a+0} f(x) \; [\text{ó } f(a) = \lim_{x=a-0} f(x)].$$

Si una función f se define no para toda x, entonces restringimos a x obviamente al conjunto de argumentos de la función $f(x)$; por ejemplo, si el conjunto de argumentos de una función f es el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la continuidad de la función f en un punto a significa lo mismo que su continuidad por el lado derecho.

Una función continua para todo valor del argumento se llama simplemente *función continua*. En particular, una función continua definida en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ es una función continua en todo punto interior del intervalo, continua por el lado derecho en a y continua por el lado izquierdo en b.

Se dice también que una función f es *seccionalmente continua* en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, si este intervalo puede dividirse por medio de un sistema de puntos $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, donde $a_0 = a$ y $a_n = b$, en intervalos $a_{k-1}\, a_k$, $k = 1,2 \ldots, n$, de tal manera que la función f sea continua dentro de cada uno de estos intervalos y que los límites

$$\lim_{x=a_{k-1}+0} f(x) \text{ y } \lim_{x=a_k-0} f(x)$$

existan; esto es, si para toda k la función $f_k(x)$ definida por las condiciones $f_k = f(x)$ para $a_{k-1} < x < a_k$ y $f_k(a_{k-1}) = f(a_{k-1}+0)$, $f_k(a_k) = f(a_k-0)$, es continua en el intervalo $a_k \leqslant x \leqslant a_k$.

Por consiguiente, una función que tiene un número finito de puntos de discontinuidad en los cuales ambos límites laterales existen, es seccionalmente continua.

Ejemplos. Como se demostró en el §4.5, $\lim_{x=0} x^2 = 0$.

Esto significa que la función x^2 es continua en el punto 0 (aunque se ve fácilmente que es una función en todo punto). Similarmente, la ecuacion $\lim_{x=0} \cos x = 1 = \cos 0$ implica la continuidad de la función $\cos x$ en el punto 0.

La función $[x]$ es discontinua en puntos enteros; hablando con más precisión, es continua por el lado derecho, pero no por el izquierdo, en estos puntos.

La función sen $\frac{1}{x}$ es discontinua en el punto 0 independientemente del valor que pueda dársele a esta función en este punto, porque su límite en el punto 0 no existe. La función de Dirichlet (ver § 4.5) es discontinua en todo punto.

La noción de continuidad puede extenderse también a los puntos en el infinito, entendiendo por una función continua en el ∞, una función f tal que exista el límite $\lim_{x=\infty} f(x)$.

5.2. Caracterización de continuidad de Cauchy. Interpretación geométrica

El siguiente teorema puede ser considerado como la definición de continuidad. (La "definición de Cauchy" para distinguirla de la "definición de Heine" que hemos introducido en el § 5.1.) Se deduce directamente del § 4.7, Teorema 3.

Una condición necesaria y suficiente para que una función f sea continua en un punto a es que para toda $\varepsilon > 0$ exista un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|x-a| < \delta$ implique $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Hablando más figurativamente, esto significa que a incrementos suficientemente pequeños de la variable independiente corresponden incrementos arbitrariamente pequeños de la variable dependiente. Esto se puede escribir como sigue:

(3) la condición $|h| < \delta$ *implica* $|f(a+h)-f(a)| < \varepsilon$.

Geométricamente, la continuidad de una función f en un punto a significa lo siguiente: sea P una banda paralela al eje X y que contenga la recta $y = f(a)$; entonces existe una banda Q paralela al eje Y conteniendo a la recta $x = a$, tal que la parte de la curva dada por la ecuación $y = f(x)$ incluida en la banda Q, está también incluida en la banda P.

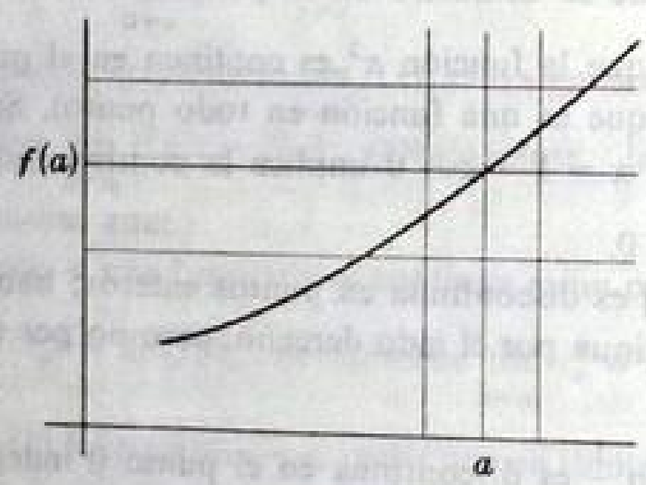


FIG 8.

Podemos pasar de la definición analítica basada en la condición de Cauchy a la anterior definición geométrica inmediatamente, suponiendo

que la banda P está definida por las rectas $y = f(a)+\varepsilon$ y que la banda Q está definida por las rectas $x = a+\delta$.

Se ve fácilmente de las definiciones anteriores que la continuidad de una función f en un punto a es una propiedad *local* en el sentido de que depende del comportamiento de la función en la vecindad del punto a. Para ver si una función f es continua en un punto a, es suficiente conocer esta función en un intervalo arbitrariamente pequeño que contenga al punto a.

5.3. Continuidad de funciones elementales

Se deduce inmediatamente de las fórmulas sobre las operaciones de límites de funciones (§ 4, (10)-(13)), *que las operaciones aritméticas de funciones continuas dan funciones continuas, nuevamente*. Hablando con *mayor exactitud, si las funciones f y g son continuas en un punto a, entonces, la suma, la diferencia, el producto y el cociente (cuando $g(a) \neq 0$) de estas funciones también son continuos en el punto a.*

Por ejemplo, considerando que $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x=a} g(x) = g(a)$, tenemos

$$\lim_{x=a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x=a} f(x)\cdot \lim_{x=a} g(x) = f(a)\cdot g(a)$$

lo que significa que la función $f(x)\cdot g(x)$ es continua en el punto a.

De lo que se deduce que un *polinomio es una función continua*.

En efecto, la función constante $f(x) = \text{const}$ y la función $f(x) = x$ (la identidad) son funciones continuas.

Con más generalidad, *cualquier función racional, esto es, función de la forma* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ *son polinomios, es una función continua* (obviamente en puntos en los que esté definida, esto es, en todo punto excepto las raíces del denominador).

Antes de pasar a la demostración de la continuidad de otras funciones elementales, observemos que según la fórmula (1), la continuidad de una función f en un punto x significa que $\lim_{h=0} f(x+h) = f(x)$, esto es, que

(4) $$\lim_{h=0} [f(x+h)-f(x)] = 0.$$

Demostraremos ahora que la *función exponencial* $a^x (a > 0)$ es *continua*.

En efecto tenemos $a^{x+h}-a^x = a^x(a^h-1)$ y $\lim_{h=0} a^h = 1$ (ver §4, (4)). Por lo tanto $\lim_{h=0}(a^{x+h}-a^x) = 0$ y esto implica según la fórmula (4) que la función a^x es continua.

Las funciones trigonométricas seno y coseno *son continuas*. De hecho,

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

y entonces $|\operatorname{sen} t| \leqslant |t|$ y $|\cos t| \leqslant 1$, tenemos $|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| \leqslant |h|$, de donde $\lim_{h=0} \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 0$, esto es

$$\lim_{h=0} \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 0.$$

Similarmente,

$$|\cos(x+h) - \cos x| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right|\cdot\left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant |h|,$$

de donde

$$\lim_{h=0} \cos(x+h) - \cos x = 0.$$

Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, la función tan x es continua, ya que es un cociente de funciones continuas. Las funciones

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

son también continuas (para toda x en la cual se definan).

Entre las funciones elementales quedan aún por considerar las funciones inversas a las anteriormente consideradas, o sea, la logarítmica y las ciclométricas. Sin embargo, no probaremos la continuidad de funciones inversas a funciones continuas, ya que ello será consecuencia de un teorema general sobre continuidad de funciones inversas y funciones continuas que demostraremos más adelante.

Sin embargo, demostraremos ahora que *la composición de funciones continuas es una función continua*. Con más precisión, *si se dan dos funciones $y = f(x)$ y $z = g(y)$, y si la función f es continua en un punto a, y la función g es continua en el punto $f(a)$, entonces la función $g(f(x))$ es continua en el punto a.*

Supongamos que $\lim_{n=\infty} x_n = a$. Luego $\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(a)$. Escribiendo $b = f(a)$ y $y_n = f(x_n)$, tenemos entonces $\lim_{n=\infty} y_n = b$, de donde la continuidad de la función g implica

$$\lim_{n=\infty} g(y_n) = g(b), \text{ esto es, } \lim_{n=\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)).$$

Pero esto indica la continuidad de la función compuesta $g(f(x))$ en el punto a.

Por tanto se deduce que al tomar las funciones elementales consideradas en el § 4.4 en el punto de partida y aplicar a estas funciones las operaciones aritméticas y la composición, continuamos en el dominio de las funciones continuas.

Por ejemplo, la función $x+\tan(x^2)$ es continua. Similarmente, la función $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ es continua en el conjunto de sus argumentos, esto es, para $x \neq 0$. Pero la función f definida por las condiciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} \text{ para } x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0 \tag{5}$$

es discontinua en el punto 0. Como sabemos, el límite de la función f en el punto 0 no existe (ver § 4.5, (8)).

Entonces, se deduce también que la función definida por las condiciones (5) no puede escribirse por medio de funciones continuas únicamente. Similarmente, la función definida como sigue:

$$f(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0$$

es discontinua en el punto 0. Sin embargo, la última función puede escribirse por medio de un límite. A saber,

$$f(x) = \lim_{t=\infty} \frac{xt}{1+xt} = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{1+nx}.$$

Observación. La siguiente formulación del teorema de la composición de funciones, un poco más general que la anterior, conviene en aplicaciones: *si existe el* $\lim_{x=a+0} f(x)$ *y si g es continua en este punto, entonces*

$$\lim_{x=a\pm 0} g[f(x)] = g[\lim_{x=a\pm 0} f(x)]. \tag{6}$$

La demostración queda casi sin cambio.

EJEMPLO. $\lim\limits_{x=+0} x^x = 1$, ya que

$$\lim_{x=+0} x^x = \lim_{x=+0} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x=+0}(x\log x)} = e^0 = 1.$$

Aquí, $f(x) = x\log x$, $g(x) = e^x$. La función f no está definida en el punto 0; sin embargo, tiene límite por el lado derecho ($= 0$; ver § 4.6 (δ)) en este punto.

5.4. Propiedades generales de las funciones continuas

1. TEOREMA DE LA CONTINUIDAD UNIFORME. *Si una función f es continua en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|x-x'| < \delta$ implica $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$.*

Antes de continuar con la demostración, obsérvese que el número δ mencionado en el teorema anterior no depende de x, en distinción al caso de la definición de una función continua en todo punto x (perteneciente al conjunto considerado de argumentos, en el que se tiene dicha dependencia. Esta independencia del número δ de la variable x, la resaltamos diciendo continuidad "uniforme".

La demostración de este teorema se dará por *reducción al absurdo*. Supóngase que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que, dada cualquier $\delta > 0$, existen un par de argumentos x y x' tales que $|x-x'| < \delta$ y $|f(x)-f(x')| \geqslant \varepsilon$. Entonces en particular, escribiendo $\delta = \frac{1}{n}$, concluimos que existen dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$(7) \qquad a \leqslant x_n \leqslant b,\ a \leqslant x'_n \leqslant b,\ |x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \text{ y } |f(x_n)-f(x'_n)| \geqslant \varepsilon.$$

La sucesión $\{x_n\}$ siendo acotada, contiene según el Teorema de Bolzano-Weierstrass (§ 2.6, 2) una subsucesión convergente. Escríbase $\lim\limits_{n=\infty} x_{m_n} = c$. Se deduce de la primera de las desigualdades (7) que $a \leqslant c \leqslant b$. De donde la función f es continua en el punto c y el

$$\lim_{n=\infty} f(x_{m_n}) = f(c)$$

Pero la tercera de las desigualdades (7) implica también $\lim\limits_{n=\infty} x'_{m_n} = c$, porque $\lim\limits_{n=\infty} x'_{m_n} = \lim\limits_{n=\infty} x_{m_n}$. La continuidad de la función f implica

$\lim\limits_{n=\infty} f(x'_{m_n}) = f(c)$, como antes. Por consiguiente, $\lim\limits_{n=\infty} [f(x_{m_n}) - f(x'_{m_n})] = 0$. Pero la última ecuación es contradictoria a la última de las desigualdades (7).

Por tanto, el teorema queda demostrado.

Observación. La suposición de que el intervalo considerado es cerrado, es esencial; por ejemplo, la función $\frac{1}{x}$ es continua en cualquier punto del intervalo abierto $0 < x < 1$, pero no es uniformemente continua en este intervalo.

2. TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Una función f continua en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ es acotada, y alcanza sus límites superior e inferior M y m, esto es, existen en este intervalo dos puntos c y d tales que $f(c) = M$ y $f(d) = m$.*

Primero demostraremos la acotación de la función f, esto es, que existen un número A, tal que la desigualdad $A > |f(x)|$ se verifica para toda x del intervalo ab. Ahora, por substitución de $\varepsilon = 1$, el Teorema 1 implica la existencia de una $\delta > 0$, tal que si dos puntos x y x' pertenecen al intervalo (contenidos en el intervalo ab) de longitud $< \delta$, entonces $|f(x)-f(x')| < 1$. Escójase un número n de tal manera que $\frac{b-a}{n} < \delta$; dividiendo el intervalo ab en n intervalos iguales, la longitud de cada uno de ellos será menor que δ. Por consiguiente, designando los extremos de estos intervalos por $a_0, a_1, \ldots, a_n (a_0 = a, a_n = b)$, sucesivamente, tenemos

$$|f(x)-f(a_1)| < 1 \quad \text{para} \quad a_0 \leqslant x \leqslant a_1,$$

$$\text{de donde} \quad |f(x)| < 1 + |f(a_1)|,$$

y en general:

$$|f(x)-f(a_k)| < 1 \quad \text{para} \quad a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k,$$

de donde

$$|f(x)| < 1 + |f(a_k)|.$$

Por consiguiente, denotando por A el mayor de los números $1 + |f(a_k)|$, donde k toma los valores $1, 2, \ldots, n$, tenemos $|f(x)| < A$ para toda x del intervalo ab.

De modo que hemos demostrado que la función f es acotada, esto es, que el conjunto de valores de esta función está acotado. Por tanto,

existen las cotas superior mínima M e inferior máxima m de este conjunto (ver § 1.7). Demostraremos por *reducción al absurdo* que M es uno de los valores de la función f (la demostración para m es completamente análoga).

Supóngase que no es verdadera, esto es, que tenemos $M-f(x) \neq 0$ para toda x. Entonces la función $g(x) = \dfrac{1}{M-f(x)}$ está definida para toda x en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ y es continua en este intervalo. En consecuencia es una función acotada, como lo acabamos de demostrar. Entonces, existe un número N tal que $g(x) < N$, esto es, $M-f(x) > \dfrac{1}{N}$, o sea, $f(x) < M - \dfrac{1}{N}$.

Pero la última desigualdad prueba la existencia de un número menor que M que es mayor que todos los números $f(x)$, donde x toma valores del intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Pero esto es contradictorio a la suposición de que M es la cota superior mínima de la función f en este intervalo.

Por consiguiente, suponiendo que el teorema está equivocado, tenemos una contradicción.

3. Propiedad de Darboux [1]. *Una función continua en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ toma todos los valores entre dos valores cualesquiera. Esto significa que, si y es un número entre $f(a)$ y $f(b)$ (esto es $f(a) < y < f(b)$ o bien $f(b) < y < f(a)$), entonces existe una c en el intervalo ab tal que $f(c) = y$.*

Supongamos que $f(a) < y < f(b)$ (en caso de otra eventualidad, los argumentos son completamente similares). Suponiendo que el teorema es falso, esto es, que $y-f(x) \neq 0$ para toda x del intervalo ab, la función $h(x) = \dfrac{1}{|y-f(x)|}$ sería acotada, por el Teorema 2.

Sea $M > h(x)$, esto es, sea

$$|y-f(x)| > \frac{1}{M}. \tag{8}$$

Substituyendo $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$ en el Teorema 1 concluimos que existe un

[1] Gaston Darboux (1842-1917), famoso geómetra francés.

número $\delta > 0$ tal que si dos puntos x y x' pertenecen a un intervalo de longitud $< \delta$, entonces

$$|f(x)-f(x')| < \frac{1}{M}.$$

Sea n un entero positivo tal que $\dfrac{b-a}{n} < \delta$. Dividiendo el segmento ab en n segmentos iguales y designando por $a_0, a_1, \ldots, a_n$ los extremos sucesivos de estos segmentos, como en la demostración del teorema anterior concluimos que

$$|f(a_k)-f(a_{k-1})| < \frac{1}{M} \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Como $f(a_0) < y < f(a_n)$, entonces, existen entre los números $1, 2, \ldots, n$ un número m que satisface la condición $y < f(a_m)$. Tenemos $m > 0$ y $f(a_m - 1) < y < f(a_m)$, de donde

$$0 < y-f(a_{m-1}) < f(a_m)-f(a_{m-1}) < \frac{1}{M}$$

por (9), pero esto contradice la desigualdad (8).

Los Teoremas 2 y 3 conducen a la siguiente conclusión:

4. *Una función continua en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ toma todos los valores entre su cota inferior m y su cota superior M, incluyéndolas. En otras palabras, el conjunto de valores de la función f es el intervalo cerrado $m \leqslant y \leqslant M$.*

Observaciones. (α) La propiedad de las funciones continuas expresada en el Teorema 3 (la llamada propiedad de Darboux) es especialmente intuitiva en su interpretación geométrica. Sin embargo, esta propiedad no caracteriza las funciones continuas, por ejemplo, la función (5) tiene esta propiedad aunque no sea continua.

(β) El Teorema 3 implica de inmediato la existencia de $\sqrt[n]{x}$ para toda x real, si n es impar y para $x \geqslant 0$ si n es par. En efecto, si n es impar, entonces $\lim\limits_{x=\infty} x^n = -\infty$ y $\lim\limits_{x=\infty} x^n = \infty$ y entonces la función x^n toma todos los valores reales. Por consiguiente la función inversa con respecto a x^n, esto es, $\sqrt[n]{x}$ se define para toda x real. Análogamente, si n es par, entonces la función x^n, $x \geqslant 0$, toma todos los valores de 0 a ∞.

de aquí que $\sqrt[n]{x}$ esté definida para todos estos valores.

Análogamente, se deduce de las fórmulas $\lim_{x=\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x=\infty} e^x = \infty$ que la función e^x toma todos los valores positivos; por tanto $\log x$ se define para toda x positiva. Finalmente, arc tan x se define para toda x real.

Añadamos que las fórmulas del § 4.4, (3) implican de inmediato las siguientes fórmulas que relacionan logaritmos, para a x y y positivas $(a \neq 1)$:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a (x^y) = y \log_a x, \tag{10}$$

$$a^x = e^{x \log a}, \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}. \tag{11}$$

Por ejemplo, para demostrar la primera de las fórmulas (10), substitúyase:

$$\log a^t = t, \log_a y = z, \text{ esto es, } x = a^t, y = a^z.$$

Por el § 4.4, (3) tenemos

$$xy = a^t \cdot a^z = a^{t+z} \text{ de donde } \log_a xy = t + z = \log_a x + \log_a y.$$

La segunda de las fórmulas (11) se obtiene de la segunda de las fórmulas (10):

$$\log a^t = t \log a, \quad \text{esto es,} \quad \log x = \log_a x \log a.$$

5.5. Continuidad de funciones inversas

En el § 4.3 hemos visto que una función biunívoca $y = f(x)$ define una función inversa $x = g(y)$. Ahora demostraremos que una *función inversa con respecto a una función continua también es continua*. Hablando más precisamente:

1. *Si una función $y = f(x)$ es biunívoca y continua en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la función inversa $x = g(y)$ es continua en el intervalo $m \leqslant y \leqslant M$, donde m y M son la cota inferior y la cota superior de la función f, respectivamente.*

Sea $m \leqslant c \leqslant M$. Por el Teorema 4 del § 5.4, la función g se define en el punto c. Sea $c = \lim_{n=\infty} y_n$, donde y_n pertenece al intervalo mM, esto es, y_n es de la forma $y_n = f(x_n)$. Tiene que demostrarse que $\lim_{n=\infty} g(y_n) = g(c)$.

Sea $c = f(d)$. Por consiguiente, tenemos que demostrar que la condición $\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(d)$ implica $\lim_{n=\infty} x_n = d$ (porque $g(y_n) = x_n$, $g(c) = d$). Como la sucesión $\{x_n\}$ es acotada, por estar contenida en el intervalo ab, se demostrará la última desigualdad, si comprobamos que toda subsucesión convergente de la sucesión $\{x_n\}$ converge al límite d (ver § 2.6, Teorema 4). Por consiguiente, sea $\lim_{n=\infty} x_{k_n} = d'$. Demostraremos que $d' = d$. La continuidad de la función f implica $\lim_{n=\infty} f(x_{k_n}) = f(d')$ y como $\lim_{n=\infty} f(xk_n) = \lim_{n=\infty} f(x_n) = f(d)$, obtenemos $f(d') = f(d)$. La función f es biunívoca de lo que concluimos que $d' = d$.

Por consiguiente, el teorema queda demostrado.

APLICACIONES. (α) $\log_a x$ *es una función continua* $(1 \neq a > 0)$, porque es inversa de la función continua a^x.

(β) Las *funciones ciclométricas* arc sen x, arc cos x, arc tan x, etc. *son continuas*, ya que son funciones inversas con respecto a las funciones trigonométricas (que son continuas).

(γ) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión con términos positivos. Entonces la convergencia del producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la convergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$. Además se verifica la relación*

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n, \text{ esto es, } \prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n} \tag{12}$$

Similarmente admitiendo la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente y se cumple la relación (12).

Sea $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. La hipótesis de convergencia de la sucesión $\{p_n\}$ y la continuidad del logaritmo implican (ver (2)):

$$\log \lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} \log p_n$$

y

$$\lim_{n=\infty} \log p_n = \lim_{n=\infty} \log (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \lim_{n=\infty} [\log a_1 + \ldots + \log a_n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n .$$

Similarmente, escribiendo $s_n = \log a_1 + \ldots + \log a_n$ y admitiendo la convergencia de la sucesión $\{s_n\}$, tenemos, por la continuidad de la función exponencial

$$e^{\lim\limits_{n=\infty} s_n} = \lim_{n=\infty} e^{s_n},$$

pero

$$e^{s_n} = e^{\log a_1 + \ldots + \log a_n} = e^{\log a_1} \cdot \ldots \cdot e^{\log a_n} = p_n ,$$

de donde

$$\lim_{n=\infty} e^{s_n} = \lim_{n=\infty} p_n .$$

La fórmula (12), siendo como se ha visto, una generalización de la primera de las fórmulas (10) a las operaciones infinitas nos permite transferir muchos teoremas concernientes a series infinitas al caso de productos infinitos.

2. *Toda función f biunívoca y continua en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ es estrictamente monótona (esto es, creciente o bien decreciente).*

Nuestra suposición implica que $f(a) \neq f(b)$ y podemos suponer además $f(a) < f(b)$ (si $f(a) > f(b)$, se aplican argumentos análogos). Demostraremos que la función f es creciente en $a \leqslant x \leqslant b$. Sea $x < x'$. Se tiene que demostrar que $f(x) < f(x')$.

En primer lugar obsérvese que las condiciones $a \leqslant x \leqslant b$ y $f(a) < f(b)$ implican $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. En efecto, en caso contrario tendríamos que $f(x) < f(a)$ o bien $f(x) > f(b)$. En el primer caso, la doble desigualdad $f(x) < f(a) < f(b)$ implicaría (por el Teorema 3) la existencia de un punto x'' en el intervalo xb, tal que $f(x'') = f(a)$. Pero esto contradice la suposición de que f es biunívoca (porque $x'' \neq a$). Similarmente, en el otro caso existiría un x''' en el intervalo ax, tal que $f(x''') = f(b)$ en contradicción con la desigualdad $x''' \neq b$.

De modo que hemos demostrado que $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Al mismo tiempo concluimos que las condiciones $x \leqslant x' \leqslant b$ y $f(x) < f(b)$ implican que $f(x) \leqslant f(x') \leqslant f(b)$.

Por consiguiente, $f(x) < f(x')$ como lo teníamos que demostrar.

Ejercicios del § 5

1. Sea $f(x)$ una función definida como sigue: si x es un número irracional, entonces $f(x) = 0$ y si x es un racional $x = \frac{p}{q}$ (la fracción $\frac{p}{q}$ es irreductible), entonces $f(x) = \frac{1}{q}$. Demuéstrese que esta función es continua en puntos irracionales y discontinua en puntos racionales.

2. Demuéstrese que toda función $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, biunívoca y con la propiedad de Darboux (§ 5.4, Observación (α)) es continua.

3. Demuéstrese que toda ecuación de grado impar n con coeficientes reales, esto es, una ecuación de la forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ tiene al menos una raíz real (ver Ejercicio 2, § 4).

4. Demuéstrese que una función continua que satisface la condición

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para toda x y y es de la forma $f(x) = ax$.

(Demuéstrese esta ecuación para x racional, tomando $a = f(1)$.)

5. Investíguese si la función $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es uniformemente continua en el intervalo $0 < x < 1$, y la función $\sqrt{x}$ en el intervalo $0 \leqslant x < \infty$.

6. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Sea $h(x)$ el mayor de los dos valores $f(x)$ y $g(x)$ (eventualmente, su valor común, si son iguales). Demuéstrese que $h(x)$ es continua.

7. Dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots$, elíjase una función discontinua en los puntos de esta sucesión y continua en todos los demás puntos.

8. Se dice que una función f satisface la *condición de Lipschitz*, si existe una constante C tal que la desigualdad

$$|f(x) - f(x')| \leqslant C|x - x'|$$

se verifique para cualquier par x y x'.

Caracterice geométricamente la condición de Lipschitz.

Demuestre que una función que satisface la condición de Lipschitz (en un intervalo que puede ser cerrado o abierto, acotado o no acotado) es uniformemente continua.

Demuéstrese con un ejemplo que el teorema inverso no es válido.

§ 6. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES.

6.1. Convergencia uniforme

Si a un entero positivo n le corresponde una función f_n, entonces se define una sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ Supongamos que todas estas funciones se definen en el mismo conjunto de argumentos A (por ejemplo, en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$). Si la sucesión $f_1(x), f_2(x), \ldots$ converge para toda x (perteneciente a A) a un límite $f(x)$, entonces decimos que la *sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *converge a la función* f. Esto significa, por la definición del límite (§ 2.2), que para toda x y $\varepsilon > 0$ existe un número k tal que para $n > k$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Por consiguiente, dada $\varepsilon > 0$, el número k es escogido adecuadamente para toda x, por separado. Sin embargo, si k puede escogerse *independiente* de x, entonces se dice que la convergencia de nuestra sucesión es *uniforme*. Por consiguiente, una sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente a una función* f (en un conjunto A), si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número k tal que para toda $n > k$ y para toda x (perteneciente a A) se verifique la desigualdad (1).

Geométricamente, la convergencia uniforme significa que al envolver la curva-límite $y = f(x)$ con una banda definida por dos curvas paralelas a ella (dadas por las ecuaciones $y = f(x) \pm \varepsilon$), todas las curvas $y = f_n(x)$ con n suficientemente grande, están contenidas en dicha banda.

EJEMPLOS. Sea $f_n(x) = x^n$. Tenemos

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$\text{y} \quad \lim_{n=\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{para} \quad x = 1.$$

Esta sucesión es uniformemente convergente en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Ya que, dada $\varepsilon > 0$, se elige un número k de tal manera que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Entonces suponiendo que $x \leqslant \frac{1}{2}$ tenemos $x^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ para $n > k$ y la desigualdad (1) es satisfecha por toda $n > k$ y por toda x perteneciente al intervalo $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Pero esto significa que la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en este intervalo es uniforme. No obstante, la convergencia en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$ no es uniforme. Esto se ve fácilmente substituyendo, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{2}$; además, se deduce inmediatamente de la discontinuidad de la función límite y del siguiente teorema:

1. *Un límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es continuo.*

Sea la sucesión $\{f_n\}$ uniformemente convergente a f (en un conjunto A) y sea $\varepsilon > 0$. Entonces hay una k tal que para toda $n \geqslant k$, la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \tag{2}$$

se satisface para toda x (perteneciente a A). Sea a un punto arbitrario de A. Tenemos que demostrar que la función f es continua en este punto. Por consiguiente, dada ε, tiene que elegirse un número $\delta > 0$, de tal manera que la desigualdad $|x - a| < \delta$ implique

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{3}$$

(para x perteneciente a A).

Ahora, siendo f_k continua en el punto a, existe un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|x - a| < \delta$ implica

$$|f_k(x) - f_k(a)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \tag{4}$$

Como la desigualdad (2) se satisface para $n = k$ y $x = a$, tenemos que

$$|f_k(a) - f(a)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \tag{5}$$

Substituyendo n por k en la desigualdad (2) y sumando las desigualdades (4) y (5), a la así obtenida, tenemos la desigualdad (3), como se pedía.

Observación. Como hemos visto, la función $f(x) = \lim_{n=\infty} x^n$ (ver Fig. 9) es discontinua en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Por consiguiente, el límite de una sucesión no-uniformemente convergente de funciones continuas puede ser discontinua. El Teorema 1 y el ejemplo anterior ilustran el significado de la noción de convergencia uniforme.

Similarmente, como en el caso de la continuidad uniforme de una función, la expresión "uniforme" muestra que el número k escogido para una ε dada es independiente de x.

El siguiente teorema corresponde a la condición de Cauchy para la convergencia de una sucesión:

2. *Una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ es que para toda $\varepsilon > 0$ exista un número r tal que la desigualdad*

(6) $$|f_n(x)-f_r(x)| < \varepsilon$$

se verifica para toda $n > r$.

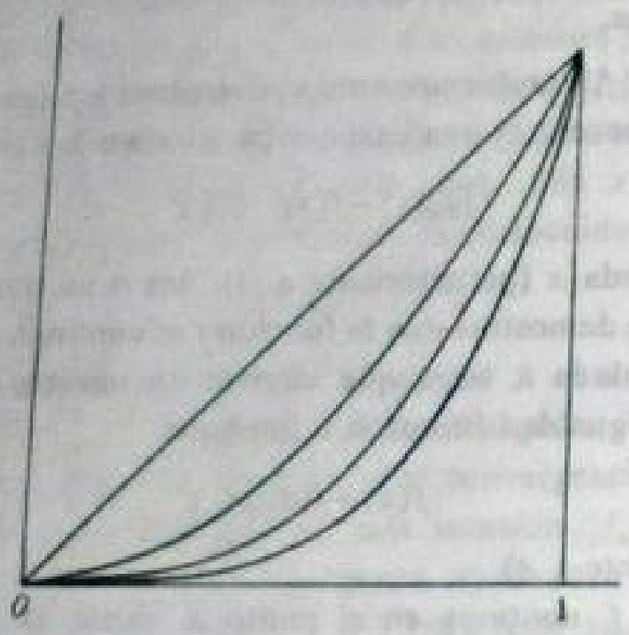


FIG. 9

Supongamos primero que la sucesión converge uniformemente a una función f. Entonces, dado un número $\varepsilon > 0$, existe una r tal que para toda $n > r$, tenemos

$$|f_n(x)-f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{de donde} \quad |f_r(x)-f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Sumando ambas desigualdades, obtenemos la (6).

Supongamos ahora que una sucesión $\{f_n\}$ satisface la condición formulada en el teorema. Entonces la sucesión $f_1(x), f_2(x), \ldots$ satisface, para una x fija, la condición de Cauchy; por lo que es convergente. Hablando de otro modo, existe la función $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$ tiene que demostrarse que la convergencia es uniforme. Se da una $\varepsilon > 0$. Según la suposición, existe una r tal que la desigualdad

(7) $$|f_n(x)-f_r(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

se verifica para toda $n > r$.

Demostraremos que para $n > r$, se cumple también la desigualdad (1) (con el signo $\leqslant$ en lugar de $<$).

Substituyendo la variable n por m en la fórmula (7) y sumando la desigualdad (7), la obtenida $|f_m(x)-f_r(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, tenemos para $m > r$.

$$|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{de donde,} \quad \lim_{m=\infty} |f_n(x)-f_m(x)| \leqslant \varepsilon$$

esto es,

$$|\lim_{m=\infty} [f_n(x)-f_m(x)]| \leqslant \varepsilon \quad \text{o sea,} \quad |f_n(x)-\lim_{m=\infty} f_m(x)| \leqslant \varepsilon$$

y entonces

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$$

6.2. Series uniformemente convergentes

Definase una sucesión de funciones $f_1, \ldots, f_n, \ldots$, en el mismo conjunto de argumentos.

La serie $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$ es *uniformemente convergente*, si la sucesión de sus sumas parciales

$$s_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$$

es uniformemente convergente.

Si las funciones $f_1, f_2, \ldots$ son continuas, entonces las sumas parciales s_n también lo son. Por los teoremas del § 6.1, concluimos, por lo tanto que

1. *La suma de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas, es una función continua.*

2. *Una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una serie $f_1(x)+f_2(x)+\ldots$ es que para todo número $\varepsilon > 0$ exista un número k tal que la desigualdad*

(8) $$|f_k(x)+f_{k+1}(x)+\ldots+f_n(x)| < \varepsilon$$

se verifique para toda $n > k$ y para toda x.

Del Teorema 2 podemos deducir el siguiente, que hace posible inferir la convergencia uniforme de una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ por comparación de los términos de ésta con los de una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. *Si una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente y si la desigualdad $|f_n(x)| \leqslant u_n$*

se satisface para toda x, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniforme y absolutamente.*

En efecto, como la serie $u_1+u_2+\dots$ es convergente, para una $\varepsilon > 0$ dada, existe un número k tal que la desigualdad $u_k+u_{k+1}+\dots+u_n < \varepsilon$ se satisface para toda $n > k$. De donde, por la hipótesis,

$$|f_k(x)+\dots+f_n(x)| \leqslant |f_k(x)|+\dots+|f_n(x)| \leqslant u_k+\dots+u_n < \varepsilon;$$

por consiguiente la fórmula (8) se verifica y, por el Teorema 2, esto implica la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

La segunda parte de la doble desigualdad anterior, establece de inmediato la convergencia absoluta de la serie.

EJEMPLO. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es uniformemente convergente en todo intervalo $-a \leqslant x \leqslant a$, ya que $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \frac{a^n}{n!}$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ es convergente para toda a (§ 3.7.)

Encontraremos muchos ejemplos más de series uniformemente convergentes en el § 6.3 siguiente.

6.3 Series de potencias

Una serie de la forma

$$(9) \qquad S(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \text{ (1)}$$

es una *serie de potencias.*

Por consiguiente vemos que una serie de potencias es una generalización natural de la noción de un polinomio de grado n. La importancia de las series de potencia viene también del hecho de que la representación de una función por medio de una serie de potencias es muy ventajosa desde el punto de vista de los cálculos prácticos.

(1) Estrictamente hablando, para $x = 0$ el símbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ (que en este caso es indefinido), tiene que substituirse por a_0 (ver nota al pie de la fórmula (6), § 1).

Considérense los siguientes ejemplos de series de potencias:

$$(a)\ 1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots, \quad (b)\ 1+x+x^2+x^3+\dots,$$

$$(c)\ 1+1!x+2!x^2+3!x^3+\dots$$

Como es bien sabido, la primera de estas series es convergente para toda x. La segunda, es convergente para $|x| < 1$ y su suma $= \frac{1}{1-x}$; para otras x la serie es divergente.

Finalmente, la tercera serie es divergente para toda $x \neq 0$.

Para formular un teorema general convergencia de series de potencias, se introducirá la noción del "radio de convergencia" de una serie de potencias. Es decir, el *radio de convergencia* de una serie de potencias $S(x)$ se define como la cota superior del conjunto de valores absolutos de x para los que esta serie es convergente. En particular, si el conjunto anterior es no acotado, entonces se supone que el radio de convergencia es igual a ∞.

Por ejemplo los radios de convergencia de las series (a), (b) y (c) son ∞, 1 y 0 respectivamente.

El intervalo $-r < x < r$, donde r denota el radio de convergencia de una serie de potencias dada, es su *intervalo de convergencia.* En el caso $r = \infty$, el intervalo de convergencia es igual al conjunto de todos los números reales. Esta terminología está relacionada con el siguiente teorema:

1. *En un intervalo cerrado que está dentro del intervalo de convergencia, la serie de potencias es uniforme y absolutamente convergente.*

Es suficiente demostrar nuestro teorema para intervalos de la forma $-c \leqslant x \leqslant c$, donde $c \leqslant r$ (porque todo intervalo cerrado que está dentro del intervalo de convergencia, está contenido en un tal intervalo con centro 0). Como r, siendo el radio de convergencia, es la cota superior del conjunto de valores absolutos de los puntos de convergencia de la serie $S(x)$ existe un punto $b > c$ tal que, ambos $S(b)$ y $S(-b)$ son convergentes. Se deduce de la convergencia de la serie $S(+b)$ que sus términos constituyen una sucesión acotada. Por consiguiente, sea $M > |a_nb^n|$ para toda n. De aquí concluimos que para $|x| \leqslant c$, tenemos

$$|a_nx^n| = |a_nb^n| \cdot \left|\frac{x}{b}\right|^n \leqslant M\left(\frac{c}{b}\right)^n.$$

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{b}\right)^n$, es una serie geométrica con razón < 1, es convergente, el Teorema 3 del § 6.2 implica la convergencia uniforme y absoluta de la serie $S(x)$ en el intervalo $c \leqslant x \leqslant o$.

Observación. Concluimos del teorema anterior que la serie es convergente dentro de su intervalo de convergencia y divergente fuera de él (lo anterior se deduce de la definición misma de radio de convergencia). Sin embargo, en los extremos del intervalo de convergencia la serie puede ser convergente o divergente. Los siguientes ejemplos lo evidencian: la serie (b) es divergente en los extremos del intervalo de convergencia, a saber, $S(1) = \infty$ y la serie $S(-1) = 1-1+1-1+\ldots$ no tiene límite finito ni infinito; la serie

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

(que representa el $\log(1+x)$) es convergente para $x = 1$ y diverge $a = \infty$ para $x = -1$.

El teorema anterior junto con el 1 del § 6.2 implican:

2. *Una serie de potencias $S(x)$ es una función continua en el intervalo abierto $-r < x < r$ esto es, dentro del intervalo de convergencia.*

En efecto, para toda x que está entre $-r$ y r se puede escoger un intervalo cerrado con centro en x, situado dentro del intervalo de convergencia. Como la serie de potencias es uniformemente convergente en este intervalo cerrado, se deduce del Teorema 1 del § 6.2, que representa una función continua.

Aplicando el teorema de Abel de la teoría de series infinitas (§ 3.3, Teorema 2) completaremos este teorema con respecto a la continuidad de la serie de potencias en los extremos del intervalo de convergencia.

3. Teorema de Abel. *Una serie de potencias que converge en uno de los extremos de su intervalo de convergencia constituye una función continua* (por un lado) *en este punto.*

Hablando más estrictamente, si la serie $S(r)$ (o $S(-r)$) es convergente, entonces la serie $S(x)$ es uniformemente convergente en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant r$ (o en el intervalo $-r \leqslant x \leqslant 0$).

Supongamos que la serie $S(r)$ es convergente y representemos por

R_n el n-ésimo residuo de esta serie, esto es

$$R_n = a_{n+1}r^{n+1}+a_{n+2}r^{n+2}+\ldots$$

Entonces tenemos $\lim_{n=\infty} R_n = 0$. Supongamos que se da una $\varepsilon > 0$. Entonces existe un número k tal que tenemos

$$|a_{n+1}r^{n+1}+\ldots+a_ir^i| < \varepsilon$$

para $i > n > k$

Representamos por $R_n(x)$ el n-ésimo residuo de la serie $S(x)$:

$$R_n(x) = a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots$$

Por tanto, en particular, $R_n(r) = R_n$. Observemos que

$$R_n(x) = a_{n+1}r^{n+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}+a_{n+2}r^{n+2}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+2}+\ldots$$

y apliquemos el teorema de Abel (§ 3.3, 2 y la Observación (α)), después de substituir la sucesión $\{a_n\}$ por la $\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}, \left(\frac{x}{r}\right)^{n+2}, \cdots$ y la serie $b_1+b_2+\ldots$ por la serie R_n.

Como esta serie está acotada por el número ε y como

$$1 > \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} > \left(\frac{x}{r}\right)^{n+2} > \cdots \quad \text{y} \quad \lim_{m=\infty}\left(\frac{x}{r}\right)^m = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x < r,$$

concluimos que $|R_n(x)| < 2\varepsilon$. Esta desigualdad se satisface también para $x = r$. Por consiguiente hemos demostrado que si $n > k$, entonces la desigualdad

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m - \sum_{m=0}^{n} a_m x^m\right| < 2\varepsilon$$

se satisface para toda x tal que $0 \leqslant x \leqslant r$. Esto significa que la serie $S(x)$ es uniformemente convergente en este intervalo. En el caso en que la serie $S(-r)$ sea convergente, los argumentos son análogos.

Los Teoremas 2 y 3 pueden expresarse también en la siguiente forma: *todo punto de convergencia de una serie de potencias es un punto de continuidad.*

Algunas veces los criterios D'Alembert y Cauchy nos permiten calcular el radio de convergencia fácilmente. Es decir:

4. *Si* $\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$, *entonces el radio de convergencia de la serie de potencias* $S(x)$ *es igual a* $r = 1/g$ (*además, si* $g = 0$, *entonces* $r = \infty$ *y si* $g = \infty$, *entonces* $r = 0$).

Análogamente, si existe $\lim_{n=\infty}|\sqrt[n]{|a_n|}$ *entonces* $r = \dfrac{1}{\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

En efecto, sea $x > 0$. Obtenemos

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = x\cdot\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = xg. \tag{10}$$

Por consiguiente, si $x < 1/g$, entonces el límite considerado es < 1 y la serie $S(x)$ es convergente (absolutamente), por lo que $r \geqslant 1/g$. Suponiendo que $r > 1/g$, la serie $S(x)$ es obsolutamente convergente para $1/g < x < r$. Pero esto es imposible, ya que el límite considerado en la fórmula (10) sería > 1.

Los argumentos anteriores conciernen también a los casos $g = 0$ o $g = \infty$.

La demostración en el caso del criterio de Cauchy es similar.

6.4. Aproximación de funciones continuas por funciones poligonales

Una función $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, es *poligonal*, si el intervalo ab puede dividirse en un número finito de intervalos menores, de tal manera, que la función sea lineal en cada uno de ellos. Esto significa que existe un sistema de $n+1$ puntos.

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_n, \quad \text{donde} \quad a_0 = a,\ a_n = b, \tag{11}$$

y dos sistemas de números reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tales que

$$f(x) = c_k x + d_k \quad \text{para} \quad a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Por ejemplo la función $f(x) = |x|$ es poligonal en el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, porque $f(x) = -x$ en el intervalo $-1, 0$, y $f(x) = x$ en el intervalo $0, 1$.

La gráfica de una función poligonal es una línea poligonal. Recíprocamente, si una línea poligonal es la gráfica de una función, entonces esta función es poligonal.

A veces tratamos con aproximaciones de curvas por líneas poligonales (por ejemplo, en la geometría elemental, al calcular la longitud del arco de una circunferencia, se calcula este arco aproximadamente por líneas poligonales inscritas y circunscritas).

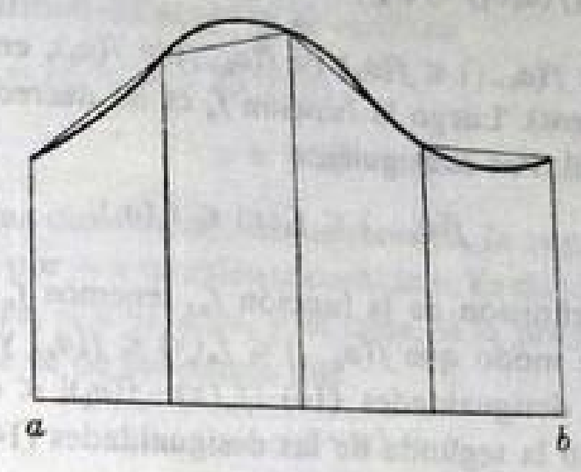


FIG. 10

El siguiente teorema expresa analíticamente la aproximación de curvas dadas por funciones continuas, por líneas poligonales (dadas por funciones poligonales):

TEOREMA: *Toda función continua* f *en un intervalo* $a \leqslant x \leqslant b$ *es el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones poligonales.*

Para toda n, consideraremos la partición del segmento ab en n segmentos iguales: $aa_1, a_1a_2, \ldots, a_n - 1^b$ (por consiguiente tenemos en general $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$). Trazamos una línea poligonal por los puntos $[a, f(a)]$, $[a_1, f(a_1)]$, $\ldots$, $[a_n, f(a_n)]$. Esta poligonal es la gráfica de cierta función poligonal f_n. Demostraremos que la sucesión de las funciones f_n converge uniformemente a la función f.

Según la continuidad uniforme de la función f en el intervalo ab, para cualquier $\varepsilon > 0$ dada puede escogerse un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|x - x'| < \delta$ implique $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Sea $m > \dfrac{b-a}{\delta}$.

Demostraremos que para $n > m$ tenemos la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \tag{13}$$

para toda x del intervalo ab.

En efecto, dada x sea $n > m$. Además supongamos que el punto x pertenece al intervalo $a_{k-1}a_k$ (de la n-ésima partición). Como la longitud de este intervalo es $< \delta$, entonces

$$|f(a_{k-1})-f(a_k)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x)-f(a_k)| < \varepsilon. \tag{14}$$

Supóngase que $f(a_{k-1}) \leqslant f(a_k)$ (si $f(a_{k-1}) \geqslant f(a_k)$, entonces los argumentos son análogos). Luego la función f_n es no decreciente en $a_{k-1}a_k$, puesto que es lineal. Por consiguiente

$$f(a_{k-1}) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a_k). \tag{15}$$

Luego, según la definición de la función f_n, tenemos $f_n(a_{k-1}) = f(a_{k-1})$ y $f_n(a_k) = f(a_k)$, de modo que $f(a_{k-1}) \leqslant f_n(x) \leqslant f(a_k)$ y esto da, según la primera de las desigualdades (14) $|f_n(x)-f(a_k)| < \varepsilon$. Comparando esta desigualdad con la segunda de las desigualdades (14) obtenemos la fórmula (13).

Citaremos ahora sin demostrar, el siguiente teorema de Weierstrass, análogo al anterior:

Toda función continua en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ es el límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios.

6.5*. El simbolismo de la lógica matemática

Para comprender mejor las nociones y los teoremas de análisis matemático, se necesita un conocimiento de la notación de definiciones y teoremas por medio de símbolos usados en la lógica matemática.

Daremos aquí las principales nociones y símbolos empleados en análisis matemático.

Dadas dos proposiciones α y β, denotamos $\alpha \vee \beta$ la proposición "α ó β" (la suma, esto es, la alternativa de las proposiciones α y β), $\alpha \wedge \beta$ denotará la proposición "α y β" (el producto, esto es, la conjunción de las proposiciones α y β).

Toda proposición tiene uno de los dos valores siguientes: verdadero (indicado por el número 1) y falso (indicado por el 0). Una suma lógica $\alpha \vee \beta$ es una proposición verdadera, si y sólo si al menos uno de sus términos es una proposición verdadera. Similarmente, un producto lógico $\alpha \wedge \beta$ es una proposición verdadera, si y sólo si ambos factores son proposiciones verdaderas.

Es fácil demostrar que la adición y multiplicación lógicas, tienen

las propiedades de conmutatividad y asociatividad.

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \quad \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma,$$
$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

Las leyes distributivas también se verifican

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$
$$\text{y } \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$$

Además de las dos operaciones anteriores, la negación de la afirmación α, indicada por $\sim \alpha$ también se considera. Es claro que la proposición $\sim \alpha$ es verdadera, si α es falsa, y es falsa, si la proposición α es verdadera. Además se ve de inmediato que

$$\sim(\sim \alpha) = \alpha \tag{16}$$

(dos negaciones se cancelan).

Los dos siguientes teoremas (llamados *Leyes de de Morgan*) pueden también demostrarse fácilmente:

$$\sim(\alpha \vee \beta) = (\sim \alpha) \wedge (\sim \beta) \tag{17}$$
$$\text{y } \sim(\alpha \wedge \beta) = (\sim \alpha) \vee (\sim \beta).$$

El primero de estos dos teoremas establece que la proposición: una de las dos proposiciones α y β es verdadera, es una proposición falsa si y sólo si ambas $\sim \alpha$ y $\sim \beta$ son verdaderas, esto es, si y sólo si ambas proposiciones α y β son falsas.

El segundo teorema establece que "no es verdadero que ambas proposiciones α y β sean verdaderas simultáneamente", si y sólo si al menos una de éstas es falsa.

Además de las operaciones de adición, multiplicación y negación, la relación de implicación se considera en la lógica proposicional. Es decir, escribimos $\alpha \to \beta$ para denotar que la proposición α implica la β, esto es, que si α es verdadera, entonces β también lo es; en otras palabras o α es falsa o β verdadera. Esto significa que la proposición $\alpha \to \beta$ es equivalente a la suma lógica $(\sim \alpha) \vee \beta$. Por tanto se deduce también de las fórmulas (17) y (16) que

$$\sim(\alpha \to \beta) = \alpha \wedge (\sim \beta). \tag{18}$$

Las operaciones de adición y multiplicación pueden extenderse a un número finito de términos o factores por inducción. La generalización

de estas operaciones a un número arbitrario (finito o infinito) de términos o factores, juega un papel importante en sus aplicaciones. La llevaremos a cabo de la siguiente manera.

Sea $\varphi(x)$ una expresión que contiene una variable x y que se convierte en una proposición (verdadera o falsa) después de substituir por x un valor de x. Dicha expresión se llama *función proposicional* por ejemplo, la expresión $x < 2$ es una función proposicional, se convierte en una proposición, cuando substituimos cualquier número real por x; sin embargo, ella misma no es una proposición. Decimos que los valores de la variable x para los cuales $\varphi(x)$ es una proposición verdadera, satisfacen esta función proposicional.

Llevamos a cabo las siguientes dos operaciones sobre funciones proposicionales:

$$\bigvee_x \varphi(x) \quad \text{y} \quad \bigwedge_x \varphi(x). \tag{19}$$

La primera expresión se lee como sigue: "cierta x satisface la función φ" (esto es, "existe una x_0 tal que $\varphi(x_0)$ es verdadera"). La segunda significa que "toda x satisface la función $\varphi(x)$" (esto es, para toda x la afirmación $\varphi(x)$ es verdadera").

Como se ve fácilmente las expresiones (19) son proposiciones; por ejemplo $\bigvee_x (x > 2)$ es una proposición verdadera y $\bigwedge_x (x > 2)$ es una falsa. Generalmente, al agregar los operadores $\bigwedge_x$ o $\bigvee_x$ (estos operadores se llaman cuantificadores universal y existencial, respectivamente) a una función proposicional, transformamos la función proposicional en una proposición.

Al escribir la variable x tenemos que darnos cuenta del dominio de esta variable (este dominio es frecuentemente sugerido por el simbolismo), por ejemplo, para la función proposicional $x > 2$, el dominio de la variable x es el conjunto de los números reales.

En el caso en que el dominio de la variable sea finito, los cuantificadores $\vee$ y $\wedge$ son generalizaciones de las operaciones $\vee$ y $\wedge$, respectivamente. En efecto, si el dominio de la variable x consiste de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$\bigvee_x \varphi(x) = [\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \cdots \vee \varphi(a_n)],$$

$$\bigwedge_x \varphi(x) = [\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \cdots \wedge \varphi(a_n)].$$

Las Leyes de de Morgan pueden generalizarse a los cuantificadores. De esta manera tenemos los teoremas:

$$\sim \bigvee_x \varphi(x) = \bigwedge_x \sim \varphi(x) \quad \text{y} \quad \sim \bigwedge_x \varphi(x) = \bigvee_x \sim \varphi(x). \tag{20}$$

En efecto, "no es cierto que existe un valor de x para el cual $\varphi(x)$" es una proposición verdadera, si y sólo si la proposición $\varphi(x)$ es falsa para toda x, esto es, si la proposición $\sim \varphi(x)$ es verdadera.

Análogamente puede demostrarse que la segunda fórmula de Morgan es verdadera.

Además de las funciones proposicionales de una variable, se consideran las funciones proposicionales de dos variables; por ejemplo $y = x^2$ es una función proposicional de dos variables (podemos denotar esta función por $\varphi(x, y)$); y se convierte en una proposición, después de substituir por las variables x y y, algunos de sus valores. Similarmente, $z = x + y$ es una función proposicional de tres variables.

Escribiremos ahora la definición del límite de una sucesión infinita (ver § 2.2) por medio de estos símbolos lógicos:

$$(g = \lim_{n=\infty} a_n) \equiv \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_n [(n > k) \to (|a_n - g| < \varepsilon)]; \tag{21}$$

aquí el dominio de las variables n y k es el conjunto de enteros positivos y el dominio de la variable ε es el conjunto de números positivos.

Similarmente, la condición de Cauchy, necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión $\{a_n\}$ (ver § 2.7) es expresada como sigue:

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_r \bigwedge_n [(n > r) \to (|a_n - a_r| < \varepsilon)]. \tag{22}$$

La definición de acotación de una función f en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ (ver § 4.7) se escribe como sigue:

$$\bigvee_M \bigwedge_x |f(x)| < M. \tag{23}$$

La definición (de Cauchy) de la continuidad de una función f en un punto x_0 (ver § 5.2 (3)) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_h [(|h| < \delta) \to (|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon)]. \tag{24}$$

Aquí el dominio de ε y δ es evidentemente el conjunto de números positivos y el dominio de la variable h, el conjunto de todos los números reales.

Como, según la definición, una función es continua en un conjunto dado (ejemplo para $a < x < b$) cuando es continua en todo punto de este conjunto, para escribir la definición de continuidad en un conjunto por medio de simbolos lógicos, se tiene que preceder la expresión de la fórmula (24) por el cuantificador $\bigwedge_x$ reemplazando, por supuesto x_0 por x. De esta manera obtenemos:

$$\bigwedge_x \bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_h [(|h| < \delta) \to (|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon)]. \tag{25}$$

Antes de continuar con más aplicaciones de los simbolos lógicos, observamos algunas propiedades simples de los cuantificadores.

Supongamos que se da una función proposicional $\varphi(x, y)$ de dos variables. Puede verificarse fácilmente que las fórmulas

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \varphi(x, y) = \bigwedge_y \bigwedge_x \varphi(x, y) \tag{26}$$

$$\text{y} \quad \bigvee_x \bigvee_y \varphi(x, y) = \bigvee_y \bigvee_x \varphi(x, y)$$

son válidas.

Por consiguiente, como vemos, el orden de dos cuantificadores universales puede cambiarse, así como el orden de dos cuantificadores existenciales. Sin embargo, esto no es verdadero en el caso de dos cuantificadores diferentes $\vee$ y $\wedge$; por ejemplo, al cambiar el orden de los cuantificadores en la fórmula (23) que expresa la condición de acotación de la función f obtenemos

$$\bigwedge_x \bigvee_M (|f(x)| < M); \tag{27}$$

pero la última condición se satisface para toda función (y por tanto para funciones no acotadas, también), lo que se ve substituyendo $M = |f(x)| + 1$.

De modo que el orden de los cuantificadores $\vee$ y $\wedge$ es esencial; por ejemplo, es esencial en la condición (23) (para la acotación de la función f) que el número M no depende de la variable x; en la condición (27) sucede lo opuesto: escogemos el número M para cada x, independientemente. Como se ha visto, la dependencia de cierta cantidad sobre otra, se expresa por el orden de los cuantificadores; por consiguiente, se deduce directamente de la notación. Similarmente, en la definición (24) (expresando la continuidad de una función f en un punto x_0) el orden de los cuantificadores $\bigwedge_\varepsilon$ y $\bigvee_\delta$ significa que δ depende de ε (y no vale la recíproca).

Ilustraremos esta situación con dos ejemplos especialmente instructivos, a saber, el de continuidad uniforme y el de convergencia uniforme.

Primero nótese que cambiando el orden de los cuantificadores $\bigwedge_x \bigwedge_\varepsilon$ en la fórmula (25) (que expresa la continuidad de una función) obtenemos una proposición equivalente (ya que el cambio concierne a los mismos cuantificadores, ver la fórmula (26)):

$$\bigwedge_\varepsilon \bigwedge_x \bigvee_\delta \bigwedge_h [(|h| < \delta) \to (|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon)]. \tag{28}$$

Sin embargo, el cambiar el orden de los cuantificadores $\bigwedge_x \bigvee_\delta$ en la fórmula (28), obtenemos una fórmula no-equivalente, o sea,

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_x \bigwedge_h [(|h| < \delta) \to |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon)], \tag{29}$$

esto es, la condición de la continuidad uniforme de la función f en el conjunto considerado (ver § 5.4); pero no toda función continua en el intervalo $a < x < b$ es uniformemente continua (por ejemplo, la función $1/x$ es continua en el intervalo $0 < x < 1$, pero no es uniformemente continua en este intervalo, ver la Observación al Teorema 1 del § 5.4). Aunque para intervalos cerrados $a \leqslant x \leqslant b$, la continuidad usual implica la continuidad uniforme, esto requiere una demostración especial (para pasar de la formulación del Teorema 1, del § 5.4 a la fórmula (29), x' tiene que substituirse por $x+h$).

Comparando las fórmulas (28) y (29), concluimos que difieren únicamente por el orden de los cuantificadores $\bigwedge_x$ y $\bigvee_\delta$. Sin embargo, esta diferencia es muy esencial: el orden $\bigvee_\delta \bigwedge_x$ (en la fórmula (29)) expresa la independencia del número δ de la variable x y la "uniformidad" de la continuidad de la función f consiste justamente en este hecho.

Ahora, procederemos a la noción de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones (ver § 6.1). Se da una sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ definida en cierto conjunto (por ejemplo $a < x < b$).

Supongamos que esta sucesión converge a una función f. Esto significa, por la formula (21), (después de substituir $g = f(x)$, $a_n = f_n(x)$) que

$$\bigwedge_x \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_n [(n > k) \to (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)]. \tag{30}$$

Como es sabido, el orden de los cuantificadores $\bigwedge_x \bigwedge_\varepsilon$ puede ser

cambiado en esta fórmula. Sin embargo, si cambiamos también el orden de los cuantificadores $\bigwedge_x$ y $\bigvee_k$, entonces obtenemos la fórmula para la convergencia uniforme

$$(31) \qquad \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_x \bigwedge_n [(n > k) \to (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)].$$

Ya que, el orden de los cuantificadores de la fórmula (3) indica que el número k no depende de x (sino sólo de ε) y esto significa que la convergencia de la sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$ es uniforme.

Para concluir estas observaciones, añadiremos que a veces es conveniente aplicar el simbolismo lógico y especialmente las fórmulas de de Morgan para demostraciones llevadas a cabo por *reducción al absurdo*.

Para este propósito, notemos que las fórmulas de de Morgan (20) pueden aplicarse a funciones proposicionales de muchas variables; y dan las siguientes fórmulas

$$(32) \qquad \sim \bigvee_x \bigwedge_y \varphi(x, y) = \bigwedge_x \bigvee_y \sim \varphi(x, y),$$

$$\sim \bigwedge_x \bigvee_y \bigwedge_z \varphi(x, y, z) = \bigvee_x \bigwedge_y \bigvee_z \sim \varphi(x, y, z) \quad \text{etc.}$$

Por ejemplo, en la demostración del teorema de la continuidad uniforme de funciones continuas en un intervalo cerrado (ver § 5.4, 1), usamos la condición de continuidad uniforme dada en la siguiente formulación (la cual no difiere esencialmente de la fórmula (29)):

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_x \bigwedge_{x'} [(|x - x'| < \delta) \to (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)].$$

Escribimos la negación de esta condición, que da, según las fórmulas (32) y (18),

$$\bigvee_\varepsilon \bigwedge_\delta \bigvee_x \bigvee_{x'} [(|x - x'| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon)].$$

El resto de la demostración no cambia.

Ejercicios del § 6

1. Demuéstrese que la suma de dos sucesiones uniformemente convergentes, de funciones continuas, es uniformemente convergente. Demuéstrese lo mismo para un producto, suponiendo que $a \leqslant x \leqslant b$. Demuéstrese; considerando el ejemplo $f_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $g_n(x) = \frac{1}{x^2}$ que el teorema del producto es falso para intervalos abiertos.

2. Demuéstrese que el radio de convergencia r de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisface la fórmula (Cauchy-Hadamard):

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Se da una sucesión de funciones continuas $f_1, f_2, \ldots$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Demuéstrese que esta sucesión converge uniformemente a una función f, si y sólo si la condición $\lim_{n=\infty} x_n = x$ implica

$$\lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

4. Investíguese la convergencia uniforme de la sucesión de funciones

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{y} \quad f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad 0 < x \leqslant 1.$$

5. Demuéstrese que la serie

$$S(x) = x(1-x) - x(1-x) + \ldots + x^n(1-x) - x^n(1-x) + \ldots$$

es uniforme y absolutamente convergente en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Rearréglense los términos de esta serie de tal manera que se obtenga una serie no uniformemente convergente en este intervalo.

CAPÍTULO 3

CALCULO DIFERENCIAL

§ 7. DERIVADAS DE PRIMER ORDEN

7.1. Definiciones [1]

Se da una función f en un intervalo abierto que contiene el punto a. El límite

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se llama *derivada de la función f en el punto a.*

La función

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

cuyo límite se considera cuando h tiende a 0, es el *cociente diferencial de la función f en el punto a para el incremento h.*

La derivada se escribe simbólicamente como sigue:

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

o más brevemente, $f'(a)$. Más brevemente aún, escribiendo $y = f(x)$, denotamos la derivada de una función f en un punto arbitrario x por $\frac{dy}{dx}$ (la derivada "dy" sobre dx). Con este simbolismo (debido a Leibniz), la derivada se representa como cociente de dos diferenciales dy y dx

[1] El cálculo diferencial e integral fue creado por Newton y Leibniz a fines del siglo XVII.

(ver § 7.13). Sin embargo, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ será tratado como un todo, no atribuyendo ningún significado matemático a las diferenciales separadas.

Geométricamente, la derivada se interpreta como sigue. Se da una curva $y = f(x)$. Tracemos una recta que pase por los puntos $[a, f(a)]$ y $[a+h, f(a+h)]$, siendo h un valor fijo positivo. Esta recta se llama *secante* de la curva dada. Es fácil ver que el coeficiente diferencial $g(h)$ es la tangente del ángulo α_h entre la secante dirigida por la abscisa creciente y la dirección positiva del eje X. La posición límite a la que tiende la secante, a medida que h tiende a 0 será considerada como la posición de la tangente. Por consiguiente,

$$f'(a) = \tan \alpha, \tag{2}$$

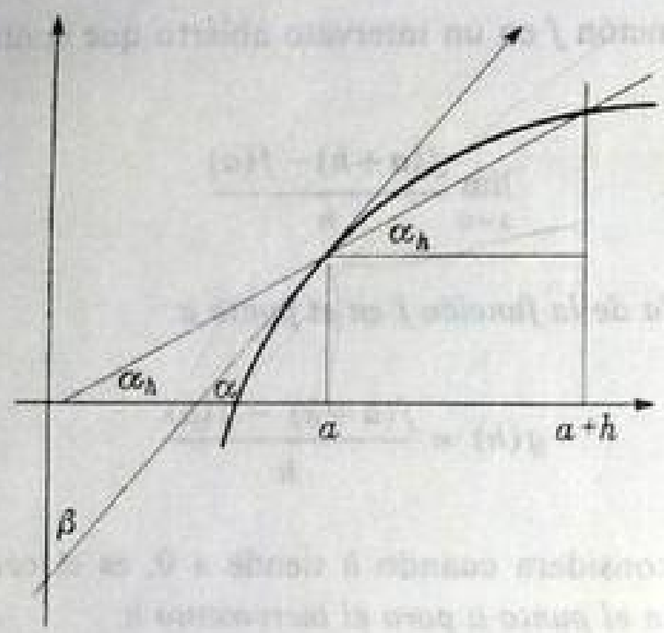


FIG. 11

donde α es el ángulo entre la dirección positiva de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a y la dirección positiva del eje X.

No todas las funciones continuas tienen derivada, esto es, no todas las curvas tienen una tangente en un punto. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ no tiene derivada en el punto 0, puesto que en este caso

$$\lim_{h=+0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h=-0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1,$$

En este caso podemos hablar de derivadas *por un lado*, iguales a 1 y -1, respectivamente. En general una derivada por la derecha, o por la izquierda, es límite por la derecha o por la izquierda:

$$f'+(a) = \lim_{h=+0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{3}$$

$$f'-(a) = \lim_{h=-0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

respectivamente.

Sin embargo, existen funciones continuas, que no tienen ni derivadas laterales. Es fácil ver que la función f definida por las condiciones

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \text{ para } x \neq 0, \; f(0) = 0 \tag{4}$$

es continua, pero no tiene derivada en el punto 0.

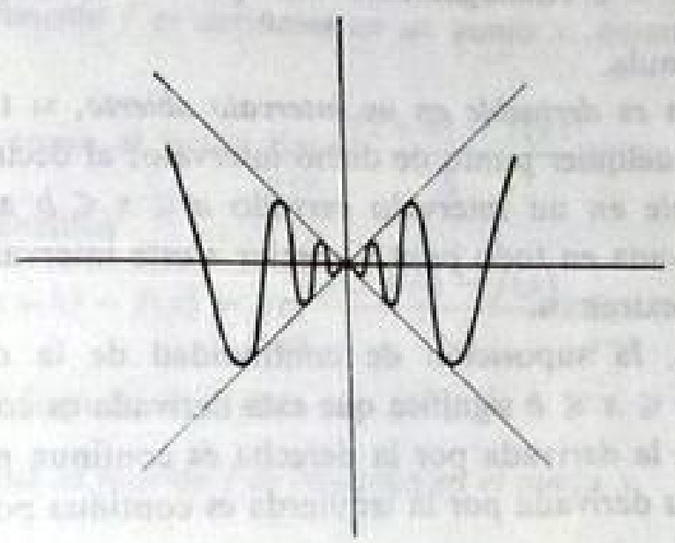


FIG. 12

Puesto que, substituyendo por h, las dos sucesiones de valores

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots \quad \text{y} \quad \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots,$$

obtenemos en el límite: 1 en el primer caso y -1 en el segundo.

La no existencia de la derivada $f'(0)$ se deduce también de la no existencia del límite $\lim_{x=0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, ya que se tendría

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h=0} \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

(ver § 4 (8)).

No obstante, existen más funciones continuas singulares, o sea funciones que no tienen derivada en ningún punto, por consiguiente, representan curvas continuas que no tienen tangente en ningún punto.

Además de las derivadas finitas, consideraremos también derivadas infinitas. Por ejemplo, demostraremos que:

$$\left(\frac{d\sqrt[3]{x}}{dx}\right)_{x=0} = \infty, \quad \left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right)_{x=+0} = \infty.$$

En efecto,

$$\left(\frac{d\sqrt[3]{x}}{dx}\right)_{x=0} = \lim_{h=0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty,$$

porque $\lim\limits_{h=0} h^{2/3} = 0$. Análogamente $\lim\limits_{h=+0} \sqrt{h} = +0$, de donde se deduce la segunda fórmula.

Una función es *derivable en un intervalo abierto*, si tiene una derivada finita en cualquier punto de dicho intervalo; al decir que una función es derivable en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ admitimos que tienen una derivada en todo punto interior a este intervalo, y derivadas laterales en sus extremos.

Similarmente, la suposición de continuidad de la derivada $f'(x)$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ significa que esta derivada es continua dentro del intervalo ab, la derivada por la derecha es continua por la derecha en el punto a y la derivada por la izquierda es continua por la izquierda en b.

Por una *normal* a una curva $y = f(x)$ en un punto $[x, f(x)]$ entendemos una recta perpendicular a la tangente en este punto y que pasa por él.

Según la interpretación geométrica de la derivada dada antes, la tangente a una curva en un punto (x, y), donde $y = f(x)$, se expresa por la ecuación

$$\frac{Y-y}{X-x} = f'(x) \quad \text{ó} \quad X = x \quad \text{si} \quad f'(x) = \infty; \tag{5}$$

X y Y denotan las coordenadas en la tangente.

Por consiguiente, la ecuación de la normal a una curva en un punto (x, y) es:

$$\frac{X-x}{Y-y} = f'(x) \quad \text{ó} \quad Y = y, \quad \text{si} \quad f'(x) = \infty. \tag{6}$$

Además de la interpretación geométrica, la derivada tiene importantes interpretaciones en la física. En particular, la velocidad de un punto que se mueve a lo largo de una recta se expresa como la derivada de la distancia con respecto al tiempo : $v = \frac{ds}{dt}$, donde la distancia s recorrida se expresa en función del tiempo: $s = f(t)$. Por consiguiente, la velocidad en un instante t, es el límite de la velocidad media en el tiempo de t a $t+h$, si h tiende a 0; ya que el cociente diferencial es justamente esta velocidad media.

7.2. Derivación de funciones elementales

Observemos primero que

1. *Si una función f es derivable en un punto x, entonces es continua en este punto.*

En efecto, como el límite $\lim\limits_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe por suposición (y es finito), tenemos

$$\lim_{h=0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h=0} h = 0,$$

de donde $\lim\limits_{h=0} f(x+h) = f(x)$,

que significa que la función f es continua en el punto x.

2. *Supongamos que una función f tiene un valor constante: $f(x) = c$. Entonces* $\frac{dc}{dx} = 0$.

Ya que tenemos $f(x+h) = c = f(x)$, de donde

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

3. $\frac{dx}{dx} = 1$.

porque $\lim\limits_{h=0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim\limits_{h=0} \frac{h}{h} = 1$.

La siguientes fórmulas, conciernen la derivación de una suma, una diferencia, un producto y un cociente de dos funciones $y = f(x)$ y $z = g(x)$.

derivables en un punto x:

4. $\dfrac{d(y \pm z)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} \pm \dfrac{dz}{dx}$. 5. $\dfrac{d(yz)}{dx} = y\dfrac{dz}{dx} + z\dfrac{dy}{dx}$.

6. $\dfrac{d(Y/z)}{dx} = \dfrac{z\dfrac{dy}{dx} - y\dfrac{dz}{dx}}{z^2}$

de donde

6'. $\dfrac{d(1/z)}{dx} = -\dfrac{1}{z^2} \cdot \dfrac{dz}{dx}$ (si $z \neq 0$).

La demostración de la fórmula 4 se deduce de las ecuaciones

$$\frac{d(y+z)}{dx} = \lim_{h=0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h=0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

La demostración para la diferencia es análoga.

En la demostración de la fórmula 5, aplicaremos la continuidad de la función f en el punto x (ver 1); por consiguiente, tenemos $\lim_{h=0} f(x+h) = f(x)$. Ahora

$$\frac{d(yz)}{dx} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x)] + [f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h=0} f(x+h) \cdot \lim_{h=0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx}.$$

Para demostrar 6, demostraremos primero 6'

$$\frac{d(1/z)}{dx} = \lim_{h=0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= -\frac{1}{\lim_{h=0} g(x+h)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{h=0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx}$$

ya que $\lim_{h=0} g(x+h) = g(x) = z$ (además, como $g(x) \neq 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $g(x+h) = 0$ para $|h| < \delta$).

Las fórmulas 5 y 6' implican 6:

$$\frac{d(y/z)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y \cdot \frac{1}{z}\right) = y \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)$$

(en la primera de las ecuaciones anteriores aplicamos la notación $\dfrac{d}{dx}F(x)$ en lugar de $\dfrac{dF(x)}{dx}$).

Substituyendo $g(x) = c$ en las fórmulas 4 y 5, obtenemos inmediatamente:

4'. $\dfrac{d(y+c)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$.

5'. $\dfrac{d(cy)}{dx} = c\dfrac{dy}{dx}$.

La primera de estas fórmulas significa que una translación de una curva, paralela al eje Y, no influye en el valor del ángulo formado por la tangente y el eje X; la segunda significa que un cambio de la escala en el eje Y influye en la tangente del ángulo considerado en la misma proporción.

Aplicando la fórmula 5 y el principio de inducción se demuestra fácilmente que para exponentes enteros $n \geqslant 2$ se verifica la fórmula

7. $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$

Se ve inmediatamente que esta fórmula se verifica también para $n = 0$ y para $n = 1$, considerando que si $x = 0$, entonces en el caso

$n = 0$ el segundo miembro de la fórmula tiene que substituirse por 0 y en el caso $n = 1$, por 1 (como lo muestran directamente las fórmulas 2 y 3).

Esta fórmula sigue siendo verdadera para enteros negativos n (cuando $x \neq 0$). Es decir, en este caso tenemos, por 6' y 7:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{1}{dx}\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\frac{1}{x^{-2n}} \cdot \frac{d(x^{-n})}{dx} = \frac{n}{x^{-2n}} x^{-n-1} = nx^{n-1}.$$

Después generalizaremos la fórmula 7 a exponentes reales arbitrarios (para $x > 0$).

De las fórmulas ya demostradas deducimos fácilmente la fórmula para la derivada de un polinomio:

8. $\dfrac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1}$.

Calcularemos ahora las derivadas de las funciones trigonométricas

9. $\dfrac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x$.

10. $\dfrac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x$.

11. $\dfrac{d \tan x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Basaremos la demostración de la fórmula 9 en la de la diferencia de senos conocida de la trigonometría y en la fórmula $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ demostrada en el § 4.5 (5). Ahora

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \lim_{h=0} \frac{1}{h}[\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x] = \lim_{h=0} \frac{2}{h} \cdot \operatorname{sen}\frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{(h/2)} \cdot \lim_{h=0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

por la continuidad de la función $\cos x$.

Similarmente,

$$\frac{d \cos x}{dx} = \lim_{h=0} \frac{1}{h}[\cos(x+h) - \cos x] = \lim_{h=0} \frac{-2}{h} \cdot \operatorname{sen}\frac{h}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$= -\lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{(h/2)} \cdot \lim_{h=0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\operatorname{sen} x.$$

Según la 6, las fórmulas 9 y 10 implican la 11, puesto que tenemos

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos x \cdot \frac{d \operatorname{sen} x}{dx} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{d \cos x}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

12. $\dfrac{d \log x}{dx} = \dfrac{1}{x}$. Más generalmente, $\dfrac{d \log_a x}{dx} = \dfrac{1}{x \log a}$.

En efecto, según las propiedades generales de los logaritmos (§ 5.4, (10) y (11)) tenemos

$$\frac{1}{h}[\log(x+h) - \log x] = \frac{1}{h}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\log\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right].$$

Substituyamos $y = \dfrac{h}{x}$. Como $\lim\limits_{h=0} y = 0$ tenemos (ver § 4, (16)):

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}[\log(x+h) - \log x] = \frac{1}{x}\lim_{h=0} \log\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{y=0} \log(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Además, como $\lim\limits_{y=0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ (ver § 4, (19)) y como $\log z$ es una función continua en el punto $z = e$, tenemos (ver § 5, (6)):

$$\lim_{y=0} \log(1+y)^{\frac{1}{y}} = \log \lim_{y=0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \log e = 1.$$

Por consiguiente

$$\frac{d \log x}{dx} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} [\log(x+h) - \log x] = \frac{1}{x}.$$

La segunda parte de la fórmula 12 se deduce según la fórmula 5', de la primera

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{\log a}\right) = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$$

Otras fórmulas de derivación de funciones elementales se deducirán de la fórmula general de derivada de una función inversa.

7.3. Derivación de funciones inversas

Se da una función derivable y biunívoca $y = f(x)$ en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Como es bien sabido (§ 5.5, 1 y 2) existe una función $x = g(y)$ inversa a la dada y continua en el intervalo $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ó $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$, respectivamente (dependiendo de que la función f sea creciente o decreciente), demostraremos que la función g es derivable en este intervalo.

A saber,

$$1.\ \frac{dx}{dy} = 1\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \text{si} \quad \frac{dy}{dx} \neq 0.$$

Dada x, escribamos $k = f(x+h) - f(x)$. Entonces $f(x+h) = y+k$, esto es, $x+h = g(y+k)$, de donde, $h = g(y+k) - g(y)$. Con k variable, el incremento h es función de k. Por la continuidad de la función g tenemos $\lim_{k=0} h = 0$ Además, $h \neq 0$ para $k \neq 0$, puesto que g es biunívoca. Aplicando la fórmula (16) del § 4 obtenemos:

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{k=0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{k=0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)}$$

$$= \lim_{k=0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Observaciones. (α) Como en los extremos del intervalo de y, esto es, en los puntos $f(a)$ y $f(b)$, las derivadas laterales existen, entonces nuestra fórmula llega a ser de la siguiente forma:

$$1'.\ \frac{dx}{dy_\pm} = 1\left(\frac{dy}{dx_\pm}\right)^{-1},$$

donde los signos son los mismos para funciones crecientes y contrarios para funciones decrecientes.

Ya que si la función f es creciente, entonces la g es también creciente y los incrementos h y k tienen el mismo signo, y consecuentemente, $\lim_{k=+0} h = +0$ y $\lim_{k=-0} h = -0$. Sin embargo, si la función f es decreciente, entonces $\lim_{k=+0} h = -0$, y $\lim_{k=-0} h = +0$.

(β) Geométricamente, el Teorema 1 puede ilustrarse como sigue: Denotemos por α el ángulo entre la tangente a la curva y el eje X y por β el ángulo entre esta tangente y el eje Y (ver Fig. 11). Entonces $\tan \beta = \cot \alpha$, esto es, $\tan \beta = 1/\tan \alpha$ según la fórmula 1.

(γ) La fórmula 1 presenta la conveniencia del simbolismo de Leibniz: al pasar a la función inversa, la derivada $\frac{dy}{dx}$ se comporta como una fracción.

Ahora, daremos algunas aplicaciones de la fórmula 1 en la derivación de funciones elementales.

$$2.\ \frac{de^x}{x} = e^x. \text{ Más generalmente: } 2'.\ \frac{da^x}{dx} = a^x \log a.$$

Escribamos $y = e^x$, esto es, $x = \log y$. Como por 12, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y$. Substituyendo $y = e^x$ obtenemos la fórmula 2.

La demostración de la fórmula 2 es completamente análoga.

$$3.\ \frac{d \operatorname{arc\,sen} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$4.\ \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. $\dfrac{d \operatorname{arc\,tan} x}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Para demostrar 3, escríbase $y = \operatorname{arc\,sen} x$, esto es, $x = \operatorname{sen} y$. Entonces tenemos

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

(donde la raíz tiene el signo + porque $-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$ según la definición de la función arc sen x, ver § 4.4).

De aquí $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Similarmente, escribiendo $y = \operatorname{arc\,cos} x$, esto es, $x = \cos y$, tenemos

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{sen} y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2},$$

de donde $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Finalmente, si $y = \operatorname{arc\,tan} x$, entonces $x = \tan y$ y también

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2,$$

de donde $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Antes de continuar con las fórmulas concernientes a las superposiciones de las funciones elementales consideradas antes, demostraremos algunos teoremas generales de las derivadas.

7.4. Extremos de funciones. Teorema de Rolle

Defínase una función f en una vecindad de un punto a (esto es, en cierto intervalo que contiene este punto). Si existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|h| < \delta$ implique la desigualdad

(7) $$f(a+h) \leqslant f(a),$$

entonces decimos que la *función f tiene un máximo en el punto a.*

Por otro lado si la desigualdad $|h| < \delta$ implica

(8) $$f(a+h) \geqslant f(a),$$

entonces decimos que *la función f tiene un mínimo en el punto a.*

En otras palabras, un punto a es un máximo (o un mínimo) de la función f, si existe un intervalo que rodea al punto a, tal que $f(a)$ es el mayor (o el menor) entre todos los valores de la función f en este intervalo.

Substituyendo los signos $\leqslant$ y $\geqslant$ en las fórmulas (7) y (8) por los signos $<$ y $>$, obtenemos el *máximo* y el mínimo propios respectivamente.

Los máximos y mínimos tienen el nombre común de *extremos.*

EJEMPLOS. La función x^2 tiene un mínimo en el punto 0; la función sen x tiene sus valores máximo y mínimo en los puntos que son múltiplos impares de $\frac{1}{2}\pi$, alternadamente,

Con referencia a la relación entre la noción del extremo de una función y las cotas superior e inferior de esta función, observamos antes que nada que la noción del *extremo* es una noción local y la de cota de una función es una noción global: hablamos del extremo de una función en un punto dado y acerca de la cota de una función en un intervalo dado. Para establecer si una función tiene un extremo en el punto a es suficiente conocer los valores de esta función en una vecindad arbitraria del punto a. Por otra parte, para hallar la cota superior de una función en un intervalo necesitamos conocer el comportamiento de esta función en todo el intervalo.

Se deduce inmediatamente de la definición que

1. *Si una función $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, adquiere su cota superior en un punto c situado dentro del intervalo ab (esto es, $a < c < b$) entonces la función tiene también un máximo en este punto.*

Un teorema análogo concierne a la cota inferior y el mínimo.

Sin embargo, si la cota superior de la función se tiene en uno de los extremos del intervalo ab, entonces no es un máximo de esta función, ya que la función no está definida en ninguna vecindad de los extremos de este intervalo. Por ejemplo, la función $y = x$ considerada en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$, tiene su cota superior en el punto 1; no obstante, ésta no es un máximo.

2. *Si una función f es derivable en un punto c y tiene un extremo en este punto, entonces $f'(c) = 0$.*

Supongamos que la función tiene un máximo en el punto c (en el caso del mínimo, los argumentos son análogos). Elíjase un número $\delta > 0$ de tal manera que la desigualdad $f(c+h)-f(c) \leqslant 0$ se verifique para $|h| < \delta$. Por consiguiente

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0 \text{ para } h > 0$$

$$\text{y} \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0 \text{ para } h < 0.$$

Como la derivada $f'(c)$ existe por suposición, tenemos

$$f'+(c) = f'(c) = f'-(c).$$

Al mismo tiempo se sigue de las desigualdades anteriores que

$f'+(c) \leqslant 0 \leqslant f'-(c)$. De aquí

$$f'+(c) = 0 = f'-(c), \text{ esto es, } f'(c) = 0.$$

Observación. El teorema recíproco no es válido: la igualdad $f'(c) = 0$ puede satisfacerse aunque la función no tenga un extremo en el punto c. Esto sucede, por ejemplo, en el caso de la función x^3 en el punto 0.

Geométricamente, la existencia de un extremo de la función f en el punto c significa (en el caso en que la función sea derivable) que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $[c, f(c)]$ es paralela ale eje X (o es idéntica con el eje X).

3. Teorema de Rolle. *Sea la función f continua en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ y derivable dentro de este intervalo. Si $f(a) = f(b)$; entonces existe una c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = 0$.*

En efecto, si la función f es constante, entonces tenemos $f'(x) = 0$ para toda x situada entre a y b; por tanto, en este caso podemos tomar cualquier valor de x como c.

Por consiguiente, supongamos que la función f no es constante siempre, por ejemplo, que f tiene valores $> f(a)$. Denotando por M la cota superior de esta función tenemos entonces que $M > f(a)$. Según el Teorema de Weierstrass (§ 5.4, 2), existe una c en el intervalo ab tal que $f(c) = M$. Además, $a \neq c \neq b$, puesto que $f(a) = f(b)$ por hipótesis. Por consiguiente $a < c < b$. Esto significa que la función f adquiere su cota superior en el punto c situado dentro del intervalo ab; según el Teorema 1, la función f tiene un máximo en este punto, y por el Teorema 2, tenemos que $f'(c) = 0$.

El Teorema de Rolle se entiende con facilidad geométricamente: si una curva (que tiene una tangente en todo punto) atraviesa el eje X en dos puntos, entonces en cierto punto, la tangente a esta curva es paralela al eje X.

Observación. El Teorema de Rolle puede expresarse también en la siguiente forma: si $f(x) = f(x+h)$, entonces existe una Θ tal que

$$f'(x+\Theta h) = 0, \quad 0 < \Theta < 1; \tag{9}$$

aquí se hacen las mismas consideraciones sobre la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ que en el Teorema de Rolle (sin embargo, no consideramos que $h > 0$ sino únicamente que $h \neq 0$).

7.5. Teoremas de Lagrange [1] y Cauchy

Supongamos, como en el Teorema de Rolle que la función f es continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ y derivable dentro de este intervalo. Entonces tenemos *el teorema del valor medio* (*Lagrange*) (llamado también *el teorema de "incrementos finitos"*):

$$1. \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+\Theta h),$$

donde $h = b-a$ y Θ es un número escogido y tal que $0 < \Theta < 1$.

Antes de seguir con la demostración interpretaremos la fórmula anterior geométricamente. Su primer miembro significa la tangente del ángulo a entre el eje X y la recta que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$. Por tanto el teorema establece que existe una tangente a la curva que es paralela a esta recta (la "secante a la curva"). Un caso especial da el Teorema de Rolle, a saber, cuando esta secante es paralela al eje X. Reduciremos la demostración del Teorema de Lagrange a este teorema.

Trácese una recta paralela al eje Y que pase por un punto arbitrario x situado entre a y b (ver Fig. 13) e indíquese por $g(x)$ la longitud del segmento de esta recta contenida entre la curva y la secante anteriormente definida. Por consiguiente, la longitud del segmento contenido entre

[1] Joseph Louis Lagrange (1736-1813), el matemático más eminente del siglo XVIII, uno de los autores de la teoría de ecuaciones diferenciales.

el eje X y la secante es $g(x)+f(x)$. Por otra parte, esta longitud es $f(a)+(x-a)\tan\alpha$, de donde

$$(10)\qquad g(x) = f(a)-f(x)+(x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

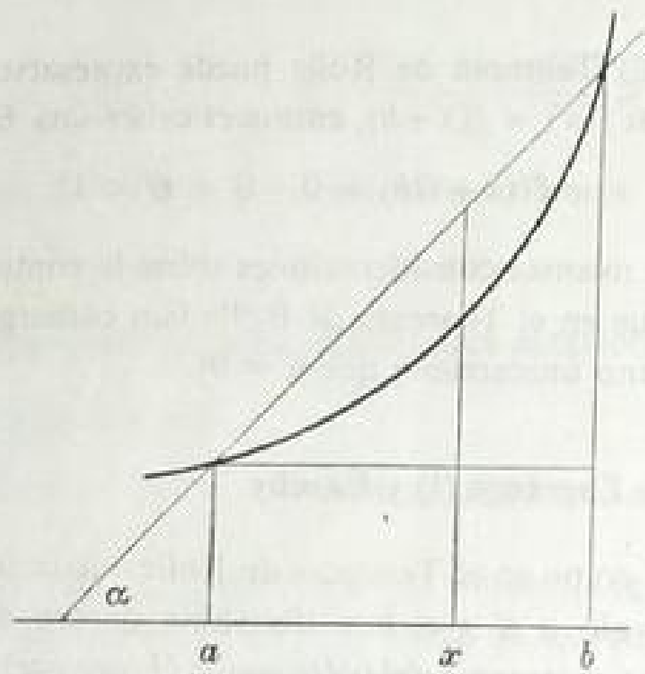


FIG. 13

La función g satisface las suposiciones del Teorema de Rolle. Es continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, derivable:

$$g'(x) = -f'(x)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

y $g(a) = 0 = g(b)$. Por lo que la función $g'(x)$ se anula en cierto punto entre a y b. En otras palabras, existe una Θ tal que $0 < \Theta < 1$ y que

$$g'(a+\Theta h) = 0, \quad \text{esto es,} \quad 0 = -f'(a+\Theta h)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

De modo que hemos obtenido la Fórmula 1.

Observaciones. (α) Las consideraciones geométricas han sido aquí únicamente de carácter heurístico; aclaran el motivo por el que se ha introducido la función g. Sin embargo, la demostración del teorema de Lagrange podría empezar con la definición de la función g por medio de la fórmula (10).

(β) Análogamente a la fórmula (9), la ecuación 1 puede también expresarse en la siguiente forma:

$$(11)\qquad f(x+h) = f(x)+h\cdot f'(x+\Theta h).$$

El Teorema de Lagrange implica los siguientes dos corolarios, que son de fundamental importancia en el cálculo integral.

3. *Si $f'(x) = 0$ para toda x situada dentro del intervalo ab, entonces la función f tiene un valor constante en este intervalo.*

Porque, según (11) tenemos $f(x+h) = f(x)$ para toda x y h, y esto significa que f es de valor constante.

4. *Si tenemos $f'(x) = g'(x)$ para toda $a < x < b$, entonces $f(x) = g(x)$ + constante, esto es, las funciones f y g difieren por una constante.*

En efecto, $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x) = 0$ y esto significa que la función $f(x)-g(x)$ tiene la derivada $= 0$ siempre. En consecuencia por el Teorema 3, esta función es constante. Escribiendo $f(x)-g(x) = C$, tenemos $f(x) = g(x)+C$.

Observación. Si en el Teorema 3 hacemos la hipótesis de que la función f es continua en todo el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, esta función es constante también en todo el intervalo. Es decir, podemos substituir $x = a$ en la demostración.

Una observación similar concierne al Teorema 4.

El Teorema de Lagrange puede generalizarse como sigue:

5. TEOREMA DE CAUCHY. *Si las funciones f y f_1 son continuas en todo el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ y derivables dentro de este intervalo y si $f_1'(x) \neq 0$ para toda x, entonces*

$$(12)\qquad \frac{f(b)-f(a)}{f_1(b)-f_1(a)} = \frac{f'(a+\Theta h)}{f_1'(a+\Theta h)}, \quad 0 < \Theta < 1,$$

donde $h = b-a$.

El Teorema de Lagrange se obtiene del Teorema de Cauchy haciendo la substitución $f_1(x) = x$. Recíprocamente, para demostrar el Teorema de Cauchy, substituimos la función $g(x)$ en la fórmula (10) por la siguiente función:

$$g_1(x) = f(a)-f(x)+[f_1(x)-f_1(a)]\,\frac{f(b)-f(a)}{f_1(b)-f_1(a)}.$$

(Obsérvese que $f_1(b) \neq f_1(a)$ según la hipótesis $f_1'(x) \neq 0$ y el Teorema de Rolle.)

Esta función satisface las hipótesis del Teorema de Rolle:

$$(13)\quad g_1'(x) = -f'(x) + f_1'(x)\,\frac{f(b)-f(a)}{f_1(b)-f_1(a)},\quad g_1(a) = 0 = g_1(b).$$

Por consiguiente, existe una Θ entre 0 y 1 tal que $g'(a+\Theta h) = 0$. Substituyendo $x = a+\Theta h$ en la fórmula (13), obtenemos la ecuación (12).

Análogamente a las fórmulas (9) y (11) obtenemos del Teorema de Cauchy:

$$(14)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{f_1(x+h)-f_1(x)} = \frac{f'(x+\Theta h)}{f_1'(x+\Theta h)}.$$

Observación. Es esencial en la fórmula de Cauchy que Θ indique el mismo número en el numerador y en el denominador. Una aplicación directa de la fórmula 1 a la función f y a la función f_1 y el cálculo del cociente de las expresiones obtenidas conduce (en la mayoría de los casos) a diferentes números Θ en el numerador y en el denominador.

7.6. Derivación de funciones compuestas

Sean $y = f(x)$, $z = g(y)$, donde la función g se define para los valores y de la función f, las funciones f y g son derivables y la derivada g' es continua. La siguiente fórmula de la derivada de la función compuesta $g[f(x)]$ en función de las derivadas f' y g'.

$$1.\quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},\quad \text{esto es (}^1\text{)}\quad \frac{dgf(x)}{dx} = \left[\frac{dg(y)}{dy}\right]_{y=f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}.$$

Dadas x y $h \neq 0$, escribamos $k = f(x+h)-f(x)$, esto es, $f(x+h) = y+k$.

Aplicando la fórmula (11) en el valor medio a la función g, obtenemos:

$$\frac{gf(x+h)-gf(x)}{h} = \frac{g(y+k)-g(y)}{h} = g'(y+\Theta k)\cdot\frac{k}{h}$$

$$= g'(y+\Theta k)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Para obtener la fórmula 1 tenemos que pasar al límite a medida que h tiende a 0. Ahora, en virtud de la continuidad de la función g.

(1) Por brevedad, escribimos $gf(x)$ en lugar de $g[f(x)]$.

tenemos $\lim_{h=0} k = 0$. Como $0 < \Theta < 1$, esto también implica $\lim_{h=0} \Theta k = 0$. (Obsérvese que Θ es también una función de la variable h). Por consiguiente, $\lim_{h=0}(y+\Theta k) = y$, lo cual da $\lim_{h=0} g'(y+\Theta k) = g'(y) = g'[f(x)]$ según la continuidad de la función g'. Consecuentemente,

$$\frac{dgf(x)}{dx} = \lim_{h=0}\frac{gf(x+h)-gf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h=0} g'(y+\Theta k)\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g'[f(x)]\cdot f'(x).$$

Observación. El teorema es también verdadero sin la hipótesis de continuidad de la función g'. Sin embargo, esto requiere otra demostración más complicada.

Aplicaciones. La fórmula 1 nos permite generalizar la 7 del § 7.2 de la siguiente manera: para cualquier real a y cualquier x positiva tenemos:

$$2.\quad \frac{dx^a}{dx} = a\cdot x^{a-1}.$$

A saber, tenemos $x^a = e^{a\log x}$ y entonces substituyendo $z = e^y$ y $y = a\cdot\log x$, tenemos

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{de^y}{dy}\cdot\frac{d(a\log x)}{dx} = e^y\cdot\frac{a}{x} = x^a\cdot\frac{a}{x} = a\cdot x^{a-1}.$$

Los cálculos anteriores podrían escribirse también de la siguiente manera:

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{de^{a\log x}}{d(a\cdot\log x)}\cdot\frac{d(a\cdot\log x)}{dx} = e^{a\log x}\cdot\frac{a}{x} = x^a\cdot\frac{a}{x} = a\cdot x^{a-1}.$$

$$3.\quad \frac{dx^x}{dx} = x^x(\log x+1),$$

porque

$$\frac{dx^x}{dx} = \frac{de^{x\log x}}{dx} = \frac{de^{x\log x}}{d(x\cdot\log x)}\cdot\frac{d(x\cdot\log x)}{dx}$$

$$= e^{x\log x}(\log x+1) = x^x(\log x+1).$$

Obsérvese que la fórmula 2 del § 7.3 $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$, ya demostrada, podría comprobarse en una forma análoga porque $a^x = e^{x \log a}$.

En la práctica aplicamos en ocasiones la fórmula 1 varias veces; por ejemplo si $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = h(z)$, calculamos la derivada $\frac{dh\{g[f(x)]\}}{dx}$, aplicando la igualdad:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Como se ha visto, las derivadas en la fórmula anterior se comportan como fracciones ordinarias.

4. $\frac{d \log f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Esta expresión se llama *la derivada logarítmica* de la función f. Conocer la derivada logarítmica nos permite conocer de inmediato la derivada usual. Esto se demuestra fácilmente considerando el ejemplo de la función $y = x^x$ (donde se deriva $\log y = x \log x$).

EJEMPLOS

$$(\alpha) \quad \frac{d \log \operatorname{sen}(x^2)}{dx} = \frac{d \log \operatorname{sen}(x^2)}{d \operatorname{sen}(x^2)} \cdot \frac{d \operatorname{sen}(x^2)}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{dx}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \cos(x^2)\, 2x = 2x \cot(x^2).$$

(β) *Las derivadas de las funciones hiperbólicas.* Por el seno y el coseno hiperbólicos, entendemos las funciones

$$(15) \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Para obtener sus derivadas obsérvese que

$$\frac{de^{-x}}{dx} = \frac{de^{-x}}{d(-x)} \frac{d(-x)}{dx} = -e^{-x}.$$

De aquí, vemos fácilmente que

$$(16) \qquad \frac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x.$$

Escribamos ahora

$$(17) \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Puesto que, como se ve fácilmente

$$(18) \qquad \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

tenemos

$$(19) \qquad \frac{d \tanh x}{dx} = \frac{d \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}}{dx} = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Las funciones senh x y cosh x tienen funciones inversas. A saber, sea $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Entonces $e^x - e^{-x} - 2y = 0$, esto es, $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, de donde

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}, \quad \text{esto es,} \quad x = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

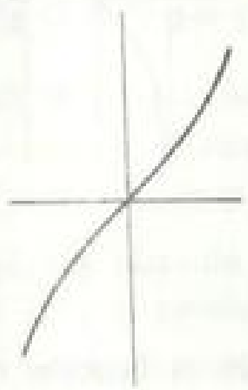


FIG. 14

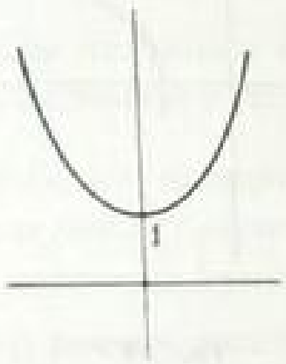


FIG. 15

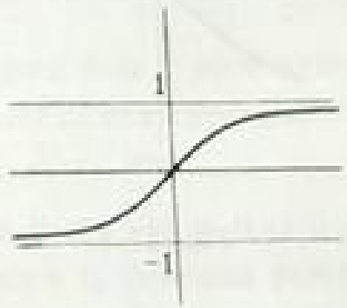


FIG. 16

(Siendo el valor, $y - \sqrt{y^2+1}$ negativo, no lo tomaremos en cuenta.) En esta forma hemos expresado x en función de y. Esta es la función inversa para senh x. Así representamos esta función por el símbolo ar senh:

$$(20) \qquad \operatorname{ar\,senh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Análogamente, obtenemos la función inversa de $\cosh x$ $(x \geqslant 0)$. Ésta se representa por el símbolo ar cosh. Vemos que

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{ar\,cosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geqslant 1.$$

Análogamente, una función inversa de $\cosh x$ $(x \leqslant 0)$ es

$$\log(x - \sqrt{x^2-1}), \quad x \geqslant 1.$$

Aplicando la fórmula (16) y la fórmula de la derivada de la función inversa, obtenemos fácilmente que

$$\text{(22)} \qquad \frac{d \operatorname{ar\,senh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{d}{dx}\log(x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$\text{(23)} \qquad \frac{d \operatorname{ar\,cosh} x}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \frac{d}{dx}\log(x \pm \sqrt{x^2-1}).$$

Este cálculo puede llevarse a cabo también por la derivación de las funciones de los segundos miembros de las fórmulas (22) y (23).

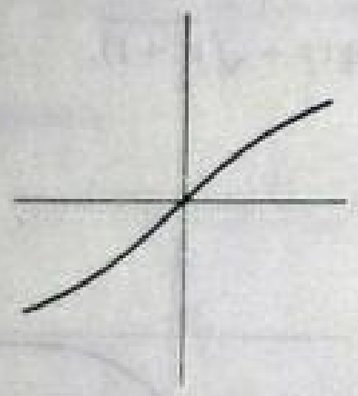


FIG. 17

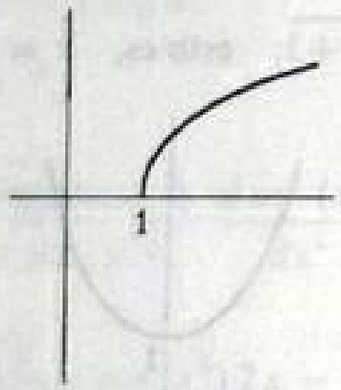


FIG. 18

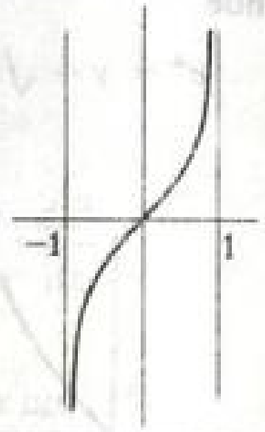


FIG. 19

Añadiremos que la siguiente fórmula vale para la función inversa de $\tanh x$:

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{ar\,tanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

De aquí

$$\text{(25)} \qquad \frac{d \operatorname{ar\,tanh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Observación. Las fórmulas sobre la derivación de las funciones fundamentales que conocimos en los §§ 7.2 y 7.3 junto con la fórmula de la derivación de funciones compuestas, nos permiten derivar una función elemental arbitraria (que es una función obtenida a partir de las funciones fundamentales por aplicación de un número arbitrario de composiciones).

La derivada de una función elemental es una función elemental.

Consideremos ahora la siguiente función (no elemental):

$$\text{(26)} \qquad f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \text{ para } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Las fórmulas generales para la derivación de las funciones elementales no nos permiten calcular $f'(0)$. Debemos calcular esta derivada directamente de la definición de una derivada.

Tenemos

$$f'(0) = \lim_{h=0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h=0} h \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0.$$

Es claro que para $x \neq 0$ la derivada $f'(x)$ puede calcularse por medio de las fórmulas generales para derivadas de funciones elementales.

7.7. Interpretación geométrica del signo de una derivada

El Teorema de Lagrange nos permite establecer la relación entre el signo de la derivada y el incremento o decremento de la función.

1. *Si la desigualdad $f'(x) > 0$ se verifica para toda x perteneciente a un intervalo ab, entonces la función f es creciente en este intervalo.*

Si $f'(x) < 0$ siempre, entonces la función es decreciente.

Según la fórmula (11) tenemos para $h > 0$ $f(x+h) > f(x)$ o $f(x+h) < f(x)$, dependiendo de que consideremos la derivada positiva o negativa en todo punto. En el primer caso la función f crece y en el segundo, decrece.

Observación. Suponiendo que $f'(x) \geqslant 0$ ó $f'(x) \leqslant 0$ siempre, la función f es creciente o decreciente en el sentido más amplio, respectivamente.

El siguiente teorema es el recíproco del Teorema 1.

2. *Si una función f es derivable en un punto c y creciente (o decreciente) en cierto intervalo que rodea a este punto, entonces $f'(c) \geqslant 0$ (ó $f'(c) \leqslant 0$).*

Es decir, si f crece, entonces para $h > 0$ tenemos $f(c+h)-f(c) > 0$ y entonces $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$ y pasando al límite obtenemos $f'(c) \geqslant 0$.

Argumentos similares pueden aplicarse en el caso en que la función f decrece.

Concluimos del Teorema 1 que

3. *Si $f'(c) > 0$, entonces la función f es creciente en cierta vecindad del punto c (suponiendo que la derivada sea continua en el punto c).*

Similarmente: *Si $f'(c) < 0$, entonces la función es localmente decreciente en el punto c.*

En efecto, debido a la continuidad de la función f', la desigualdad $f'(c) > 0$ implica la existencia de un número $\delta > 0$ tal que se verifique $f'(c+h) > 0$ para $|h| < \delta$. Esto significa que la derivada $f'(x)$ es positiva en cualquier punto del intervalo $c-h < x < c+h$. Por consiguiente, según el Teorema 1, la función f es creciente en este intervalo.

Observación. El Teorema 3 puede expresarse de la siguiente manera: Si $f'(c) \neq 0$, entonces (considerando la continuidad de la derivada) la función f es localmente biunívoca en el punto c, esto es, biunívoca en cierto intervalo $c-\delta < x < c+\delta$ $(\delta > 0)$. Por tanto, la función $y = f(x)$ tiene una función inversa $x = g(y)$ en este intervalo. Como ya sabemos, la derivada de esta función inversa es igual a la inversión de la derivada de la función f.

Por las consideraciones anteriores vemos que para un valor dado de y, la ecuación $y = f(x)$ tiene una y sólo una solución para x del intervalo $c-\delta$, $c+\delta$.

Ejemplo. La función $y = \dfrac{e^x}{x}$ decrece para $0 < x < 1$ y crece para $x > 1$.

En efecto

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Esta expresión es < 0 si $x < 1$ y > 0 si $x > 1$.

De lo que se deduce que $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$. En efecto, $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{e^n}{n} = \infty$ (ver § 3.5, 7) y por tanto la función $\dfrac{e^x}{x}$, siendo no acotada y creciente, tiende a ∞ a medida que x tiende a ∞ (obtuvimos este resultado de otra manera en el § 4.6, (β)).

Con mayor generalidad, demostramos en una forma completamente análoga que la función $f(x) = e^x x^a$ $(x > 0)$ es decreciente para $x < -a$ (y $a < 0$) y creciente para $x > -a$, y como $\lim\limits_{n=\infty} e^n n^a = \infty$ (ver § 3.5, 7),

$$\lim_{x=\infty} e^x x^a = \infty. \tag{27}$$

7.8. Expresiones indeterminadas

El Teorema de Cauchy del § 7.5 permite calcular el límite de expresiones como:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{donde} \quad f(a) = 0 = g(a). \tag{28}$$

A las expresiones de esta clase se les llama "expresiones indeterminadas del tipo $\dfrac{0}{0}$".

1. *Si las funciones f y g son continuas en el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ y son derivables dentro de este intervalo y si $f(a) = 0 = g(a)$, entonces*

$$\lim_{x=a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{29}$$

si el último límite existe.

Escribamos $x = a+h$. Entonces se tiene que demostrar que

$$\lim_{h=+0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h=+0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}. \tag{30}$$

Ahora, las ecuaciones $f(a) = 0 = g(a)$ y la fórmula de Cauchy dan

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+\Theta h)}{g'(a+\Theta h)}.$$

Como $\lim\limits_{h=+0} \Theta h = +0$, tenemos

$$\lim_{h=+0} \frac{f'(a+\Theta h)}{g'(a+\Theta h)} = \lim_{h=+0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)},$$

De donde se deduce la fórmula (30).

Un teorema similar vale para el límite por la izquierda.

Cuando las derivadas f' y g' son continuas en los puntos a y $g'(a) \neq 0$, la fórmula (29) implica inmediatamente la siguiente fórmula de L'Hospital [1]:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{31}$$

Una fórmula similar concierne al límite por un lado y las derivadas laterales.

EJEMPLOS. (α) Para calcular $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$, escribamos

$$f(x) = \log(1+x) \quad \text{y} \quad g(x) = x.$$

De aquí

$$f(0) = 0 = g(0), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g'(x) = 1, \quad f'(0) = 1$$

y entonces

$$\lim_{x=0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \tag{32}$$

(β) Evalúese $\lim\limits_{x=0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. Escribamos $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = x$. Entonces tenemos $f(0) = 0 = g(0)$, $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$. Por lo que

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1. \tag{33}$$

Observaciones. (α) Si $g'(a) = 0$ pero $f'(a) \neq 0$, entonces la fórmula (31) da $\lim\limits_{x=0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Pero si $f'(a) = 0 = g'(a)$, entonces la fórmula (31) no puede aplicarse. En este caso se aplican derivadas de ordenes superiores (ver § 8.4.).

(β) La fórmula (29) puede aplicarse también en el caso en que $a = \infty$.

[1] De L'Hospital, matemático francés de la segunda mitad del siglo XVII, conocido especialmente por popularizar el cálculo diferencial.

En otras palabras, si $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x=\infty} g(x)$, entonces

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{34}$$

admitiendo la existencia del último límite.

Escribimos $x = \dfrac{1}{t}$ y definimos una función auxiliar $F(t)$ por las condiciones: $F(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ para $t \neq 0$ y $F(0) = 0$.

Similarmente, sea $G(t) = g\,\dfrac{1}{t}$ para $t \neq 0$ y $G(0) = 0$. La función F es continua para toda $t \neq 0$ como una composición de dos funciones continuas: $\dfrac{1}{t}$ y f. Es también continua por la derecha en el punto 0, ya que (ver § 4, (18))

$$\lim_{t=+0} F(t) = \lim_{t=+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x=\infty} f(x) = 0 = F(0).$$

Análogamente la función G es continua. Para poder aplicar la fórmula (29), tiene que calcularse $\lim\limits_{t=+0} \dfrac{F'(t)}{G'(t)}$.

Ahora, tenemos

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d f\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$$

para $t \neq 0$. Similarmente, $G(t) = -\dfrac{1}{t^2} g'\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Por consiguiente

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t=+0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t=+0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t=+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Además de las expresiones indeterminadas de la forma $\dfrac{0}{0}$, se consideran también las expresiones indeterminadas de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Por una expresión de este tipo entendemos

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{donde} \quad \lim_{x=a} f(x) = \infty = \lim_{x=a} g(x).$$

A veces el cálculo de expresiones indeterminadas de esta forma puede reducirse a la forma $\frac{0}{0}$. Puesto que, escribiendo

$$F(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{1}{g(x)}, \quad \text{tenemos}$$

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=a} \frac{G(x)}{F(x)}$$

y esta última expresión indeterminada es de la forma $\frac{0}{0}$.

Similarmente, si $\lim_{x=a} f(x) = 0$ y $\lim_{x=a} g(x) = \infty$, entonces la expresión indeterminada $\lim_{x=a} [f(x) \cdot g(x)]$ de la forma $0 \cdot \infty$ puede reducirse a la forma $\frac{0}{0}$, puesto que

$$\lim_{x=a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x=a} \frac{f(x)}{G(x)}.$$

Si $\lim_{x=a} f(x) = \infty = \lim_{x=a} g(x)$, entonces reducimos la expresión indeterminada $\lim_{x=a} f(x) - g(x)$ de la forma $\infty - \infty$ también a la forma $\frac{0}{0}$, escribiendo $\lim_{x=a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x=a} \frac{G(x) - F(x)}{F(x) \cdot G(x)}$.

Quedan por considerar las expresiones indeterminadas de la forma 0^0, ∞^0 y 1^∞. Pueden reducirse a las anteriormente consideradas por medio de las relaciones

$$\lim_{x=a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x=a} e^{g(x) \cdot \log f(x)} = e^{\lim_{x=a} g(x) \cdot \log f(x)}$$

EJEMPLOS

(γ) $\lim_{x=+0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=+0} e^{\frac{1}{x} \log \cos x} = e^{\lim_{x=+0} \frac{1}{x} \log \cos x} = 1,$

porque

$$\lim_{x=+0} \frac{\log \cos x}{x} = \lim_{x=+0} \frac{(\log \cos x)'}{x'} = \lim_{x=+0} \frac{-\tan x}{1} = 0.$$

(δ) Hállese la derivada por la derecha $f'_+(0)$, de la función f definida como sigue: $f(x) = x^x$ cuando $x > 0$, $f(0) = 1$.

Tenemos

$$f'_+(0) = \lim_{h=+0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h=+0} \frac{h^h - 1}{h}.$$

Esta es una expresión de la forma $\frac{0}{0}$, porque $\lim_{x=+0} x^x = 1$ (§ 5.3). Aplicando la fórmula (29) y tomando en cuenta el hecho que $\frac{d}{dx}(x^x - 1) = x^x (\log x + 1)$ (ver § 7.6, 3) obtenemos

$$\lim_{x=+0} \frac{x}{x^x - 1} = \lim_{x=+0} \frac{1}{x^x(\log x + 1)} = -0,$$

de donde $f'_+(0) = -\infty$.

(ε) La expresión $\lim_{x=+0} (x \log x)$ es una forma indeterminada del tipo $0 \cdot \infty$. La demostración de que este límite es igual a 0 puede derivarse directamente, sin aplicar el cálculo diferencial (ver § 4.6, (δ)).

7.9. La derivada de un límite

TEOREMA. *Si las igualdades*

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n=\infty} f'_n(x) = g(x) \tag{35}$$

se satisfacen en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, siendo las funciones f'_n continuas y uniformemente convergentes a g, entonces

$$f'(x) = g(x), \quad \text{esto es} \quad \frac{d}{dx} \lim_{n=\infty} f_n(x) = \lim_{n=\infty} \frac{d f_n(x)}{dx}. \tag{36}$$

Sea c un punto del intervalo ab. Estimemos la diferencia

$$\frac{f_n(c+h) - f_n(c)}{h} - g(c) = f'_n(c + \Theta h) - g(c). \tag{37}$$

Se da $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $\{f'_n\}$ es uniformemente convergente a g, existe una k tal que

$$|f'_n(x) - g(x)| < \varepsilon \tag{38}$$

para $n > k$ y para toda x perteneciente al intervalo ab.

Siendo la función g continua, como el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas (ver § 6.1, 1), existe un número $\varepsilon > 0$ tal que la desigualdad $|x - c| < \delta$ implica

$$|g(x) - g(c)| < \varepsilon. \tag{39}$$

Por consiguiente, suponiendo $n > k$ y $|h| < \delta$ obtenemos la siguiente estimación:

$$|f'_n(c+\Theta h) - g(c)| \leqslant |f'_n(c+\Theta h) - g(c+\Theta h)| + \\ + |g(c+\Theta h) - g(c)| < 2\varepsilon,$$

esto es, por (37),

$$\left| \frac{f_n(c+h) - f_n(c)}{h} - g(c) \right| < 2\varepsilon.$$

Como

$$\lim_{n=\infty} f_n(c+h) = f(c+h) \quad \text{y} \quad \lim_{n=\infty} f_n(c) = f(c)$$

tenemos

$$\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - g(c) \right| \leqslant 2\varepsilon,$$

si $|h| < \delta$. Pasando al límite a medida que h tiende a cero, obtenemos por lo tanto la ecuación (36).

Observaciones. (α) Ni aun la convergencia uniforme de una sucesión de funciones implica la convergencia de la sucesión de derivadas, como se ilustra con el siguiente ejemplo:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx.$$

(β) El teorema sigue siendo verdadero si suponemos que la primera de las ecuaciones (35) se satisface en un punto dado c, en lugar de suponer que se satisface en todo el intervalo ab. Ya que si la sucesión de funciones converge en un punto c y si la sucesión de las derivadas es uniformemente convergente en todo el intervalo ab, entonces la sucesión de funciones es convergente en todo el intervalo ab.

En efecto, según nuestras suposiciones, para una $\varepsilon > 0$ prescrita, existe un número k tal que las desigualdades

$$|f_n(c) - f_k(c)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f'_n(x) - f'_k(x)| < \varepsilon \tag{40}$$

se satisfacen para $n > k$ y $a \leqslant x \leqslant b$.

Escribamos $F_n(x) = f_n(x) - f_k(x)$ y $x = c + h$. Entonces tenemos

$$F_n(x) = F_n(c) + h \cdot F'_n(c+\Theta h)$$
$$= f_n(c) - f_k(c) + h[f'_n(c+\Theta h) - f'_k(c+\Theta h)].$$

De aquí, por (40), tenemos $|F_n(x)| < \varepsilon + (b-a)\varepsilon = \varepsilon(1+b-a)$. Por consiguiente, la sucesión $f_n(x)$ es convergente.

7.10. La derivada de una serie de potencias

Demostraremos que

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \tag{41}$$

para toda x que esté dentro del intervalo de convergencia de la serie

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{42}$$

Además, la serie (42) *y*

$$g(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \tag{43}$$

tienen el mismo radio de convergencia.

Demostraremos primero la segunda parte del teorema. Sea r el radio de convergencia de la serie (42) y $0 < c < r$. Probaremos que la serie $g(c)$ es convergente. Sea $c < C < r$. Comparemos los términos de la serie

$$|a_1| + 2|a_2|c + \ldots + n|a_n|c^{n-1} + \ldots \tag{44}$$

con los términos correspondientes de la serie convergente (ver § 6.3, Teorema 1):

$$|a_1|C + |a_2|C^2 + \ldots + |a_n|C^n + \ldots \tag{45}$$

Como $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (ver § 3.5, 8) y $\frac{C}{c} > 1$, tenemos

$$\sqrt[n]{n} < \frac{C}{c}$$

y por consiguiente

$$n\,|a_n|\,c^{n-1} = \frac{|a_n|}{c}(\sqrt[n]{nc})^n < \frac{|a^n|}{c}\left(\frac{C}{c}\cdot c\right)^n = \frac{1}{c}|a_n|\,C^n$$

para n grande.

De aquí concluimos que la serie (44) es convergente y en consecuencias la serie $g(c)$ también es absolutamente convergente.

Recíprocamente, si la serie (43) es absolutamente convergente, entonces la serie (42) también es convergente. Es decir,

$$|a_n x^n| = |x|\cdot|a_n x^{n-1}| \leqslant |x|\cdot|na_n x^{n-1}|.$$

De esta manera hemos demostrado que cualquier punto que esté dentro del intervalo de convergencia de la serie (42) pertenece al intervalo de convergencia de la serie (43) y recíprocamente, todo punto dentro del intervalo de convergencia de la serie (43) está dentro del intervalo de convergencia de la serie (42). Por consiguiente, ambos intervalos son iguales.

Ahora, demostremos la fórmula (41). Sea x un punto interior del intervalo de convergencia de la serie (42) y por consiguiente también de la serie (43). Sea el intervalo ab cualquier intervalo cerrado que rodea este punto y que está dentro del intervalo de convergencia. Por el Teorema 1 del § 6.3, la serie (43) es uniformemente convergente en el intervalo ab. Esto significa que cuando escribimos

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

las funciones f_n' constituyen una sucesión uniformemente convergente a la función g en el intervalo ab. Aplicando el teorema a la sección anterior obtenemos la fórmula (41).

Como se ve fácilmente, la fórmula (41) establece que *una serie de potencias puede derivarse, término a término, como un polinomio.*

Más generalmente, si al derivar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ término a término obtenemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$ uniformemente convergente y si, además, las funciones $u_n'(x)$ son continuas, entonces

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x). \tag{46}$$

EJEMPLO. Derivando la serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

obtenemos para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

7.11. El desarrollo de las funciones $\log(1+x)$ y $\arctan x$ en series de potencias

Consideremos la fórmula conocida

$$\frac{d\log(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1). \tag{47}$$

Es obvio que la serie que aparece en esta fórmula, es la derivada de la serie $S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ De aquí las funciones $\log(1+x)$ y $S(x)$ tienen la misma derivada y por tanto difieren únicamente en una constante (ver § 7.5, 4). Escribamos $\log(1+x) = S(x) + C$. La constante C puede ser calculada substituyendo $x = 0$; obtenemos $\log(1+0) = 0 = S(0)$. De aquí $C = \log(1+0) - S(0) = 0$.

Entonces hemos demostrado que las funciones $\log(1+x)$ y $S(x)$ son idénticos en el intervalo $-1 < x < 1$. Hablando de otra manera:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1). \tag{48}$$

Análogamente, deducimos de la fórmula

$$\frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

que

$$\arctan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Substituyendo $x = 0$ y tomando en cuenta que $\arctan 0 = 0$, obtenemos

$C = 0$. Consecuentemente,

$$\text{(49)} \qquad \operatorname{arc\,tan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| < 1).$$

Por consiguiente, hemos demostrado que la fórmula (48) es válida para $|x| < 1$. Demostraremos que es válida también para $x = 1$. En efecto, para $x = 1$ la serie del segundo miembro de esta fórmula, esto es la serie $S(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$, es, convergente, y por tanto, por el Teorema de Abel (§ 6.3, 3) la función $S(x)$ es continua por el lado izquierdo en el punto 1. De aquí

$$S(1) = \lim_{x=1-0} S(x) = \lim_{x=1-0} \log(1+x) = \log 2,$$

puesto que la función $\log(1+x)$ es continua en el punto 1. En consecuencia

$$\text{(50)} \qquad \log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

Similarmente, deducimos de la fórmula (49), la de Leibniz:

$$\text{(51)} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Designando el segundo miembro de la ecuación (49) por $T(x)$ tenemos

$$T(1) = \lim_{x=1-0} T(x) = \lim_{x=1-0} \operatorname{arc\,tan} x = \operatorname{arc\,tan} 1 = \frac{\pi}{4},$$

de donde se deduce la fórmula (51).

Observaciones (α) En la práctica, la fórmula Leibniz no es conveniente para el cálculo del número π; por ejemplo, para calcular las primeras tres cifras decimales del número $\pi/4$ sería necesario tomar la suma de los primeros 500 términos del desarrollo de Leibniz. La siguiente fórmula es mucho más conveniente.

Sea $\alpha = \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{2}$, $\beta = \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{3}$, esto es, $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$. Como

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

y $1 = \operatorname{arc\,tan}(\pi/4)$, entonces $\pi/4 = \alpha + \beta = \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{3}$.

De aquí, por la fórmula (49), obtenemos:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 32} - \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 243} - \cdots$$

Se conocen otras fórmulas que dan métodos aún más rápidos para el cálculo de π.

(β) La fórmula (48) conduce a la siguiente desigualdad:

$$\text{(52)} \qquad \frac{1}{x}\log(1+x) < 1 \quad \text{para} \quad 0 < x \leqslant 1.$$

Ya que, tenemos

$$\text{(53)} \qquad \frac{1}{x}\log(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots \pm \frac{x^n}{n+1} \mp \cdots$$

Para $0 < x \leqslant 1$ ésta es una serie alterna que satisface las condiciones,

$$1 > \frac{x^2}{2} > \frac{x^3}{3} > \cdots \quad \text{y} \quad \lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n} = 0;$$

por consiguiente, según el teorema § 3.3, la suma de esta serie es menor que su primer término, esto es, la desigualdad (52) se verifica.

Similarmente demostramos que

$$\text{(54)} \qquad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\log(1+x) > 1 \quad \text{para} \quad 0 < x \leqslant 1,$$

ya que el sumar a la serie (53) la serie (48) dividida por 2, obtenemos

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\log(1+x)$$
$$= 1 + x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - x^3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots \pm x^n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) \mp \cdots$$

Se ve fácilmente que omitiendo el primer término obtenemos una serie alterna que satisface las consideraciones del Teorema 1 del § 3.3.

Por tanto concluimos que la suma de esta serie es positiva. Por consiguiente, se verifica la fórmula (54).

7.12*. Asíntotas

Aplicando el cálculo diferencial es posible hallar las asíntotas de una curva $y = f(x)$. La recta $Y = aX + b$ es llamada asíntota de la curva $y = f(x)$, si

$$a = \lim_{x=\infty} f'(x) \quad \text{y} \quad b = \lim_{x=\infty} [f(x) - ax];$$

De donde se ve que la dirección de una asíntota es una dirección límite a la cual tiende la dirección de la tangente a la curva en el punto $[x, f(x)]$ a medida que x tiende a ∞; además, la distancia entre este punto y la asíntota tienden a 0, porque esta distancia es igual a $|[f(x)-ax-b]\cos a|$, donde a es el ángulo entre la asíntota y el eje X.

Similarmente consideremos asíntotas cuando x tiende $a-\infty$.

Finalmente, la recta $X = c$ (paralela al eje Y) es llamada asíntota de la curva $y = f(x)$, $x < c$, si $\lim\limits_{x=c-0} f'(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x=c-0} f(x)$. Similarmente, definimos las asíntotas a la curva $y = f(x)$, $x > c$.

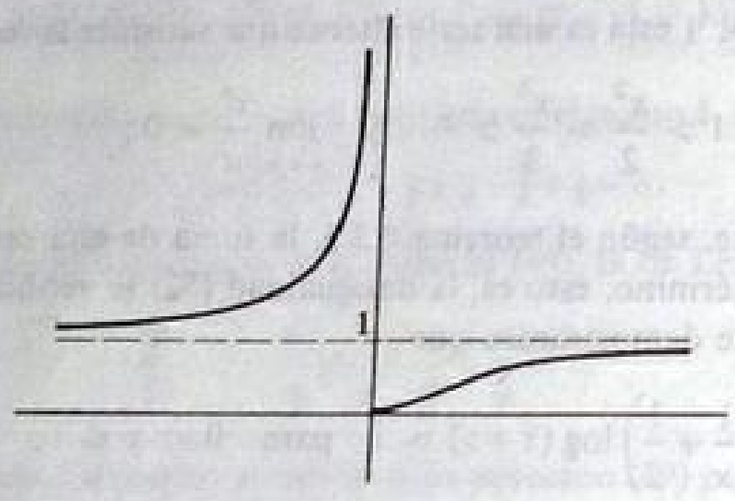


FIG. 20

EJEMPLOS. Como es fácil ver, las asíntotas de la hipérbola $y = 1/x$ son los ejes X y Y.

Para calcular las asíntotas de la curva $y = e^{-1/x}$, calculamos

$$y' = \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

De aquí $\lim\limits_{x=\infty} y = 1$ y $\lim\limits_{x=\infty} y' = 0$. Por consiguiente, $a = 0$ y $b = 1$, y la línea recta $Y = 1$ es una asíntota. Una segunda asíntota es el eje Y, porque $\lim\limits_{x=-0} y = \infty$ y $\lim\limits_{x=-0} y' = \infty$.

7.13*. El concepto de una diferencial

Se puede dar un sentido matemático riguroso al concepto de una diferencial, en la siguiente forma. Por *diferencial* de una función $y = f(x)$

en un punto x con respecto al incremento h, entendemos el producto $f'(x)h$. Escribimos

(55) $$df(x) = f'(x)h \quad \text{o, más brevemente,} \quad dy = f'(x)h.$$

El símbolo $df(x)$ o dy conveniente en aplicaciones por su simplicidad, no toma en cuenta ni la dependencia de la diferencial sobre la variable x con respecto a la cual se efectúa la derivación, ni la dependencia sobre el incremento h. Para satisfacer estos requisitos tendríamos que escribir, por ejemplo, $d'_x(y, h)$. Además, si quisiéramos indicar que la diferencial se considera en un punto x_0, tendríamos que escribir $[d_x(f(x), h)]_{x=x_0}$ por analogía con la notación para la derivada en un punto x_0.

Por la fórmula (55), $dx = h$, porque, substituyendo $f(x) = x$, tenemos $f'(x) = 1$.

Por consiguiente, podemos substituir en la fórmula (55) $h = dx$. Obtenemos $dy = f'(x)dx$. Dividiendo ambos miembros de esta ecuación por dx tenemos entonces

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

donde el segundo miembro es el cociente de dos diferenciales lo que puede considerarse como una explicación de la notación de Leibniz para las derivadas. Hablando más estrictamente, tenemos $f'(x) = \dfrac{dx(y, h)}{dx(x, h)}$ para toda $h \neq 0$. Las fórmulas del cálculo diferencial pueden escribirse con notación diferencial como se ve en los siguientes ejemplos:

$$de^x = e^x dx, \quad d\,\text{sen}\, x = \cos x\, dx, \quad dc = 0.$$

La fórmula 4 del § 7.4 para la derivada de una suma conduce a una fórmula análoga para la diferencial de una suma:

(56) $$d(y+z) = dy+dz.$$

En efecto, sea $y = f(x)$, $z = g(x)$. Tenemos

$$d(y+z) = (y+z)'h = y'h+z'h = dy+dz.$$

Análogamente, demostramos que

(57) $$d(yz) = ydz+zdy.$$

Ahora daremos la fórmula para la diferencial de una composición de funciones.

Sea $y = f(x)$ y $z = g(y)$. Entonces

(58) $$d_x z = g'(y) d_x y.$$

Es decir, $d_x z = \dfrac{dg f(x)}{dx}\, dx = g'(y) f'(x) dx = g'(y) d_x y$, según la (55).

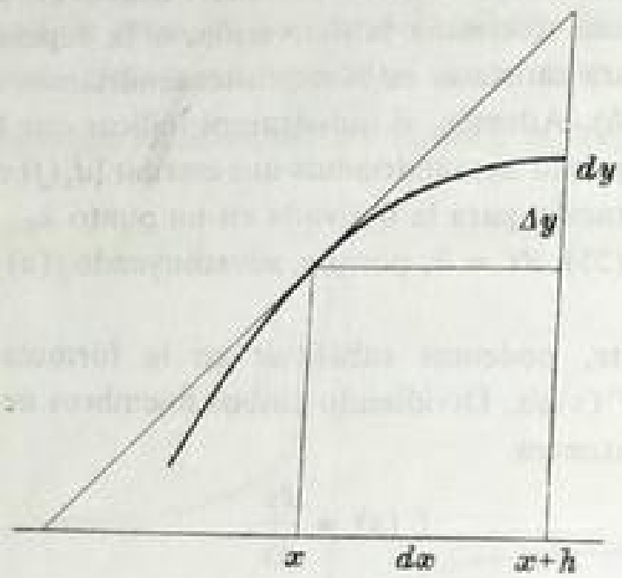


Fig. 21

Observemos que por (55), tenemos también $d_y z = g'(y)\, d_y y$. Comparando esta ecuación con la (58) vemos que si z es una función de la variable y, entonces la fórmula para la diferencial z queda formalmente sin cambiar, después de representar y como una función de una nueva variable x (sin embargo, el índice en d que indica con respecto a qué variable se tiene que derivar tiene que omitirse evidentemente).

La interpretación geométrica de la diferencial se ve inmediatamente en la Fig. 21.

El siguiente teorema se verifica: *La diferencia entre el incremento de la función $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ y la diferencial dy, dividida por la diferencial dx tiende a 0 junto con su diferencial, esto es*

(59) $$\lim_{dx=0} \frac{\Delta y - dy}{dx} = 0.$$

Es decir

$$\frac{\Delta y - dy}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x),$$

y

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

En la práctica (por ejemplo en aplicaciones físicas) el teorema anterior frecuentemente hace posible reemplazar la diferencial dy por el incremento Δy.

Ejercicios del § 7

1. Derívense las siguientes funciones:

1) $\dfrac{x^2+2x+4}{x^4-1}$, 2) $\sqrt{2x-x^5}$, 3) $\dfrac{x}{\sqrt{c+x^3}}$,

4) sec x, 5) cosec x, 6) cotan x,

7) arc sec x, 8) arc cosec x, 9) arc cotan x,

10) log sen x, 11) log tan x, 12) arc cos $(1-x)$.

13) arc tan $\dfrac{5x}{1-x^2}$ 14) log sen h x. 15) ar tanh $\sqrt[3]{x}$.

2. Demúestrese que si una función f es derivable, entonces su derivada f' tiene la propiedad de Darboux (esto es, pasa de un valor a otro, por todos los valores intermedios).

(Primero demúestrese que si $f'(a) < 0 < f'(b)$. Entonces existe un punto c en el intervalo ab tal que $f'(c) = 0$. El caso general en que $f'(a) < A < f'(b)$ puede ser fácilmente reducido al previo considerando la función $f(x) - Ax$.)

3. Dada la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right)$, hállese $f'(x)$ y la suma de las series de las derivadas. Compare el resultado obtenido con el teorema del § 7.9.

4. Demuéstrese que si una función f es derivable en un punto x, entonces

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Demuéstrese con un ejemplo que la relación recíproca no se cumple: el límite anterior (esto es, la llamada derivada generalizada) puede existir aunque la función no sea derivable en el punto x.

5. Dé un ejemplo de una función que tenga una derivada generalizada en un punto de discontinuidad.

6. Dé un ejemplo de una función par (esto es tal que $f(x) = f(-x)$) para la que $f'(0) = 0$, aunque la función no tenga un extremo (aun uno impropio) en el punto 0.

7. Demuéstrese que si una función continua tiene máximos en los puntos a y b, entonces tiene también un mínimo en algún punto entre a y b.

8. Sea f una función continua en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ y derivable dentro de este intervalo. Si el límite por la derecha $\lim\limits_{x=a+0} f'(x)$ existe, entonces la derivada por la derecha, de la función f, existe también, y ambas cosas son iguales : $f'_+(a) = \lim\limits_{x=a+0} f'(x)$.

9. Demuéstrese que entre todos los rectángulos con el mismo perímetro, el cuadrado tiene la máxima área.

10. Demuéstrese que entre todos los triángulos de perímetro y base constantes, el triángulo isósceles es el de área máxima.

11. Demuéstrese que entre todos los triángulos de perímetro constante el equilátero tiene la máxima área.

12. Demuéstrese que si la derivada f' es estrictamente monótona, entonces para cualquier x_0, la curva $y = f(x)$ está a un lado de la tangente a este punto.

De aquí se concluye que $e^x > 1 + x$ para $x \neq 0$.

13. Demuéstrese que $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) \log(1+x) < 1$ para $0 < x \leqslant 1$.

14. Demuéstrese que $\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ para $x > -1$.

15. Desarróllese $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en una serie de potencias.

16. Dados dos puntos P y Q que están en el plano por encima del eje X, hállese un punto R del eje X tal que la suma de los segmentos PR y RQ sea la mínima posible. Demuéstrese que los ángulos (agudos) entre estos segmentos y el eje X son iguales.

(Interprétese este resultado en la teoría de óptica : PRQ = la trayectoria del rayo, el eje X = al espejo).

17. Evalúense $\lim\limits_{x=0} \frac{\tan x}{\tan ax}$, $\lim\limits_{x=\pi/2-0} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$, $\lim\limits_{x=\infty} \sqrt[x]{x}$.

18. Demuéstrese la existencia del límite (llamada la *constante de Euler*)

$$C = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

(demuéstrese que la sucesión considerada es decreciente y acotada, aplicando la desigualdad del Ejercicio 14).

19. Demuéstrese que si las funciones derivables f y g satisfacen la desigualdad $f'(x)\,g(x) \neq g'(x)\,f(x)$ para toda x, entonces entre dos raíces cualesquiera de la ecuación $f(x) = 0$, existe una raíz de la ecuación $g(x) = 0$. $\left(\text{Considérese la función auxiliar } \frac{f(x)}{g(x)}.\right)$

§8. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES

8.1. Definición y ejemplos

La derivada de la derivada de una función f se llama *segunda derivada* de esta función. Similarmente, la tercera derivada es la derivada de la segunda derivada. Generalmente, la n-ésima derivada es la derivada de la $(n-1)$-ésima derivada. Denotamos las derivadas de órdenes superiores por expresiones de la clase:

$$f', f'', f''', \cdots, f^{(n)}, \cdots \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}, \cdots$$

Entonces tenemos

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Ejemplo, sea $f(x) = x^3$. Tenemos $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ y $f^{(n)}(x) = 0$ para $n > 3$. Más generalmente,

$$(1) \qquad \frac{d^k(x^n)}{dx^k} = n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)x^{n-k} \quad \text{para} \quad K \leqslant n.$$

$$\frac{d^n(x^n)}{dx^n} = n!$$

Si a es un número real (pero no un entero positivo), entonces tenemos

$$(2) \qquad \frac{d^k}{dx^k}(1+x)^a = a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-k+1)(1+x)^{a-k}$$

para un entero positivo arbitrario k y para una $x > -1$.

La función e^x tiene la propiedad de que sus derivados de todos los órdenes son idénticas con ella misma.

Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$ tenemos

$$(3) \qquad f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x,$$

$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x.$$

Aquí se verifica la ecuación $f^{(n)}(x) = f^{(n+4)}(x)$. La misma ecuación se satisface por la función $f(x) = \cos x$.

Observemos de paso, que conviene considerar la derivada de orden 0 como igual a la función $f^{(0)}(x) = f(x)$. La anterior ecuación dada se cumple también para $n = 0$.

La fórmula (1) hace posible calcular fácilmente la k-ésima derivada de un polinomio de grado n: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Substituyendo $x = 0$ en $f^{(k)}(x)$ (para $k = 0, 1, \ldots, n$) tenemos:

$$(4) \quad a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{1}{2}f''(0),\ \cdots,\ a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

Por lo que obtenemos la fórmula

$$(5) \qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

que generalizaremos después.

Como ejemplo del cálculo de derivadas de órdenes superiores mencionemos la fórmula para la segunda derivada de la función inversa.

Como sabemos, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$. De aquí

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dy},$$

esto es,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

En aplicaciones de física, la segunda derivada es frecuentemente importante. En particular, la aceleración de una partícula como una derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es la segunda derivada de la distancia recorrida con respecto al tiempo, esto es, $\dfrac{d^2s}{dt^2}$. Por tanto, la fuerza que actúa sobre la partícula es igual a $m\dfrac{d^2s}{dt^2}$, donde m denota la masa de dicha partícula.

8.2*. Diferenciales de órdenes superiores

Definimos la segunda diferencial de una función f como la diferencial de la diferencial de la función f. Hablando más estrictamente, la definimos como la diferencial con respecto al incremento h de la diferencial de la función f con respecto al incremento h; la variable con respecto a la cual se efectúa la derivación es x. Entonces, escribiendo $y = f(x)$ y denotando la segunda diferencial por d^2y tenemos

$$d^2y = d(dy) = d(y'h) = \frac{d}{dx}(y'h)h = y''h^2 = y''(dx)^2.$$

De donde vemos que la segunda derivada de una función f es el cociente de su segunda diferencial sobre el cuadrado de la diferencial dx (lo que explica la notación de la segunda derivada).

Generalmente, la n-ésima diferencial d^ny se define como la n-ésima

iteración de la diferencial, esto es, $d^n y = d(d^{n-1}y)$ (con respecto al mismo incremento h).

Entonces tenemos

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n. \tag{6}$$

Demostramos esto por inducción. La fórmula (6) se verifica para $n = 1$ (y como hemos visto para $n = 2$, también). Considerando esta fórmula para n, tiene que demostrarse para $n+1$. Ahora,

$$d^{n+1}y = d(d^n y) = d[y^{(n)}(dx)^n] = \frac{d}{dx}[y^{(n)}(dx)^n]\,dx$$
$$= y^{(n+1)}(dx)^{n+1}.$$

Ejemplo. Las derivadas de órdenes superiores de la función inversa (ver la sección anterior) pueden calcularse por medio de diferenciales de órdenes superiores como sigue. Sea la función $x = g(y)$ inversa a $y = f(x)$.

Las diferenciales dy, d^2y, d^3y, etc. serán entendidas como $d_y y$, $d_y^2 y$, $d_y^3 y$, etc. Evidentemente, $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, ...

Como $y'x' = 1$, tenemos $dy = y'x'dy$. Derivando con respecto a y, obtenemos

$$0 = d^2y = \left(\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}x' + \frac{dx'}{dy}y'\right)(dy)^2 = [y''(x')^2 + y'x'']\,(dy)^2$$

Similarmente

$$0 = d^3y = [y'''(x')^3 + 3y''x'x'' + y'x''']\,(dy)^3.$$

En esta forma obtenemos ecuaciones que nos permiten calcular las derivadas $x', x'', x''', \ldots,$ sucesivamente:

$$y'x' = 1,$$
$$y''(x')^2 + y'x'' = 0,$$
$$y'''(x')^3 + 3y''x'x'' + y'x''' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

8.3 Operaciones aritméticas

Sean $y = f(x)$, $z = g(x)$. Verificamos fácilmente por inducción que

$$(y+z)^{(n)} = y^{(n)} + z^{(n)} \tag{7}$$

y

$$(y-z)^{(n)} = y^{(n)} - z^{(n)} \tag{8}$$

Para la n-ésima derivada de un producto, se cumple la siguiente fórmula de Leibniz:

$$(yz)^{(n)} = y^{(n)}z + \binom{n}{1}y^{(n-1)}z' + \binom{n}{2}y^{(n-2)}z'' + \cdots + yz^{(n)} \tag{9}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{(n-k)}z^{(k)}$$

Demostraremos esta fórmula por inducción. Para $n = 1$, sabemos que esta fórmula es la de la derivada de un producto. Consideremos que esta fórmula se verifica para n y diferenciémosla. Obtenemos

$$(yz)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n}{k}y^{(n-k+1)}z^{(k)} + \binom{n}{k}y^{(n-k)}z^{(k+1)}\right\}$$
$$= y^{(n+1)}z + \sum_{k=1}^{n}\left\{y^{(n-k+1)}z^{(k)}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]\right\} + yz^{(n+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}y^{(n+1-k)}z^{(k)},$$

puesto que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

(Ver § 1, (4)).

Ejemplo. Para hallar la n-ésima derivada de la función xe^x, escriba $y = e^x$ y $z = x$. Como se ve fácilmente sólo los dos primeros términos no se anulan en la fórmula (9). De aquí

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = e^x(x+n).$$

8.4 Fórmula de Taylor[1]

La fórmula de Lagrange (§ 7, (11)) es la "primera aproximación" de la siguiente fórmula de Taylor:

[1] Brook Taylor y Colin Maclaurin (mencionados en lo que sigue), matemáticos inglés y escocés respectivamente, de la primera mitad del siglo XVIII.

Supongamos que la función f es n veces diferenciable en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Escriba $h = b-a$. Entonces $f(b)$ puede representarse en la siguiente forma:

$$(10) \qquad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f(n-1)_{(a)} + R_n,$$

donde

$$(11) \qquad R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\Theta h) = \frac{h^n(1-\Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\Theta' h),$$

y donde Θ y Θ' son números escogidos adecuadamente que satisfacen las desigualdades $0 < \Theta < 1$ y $0 < \Theta' < 1$.

Demostración según la desigualdad (10), tenemos

$$(12) \qquad R_n = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f(n-1)_{(a)}.$$

Denotemos por $g_n(x)$ una función auxiliar obtenida de R_n al substituir a por x, esto es

$$(13) \quad g_n(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(n-1)_{(x)}.$$

Derivando obtenemos

$$g_n'(x) = -f'(x) + \left[f'(x) - \frac{b-x}{1!} f''(x)\right] + \left[2\frac{b-x}{2!} f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)\right] + \cdots + \left[(n-1)\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\right].$$

Por consiguiente, $g_n'(x) = -\dfrac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$. Al mismo tiempo $g_n(b) = 0$, $g_n(a) = R_n$.

Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{b-a} = g_n'(a+\Theta' h),$$

esto es,

$$\frac{-R_n}{h} = -\frac{(b-a-\Theta' h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\Theta' h) = -\frac{h^{n-1}(1-\Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\Theta' h),$$

de donde

$$R_n = \frac{h^n(1-\Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\Theta' h),$$

según la segunda parte de la fórmula (11); ésta es la llamada *forma de Cauchy del residuo*.

Para demostrar la primera parte de la fórmula (11), esto es, la fórmula de Lagrange para el residuo, aplicaremos a las funciones $g_n(x)$ y $u_n(x) = (b-x)^n$ el Teorema de Cauchy (§ 7.5, 5). Obtenemos

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{u_n(b) - u_n(a)} = \frac{g_n'(a+\Theta h)}{u_n'(a+\Theta h)}.$$

Tomando en cuenta las ecuaciones $u_n(b) = 0$, $u_n(a) = h^n$ y $u_n'(x) = -n(b-x)^{n-1}$ concluimos que

$$\frac{-R_n}{-h^n} = -\frac{(b-a-\Theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\Theta h) \frac{1}{-n(b-a-\Theta h)^{n-1}},$$

de donde el residuo R_n es obtenido en la *forma de Lagrange*.

Por tanto el Teorema de Taylor queda demostrado completamente.

Substituyendo $b = x$ y $a = 0$, obtenemos la *fórmula de Maclaurin*:

$$(14) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

donde

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x) = \frac{x^n(1-\Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta' x). \tag{15}$$

La fórmula anterior se satisface suponiendo que la función f es n veces derivable en el intervalo cerrado $0x$ o $x0$, según que $x > 0$ ó $x < 0$. (Como se ve fácilmente de la demostración, la suposición de la n derivabilidad de la función puede substituirse por otra más débil, a saber, es suficiente suponer que la $(n-1)$-ésima derivada es continua en todo el intervalo y que existe dentro del mismo, la n-ésima derivada; éstas son las suposiciones que hemos hecho para $n = 1$ en el Teorema de Rolle.)

EJEMPLOS Y APLICACIONES. (α) Apliquemos la fórmula de Maclaurin substituyendo $f(x) = e^x$ y $n = 2$ en la fórmula (14). Como

$$f'(x) = e^x = f''(x) \quad \text{y} \quad f(0) = 1 = f'(0)$$

tenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\theta x}.$$

Por lo que concluimos que para toda x la desigualdad

$$e^x \geqslant 1 + x \tag{16}$$

se verifica, porque $x^2 \geqslant 0$ y $e^{\theta x} > 0$.

La desigualdad (16) tiene un claro contenido geométrico sobre las gráficas de las funciones $y = e^x$ y $y = 1 + x$.

(β) La fórmula de Taylor permite refinar la fórmula de L'Hospital (§ 7, (31)) como sigue: Si las funciones f y g tienen n-ésimas derivadas continuas y si

$$f(a) = 0, f'(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$g(a) = 0, g'(a) = 0, \ldots, g^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{pero} \quad g^{(n)}(a) \neq 0, \text{ entonces}$$

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \tag{17}$$

En efecto, según nuestras suposiciones y la fórmula de Taylor (10) (con b reemplazada por x), obtenemos

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a + \Theta(x-a)]$$

y

$$g(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} g^{(n)}[a + \Theta'(x-a)].$$

Por consiguiente,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}[a + \Theta(x-a)]}{g^{(n)}[a + \Theta'(x-a)]}.$$

Pasando al límite cuando x tiende a a y basándonos en la continuidad de las funciones $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$, obtenemos la fórmula (17).

Por ejemplo, para calcular $\lim_{x=0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$, escribimos $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x \operatorname{sen} x$. Por consiguiente tenemos

$$f(0) = 0 = g(0), \qquad f'(x) = 1 - \cos x,$$

$$g'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x,$$

$$f'(0) = 0 = g'(0), \qquad f''(x) = \operatorname{sen} x,$$

$$g''(x) = 2 \cos x - x \operatorname{sen} x,$$

$$f''(0) = 0, \; g''(0) = 2.$$

Aplicando la fórmula (17) (para $n = 2$) obtenemos

$$\lim_{x=0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0. \tag{18}$$

Análogamente vemos que

$$\lim_{x=0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = 0. \tag{19}$$

Porque, $\cot x - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$ y escribiendo

$$f(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad g(x) = x \operatorname{sen} x$$

obtenemos la fórmula pedida aplicando un procedimiento completamente semejante al anterior.

(γ) Aplicando la fórmula de Maclaurin a la función $f(x) = \log(1+x)$ y tomando en cuenta que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

obtenemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\Theta x)^2}$$

para $x > -1$.

En particular, tenemos, para $x = \frac{1}{n}$,

$$0 < \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n^2\left(1+\frac{1}{n}\Theta_n\right)^2} < \frac{1}{2n^2}.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (ver § 3, (14)), la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$

también es convergente. Denotamos por γ la suma de las últimas series. Entonces tenemos

$$\gamma = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n=\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1)\right].$$

Pero $\lim_{n=\infty}[\log(n+1) - \log n] = \lim_{n=\infty}\log\frac{n+1}{n} = 0$; consecuentemente,

obtenemos (ver § 7, Ejercicio 18):

$$\gamma = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right). \tag{20}$$

Aproximadamente, la constante de Euler $\gamma = 0{,}5772\ldots$ [1].

8.5. Desarrollo en series de potencias

Concluimos inmediatamente de la fórmula (12) que si $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, entonces

$$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a). \tag{21}$$

En particular, si tenemos $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ en la fórmula de Maclaurin entonces la función $f(x)$ puede desarrollarse en una serie de potencias:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \tag{22}$$

Antes de proceder a las aplicaciones del teorema anterior, observamos que si todas las derivadas $f^{(n)}$ están uniformemente acotadas en el intervalo $0x$, esto es, si existe un número M tal que la desigualdad $M > |f^{(n)}(\Theta x)|$ se verifique para toda n y para toda Θ que satisfaga la condición $0 < \Theta < 1$, entonces $f(x)$ tiene el desarrollo (22) en una serie (Maclaurin) de potencias.

Ya que $|R_n| = \left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\Theta x)\right| \leqslant \left|\frac{x^n}{n!}\right| \cdot M$, y como $\lim_{n=\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$, tenemos también $\lim_{n=\infty} R_n = 0$.

Observaciones. (α) La convergencia de la serie que aparece en el segundo miembro de la fórmula (22) no es una condición suficiente para la ecuación (22), esto es, de que se pueda desarrollar la función $f(x)$ en una serie de potencias.

[1] Hasta ahora no se sabe si γ es un número racional o irracional.
Leonhard Euler (1707-1783), gran matemático suizo; las matemáticas le deben, además de muchos nuevos resultados, una elaboración sistemática del análisis matemático de esos tiempos.

Por ejemplo la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (para $x \neq 0$), $f(0) = 0$, no puede desarrollarse en una serie de potencias aunque su serie de Maclaurin sea convergente; tenemos aquí $f^{(n)}(0) = 0$ para toda n.

(β) La fórmula (4) puede generalizarse a una serie de potencias gene al. Porque, si $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, entonces $a_0 = f(0)$, $a_1 = \frac{1}{1!} f'(0)$, y en general,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0). \tag{23}$$

En otras palabras, si una función tiene un desarrollo en una serie de potencias, entonces tiene únicamente un desarrollo, es decir, el desarrollo de Maclaurin (fórmula (22)).

Para demostrar este enunciado, demostraremos primero por inducción que la suposición

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

implica

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Substituyendo en esta fórmula $x = 0$, obtenemos la ecuación (23).

APLICACIONES 1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Para demostrar esta fórmula, observamos que escribiendo $f(x) = e^x$ tenemos $f^{(n)}(x) = e^x$ y $f^{(n)}(0) = 1$. Además, las derivadas de todos los órdenes son uniformemente acotadas, porque, si $0 \leqslant x$, entonces $f^{(n)}(\Theta x) \leqslant e^x$ y si $0 > x$, entonces $f^{(n)}(\Theta x) < 1$.

En particular : 1'. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$

2. $\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

Aplicando la fórmula (3) del § 8.1 concluimos de inmediato que las derivadas de todos los órdenes de la función están uniformemente acotadas (por el número 1) en el conjunto de todos los números reales. Además $f^{(n)}(0) = -1$, $f^{V}(0) = 1$, ...

Similarmente, demostramos que

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

Deduciremos ahora la fórmula del binomio de Newton para exponentes reales arbitrarios (que no son enteros positivos) y para $|x| < 1$:

4. $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1) \cdot \cdots \cdot (a-n+1)}{n!} x^n.$$

Consideraremos los casos de x positiva y de x negativa, separadamente, 1° $x > 0$. Como

$$f^{(n)}(x) = a(a-1) \cdot \cdots \cdot (a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

(ver (2)), el residuo en la forma de Lagrange es de la siguiente forma:

$$R_n(x) = \frac{a(a-1) \cdot \cdots \cdot (a-n+1)}{n!} x^n (1+\Theta_n x)^{a-n} \text{ (1)}.$$

Puesto que (ver § 3.4, 6) $\lim_{n=\infty} \frac{a(a-1) \cdot \cdots \cdot (a-n+1)}{n!} x^n = 0$, para $|x| < 1$, para demostrar que $\lim_{n=\infty} R_n(x) = 0$ es suficiente demostrar que para una x dada, la sucesión $(1+\Theta_n x)^{a-n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es acotada. Ahora, según la desigualdad $x > 0$ tenemos $1 < 1 + \Theta_n x < 1 + x$. Por consiguiente $1 \leqslant (1+\Theta_n x)^a \leqslant (1+x)^a$ o $(1+x)^a \leqslant (1+\Theta_n x)^a \leqslant 1$ según que $a \geqslant 0$ ó $a \leqslant 0$. Además $(1+\Theta_n x)^{-n} < 1$.

Por lo que la sucesión considerada es acotada.

2° $x < 0$. Escribiendo el residuo en la forma de Cauchy, tenemos

$$R_n(x) = \frac{a(a-1) \cdot \cdots \cdot (a-n+1)}{(n-1)!} x^n (1-\Theta'_n)^{n-1} (1+\Theta'_n x)^{a-n}.$$

Al igual que antes, tenemos

$$\lim_{n=\infty} \frac{(a-1)(a-2) \cdot \cdots \cdot (a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = 0;$$

(1) Agregamos el signo n a Θ para hacer notar que Θ depende de n.

ha de demostrarse que la sucesión $(1-\Theta_n')^{a-1}(1+\Theta_n'x)^{a-n}$ es acotada, esto es, que las sucesiones $\left(\frac{1-\Theta_n'}{1+\Theta_n'x}\right)^{a-1}$ y $(1+\Theta_n'x)^{a-1}$ son acotadas. Para este propósito escribimos $y = -x$. Entonces $y > 0$ y $\Theta_n' > \Theta_n'y$, de donde $1-\Theta_n' < 1-\Theta_n'y < 1$. Por consiguiente,

$$\left(\frac{1-\Theta_n'}{1-\Theta_n'y}\right)^{a-1} < 1.$$

Por otra parte, $1-y < 1-\Theta_n'y < 1$ y así

$$(1-y)^{a-1} \leqslant (1-\Theta_n'y)^{a-1} \leqslant 1 \quad \text{ó} \quad 1 \leqslant (1-\Theta_n'y)^{a-1} \leqslant (1-y)^{a-1}$$

según que $a-1 \geqslant 0$ ó $a-1 \leqslant 0$. Por tanto ambas sucesiones son acotadas. De aquí que $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x) = 0$.

Ejemplos. Substituyendo $a = \frac{1}{2}$ obtenemos

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots$$

Para $a = -\frac{1}{2}$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

De aquí

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots$$

La fórmula anterior permite aplicar al desarrollo de la función arc sen x en una serie de potencias, el mismo método que hemos aplicado al desarrollar las funciones $\log x$ y arc tan x. A saber, como se ha visto, la serie que aparece en esta fórmula es la derivada de la serie

$$S(x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Pero

$\frac{d}{dx}$ arc sen $x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; por lo que arc sen $x = S(x)+C$.

Al mismo tiempo, arc sen $0 = 0 = S(0)$ y entonces $0 = 0$, esto es, arc sen $x = S(x)$. En esta forma, tenemos la siguiente fórmula:

5. arc sen $x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$, $|x| < 1$.

Observamos que substituyendo $x = \frac{1}{2}$ y tomando en cuenta el hecho de que sen sen $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ obtenemos:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots$$

8.6. Un criterio para extremos

Hemos demostrado en el § 7.4, 2 que si una función derivable tiene un extremo en un punto x, entonces $f'(x) = 0$. Sin embargo, el teorema recíproco no es verdadero: la ecuación $f'(x) = 0$ no implica la existencia de un extremo en el punto x; el ejemplo de la función $f(x) = x^3$ lo demuestra. La investigación de las derivadas de ordenes superiores conduce al siguiente criterio más preciso para la existencia de un extremo.

Supongamos que $f'(c) = 0, f''(c) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(c) = 0$ y $f^{(n)}(c) \neq 0$. Entonces, si n es un número par, la función f tiene un extremo propio en el punto c, es decir un máximo, si $f^{(n)}(c) < 0$, y un mínimo, si $f^{(n)}(c) > 0$. Pero si n es un número impar, entonces la función no tiene un extremo en el punto c. (Suponemos la continuidad de la n-ésima derivada en el punto c.)

En efecto, aplicando la fórmula de Taylor tenemos

$$(24) \qquad f(c+h) = f(c) + \frac{h}{1!}f'(c) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(c) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c+\Theta h),$$

de donde, según las suposiciones de nuestro teorema obtenemos

$$(25) \qquad f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c+\Theta h).$$

Consideremos que n es un número par y sea $f^{(n)}(c) < 0$. Debido a la continuidad de la función $f^{(n)}$ en el punto c, sabemos que existe una $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|x-c| < \delta$ implica $f^{(n)}(x) < 0$. Ya que

$|\Theta h| < \delta$ para $|h| < \delta$, de modo que $f^{(n)}(c+\Theta h) < 0$. Por lo que concluimos por (25) que si $0 < |h| < \delta$, entonces $f(c+h)-f(c) < 0$ (porque $h^n > 0$ para n par). Esto significa que la función f tiene un máximo en el punto c.

Se comprueba con argumentos análogos, que si n es un número par y si $f^{(n)}(c) > 0$, entonces $f(c+h)-f(c) > 0$ y por consiguiente la función tiene un mínimo en el punto c.

Ahora supongamos que n es un número impar. Sea $f^{(n)}(c) < 0$ (en caso de que $f^{(n)}(c) < 0$, los argumentos son análogos). Como antes, escogemos un número $\delta > 0$ de una manera que $f^{(n)}(c+\Theta h) < 0$ para $|h| < \delta$. Entonces para $0 < h < \delta$ tenemos la desigualdad $f(c+h)-f(c) < 0$; esto es, $f(c) > f(c+h)$ y para $-\delta < h < 0$, tenemos la desigualdad $f(c+h)-f(c) > 0$, demostrando que $f(c) < f(c+h)$. Por consiguiente, no es ni un máximo ni un mínimo en el punto c.

EJEMPLO. La función $f(x) = x^n$ tiene un mínimo en el punto 0, si n es un número par. Si n es impar, entonces, no hay extremo en este punto.

En efecto, la primera derivada de la función x^n que se anula en el punto $x = 0$ es la n-ésima derivada (ver (1)) y $f^{(n)}(x) = n!$

Observación. El teorema anterior no determina para todas las funciones (muchas veces derivables) si un extremo existe en un punto dado (por ejemplo, para la función e^{-1/x_2} considerada en el § 8.4 de la cual todas las derivadas se anulan en el punto 0). Sin embargo, siempre nos permite contestar esta pregunta para funciones que tienen un desarrollo de Taylor (fórmula (21)) en una vecindad de un punto dado a. Puesto que se deduce de la fórmula (21) que si la función f no es constante, entonces no todas las derivadas de esta función se anulan en el punto a.

8.7. Interpretacion geométrica de la segunda derivada. Puntos de inflexión.

Como hemos visto en el § 7.7, 3, si $f'(c) > 0$, entonces la función crece en una vecindad del punto c. Por tanto si $f''(c) > 0$, entonces la función f' crece, luego, suponiendo que $f'(c) > 0$, la función f crece cada vez más.

1. *Si $f''(c) > 0$, entonces en cierta vecindad del punto c la curva $y = f(x)$ está por encima de la tangente de esta curva en el punto $[c, f(c)]$ (por consiguiente, presenta la convexidad hacia abajo).*

Análogamente, si $f''(c) < 0$, entonces esta curva está localmente por debajo de la tangente (por tanto, presenta la convexidad hacia arriba).

En ambos casos suponemos la continuidad de la segunda derivada.

En efecto, estimemos la diferencia entre el cociente de las diferencias y la derivada

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c).$$

Según la fórmula de Taylor, tenemos

$$f(c+h)-f(c)-hf'(c) = \frac{h^2}{2} f''(c+\Theta h).$$

Por tanto, suponiendo que $f''(c) > 0$, para h suficientemente pequeñas, tenemos también $f''(c+\Theta h) > 0$, de lo que se deduce que $f(c+h)-f(c)-hf'(c) > 0$. Interpretando el cociente de las diferencias como la tangente del ángulo entre la secante y el eje X, concluimos que para $h > 0$ esta tangente es mayor que $f'(c)$, esto es, mayor que la tangente del ángulo entre la tangente y el eje X. Esto significa que el arco de la curva está por encima de la tangente.

La demostración de la segunda parte del teorema es completamente análoga.

EJEMPLO. La parábola $y = x^2$ está, en la vecindad de cualquier punto, por encima de la tangente en ese punto. La segunda derivada es igual a 2.

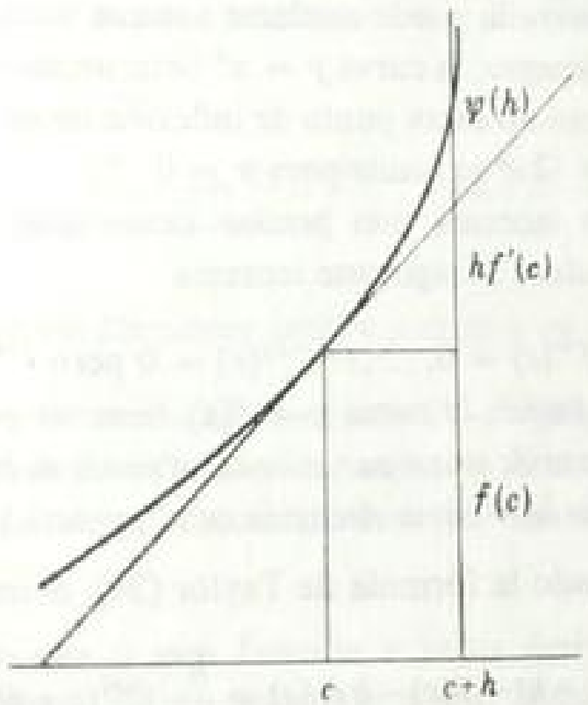


FIG. 22

Una curva $y = f(x)$ se dice que tiene un punto de inflexión en el punto c, si para incrementos suficientemente pequeños $h(|h| < \delta)$ el arco de la curva está para incrementos positivos en el otro lado de la tangente a la curva en el punto $[c, f(c)]$ del que está para incrementos negativos. En otras palabras: existe un número $\delta > 0$ tal que la expresión

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c)$$

sea positiva para $0 < h < \delta$ y negativa para $0 > h > -\delta$ o recíprocamente: negativa para $0 < h < \delta$ y positiva para $0 > h > -\delta$.

Ejemplo. La curva senoidal $y = \operatorname{sen} x$ tiene un punto de inflexión en el punto 0. En efecto, $\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 0 - h \cos 0 = \operatorname{sen} h - h$. Esta diferencia es negativa para $h > 0$ y positiva para $h < 0$.

Similarmente, la parábola cúbica $y = x^3$ tiene un punto de inflexión en el punto 0.

Se deduce del Teorema 1 que si $f''(c) \neq 0$, entonces la curva está (localmente) a un lado de la tangente. Por tanto el punto c no es un punto de inflexión. En otras palabras:

2. *Si un punto c es un punto de inflexión de una curva $y = f(x)$ entonces $f''(c) = 0$.*

Este teorema no puede invertirse; la segunda derivada puede anularse en un punto c aunque el punto c no sea un punto de inflexión (justamente como la primera derivada puede anularse aunque no haya extremo en el punto dado); por ejemplo, la curva $y = x^4$ tiene un mínimo en el punto 0 y por tanto este punto no es un punto de inflexión de esta función aunque la segunda derivada $12x^2$ se anule para $x = 0$.

Para obtener un teorema más preciso tienen que considerarse más derivadas. Esto conduce al siguiente teorema:

3. *Si $f''(c) = 0, f'''(c) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(c) = 0$ pero $f^{(n)}(c) \neq 0$ entonces en el caso de una n impar, la curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto c, en el caso de una n par, c no es un punto de inflexión. (Suponemos la continuidad de la n-ésima derivada en el punto c.)*

En efecto, aplicando la fórmula de Taylor (24), obtenemos

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c + \Theta h).$$

Supongamos que n es un número impar, y sea $f^{(n)}(c) > 0$ (los argumentos en el caso $f^{(n)}(c) < 0$ son análogos). Entonces para incrementos de h suficientemente pequeños tenemos $f^{(n)}(c + \Theta h) > 0$. De aquí tenemos $\psi(h) > 0$ para $h > 0$ y $\psi(h) < 0$ para $h < 0$. Por consiguiente, el punto c es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.

Por otro lado, si n es un número par, entonces $h^n > 0$ independientemente del signo de h, de donde $\psi(h)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(c)$. De aquí, la curva está a un lado de la tangente a la curva en el punto $[c, f(c)]$. Por consiguiente, el punto c no es un punto de inflexión.

Observación. Como en el caso de los extremos, la cuestión de si c es un punto de inflexión, puede ser siempre contestada (según el Teorema 3) para funciones desarrollables en series de Taylor en una vecindad del punto c. Al mismo tiempo, los puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$ son extremos de la curva $y = f'(x)$.

Ejercicios del § 8

1. Demuéstrese la fórmula (Halphen):

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \cdot e^{1/x}) = (-1)^n x^{-n-1} \cdot e^{1/x}.$$

2. Hállese la n-ésima derivada de las funciones: $\dfrac{\log x}{x}$, $e^x \cos x$.

3. Evalúense

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x=0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \quad \lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right).$$

4. Desarróllense las funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ en series de potencias.

5. Trácense las gráficas de las funciones x^x, $e^{1/x}$, $\log \operatorname{sen} x$, mostrando sus extremos, puntos de inflexión, asíntotas, puntos de discontinuidad por un lado o puntos de discontinuidad por ambos lados (si existe alguno).

6. Demuéstrese que si una función n veces derivable se anula en $n+1$ puntos diferentes de un intervalo dado, entonces existe en este intervalo un punto en el cual la n-ésima derivada se anula.

7. Sea $f(x) = \frac{1}{x^n} e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demuéstrese que $f'(0) = 0$. Dedúzcase como un corolario, que la función g definida por las condiciones

$$g(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{para} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad g(0) = 0$$

tiene en el punto 0 derivadas de todos los órdenes iguales a 0 (ver § 8.5, Observación (α)).

8. Demuéstrese que $e^n < (2n+1)\frac{n^n}{n!}$. Dedúzcase que

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

CAPÍTULO 4

CALCULO INTEGRAL

§ 9. INTEGRALES INDEFINIDAS

9.1. Definición

Una función F se llama *función primitiva* de una función f definida en un intervalo abierto (finito o infinito) si $F'(x) = f(x)$ para toda x.

Por ejemplo, la función sen x es una función primitiva de la función cos x. Una función de la forma sen $x + C$, donde C es una constante, es también una función primitiva de la función cos x.

Si una función f se define en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la función F se llama su función primitiva, si $F'(x) = f(x)$ para $a < x < b$, $F'_+(a) = f(a)$ y $F'_-(b) = f(b)$.

1. *Si dos funciones F y G son las primitivas de una función f en un intervalo ab (abierto o cerrado), entonces estas dos funciones difieren por una constante.*

En efecto, si $F'(x) = G'(x)$, entonces, según el Teorema 4 del § 7.5, existe una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$ para toda x.

Recíprocamente, una función obtenida sumándole una constante a una función primitiva de una función f, es también una función primitiva de la función f. Por consiguiente la expresión $F(x) + C$ es la forma general de una función primitiva de la función f. Indicamos esta expresión por el símbolo $\int f(x)dx$ ("la integral de $f(x)dx$") y la llamamos la *integral indefinida de la función f*. Entonces tenemos

(1) $\int f(x)dx = F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$,

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$$

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x)+C. \tag{3}$$

La evaluación de la integral indefinida de una función f, esto es, el cálculo de la función primitiva de una función f se denomina la *integración de la función f*. De modo que la integración es una operación inversa de la derivación.

Se deduce de la definición de la integral indefinida, que cualquier fórmula para la derivada de una función automáticamente da una fórmula para la integral de otra función (a saber, la función derivada). Por ejemplo, de la fórmula $\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x$, obtenemos $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$.

No obstante, en general, el problema del cálculo de la integral de una función continua, de la cual no sabemos que sea la derivada de cierta función, es más difícil que el problema de la derivación. Como hemos visto en el § 7, la derivación de funciones que son composiciones de funciones elementales no conduce fuera de su dominio; sin embargo no vale un teorema análogo para integrales indefinidas.

Sólo se sabe que toda función continua tiene una integral indefinida (ver § 9.2). Sin embargo, este teorema no nos da un procedimiento práctico para evaluar la integral indefinida de una función continua dada.

EJEMPLOS. Aplicando fórmulas bien conocidas del cálculo diferencial, obtenemos inmediatamente las siguientes:

$$\int 0\,dx = C, \tag{4}$$

$$\int a\,dx = ax + C, \tag{5}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \tag{6}$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C, \tag{7}$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C, \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C, \tag{10}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C, \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tan} x + C, \tag{13}$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\,C, \quad \text{si} \quad a \neq -1 \ \text{y}\ x > 0. \tag{14}$$

Observación. Si el dominio de x para el cual se satisface la ecuación $F'(x) = f(x)$ no es un intervalo (finito o infinito), entonces no puede establecerse que la expresión $F(x)+C$ provea todas las funciones primitivas de la función f en este dominio de argumentos.

Por ejemplo, $\log|x|+C$ da todas las funciones primitivas de la función $\frac{1}{x}$ en cada uno de los dos dominios $x < 0$ y $x > 0$, separadamente, pero no en todo el dominio de x real y diferente de 0. A saber, la función $G(x)$ definida como $\log|x|$ para $x < 0$ y como $\log|x|+1$ para $x \neq 0$ es una función primitiva de la función $\frac{1}{x}$ para toda $x \neq 0$ aunque no esté dada por la fórmula $\log|x|+C$.

Completemos ahora el Teorema 1 como sigue:

2. *Sea x_0 un punto dentro de un intervalo ab y sea y_0 un número real arbitrario. Si una función f tiene una función primitiva en el intervalo ab, entonces tiene una y sólo una función primitiva F tal que $F(x_0) = y_0$.*

Sea $P(x)$ una función primitiva arbitraria de la función $f(x)$ en un intervalo ab. Escribamos $F(x) = P(x) - P(x_0) + y_0$. Entonces tenemos $F'(x) = P'(x) = f(x)$ y $F(x_0) = y_0$. Por lo que la función F satisface las condiciones del teorema.

Además, ésta es la única función que satisface estas condiciones, puesto que cualquier otra primitiva de la función f es de la forma $F(x)+C$, donde $C \neq 0$, y esto implica $F(x_0)+C = Y_0 + C \neq y_0$.

Geométricamente, este teorema significa que dado cualquier punto del plano con la abscisa en el intervalo ab, existe una curva integral (esto es, la gráfica de una función primitiva) que pasa por este punto.

Como las curvas integrales son paralelas una a otra, únicamente una

curva integral de una función dada f puede pasar por un punto dado del plano.

9.2. La integral del límite, integrabilidad de funciones continuas

Hemos demostrado en el § 7.9 que dada una sucesión de funciones $F_n(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, tal que las derivadas son continuas y uniformemente convergentes en el intervalo ab a una función $g(x)$ y que la sucesión $F_n(c)$ convergente a cierto punto c del intervalo ab, la sucesión $F_n(x)$ es convergente para toda x perteneciente a este intervalo; además escribiendo $F(x) = \lim\limits_{n=\infty} F_n(x)$, tenemos $F'(x) = g(x)$.

De aquí, se sigue el siguiente lema:

1. *Si las funciones $f_n(x)$ son continuas y convergen uniformemente en un intervalo ab a una función $f(x)$ y si tienen funciones primitivas, entonces la función $f(x)$ también tiene una función primitiva.*

Las funciones primitivas $F_n(x)$ pueden ser escogidas en tal forma (según el § 9.1, 2) que la ecuación $F_n(c) = 0$ sea válida para cierto punto c del intervalo ab, para todo valor de n. Entonces

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} F_n(x) + C$$

esto es, la integral del límite es igual al límite de las integrales.

En efecto, para obtener nuestro lema es suficiente substituir en la formulación anterior f_n en lugar de F_n' y f en lugar de g.

2. Teorema. *Toda función continua en un intervalo ab, tiene una función primitiva en este intervalo.*

Por el teorema demostrado en el § 6.4, toda función continua en el intervalo ab es límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones poligonales. Por tanto, según el lema, queda únicamente por demostrar que cualquier función poligonal f tiene una función primitiva.

Según la definición de una función poligonal existe un sistema de $n+1$ puntos $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, donde $a_0 = a$, $a_n = b$ y dos sistemas de números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tales que $f(x) = c_k x + d_k$ para $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Escribamos

$$F_k(x) = \tfrac{1}{2}c_k x^2 + d_k x + e_k \quad \text{para} \quad a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k,$$

donde $e_1 = 0$ y

$$e_{k+1} = \tfrac{1}{2}c_k a_k^2 + d_k a_k + e_k - (\tfrac{1}{2}c_{k+1} a_k^2 + d_{k+1} a_k)$$

para $k \geqslant 1$.

Entonces $F_k(a_k) = F_{k+1}(a_k)$, por lo que la colección de las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_n$ define una función igual a cada una de las de esta colección en el intervalo adecuado, respectivamente.

Derivando la función F_k obtenemos inmediatamente $F'(x) = f(x)$; esto es, la función F es primitiva con respecto a la función f.

9.3. Fórmulas generales de integración

Supongamos que las funciones f y g son continuas. Entonces se verifican las siguientes fórmulas.

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ puesto que

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = f(x) + g(x).$$

2. $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$,

ya que $\dfrac{d}{dx}\left(a \displaystyle\int f(x)\,dx\right) = a \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int f(x)\,dx = a f(x)$.

Ejemplo. La integral de un polinomio.

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\,dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

3. La fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)\, g'(x)\,dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\,dx$$

(si las funciones f' y g' son continuas).

Escribimos esta fórmula más brevemente, tomando $y = f(x)$ y $z = g(x)$ como sigue:

$$\int y \frac{dz}{dx}\,dx = yz - \int z \frac{dy}{dx}\,dx.$$

Para comprobar esta fórmula, derivemos su segundo miembro. Obtenemos: $yz'+y'z-zy' = yz'$. Esto es la función integrada del primer miembro de la fórmula. Por consiguiente, la fórmula está comprobada.

Un caso especial de la fórmula 3 es la siguiente fórmula que se obtiene de 3 por la substitución $z = x$:

$$3'. \int y\,dx = yx - \int z\frac{dy}{dx}\,dx.$$

EJEMPLO. $\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C.$

4. *La fórmula de integración por substitución (esto es, la fórmula para el cambio de variable):*

$$\int g[f(x)]\frac{df(x)}{dx}\,dx = \int g(y)\,dy,$$

donde en el segundo miembro se debe substituir $y = f(x)$ después de evaluar la integral.

Reescribimos esta fórmula más brevemente, poniendo $y = f(x)$ y $z = g(y)$, como sigue:

$$\int z\frac{dy}{dx}\,dx = \int z\,dy.$$

Escribamos $G(y) = \int g(y)dy$. Para demostrar la fórmula 4 tiene que demostrarse que la derivada de la función $G[f(x)]$ es igual a la función integrada del primer miembro de esta fórmula. Ahora,

$$\frac{dG[f(x)]}{dx} = \left(\frac{dG(y)}{dy}\right)_{y=f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx} = g[f(x)]\frac{df(x)}{dx}. \quad \text{Q. E. D.}$$

Como se ve, desde el punto de vista del cálculo podemos reducir por la diferencial. La fórmula 3 puede escribirse también en la siguiente forma:

$$\int y\,dz = yz - \int z\,dy.$$

EJEMPLOS. (α) $\int g(ax)dx = \frac{1}{a}\int g(y)dy$, donde $y = ax$.

Es decir, substituyendo $f(x) = ax$ en la fórmula 4, tenemos

$$\frac{1}{a}\int f(ax)\,a\,dx = \frac{1}{a}\int g(y)\,dy.$$

(β) Análogamente demostramos que

$$\int f(x+a)\,dx = \int f(y)\,dy, \quad \text{donde} \quad y = x+a.$$

(γ) [1] Para evaluar la integral $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$ substituimos $y = x^2$.

Obtenemos:

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2)}{dx}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{1+y} = \frac{1}{2}\log(1+y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Puesto que, como hemos dicho, por la integración puede substituirse la diferencial $df(x)$ por $f'(x)dx$, esto es ,en el caso dado, $d(x^2)$ en lugar de $2xdx$, el cálculo anterior puede efectuarse de una manera más corta:

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

(δ) Tenemos para $n > 1$

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(1+x^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

(ε) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log|\cos x|.$

Las fórmulas (γ) y (ε) se obtienen fácilmente de la siguiente fórmula general:

(ζ) $\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + C.$

[1] Para simplificar los cálculos, omitimos la constante C del ejemplo (γ) y de los demás ejemplos.

Substituyendo $y = 1+x^2$ en la fórmula (δ) deducimos esta fórmula de la siguiente fórmula general:

$$(\eta) \quad \int y^a \frac{dy}{dx}\,dx = \int y^a\,dy = \frac{1}{a+1}\,y^{a+1}+C \quad (a \neq -1).$$

Como se ha visto, el método de integración en los ejemplos anteriores consiste en obtener una función $y = f(x)$ tal que la integral dada se transforme en una integral con respecto a y (la cual es fácil de calcular). Esto permite substituir el cálculo de la integral del primer miembro de la fórmula 4 por el de la integral en el segundo miembro de esta fórmula. Algunas veces, el procedimiento inverso, esto es, la substitución del segundo miembro por el primero es más adecuado; para calcular la integral $\int g(y)dy$ buscamos una función estrictamente monótona $y = f(x)$ tal que la integral $\int g[f(x)]\dfrac{df(x)}{dx}\,dx$ puede calcularse fácilmente. Designando por $x = h(y)$ la función inversa a $y = f(x)$ y por $F(x)$ y $G(y)$ las integrales en el miembro y en el segundo de la fórmula 4, respectivamente, tenemos entonces

$$F(x) = G\,[f(x)], \quad \text{esto es,} \quad G(y) = F[h(y)].$$

En otras palabras,

$$\int g(y)\,dy = \int g[f(x)]\frac{df(x)}{dx}\,dx,$$

donde en la integral del segundo miembro tiene que substituirse $x = h(y)$.

EJEMPLO. Substitúyase en la siguiente integral $x = \operatorname{sen} t$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos t\,\frac{d \operatorname{sen} t}{dt}\,dt = \int \cos^2 t\,dt,$$

pero $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2t)$, de donde $\displaystyle\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$. Como $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$, obtenemos

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Observación. Verificamos el proceso derivando la función obtenida como resultado de la integración. Después de la derivación debemos obtener la función integrada.

5. *Métodos recursivos para el cálculo de integrales.* El método de recurrencia para el cálculo de la integral $\int f_n(x)dx$ consiste en el cálculo de la integral para $n = 1$ (o para $n = 0$) y reduciendo la n-ésima integral a la n-1-ésima (o una anterior).

EJEMPLOS. (α) Evalúese la intregal $I_n = \int e^{-x}x^n dx$. Ahora, $I_0 = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$. Además, integrando por partes, tenemos (para $n > 0$):

$$I_n = -\int x^n d(e^{-x}) = -x^n e^{-x} + \int e^{-x}\frac{dx^n}{dx}\,dx$$
$$= -x^n e^{-x} + nI_{n-1}.$$

En particular, $I_1 = -xe^{-x}+I_0$, $I_2 = -x^2e^{-x}+2I_1, \ldots$ Multiplicando I_0 por $n!$, I_1 por $\dfrac{n!}{1!}, \cdots, I_{n-1}$ por $\dfrac{n!}{(n-1)!}$, sucesivamente y sumando, obtenemos

$$\int e^{-x}x^n dx = -n!e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)+C.$$

(β) Sea $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Ahora, $I_1 = \operatorname{arc\,tan} x$. Además, tenemos para $n > 1$

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}.$$

Como

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = -2(n-1)\frac{x}{(1+x^2)^n},$$

obtenemos integrando por partes

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-1}{2n-2}\int x\,d\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$
$$= \frac{-1}{2n-2}\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right].$$

En consecuencia

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Esta es la fórmula de recurrencia requerida.

(γ) Sea $y = f(x)$, $z = g(x)$. Calculamos la integral $\int zy^{(n+1)}dx$ aplicando n veces la integración por partes:

$$\int zy^{(n+1)}dx = zy^{(n)} - \int z'y^{(n)}dx,$$

$$\int z'y^{(n)}dx = z'y^{(n+1)} - \int z''y^{(n-1)}\,dx,$$

. . . . . .

$$\int z^{(n)}y'dx = z^{(n)}y - \int z^{(n+1)}y\,dx.$$

Por tanto

$$\int zy^{(n+1)}dx =$$

$$= zy^{(n)} - z'y^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n z^{(n)}y + (-1)^{n+1}\int z^{(n+1)}y\,dx.$$

Esta fórmula puede aplicarse, por ejemplo, a la integral previamente calculada $\int e^{-x}x^n dx$ después de tomar en cuenta que

$$e^{-x} = (-1)k\,\frac{d^k(e^{-x})}{dx^k}.$$

9.4. Integración de funciones racionales

Sea dada una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios. Deseamos calcular la integral $\int f(x)dx$.

Podemos suponer que *el grado del numerador es menor que el del denominador*. Porque si esto no fuera así, podríamos dividir el numerador por el denominador y luego integrar la suma de un polinomio (eventualmente reducida a una constante) y de una fracción cuyos numerador y denominador son polinomios, y el grado del numerador es menor que el grado del denominador. El primero de estos dos términos se integra fácilmente (como un polinomio); por consiguiente nuestra tarea es integrar la segunda componente, esto es, un cociente de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde el polinomio $P(x)$, es de un grado menor que el grado del polinomio $Q(x)$.

El siguiente teorema sobre funciones racionales se demuestra en libros de álgebra:

Llamemos a una expresión de la forma

$$\frac{A}{(x-p)^k} \quad \text{ó} \quad \frac{Cx+D}{[(x-q)^2+r^2]^k},$$

donde A y p, ó C, D, q y r son números reales, una fracción parcial.

Entonces una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una suma de fracciones parciales cuyos denominadores son los factores del polinomio $Q(x)$.

Para descomponer una función en fracciones parciales, primero tiene que descomponerse el polinomio $Q(x)$ en factores primos. Luego tienen que hallarse los coeficientes que aparecen en los numeradores de las fracciones parciales. La factorización del polinomio $Q(x)$ es obtenida aplicando el teorema conocido de álgebra que establece que si p es una raíz (real o compleja) de la ecuación $Q(x) = 0$, entonces $x-p$ es un factor del polinomio $Q(x)$; además, si p es una raíz de multiplicidad n, entonces $(x-p)^k$ es un factor de este polinomio para toda $k \leqslant n$. Finalmente, si $u+iv$ es una raíz compleja de la ecuación $Q(x) = 0$ con coeficientes reales, entonces $u-iv$, también es una raíz de esta ecuación (de la misma multiplicidad), y entonces el polinomio $Q(x)$ tiene al producto $(x-u-iv)\ (x-u+iv) = (x-u)^2+v^2$ como factor.

Los coeficientes que aparecen en los numeradores de las fracciones parciales se encuentran generalmente por el llamado *método de los coeficientes indeterminados*, que estudiaremos por ejemplos.

El denominador de la función racional $\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}$ tiene los factores $(x-2)^2$, $(x-2)$ y $(x-3)$. Por consiguiente, nuestra función racional es de la forma

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Para calcular los coeficientes A, B y C, reducimos las fracciones del segundo miembro de la ecuación anterior a un común denominador. Obtenemos

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{(B+C)x^2+(A-5B-4C)x-3A+6B+4C}{(x-2)^2(x-3)}.$$

Los numeradores del primero y segundo miembros de la identidad anterior son iguales uno a otro para todo valor de x. De lo que se deduce

$$B+C=0, \quad A-5B-4C=1, \quad -3A+6B+4C=-1.$$

Estas ecuaciones dan los valores A, B y C:

$$A=-1, \quad B=-2, \quad C=2.$$

En consecuencia,

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-3}.$$

Notamos que los coeficientes A, B y C podrían encontrarse de una manera ligeramente más simple como sigue. Después de reducir al común denominador, obtenemos la siguiente identidad:

$$A(x-3)+B(x-2)(x-3)+C(x-2)^2 = x-1.$$

Substituyendo en esta identidad $x=2$, obtenemos $A=-1$; la substitución $x=3$ da $C=2$. Por tanto, substituyendo $x=1$, concluimos $B=-2$.

Veamos otro ejemplo de descomposición de una función racional en fracciones parciales:

$$\frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x+1}.$$

Reduciendo al común denominador obtenemos la identidad

$$(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+1)(x+1)+E(x^2+1)^2 = x-1,$$

de donde obtenemos fácilmente

$$A=1, \quad B=0, \quad C=\tfrac{1}{2}, \quad D=-\tfrac{1}{2}, \quad E=-\tfrac{1}{2}.$$

El teorema sobre la descomposición de una función racional en fracciones parciales reduce el problema de la integración de funciones racionales a la integración de fracciones parciales. Ahora, veremos que *las fracciones parciales pueden integrarse por los métodos que ya hemos estudiado.*

En efecto, substituyendo $y=x-p$ obtenemos

$$\int \frac{A\,dx}{(x-p)^k} = A\int \frac{dy}{y^k} = A\log y \qquad \text{para } k=1,$$

$$\text{ó} \qquad = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{y^{k-1}} \qquad \text{para } k>1, \text{ respectivamente.}$$

La evaluación de la integral

$$\int \frac{(Cx+D)\,dx}{[(x-q)^2+r^2]^k}$$

se reduce a la de dos integrales:

$$\int \frac{dx}{[(x-q)^2+r^2]^k} \quad y \quad \int \frac{(x-q)\,dx}{[(x-q)^2+r^2]^k}.$$

Substituyendo $y=x-q$, la primera de estas integrales se reduce a $\int \frac{dy}{(y^2+r^2)^k}$, que se reduce por la substitución $z=y/r$ a $\int \frac{dz}{(z^2+1)^k}$ la cual ya conocemos (ver § 9.3, 5 (β)).

La segunda integral la obtenemos por la fórmula § 9.3′ (ζ) y (η) substituyendo $y=(x-q)^2+r^2$; a saber,

$$\int \frac{(x-q)\,dx}{[(x-q)^2+r^2]^k} = \frac{1}{2}\log[(x-q)^2+r^2]$$

$$\text{ó} \qquad = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{[(x-q)^2+r^2]^{k-1}}$$

según que $k=1$ ó $k\neq 1$.

Por tanto, la integración de funciones racionales puede efectuarse siempre (por supuesto, si las raíces de la ecuación $Q(x)=0$ son conocidas).

EJEMPLOS. (α) $I = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$. Puesto que

$$x^2+x+1 = x^2+x+\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4} = (x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4},$$

de modo que substituyendo primero $y = x + \frac{1}{2}$ y luego $z = \frac{2}{\sqrt{3}} y$, obtenemos

$$I = \int \frac{dy}{y^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{4}{3} dy}{(\frac{4}{3} y^2 + 1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tan} z$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tan} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

$$(\beta)\ I = \int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$= \int \left[\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1} \right] dx.$$

Reduciendo el segundo miembro de esta ecuación al común denominador, hallamos con facilidad: $A = 3$, $B = 4$, $C = 2$, $D = -1$.

Integrando, obtenemos

$$I = -\frac{3}{x-1} + 4 \log|x-1| - \frac{2}{x+1} - \log|x+1|$$

$$= \frac{5x+1}{1-x^2} + \log \frac{(x-1)^4}{|x+1|}.$$

Observación. Analizando el método de integración de funciones racionales, establecemos que la integral de una función racional es de la forma

$$W(x) + A \log U(x) + B \operatorname{arc\,tan} V(x),$$

donde $W(x)$, $U(x)$ y $V(x)$ son funciones racionales y A y B son coeficientes constantes.

9.5. Integración de funciones irracionales de segundo grado

Consideraremos una integral de la forma

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx.$$

Antes que nada, consideremos el caso en que $a = 0$. Entonces podemos suponer que $b \neq 0$, ya que en caso contrario la función bajo el signo

de la integral se reduciría a una constante. Por tanto, tenemos que evaluar la integral

$$I = \int \sqrt{bx + c}\, dx, \quad b \neq 0.$$

Substituimos $t = bx + c$, esto es, $x = \frac{t-c}{b}$ de donde $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$.

Entonces la integral se transforma en la siguiente:

$$I = \int \sqrt{t} \frac{dx}{dt} dt = \int \sqrt{t} \frac{1}{b} dt = \frac{2}{3b} t \sqrt{t} = \frac{2}{3b} (bx + c) \sqrt{bx + c}.$$

Ahora, supongamos que $a \neq 0$. Consideremos dos casos: (1) $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Como es sabido, esta suposición implica que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga raíces reales y el trinomio de segundo grado sea de la forma $ax^2 + bx + c = a(x-p)(x-q)$, donde p y q son las raíces de la anterior ecuación, por consiguiente tenemos

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c\, dx} = \int (x-p) \sqrt{a \frac{x-q}{x-p}}\, dx.$$

Substitúyase $a \frac{x-q}{x-p} = t^2$, esto es, $x = \frac{aq - t^2 p}{a - t^2}$.

Obtenemos

$$I = \int t \frac{aq - ap}{a - t^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt.$$

Siendo ésta una integral de una función racional (ya que $\frac{dx}{dt}$ es una función racional, como se ha visto), puede calcularse por los métodos del § 9.4.

(2) $b^2 - 4ac < 0$. En este caso puede suponerse que $a > 0$, ya que de otra manera, el trinomio que constituye la función bajo el signo de la raíz, que es de la forma $a[(x-a)^2 + \beta^2]$, sería siempre negativo. Aplicamos la siguiente substitución de Euler:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t, \quad \text{esto es,} \quad bx + c = 2xt\sqrt{a} + t^2,$$

o sea

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}.$$

Y a que $\sqrt{ax^2+bx+c}$ así como $\dfrac{dx}{dt}$ son funciones racionales de la variable t, nuestra integral se reduce a una integral de una función racional.

La substitución anterior de Euler puede aplicarse también en el caso (1). Siempre que $a > 0$.

Si $c > 0$, puede aplicarse la segunda substitución de Euler

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}, \quad \text{esto es,} \quad ax+b = xt^2+2t\sqrt{c},$$

o sea

$$x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}.$$

En forma similar al caso previo, vemos que esta substitución reduce la integral I a una integral de una función racional con respecto a la variable t.

Consecuentemente, concluimos que la integral I puede evaluarse para cualesquiera valores de las constantes a, b y c. Se deduce también de las consideraciones anteriores que si $R(u, v)$ es una función racional de las variables u y v, entonces la integral

$$\int R(\sqrt{ax^2+bx+c}, x)dx$$

se reduce a la integración de una función racional (por consiguiente, la integración se puede efectuar).

EJEMPLOS. (α) Sea $I = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$ para $x^2 > -c$. Aplicaremos la primera substitución de Euler en una forma ligeramente modificada. A saber, substituyamos $\sqrt{x^2+c} = t-x$, de donde $x = \dfrac{t^2-c}{2t}$ y $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2+c}{2t^2}$.

De aquí $t-x = \dfrac{t^2+c}{2t}$ e

$$I = \int \frac{2t}{t^2+c}\cdot\frac{t^2+c}{2t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t|+C = \log|x+\sqrt{x^2+c}|+C.$$

(β) $I = \int\sqrt{x^2+c}dx$ para $x^2 > -c$. Esta integral puede evaluarse por medio de la substitución de Euler. Sin embargo, puede calcularse más simplemente por reducción (por integración por partes) a la integral previa.

A saber,

$$I = x\sqrt{x^2+c}-\int x\frac{d\sqrt{x^2+c}}{dx}dx = x\sqrt{x^2+c}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+c}}$$

$$= x\sqrt{x^2+c}-\int\frac{x^2+c-c}{\sqrt{x^2+c}}dx = x\sqrt{x^2+c}-I+c\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}.$$

De aquí

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+c}+\frac{c}{2}\log|x+\sqrt{x^2+c}|+C.$$

Nótese que las fórmulas para las derivadas de las funciones inversas a las hiperbólicas (§ 7, (22) y (23)) permiten expresar directamente las fórmulas para las integrales consideradas en el ejemplo (α) para $c = \pm 1$. En efecto,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{ar\,senh} x+C = \log|x+\sqrt{x^2+1}|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar\,cosh} x+C = \log|x+\sqrt{x^2-1}|+C \text{ para } x > 1.$$

Observación. Como hemos visto, la integración de las funciones irracionales de segundo grado es siempre posible. Sin embargo, reemplazando la cuadrática ax^2+bx+c bajo el signo de la raíz por un polinomio de tercer grado o mayor, el problema de integrabilidad se vuelve en general (esto es, sin suposiciones especiales sobre los coeficientes) imposible de resolver en el dominio de funciones elementales.

En particular, la integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

no puede expresarse con funciones elementales. Por consiguiente, queda fuera del dominio de las funciones elementales (de la misma forma la integral $\int\dfrac{dx}{x}$ nos lleva fuera del dominio de las funciones racionales).

Esta es la llamada *integral elíptica*.

Análogamente, las integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

no pueden expresarse por medio de funciones elementales (y conducir también a las integrales elípticas).

9.6. Integración de funciones trigonométricas

Sea $R(u, v)$ una función racional de dos variables u y v. El método de integración de la función R (sen x, cos x) se basa en la substitución $t = \tan \frac{1}{2}x$.

Concluimos de la identidad $\dfrac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = 1 + \tan^2 \frac{1}{2}x$, que $\cos^2 \frac{1}{2}x = \dfrac{1}{1+t^2}$ y como $\cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x - 1$,

$$\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Al mismo tiempo,

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x = 1 - \cos^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

de donde

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Finalmente, la ecuación $x = 2 \operatorname{arc\,tan} t$ implica

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Las tres fórmulas anteriores dan

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt,$$

y la última integral, siendo la de una función racional de variable t, puede calcularse por métodos que ya conocemos.

EJEMPLOS. (α) Sea $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$. Aplicando la substitución $t = \tan \frac{1}{2}x$ obtenemos

$$I = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2\,dt}{1-t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \log \left|\frac{1+t}{1-t}\right|.$$

Pero $\dfrac{1+t}{1-t} = \dfrac{1+\tan \frac{1}{2}x}{1-\tan \frac{1}{2}x} = \tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)$. En consecuencia,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log|\tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)|.$$

De aquí

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log|\tan \tfrac{1}{2}x|,$$

puesto que $\operatorname{sen} x = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ y así

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{d(x - \frac{1}{2}\pi)}{\cos(x - \frac{1}{2}\pi)} = \log|\tan \tfrac{1}{2}x|.$$

La última integral puede también deducirse con facilidad de las integrales (ver § 9.3, (ε)):

$$\int \tan x\, dx = -\log|\cos x|, \qquad \int \cot x\, dx = \log|\operatorname{sen} x|,$$

puesto que

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x + \cos^2 \frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= \int \tan \tfrac{1}{2}x\, d(\tfrac{1}{2}x) + \int \cot \tfrac{1}{2}x\, d(\tfrac{1}{2}x)$$

$$= -\log|\cos \tfrac{1}{2}x| + \log|\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x| = \log|\tan \tfrac{1}{2}x|.$$

Si conocemos la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$, podemos calcular inmediatamente la $\int \frac{dx}{\cos x}$, substituyendo $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

(β) Las funciones irracionales de segundo grado pueden reducirse con facilidad a integrales trigonométricas de la forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. A saber, las funciones

$$\sqrt{1-x^2}, \qquad \sqrt{x^2+1}, \qquad \sqrt{x^2-1}$$

pueden reducirse a funciones de este tipo por las substituciones $x = \operatorname{sen} t$, $x = \tan t$, $x = \sec t$; en cualquiera de estos tres casos la derivada $\frac{dx}{dt}$ es también una función racional de las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$. Es decir,

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \cos t, \qquad \frac{d \operatorname{sen} t}{dt} = \cos t,$$

$$\sqrt{\tan^2 t+1} = \sec t = \frac{1}{\cos t}, \qquad \frac{d \tan t}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{\sec^2 t-1} = \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \qquad \frac{d \sec t}{dt} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t};$$

por ejemplo

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{dt}{\cos^3 t}, \qquad \text{donde} \qquad x = \tan t.$$

Algunas veces es más conveniente substituir $x = \cos t$ por $x = \operatorname{sen} t$ o $x = \cos t$ por $x = \tan t$, por ejemplo, substitúyase $x = \cos t$ en la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \operatorname{sen} t \frac{d \cot t}{dt}\,dt = -\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = -\log|\tan \tfrac{1}{2} t|.$$

puesto que $\frac{1}{x} = \tan t = \frac{2 \tan \frac{1}{2} t}{1-\tan^2 \frac{1}{2} t}$, de modo que $\tan \frac{1}{2} t = -x+\sqrt{x^2+1}$.

De aquí hallamos la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log(x+\sqrt{x^2+1}),$$

calculada previamente de otra forma.

Ahora, daremos algunos otros tipos de integrales de funciones trigonométricas, que son importantes en aplicaciones.

La integral $I_n = \int \operatorname{sen}^n x\,dx$.

Daremos la fórmula de recurrencia

$$I_n = -\int \operatorname{sen}^{n-1} x\,d\cos x = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \int \cos x \frac{d \operatorname{sen}^{n-1} x}{dx}\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \cos^2 x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

ya que $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$.

De aquí, la fórmula requerida:

$$I_n = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\text{para } n \geqslant 2).$$

Similarmente, tenemos

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad (n \geqslant 2).$$

Las integrales

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx, \quad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx, \quad \int \cos mx \cos nx\,dx$$

pueden evaluarse aplicando las fórmulas

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$
$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$
$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

que se conocen por trigonometría.

Hallamos con facilidad:

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} - \dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n}\right] & \text{para} \quad m \neq \pm n, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\operatorname{sen} 2mx}{2m}\right) & \text{para} \quad m = n, \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] & \text{para} \quad m \neq \pm n, \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos 2mx}{2m} & \text{para} \quad m = n, \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right] & \text{para} \quad m \neq \pm n, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 2mx}{2m} + x\right) & \text{para} \quad m = n. \end{cases}$$

La integral $\displaystyle\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}$.

Para calcular esta integral, escribimos el denominador de la función bajo el signo de la integral en la forma $c \operatorname{sen}(x+\Theta)$. Los valores de c y Θ los calculamos de la identidad

$$c \operatorname{sen} x \cos \Theta + c \cos x \operatorname{sen} \Theta = a \operatorname{sen} x + b \cos x,$$

esto es,

$$a = c \cos \Theta, \qquad b = c \operatorname{sen} \Theta,$$

o sea

$$c = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \Theta = \operatorname{arc\,tan} \frac{b}{a}.$$

Obtenemos

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{c}\int \frac{d(x+\Theta)}{\operatorname{sen}(x+\Theta)} = \frac{1}{c}\log\left|\tan\frac{x+\Theta}{2}\right|$$

Observación. En el § 9.2, 5 dimos la fórmula de recurrencia para la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Esta puede ser calculada también aplicando la fórmula para integral $\int \cos^m x\,dx$. A saber, substituyendo $x = \tan t$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \cos^{2n} t \frac{d \tan t}{dt}\,dt = \int \cos^{2n-2} t\,dt.$$

Ejercicios del § 9

Calcúlense las integrales indefinidas de las siguientes funciones:

1. $e^{ax} \operatorname{sen} x$,
2. e^x,
3. $x \operatorname{sen} x$,
4. $x^a \log x$,
5. $\operatorname{arc\,tan} x$,
6. $x^a (\log x)^m$,
7. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$,
8. $\dfrac{1}{1+x^2+x^4}$,
9. $\dfrac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}$,
10. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$,
11. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$,
12. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$,
13. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c}}$, sustituyendo $\sqrt{x^2+c} = x+t$ (ver § 9.5, Ejemplo (α)),
14. $\dfrac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}$ (m es un entero)
15. $\dfrac{x^m}{\sqrt{x^2+c}}$ (m es un entero)

16. $\dfrac{ax+b}{(x^2+c^2)^n\sqrt{px^2+qx+r}}$.

Observación. Demuéstrese que si R es una función racional de dos variables, entonces $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = W(x) + \dfrac{U(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, donde U y W son funciones racionales. De aquí se deduce (por 14-16) un método general para la integración de funciones irracionales de segundo grado.

17. $\cot^n x$, 18. $\sec^n x$, 19. $\operatorname{sen} m\, x \cos^n x$,

20. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$, 21. $\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x^3}$.

§ 10. INTEGRALES DEFINIDAS

10.1. Definición y ejemplos

Dada una función $y = f(x)$ continua en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$. Por la *integral definida* de $f(x)dx$ desde a hasta b entendemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a), \tag{1}$$

donde F es una función primitiva arbitraria de la función f en el intervalo ab, esto es, $F'(x) = f(x)$ para $a < x < b$, $F'+(a) = f(a)$ y $F'-(b) = f(b)$.

La integral definida no depende de la elección de la función F; esto significa que si G es también una función primitiva de f, entonces

$$G(b)-G(a) = F(b)-F(a).$$

Esto se deduce inmediatamente del hecho que la diferencia entre las funciones G y F es constante en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ (ver § 7.5, 4. Observación).

La fórmula (1) se considerará también en el caso en que $b < a$. De aquí tenemos

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

y

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Del teorema 2, del § 9.2, se deduce inmediatamente que *toda función continua en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ tiene su integral* $\int_a^b f(x)\,dx$, esto es, como decimos, es *integrable* en este intervalo.

Para indicar la diferencia $F(b)-F(a)$, usamos también el símbolo

$$[F(x)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Observación. Se deduce de la definición que la integral definida depende de la función f y de la variable x (x aparece aquí únicamente como variable de integración). El valor de la integral no será cambiado, si substituimos la variable x por otra variable; por ejemplo, t:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

EJEMPLOS. (α) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$. En efecto, tenemos $\int c\,dx = cx+C$, de donde $\int_a^b c\,dx = [cx]_a^b = c(b-a)$.

(β) $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, porque $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+C$, de donde

$$\int_0^1 x^2\,dx = [\tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

(γ) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2)+\cos 0 = 1.$

(δ) Las siguientes integrales definidas (de Fourier, ver § 11.7) se calculan fácilmente con base en las fórmulas de las integrales indefinidas (§ 9.6): si m y n indican dos enteros positivos diferentes, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx;$$

para enteros positivos arbitrarios m y n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = 0;$$

para un entero positivo arbitrario m:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx.$$

(ε) Para un entero positivo arbitrario n se verifican las fórmulas:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

Estas fórmulas se deducen fácilmente de las de recurrencia (§ 9.6):

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \qquad (n \geqslant 2)$$

y de las fórmulas:

$$\left[-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^1 x\,dx = 1, \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0 x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Nótese que si reemplazamos seno por coseno, entonces las fórmulas (4) siguen siendo ciertas.

10.2. Fórmulas para cálculo

Las tres primeras fórmulas generales para las integrales indefinidas (§ 9.3) conducen inmediatamente a las tres siguientes fórmulas para cálculo de las integrales definidas (suponemos que las funciones bajo los signos de integral son continuas en el intervalo cerrado de integración):

1. $\displaystyle\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$

2. $\displaystyle\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$

La fórmula para integración por substitución conduce a la siguiente:

4. $\displaystyle\int_a^b g[f(x)]f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy.$

A saber, sea $G(y)$ una función primitiva de $g(y)$. Entonces (por la fórmula del § 9.3), $G[f(x)]$ es una función primitiva de la función $g[f(x)]f'(x)$. Por consiguiente, según la definición de integral definida

$$\int_a^b g[f(x)]f'(x)\,dx = G[f(b)] - G[f(a)] = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy.$$

5. El teorema sobre la división del intervalo de integración:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En efecto, designando por F una función primitiva de la función f, tenemos

$$[F(c)-F(a)]+[F(b)-F(c)] = F(b)-F(a)$$

6. Si $f(x) \geqslant 0$ y $a < b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$

En efecto, denotando por F una función primitiva de la función f tenemos $F'(x) = f(x) \geqslant 0$; de lo que se deduce que la función F es creciente (en el sentido amplio). De modo que, $F(a) \leqslant F(b)$, esto es, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \geqslant 0.$

La fórmula 6 implica la siguiente ligeramente más general:

7. Si $f(x) \leqslant g(x)$ y $a < b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$

Por hipótesis $g(x)-f(x) \geqslant 0$. Por consiguiente, por 6, tenemos $\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx \geqslant 0$, de donde por 1,

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Como se ve de la fórmula 7, la relación $\leqslant$ no cambia en la integración (cuando $a < b$). Deduciremos de 7 la siguiente fórmula:

8. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \text{si} \quad a < b.$

En efecto, se deduce (según 7) por integración de la doble desigualdad $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(x)$ que:

$$\int_a^b -|f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx,$$

esto es,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

De donde obtenemos la fórmula pedida (ya que la desigualdad $-u \leqslant v \leqslant u$ implica la desigualdad $|v| \leqslant u$ (ver § 1, (17)).

9. La fórmula del valor medio

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = hf(a+\Theta h),$$

donde Θ es un número escogido adecuadamente que además satisface la condición $0 < \Theta < 1$.

Sea F una función primitiva de la función f, esto es, $F'(x) = f(x)$. Entonces tenemos

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = F(a+h)-F(a) = hF'(a+\Theta h) = hf(a+\Theta h)$$

según el teorema del valor medio del cálculo diferencial (§ 6.5, (β)).

10. Sea f una función continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Escribamos,

(1) $$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (^1).$$

Entonces se verifica la siguiente fórmula fundamental

(2) $$g'(x) = f(x), \quad \text{esto es} \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Esto es, la integral $\int_a^x f(t)\,dt$, considerada como una función del límite superior de integración, es una función primitiva de la función bajo el signo de la integral.

Para comprobar esto, sea F una función primitiva arbitraria de la función f, esto es, sea $F'(x) = f(x)$. Según la fórmula (1) del § 10.1, tenemos $g(x) = F(x)-F(a)$. Derivando obtenemos $g'(x) = F'(x) = f(x)$.

(1) Puede también escribirse $g(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Observaciones. (α) En los extremos del intervalo de integración tenemos

$$g'+(a) = f(a) \quad \text{y} \quad g'-(b) = f(b).$$

(β) Nótese que la función g es continua por ser una función derivable.

11. *Si una sucesión de funciones continuas $f_n(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, converge uniformemente a una función $f(x)$ en el intervalo ab, entonces la integral del límite es igual al límite de las integrales.*

(3) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx,$$

esto es, $$\int_a^b [\lim_{n=\infty} f_n(x)]\,dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Como el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua (§ 6.1, Teorema 1), la función f es integrable. Aplicando la fórmula 1 a las funciones f y f_n, tenemos

(4) $$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,dx.$$

Al mismo tiempo, debido a la convergencia uniforme de la sucesión de las funciones $f_1, f_2, \ldots$ a la función f, existe para una $\varepsilon > 0$ dada, un número k tal que $|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$ para $n > k$. Por tanto por (4), 8 y 7, tenemos

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx \leqslant \varepsilon|b-a|.$$

En esta forma hemos demostrado que para $n > k$ se verifica la desigualdad

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon|b-a|.$$

Esto significa que la ecuación (3) se satisface.

Como corolario del Teorema 11 tenemos:

12 $$\int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx,$$

suponiendo que las funciones f_n son continuas y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ es uniformemente convergente en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$.

EJEMPLOS Y APLICACIONES. (α) Para evaluar la integral $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, substituimos $x = \operatorname{sen} t$. Entonces tenemos $0 = \operatorname{sen} 0$, $1 = \operatorname{sen}(\pi/2)$.

Por consiguiente (ver § 10.1, 5).

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \frac{dx}{dt} dt \tag{5}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\, dt = \frac{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n+1)}.$$

(β) $\lim_{n=\infty} \int_a^b \cos nx\, dx = 0 = \lim_{n=\infty} \int_a^b \operatorname{sen} nx\, dx.$

En efecto, substituyendo $y = nx$, obtenemos

$$\int_a^b \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} \cos y\, dy = \frac{1}{n}(\operatorname{sen} nb - \operatorname{sen} na).$$

Como $|\operatorname{sen} nb - \operatorname{sen} na| \leqslant 2$, tenemos $\lim_{n=\infty} \int_a^b \cos nx\, dx = 0$.

Análogamente se demuestra que $\lim_{n=\infty} \int_a^b \operatorname{sen} nx\, dx = 0$.

La siguiente fórmula más general se verifica:

(γ) $\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) \cos nx\, dx = 0 = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx\, dx,$

donde f es una función continua arbitraria.

Sea dado un número $\varepsilon > 0$. Según la continuidad uniforme de la función f en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ existe una m tal que dividiendo el segmento ab en m segmentos iguales, a cualquier par de puntos x y x' pertenecientes a uno mismo de estos m segmentos se verifica la desigualdad $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m - 1$ los puntos de división; además, sean $a_0 = a$, $a_m = b$. Por la fórmula 5, tenemos

$$\int_a^b f(x) \cos nx\, dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \cos nx\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left\{ f(a_k) \int_{a_{k-1}}^{a_k} \cos nx\, dx + \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f(x) - f(a_k)] \cos nx\, dx \right\}$$

Por consiguiente (ver fórmula 8),

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx\, dx \right| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |f(a_k)| \cdot \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} \cos nx\, dx \right| + \varepsilon(b-a),$$

porque

$$|f(x) - f(a_k)| \cos nx| \leqslant |f(x) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

De modo que, como hemos comprobado,

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} \cos nx\, dx \right| = \frac{1}{n} |\operatorname{sen} na_k - \operatorname{sen} na_{k-1}| \leqslant \frac{2}{n},$$

y denotando por M la cota superior de la función $|f(x)|$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, obtenemos

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx\, dx \right| \leqslant \frac{2}{n} Mm + \varepsilon(b-a).$$

De donde, escogiendo n tan grande que $\frac{2}{n} Mm < \varepsilon$ tenemos

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx\, dx \right| < \varepsilon(1 + b - a).$$

De aquí se deduce la primera de las ecuaciones (γ). La demostración de la segunda ecuación es análoga.

(δ) Si la integral indefinida de una función dada no es conocida pero esta función puede desarrollarse en una serie de funciones uniformemente convergente, que podemos integrar (por ejemplo en una serie de potencias), entonces la aplicación del Teorema 12 hace posible expresar la integral definida por una serie.

En esta forma calcularemos la integral elíptica (ver § 9.5, Observación)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}} \qquad (k^2 < 1).$$

Como sabemos (ver § 8.4):

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} t^6 + \cdots \qquad (|t| < 1).$$

De aqui, substituyendo t por k sen x tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2 x}} = 1+\frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2 x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\operatorname{sen}^4 x+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\operatorname{sen}^6 x+\dots$$

Esta serie es uniformemente convergente en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (también en todo el eje X), ya que la serie que representa $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ es uniformemente convergente en el intervalo $-|k| \leqslant t \leqslant |k|$. Integrando término a término y aplicando la fórmula (4) del § 10.1,

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

obtenemos

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2 x}} =$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\dots\right].$$

10.3. La integral definida como límite de sumas

Ahora comprobaremos teoremas que permiten importantes aplicaciones de la integral definida.

1. *Sean dados una función continua $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y un número $\varepsilon > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ con la siguiente propiedad. Si los puntos $a_0 < a_1 < \dots < a_m$, donde $a_0 = a$ y $a_m = b$ satisfacen la desigualdad $a_k - a_k - 1 < \delta$ para toda $k = 1, 2, \dots, m$ y si los puntos $x_1, \dots, x_m$ son escogidos en los intervalos $a_0a_1, \dots, a_{m-1}a_m$, respectivamente (esto es $a_k - 1 \leqslant a_k \leqslant x_k$), entonces*

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(x_k)(a_k-a_{k-1})-\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

En efecto, según la continuidad uniforme de la función f en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ (ver § 6.4, 1) existe $\delta > 0$ tal que la condición $|x-x'| < \delta$

implica $|f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Por las fórmulas 5 y 9, § 10.2, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx+\dots+\int_{a_{m-1}}^{a_m} f(x)\,dx$$
$$= f(x_1')(a_1-a_0)+\dots+f(x_m')(a_m-a_{m-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{m} f(x_k')(a_k-a_{k-1}),$$

donde x_k' es un número escogido adecuadamente en el intervalo $a_{k-1}a_k$. La distancia entre ellos no es mayor que la longitud de este intervalo, esto es, $|x_k-x_k'| \leqslant a_k-a_{k-1} < \delta$. De aqui se deduce que $|f(x_k)-f(x_k')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Consecuentemente

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(x_k)(a_k-a_{k-1})-\int_a^b f(x)\,dx\right| =$$
$$=\left|\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)-f(x_k')](a_k-a_{k-1})\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_k')|(a_k-a_{k-1})$$
$$<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

En esta forma se demuestra el Teorema 1.

Ahora, consideremos en lugar de una sola partición del segmento ab (definida por los puntos $a_0, a_1, \dots, a_m$) una sucesión de particiones de este segmento en segmentos menores. Defínase la n-ésima partición por los puntos,

$$a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,l_n}, \quad \text{donde} \quad a_{n,0} = a,\ a_{n,l_n} = b.$$

Sea r_n la longitud del mayor segmento de la n-ésima partición. Decimos que la sucesión anterior de particiones es *normal* si $\lim_{n=\infty} r_n = 0$. El siguiente teorema se verifica.

2. *Sean dadas una función continua $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y una sucesión normal de particiones de este segmento. Si el punto $x_{n,k}$ pertenece*

al k-ésimo intervalo de la n-ésima partición (esto es, $a_{n,k-1} \leqslant x_{n,k} \leqslant a_{n,k}$ para $k = 1, 2, \ldots, l_n$; $n = 1, 2, \ldots$), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}). \tag{6}$$

Se da una $\varepsilon > 0$. Escogemos N en tal forma que para $n > N$ se verifique la desigualdad $r_n < \delta$, esto es, que todos los intervalos de la n-ésima partición tengan longitud $< \delta$ (donde δ tiene el mismo significado que en el teorema anterior).

Entonces por el Teorema 1 tenemos

$$\left| \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Esto significa que la igualdad (6) es satisfecha.

En particular se deduce que si todos los segmentos de la n-ésima partición son de la misma longitud, es decir, $2^{-n}(b-a)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \lim_{n=1} 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} f(a_{n,k}).$$

Observación. La notación $\int_a^b y\,dx$ está muy relacionada al Teorema 2, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista histórico. El símbolo $\int$ la letra S modificada, indicaba la suma de una gran cantidad de términos "infinitesimales" de la forma $y dx$; este concepto, que no estaba bien definido desde el punto de vista lógico, se expresa ahora estrictamente en el Teorema 2. Se ve fácilmente que este teorema representa la integral definida no como una suma infinita sino como un límite de sumas de un número creciente de términos.

En el § 10.11 daremos la definición de la integral basada en la fórmula (6).

10.4. La integral como un área

Sea $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$.

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la región P que consiste de los puntos x, y del plano que satisfacen las condiciones:

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Esto es cierto, cuando la función f es lineal. Entonces la región P es un trapecio cuyas bases (paralelas al eje Y) tienen longitud $f(a)$ y $f(b)$, respectivamente, y la altura es $b-a$. Por consiguiente, el área del trapecio es $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

Por otra parte, la función f como una función lineal es, de la forma $f(x) = cx + d$. De aquí,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}c(b^2-a^2) + d(b-a) = (b-a)(\tfrac{1}{2}cb + \tfrac{1}{2}ca + d)$$
$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

ya que $f(a) = ca + d$ y $f(b) = cb + d$.

Por consiguiente vemos que en el caso en que la función f sea lineal, la noción de área conocida de geometría elemental, es equivalente a la noción definida anteriormente de área como integral definida. Esta equivalencia se verifica también en un sentido extenso, si f es una función poligonal ((ver § 6.4), esto es, cuando la gráfica de la función es una línea poligonal). A saber, la región entre esta línea poligonal y el eje X consiste de un cierto número de trapecios y de aquí, su área es la suma de las áreas de éstos. Sin embargo, como hemos establecido anteriormente, el área de cado uno de estos trapecios es una cierta integral, el área de toda la región es la suma de estas integrales, esto es, $\int_a^b f(x)\,dx$ según (§ 10.2, 5).

En el caso general, si f es una función continua arbitraria, f es el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones poligonales (ver § 6.4); $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$. De aquí, por § 10.2, 11,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Entonces vemos que el área de la región determinada por la curva $y = f(x)$ (definida como la integral $\int_a^b f(x)\,dx$) es el límite de áreas de polígonos "inscritos" en esta curva (ver Fig. 10 en § 6.4).

Por consiguiente, hay aquí una completa analogía con el área de un círculo, definida como el límite de áreas de polígonos inscritos (o circuns-

critos). Similarmente, definimos el área de la región P dada por la curva $y = f(x)$ como la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Observación. Esta área podría también definirse con base en la teoría de la medida, que no consideraremos aquí. Entonces se podría demostrar que esta definición es equivalente a la de área por medio de la integral definida (se ha hecho esa demostración en el caso más elemental, a saber, si f es lineal o poligonal).

EJEMPLOS. (α) Sea $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$. Calcularemos

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Para este fin hallaremos de integral indefinida.

Substituyendo $z = \dfrac{x}{r}$ obtenemos (ver § 9.3, 4)

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2 \int \sqrt{1 - z^2}\,dz = r^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} z + \frac{1}{2} z\sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$= r^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{r}\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\right).$$

De aquí

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r_2(\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(-1)) = \tfrac{1}{2}\pi r^2,$$

puesto que $\operatorname{arc\,sen} 1 = \dfrac{1}{2}\pi$ y $\operatorname{arc\,sen}(-1) = -\dfrac{1}{2}\pi$.

En esta forma hemos obtenido la fórmula para el área del semicírculo con un radio r, conocida de geometría elemental.

(β) El área de la región contenida entre el arco de la parábola $y = x^2$, el eje X y la recta $x = a$, se da por la integral $\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$.

(γ) El área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se calculará como sigue: la ecuación anterior da $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, de donde el área de la elipse es

igual a: $2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}\,dx$. Aplicando, como en el ejemplo (α), la fórmula para la integral indefinida $\int\sqrt{1 - z^2}\,dz$ obtenemos

$$2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \pi ab.$$

(δ) El área entre la senoide y el segmento $0\ \pi$ sobre el eje X es

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

(ε) Se dan dos funciones continuas $u(x)$ y $v(x)$ definidas en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Además, $u(x) < v(x)$ para $a < x < b$. La región N contenida entre estas dos curvas, esto es, el conjunto de puntos x, y del plano que satisfacen las condiciones:

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad u(x) \leqslant y \leqslant v(x)$$

se llama *región normal*.

El área de la región normal N es $\int_a^b [v(x) - u(x)]\,dx$.

En efecto, si $u(x) \geqslant 0$ en todo punto, entonces la región N es obtenida de la región contenida entre la curva $y = v(x)$ y el eje X quitándole la región contenida entre la curva $u(x)$ y el eje X; el área de la primera región es $\int_a^b v(x)\,dx$ y el área de la segunda es $\int_a^b u(x)\,dx$. De aquí, el área N es la diferencia de estas integrales.

Ahora, si la desigualdad $u(x) \geqslant 0$ no se verifica para toda x, entonces denotamos por m la cota inferior de la función u en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ y por N_0 la región normal definida por las curvas $u(x) - m$ y $v(x) - m$. La región N_0 es obtenida de la región N por translación y entonces N_0 es congruente con N. Por consiguiente,

$$\text{área } N = \text{área } N_0 = \int_a^b \{[v(x) - m] - [u(x) - m]\}\,dx$$

$$= \int_a^b [v(x) - u(x)]\,dx.$$

Observaciones. (α) Considerando el área de la región normal no tien sentido que tomemos en cuenta su perímetro. A saber, suponemos que el perímetro tiene área 0. Esto viene del hecho que la curva $y = f(x)$ puede incluirse en una región normal con un área arbitrariamente pequeña, es decir en la región contenida entre los arcos $y = f(x)+\varepsilon$ y $y = f(x)-\varepsilon$ el área de esta región es $2\varepsilon(b-a)$.

(β) El símbolo $y\,dx$ se llama *elemento de área* (ver § 7.13).

(γ) La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como un área también sin la suposición $f(x) \geqslant 0$ si concordamos en considerar que el área de las regiones que están por debajo del eje X es negativa (donde $a < b$). Por consiguiente, si el intervalo ab puede dividirse en intervalos menores de tal manera que en cualquiera de éstos la función es siempre no-negativa o bien no-positiva, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es la suma algebraica de las áreas definidas por los arcos de la curva $y = f(x)$ en cada uno de estos intervalos independientemente.

Por ejemplo, para la curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, dividimos el intervalo $0, 2\pi$ en dos mitades. La curva sen o junto con el intervalo 0, del eje X da una región de área 2 y junto con el intervalo π, 2π, una region de área -2. La suma algebraica de estas áreas es igual a 0 esto es

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

(δ) Interpretando la integral definida como un área, muchos de los teoremas anteriormente demostrados se vuelven de un contenido geométrico claro (especialmente, si la función bajo el signo de la integral es no-negativa); por ejemplo, el Teorema 9 del § 10.2 significa que la región definida por el arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, el eje X y los segmentos perpendiculares que están en las rectas $x = a$ y $x = b$ tiene la misma área que un rectángulo que tiene como base el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, y como altura la ordenada de un punto adecuadamente escogido en el arco $y = f(x)$, $a < x < b$.

Se deduce del Teorema 10 del § 10.2 (ver Observación (β)) que el área de la región definida por el arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant x'$, varía continuamente con x'.

El Teorema 11 del § 10.2 significa que si las funciones f_n son convergentes uniformemente en el intervalo ab a una función f, entonces las áreas de las regiones definidas por f_n, son convergentes al área de la región definida por f.

10.5. La longitud de un arco

Se da una función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, que tiene una derivada continua $f'(x)$. La integral

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{7}$$

de la longitud del arco formado por los puntos x, y que satisfacen las condiciones

$$y = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{8}$$

Esto sucede, si f es una función lineal, esto es, si la curva considerada es un segmento que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$.
La longitud del segmento es igual a la distancia de sus extremos, esto es

$$\sqrt{(b-a)^2+[f(b)-f(a)]^2}.$$

Aplicando la integral obtenemos el mismo resultado. A saber, escribimos $f(x) = cx+d$. De aquí $f'(x) = c$. Por consiguiente,

$$\int_a^b \sqrt{1+c^2}\,dx = \sqrt{1+c^2}\,(b-a) = \sqrt{(b-a)^2+[f(b)-f(a)]^2},$$

puesto que

$$c = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

En el caso general (si no suponemos la linealidad de la función f) encontramos la explicación de la definición anterior en la siguiente construcción.

Sabemos (ver § 6.4) que un arco de una curva dada por las condiciones (8) puede calcularse aproximadamente por líneas poligonales inscritas en este arco (ver § 6.4, Fig. 10). Ahora demostraremos que, denotando por L la longitud de este arco expresada por la integral (7) y por $L_1, L_2, \ldots$, la longitud de las líneas poligonales sucesivas, tenemos

$$L = \lim_{n=\infty} L_n.$$

Es decir, la n-ésima línea poligonal es obtenida uniendo los puntos $[a_{n,0}, f(a_{n,0})]$, $[a_{n,1}, f(a_{n,1})]$, $\ldots$, $[a_{n,i_n}, f(a_{n,i_n})]$ por segmentos, sucesi-

vamente, donde $a_{n,0} = a$, $a_{n,i_n} = b$ y la longitud del intervalo mayor de la n-ésima partición tiende a 0 a medida que n tiende a ∞ (esto es, la sucesión de estas particiones es normal en el sentido del § 10.3). La longitud de la n-ésima línea poligonal es la suma de las longitudes de los segmentos particulares, que constituyen esta poligonal, esto es

$$L_n = \sum_{n=1}^{i_n} \sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+[f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})]^2}.$$

Aplicando el teorema del valor medio obtenemos

$$L_n = \sum_{k=1}^{i_n} (a_{n,k}-a_{n,k-1})\sqrt{1+[f'(x_{n,k})]^2},$$

donde $a_{n,k-1} \leqslant x_{n,k} \leqslant a_{n,k}$.

Por tanto por el Teorema 2 del § 10.3 (fórmula 6), concluimos después de substituir $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ en lugar de la función $f(x)$ que

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \lim_{n=\infty} L_n = L.$$

Las observaciones indicadas en el caso de la definición del área también son válidas en el caso de la definición de la longitud de arco.

La noción de la longitud de una curva puede definirse con base en la teoría general de la medida y puede demostrarse que para arcos de la forma (8) esta definición es compatible con la definición dada aquí por la integral (7). Sin embargo, como aquí empleamos la teoría de la medida, *definimos* la longitud del arco (8) como igual a la integral (7).

La aproximación de la longitud de arco por la longitud de las líneas poligonales inscritas que hemos considerado antes es la generalización de la aproximación de la longitud de la circunferencia por los perímetros de los polígonos inscritos, conocida de la geometría elemental. Demostraremos que la longitud de un arco de circunferencia en el sentido de la geometría elemental es igual a la longitud en el sentido de la definición dada aquí.

EJEMPLO. Sean $y = \sqrt{r^2-x^2}$, $r\cos\beta \leqslant x \leqslant r\cos\alpha (0 < \alpha < \beta < \pi)$. El arco considerado es una parte de la semicircunferencia con radio r y centro 0. Calcúlese la integral (7). Se tiene

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad \text{de donde} \quad \int \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Substituyendo $x = r\cos t$ hallamos

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = -rt = -r\arccos\frac{x}{r}.$$

De aquí

$$\int_{r\cos\beta}^{r\cos\alpha} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = (\beta-\alpha)r$$

en concordancia con la fórmula conocida de la geometría elemental.

Escribamos

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt.$$

La función $s(x)$, esto es, la longitud del arco tratado como una función de la abscisa del extremo derecho (variable) del arco es una función creciente. Por consiguiente, existe una función $x = x(s)$ inversa a $s(x)$, que representa a x como una función de la longitud del arco. Se verifican las fórmulas:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \tag{9}$$

Denotando por α el ángulo entre la tangente a la curva y el eje X, tenemos $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$ y entonces $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$. Esto significa que la derivada es el coseno director de la tangente a la curva $y = f(x)$ con respecto al eje X.

Esto se deduce también del hecho de que

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds} = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad \left(\frac{dx^2}{ds}\right)+\left(\frac{dy^2}{ds}\right) = 1.$$

Observación. El "elemento de longitud" puede representarse simbólicamente en forma análoga a la fórmula pitagórica: $ds^2 = dx^2+dy^2$, lo cual tiene un claro sentido geométrico (ver la noción de diferencial § 7.13).

La curvatura. Designemos como antes, por α al ángulo entre la tangente y el eje X. Este ángulo es una función de x; considerando x como una función de la longitud s expresamos x como una función $\alpha(s)$ de la

variable s. La derivada $k = \dfrac{d\alpha}{ds}$ se llama la *curvatura* de la curva $y = f(x)$ en un punto dado, la inversión $\dfrac{1}{|k|} = \rho$ se llama *radio de curvatura*.

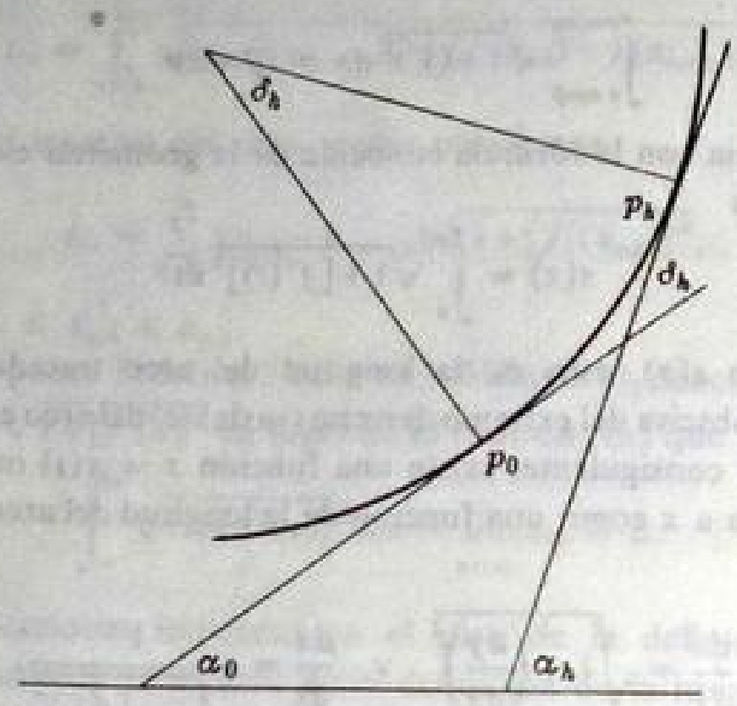


FIG. 23

Geométricamente, la curvatura k se interpreta como sigue: Trácense las tangentes a la curva considerada en los puntos

$$p_0 = [x(s_0), y(s_0)] \quad \text{y} \quad p_h = [x(s_0+h), y(s_0+h)].$$

Los ángulos entre estas tangentes y el sentido positivo del eje X son $\alpha_0 = \alpha(s_0)$ y $\alpha_h = \alpha(s_0+h)$, respectivamente. El ángulo δ_h entre estas dos tangentes es $\alpha_h - \alpha_0$. Este es el mismo ángulo que el que hay entre las normales a la curva en los puntos p_0 y p_h. Consideremos el cociente de este ángulo por la longitud $p_0 p_h$, esto es por h. La curvatura de $y = f(x)$ en el punto p_0 es el límite de este cociente a medida que h tiende a 0.

En particular, si nuestra curva es un arco de la circunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$, entonces $h = -r\delta_h$ y entonces el cociente considerado tiene el valor constante $-\dfrac{1}{r}$. Por lo tanto la curvatura k tiene el mismo valor en todos los puntos y el radio de curvatura es igual al radio de la circunferencia.

En el caso de una línea recta, las normales son paralelas. Por consiguiente $\delta_h = 0$ siempre, y la curvatura es igual a 0; de aquí que el radio de curvatura sea infinito.

Si $k \neq 0$, entonces el punto que está en la normal a la distancia ρ del punto p_0 del mismo lado de la tangente en que se encuentra la curva localmente se llama *centro de curvatura*. Podemos demostrar que este punto es la posición límite a la que tiende el punto de intersección de las normales en los puntos p_0 y p_h a medida que h tiende a 0.

La curvatura k puede expresarse en las coordenadas x y y como sigue. Tomando en cuenta que $\alpha = \arctan\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ y basándose en la fórmula (9) obtenemos

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}},$$

esto es

$$k = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{10}$$

El centro de masa. Sea dado en el plano un sistema de n puntos materiales de coordenadas $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ y de masas $m_1, \ldots, m_n$. El centro de masa de este sistema es el punto de coordenadas

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \quad \bar{y} = \frac{m_1y_1 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + \cdots + m_n}. \tag{11}$$

Para definir el centro de masa de un arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, con una densidad constante g procedemos como sigue. Representemos a x en función de la longitud s, esto es, $x = x(s)$ (como anteriormente); de aquí $y = f[x(s)] = y(s)$. Sea S la longitud del arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Dividamos este arco en n partes iguales.

Esta división constituye una partición del intervalo $0S$ en n intervalos iguales; supóngase que los puntos de la partición son

$$0 = s_{n,0}, s_{n,1}, \ldots, s_{n,n} = S.$$

El punto de coordenadas $x(s_{n,k})$, $y(s_{n,k})$ es el extremo del k-ésimo arco de la n-ésima partición, la masa de este arco corresponde a este punto. Esta masa es el producto de la densidad por la longitud del arco, esto es, es igual a $g(s_{n,k}-s_{n,k-1})$. Por consiguiente, dado n, el centro de masa del sistema de puntos

$$[x(s_{n,1}), y(s_{n,1})], \ldots, [x(s_{n,n}), y(s_{n,n})]$$

es el punto de coordenadas

$$x_n = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} x(s_{n,k})(s_{n,k}-s_{n,k-1}),$$

$$y_n = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} y(s_{n,k})(s_{n,k}-s_{n,k-1}),$$

ya que la masa del arco es igual a gS.

La posición límite del punto (x_n, y_n) a medida que n tiende a ∞ es la posición del centro de masa del arco considerado. Por lo tanto, las coordenadas del centro de masa son

$$(12) \qquad \bar{x} = \lim_{n=\infty} x_n = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds \quad \text{y} \quad \bar{y} = \lim_{n=\infty} y_n = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds.$$

10.6. Volumen y área superficial de un sólido de revolución

Sea dada una función continua $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Además, $f(x) \geqslant 0$. Denotemos como en el § 10.4 por P la región constituida por los puntos x, y que satisfacen las condiciones $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Girando la región P alrededor del eje X obtenemos un sólido de revolución. Designemos su volumen por W, entonces

$$(13) \qquad W = \pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Para explicar esta fórmula, consideremos una sucesión normal de particiones (ver § 10.3, 2). Sea $f(x_{n,k})$ la cota superior de la función f en el intervalo $a_{n,k-1}, a_{n,k}$. Reemplazando el arco de nuestra curva que está sobre este intervalo por el segmento $y = f(x_{n,k})$ obtenemos por la rotación alrededor del eje X un cilindro de base $\pi f(x_{n,k})^2$ y altura $a_{n,k}-a_{n,k-1}$, y por tanto, de volumen

$$\pi f(x_{n,k})^2(a_{n,k}-a_{n,k-1}).$$

Procediendo en esta forma para toda k (siendo n constante) reemplazamos el sólido de revolución considerado por otro, circunscrito en el sólido dado y formado por cierto número de cilindros. El volumen de

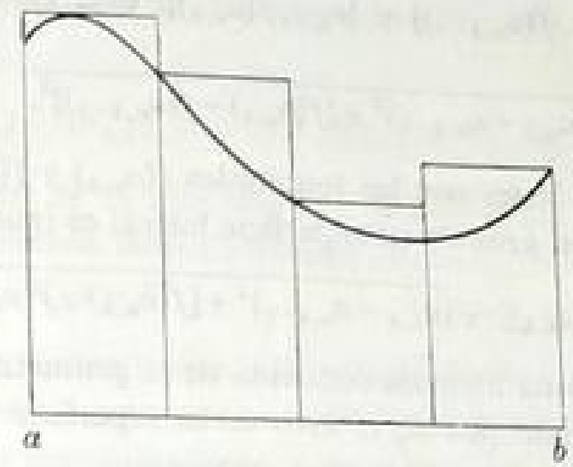


FIG. 24

este sólido es la suma de los volúmenes de los cilindros particulares: denotando este volumen por W_n; tenemos entonces

$$W_n = \pi\sum_{k=1}^{k_n} f(x_{n,k})^2(a_{n,k}-a_{n,k-1}).$$

Por el Teorema 2 del § 10.3 obtenemos en el límite

$$W = \lim_{n=\infty} W_n.$$

Análogamente, reemplazando la cota superior por la inferior en la construcción anterior demostramos que W es el límite de los volúmenes de ciertos sólidos inscritos en el sólido de revolución considerado, cada uno de los cuales es la suma de cierto número de cilindros.

Denotemos por B el área de la superficie obtenida por la rotación del arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, esto es, el área de la superficie lateral del sólido de revolución considerado. Tenemos la fórmula

$$(14) \qquad B = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

(suponiendo la continuidad de la derivada $f'(x)$).

Para establecer esta fórmula calculamos aproximadamente la superficie considerada por superficies, cuya área se conoce de la geometría elemental. Para este propósito consideremos una sucesión de líneas poligonales que se aproximan al arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, definido en

el § 10.5 (ver Fig. 10). La superficie obtenida por la rotación de dicha línea poligonal alrededor del eje X constituye un número finito de conos truncados. Como la generatriz de un cono truncado es el segmento que une los puntos $[a_{n,k-1}, f(a_{n,k-1})]$ y $[a_{n,k}, f(a_{n,k})]$, esto es, un segmento de longitud

$$\sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+[f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})]^2},$$

y los radios de las bases son las longitudes $f(a_{n,k})$ y $f(a_{n,k-1})$, respectivamente, entonces el área de su superficie lateral es igual a

$$\pi[f(a_{n,k-1})+f(a_{n,k})]\cdot\sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+[f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})]^2},$$

como se deduce de una fórmula conocida de la geometría elemental.

De aquí, denotando por B_n el área de la superficie obtenida por la rotación de la n-ésima línea poligonal, obtenemos

$$B_n = \pi\sum_{k=1}^{l_n}[f(a_{n,k-1})+f(a_{n,k})]\cdot$$
$$\cdot\sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+[f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})]^2} =$$
$$= \pi\sum_{k=1}^{l_n}[f(a_{n,k-1})+f(a_{n,k})]\cdot\sqrt{1+[f'(x_{n,k})]^2}\,(a_{n,k}-a_{n,k-1}),$$

donde $a_{n,k-1} \leqslant x_{n,k} \leqslant a_{n,k}$.

Demostraremos que

$$B = \lim_{n=\infty} B_n. \tag{15}$$

Para este propósito comparemos B_n con

$$C_n = 2\pi\sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})\cdot\sqrt{1+[f'(x_{n,k})]^2}\,(a_{n,k}-a_{n,k-1}).$$

Por el Teorema 2 del § 10.3 con la función $f(x)$ substituida por el producto $f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ concluimos que $B = \lim_{n=\infty} C_n$. Por consiguiente queda por demostrar que $\lim_{n=\infty}(B_n - C_n) = 0$.

Ahora,

$$B_n - C_n = \pi\sum_{k=1}^{l_n}[f(a_{n,k-1})-f(x_{n,k})+f(a_{n,k})-f(x_{n,k})]\cdot$$
$$\cdot\sqrt{1+[f'(x_{n,k})]^2}\,(a_{n,k}-a_{n,k-1}).$$

Según la suposición de que la sucesión considerada de particiones del intervalo de integración es normal, podemos suponer que si los puntos x y x' pertenecen al mismo intervalo de la n-ésima partición, entonces $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$ (donde ε es un número positivo dado). Por consiguiente

$$|f(a_{n,k-1})-f(x_{n,k})| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(a_{n,k})-f(x_{n,k})| < \varepsilon.$$

Designando por M la cota superior de la función $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ en el intervalo ab obtenemos inmediatamente $|B_n - C_n| < 2\pi\varepsilon M(b-a)$. De aquí, $\lim_{n=\infty}(B_n - C_n) = 0$.

En esta forma se demuestra la fórmula (15).

Una fórmula más simple para la superficie de un sólido de revolución se obtiene tratanto x como una función de la longitud del arco, similarmente como en el § 10.5. A saber, aplicando la primera de las igualdades (9) tenemos

$$B = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^S y\,ds, \tag{16}$$

donde S denota la longitud del arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

La fórmula (16) puede transformarse como sigue:

$$B = S\cdot 2\pi\frac{1}{S}\int_0^S y\,ds = S\cdot 2\pi\bar{y}, \tag{17}$$

donde $\bar{y}$ denota la ordenada del centro de masa del arco $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (ver (12)).

En otras palabras, *el área de la superficie obtenida por una rotación del arco $y = f(x)$ alrededor del eje X es el producto de la longitud de este arco y la longitud del círculo recorrido por el centro de masa* (Teorema de Guldin).

Ejemplos. (α) Un cilindro. Sea $f(x)$ de valor constante r para $0 \leqslant x \leqslant h$. La región P constituida por los puntos x, y tales que $0 \leqslant x \leqslant h$ y $0 \leqslant y \leqslant r$ es un rectángulo. Por una rotación completa de este rectángulo alrededor del eje X, se obtiene un cilindro de altura h y de radio de la base r. Por lo tanto el volumen de este cilindro es igual a $\pi r^2 h$. El mismo resultado se obtendrá aplicando la fórmula (13), ya que

$$W = \pi\int_0^h r^2\,dx = \pi r^2 h.$$

La fórmula (14) da para la superficie lateral del cilindro (tomando en cuenta que $y' = 0$)

$$B = 2\pi \int_0^h r\,dx = 2\pi r h,$$

en concordancia con la fórmula conocida de geometría.

(β) Un cono. Sea $y = cx$, $0 \leqslant x \leqslant h$. En este caso la región P es un triángulo. Por la rotación se obtiene un cono de altura h y de radio de la base $r = ch$. Por la fórmula (13), el volumen de este cono es igual a

$$\pi \int_0^h c^2 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\pi c^2 h^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Según la fórmula (14) la superficie lateral del cono es igual a

$$2\pi \int_0^h cx\sqrt{1+c^2}\,dx = \pi c h^2 \sqrt{1+c^2} = \pi r l,$$

donde l denota la longitud de la generatriz (porque $l = h\sqrt{1+c^2}$).

(γ) Una esfera. Sea $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$. El conjunto de puntos definido por esta condición es una semicircunferencia. Rotando la semicircunferencia alrededor del eje X obtenemos una esfera de radio r. El volumen de esta esfera es

$$\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2\,dx - \pi \int_{-r}^{r} x^2\,dx = 2\pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Para evaluar la superficie de la esfera, puede aplicarse la fórmula (16). Para este propósito expresamos y en función de la longitud del arco s, esto es, $y = r \operatorname{sen} \frac{s}{r}$. Obtenemos el siguiente valor de la superficie de la esfera:

$$2\pi \int_0^{\pi r} r \operatorname{sen} \frac{s}{r}\,ds = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt = 2\pi r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = 4\pi r^2.$$

10.7. Dos teoremas del valor medio

PRIMER TEOREMA. *Sean dadas dos funciones continuas f y g en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Además supongamos que la función g es de signo constante.*

Entonces

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx, \tag{18}$$

donde ξ es un valor escogido adecuadamente que satisface la condición $a \leqslant \xi \leqslant b$.

En efecto, sean m y M las cotas superior e inferior de la función f en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ respectivamente. Entonces tenemos

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

para toda x.

Supongamos que $g(x) \geqslant 0$ en todo punto. Multiplicando la doble desigualdad anterior por $g(x)$ obtenemos entonces

$$mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$$

y de aquí, por integración (ver § 10.2, 7),

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

De aquí concluimos (suponiendo que la función g no es idénticamente igual a cero, lo cual puede suponerse obviamente) que

$$m \leqslant \left\{ \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx : \int_a^b g(x)\,dx \right\} \leqslant M.$$

Según la propiedad de Darboux de la función f (que es una consecuencia de su continuidad) esta función toma todos los valores entre m y M. Por lo tanto existe una ξ en el intervalo ab tal que

$$f(\xi) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx : \int_a^b g(x)\,dx,$$

esto es, la fórmula (18) se satisface.

En el caso en que $g(x) \leqslant 0$ siempre, la demostración es completamente análoga.

Observación. Suponiendo que $g(x) \neq 0$ en todo el intervalo obtenemos una demostración más corta del teorema anterior aplicando el Teorema de Cauchy establecido en el § 7.5, (12). Denotemos por $H(x)$ una función primitiva de la función $f(x)\,g(x)$ y por $G(x)$ una función

primitiva de $g(x)$. Entonces tenemos

$$H'(x) = f(x)g(x), \qquad G'(x) = g(x),$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = H(b)-H(a), \qquad \int_a^b g(x)dx = G(b)-G(a).$$

Por el Teorema de Cauchy

$$\frac{H(b)-H(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{H'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi),$$

y se deduce la fórmula (18).

SEGUNDO TEOREMA. *Si la función f es continua y g es monótona y tiene segunda derivada continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, entonces*

$$(19) \qquad \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx,$$

donde ξ es un valor escogido adecuadamente perteneciente al intervalo ab.

Denotemos por $F(x)$ una función primitiva de la función $f(x)$, esto es, $F'(x) = f(x)$. Como la derivada de una función monótona es de signo constante (ver Teorema 2 del § 7.7), entonces podemos aplicar el primer teorema del valor medio al producto de las funciones $F(x)$ y $g'(x)$. Por tanto, aplicando la regla de integración por partes, obtenemos

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)F'(x)dx = [g(x)F(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$= [g(b)F(b)-g(a)F(a)] - F(\xi)\int_a^b g'(x)dx$$

$$= g(b)F(b)-g(a)F(a)-F(\xi)g(b)+F(\xi)g(a),$$

ya que $\int_a^b g'(x)dx = g(b)-g(a)$.

En consecuencia,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)[F(\xi)-F(a)]+g(b)[F(b)-F(\xi)],$$

de donde obtenemos la fórmula (19) tomado en cuenta que

$$F(\xi)-F(a) = \int_a^\xi f(x)dx \quad \text{y} \quad F(b)-F(\xi) = \int_\xi^b f(x)dx.$$

EJEMPLOS Y APLICACIONES. Los teoremas del valor medio se aplican frecuentemente para estimar el valor de las integrales. Consideraremos algunas de sus aplicaciones.

(α) Sea $0 < a < b$. Demostraremos que

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\operatorname{sen} nx}{x}dx = 0.$$

Para este fin comprobaremos que

$$(21) \qquad \left|\int_a^b \frac{\operatorname{sen} cx}{x}dx\right| < \frac{4}{ca}, \qquad \text{si} \qquad c > 0.$$

Aplicamos el segundo teorema del valor medio substituyendo $f(x) = \operatorname{sen} cx$ y $g(x) = 1/x$. Obtenemos

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} cx}{x}dx = \frac{1}{a}\int_a^\xi \operatorname{sen} cx\,dx + \frac{1}{b}\int_\xi^b \operatorname{sen} cx\,dx$$

$$= \frac{1}{ac}(\cos ca - \cos c\xi) + \frac{1}{bc}(\cos c\xi - \cos cb).$$

Como $|\cos t| \leqslant 1$ y $a < b$, concluimos que

$$\left|\int_a^b \frac{\operatorname{sen} cx}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc} < \frac{4}{ac}.$$

La fórmula (21) implica la (20) inmediatamente.

Observación. La fórmula (20) es también una consecuencia inmediata de la fórmula (γ) en el § 10.2.

(β) Aplicando el primer teorema del valor medio, la fórmula de Taylor puede deducirse de la siguiente manera.

Substituimos en la fórmula

$$\int zy^{(n+1)}dx = zy^{(n)} - z'y^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n z^{(n)}y +$$
$$+ (-1)^{n+1}\int z^{(n+1)}y\,dx$$

demostrada en el § 9.3, 5, (γ), $z = (b-x)^n$, $y = f(x)$, suponiendo que la función f tiene $(n+1)$-ésima derivada continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$.

Integrando de a a b obtenemos

$$\int_a^b (b-x)^n y^{(n+1)}\,dx = [(b-x)^n y^{(n)} + n(b-x)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + n!\,y]_a^b$$

$$= n!\,f(b) - \{(b-a)^n f^{(n)}(a) + n(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \cdots + n!\,f(a)\}.$$

Por otra parte, ya que la función $(b-x)^n$ es de signo constante en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, obtenemos por el primer teorema del valor medio

$$\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_a^b (b-x)^n\,dx = \frac{(b-a)^{(n+1)}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Comparando las fórmulas halladas obtenemos la fórmula de Taylor con el residuo en la forma de Lagrange.

10.8. Métodos de integración aproximada. Interpolación de Lagrange

Dados $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el eje X y $n+1$ valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, puede definirse un polinomio $w(x)$ de n-ésimo grado suponiendo en estos puntos los valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, esto es, tal que

(22) $$w(x_k) = y_k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Primero definiremos para toda k un polinomio $u_k(x)$ de n-ésimo grado con la propiedad de que $u_k(x_k) = 1$ y $u_k(x_m) = 0$ para toda $m \neq k$.

Es decir, escribimos

$$u_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\cdots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\cdots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x_k-x_n)}.$$

Por medio de los polinomios $u_k(x)$, definimos el polinomio $w(x)$:

(23) $$w(x) = y_0 u_0(x) + y_1 u_1(x) + \ldots + y_n u_n(x).$$

Vemos de inmediato que éste es un polinomio de n-ésimo grado, que satisface la condición (22). Este es el llamado polinomio de interpolación de Lagrange.

Vale la pena observar que el polinomio $w(x)$ está determinado en forma única, esto es, si un polinomio $\bar{w}$ de n-ésimo grado satisface la condición (22), también, entonces es idéntico con w; porque su diferencia

es un polinomio de grado n que se anula en $n+1$ puntos (a saber, en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$).

Cuando una función que expresa una relación entre ciertas cantidades físicas es conocida únicamente de una manera empírica, esto es, si únicamente un número finito de valores de esta función (por medio de mediciones) es conocido, entonces se obtiene una evaluación aproximada de la integral de esta función por medio de la interpolación de Lagrange, y evaluación de la integral del polinomio obtenido.

Obtenemos una fórmula especialmente sencilla si $n = 2$ y $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, esto es, cuando trazamos una parábola por los tres puntos dados. Como puede calcularse fácilmente, obtenemos

(24) $$\int_a^b w(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Esta es la fórmula de Simpson que da un valor aproximado de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. La aproximación tendrá más precisión si dividimos el intervalo ab en intervalos menores y si aplicamos la fórmula de Simpson a cada uno de ellos. A saber, dividiendo el intervalo ab en $2n$ intervalo siguales por medio de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, donde $x_0 = a$, $x_{2n} = b$, obtenemos la *fórmula general de Simpson* para un valor aproximado de una integral:

$$\frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})].$$

Ejemplo. Apliquemos la fórmula de Simpson para evaluar $\log 2 = \int_1^2 \dfrac{dx}{x}$, dividiendo el intervalo $1 \leqslant x \leqslant 2$ en mitades. Tenemos

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad y_1 = 0.667\ldots,$$

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 0.5.$$

Por lo tanto la fórmula (24) da el valor aproximado de $\log 2$:

$$\tfrac{1}{6}(1 + 4 \cdot 0.667 + 0.5) = 0.694\ldots$$

Realmente tenemos, $\log 2 = 0.6931\ldots$

Ahora mencionaremos el llamado "método trapezoidal" para la evaluación aproximada de la integral de una función $f(x) \geqslant 0$ en un intervalo ab. Dividimos el intervalo ab en n intervalos iguales por los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y trazamos una línea poligonal por los puntos (x_k, y_k), donde $k = 0, 1, \ldots, n$ (ver Fig. 10). El área s_n entre esta línea poligonal y el eje X es la suma de las áreas de n trapecios $T_1, \cdots, T_n$, donde el área de T_k es igual a

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k).$$

Por consiguiente,

$$s_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Este es el valor aproximado del área entre la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y el eje X; hablando de otra manera, éste es el valor aproximado de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

10.9. Fórmula de Wallis [1]

Demostraremos la siguiente fórmula:

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}\right)^2. \tag{25}$$

Basaremos nuestra demostración en las fórmulas

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)},$$

comprobadas en el § 10.1, 5.

[1] John Wallis (1616-1703), matemático inglés.

De estas fórmulas se deduce

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left\{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx : \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx\right\} \tag{26}$$

Demostraremos que

$$\lim_{n=\infty} \left\{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx : \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx\right\} = 1.$$

En efecto, en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ tenemos las desigualdades

$$0 \leqslant \operatorname{sen}^{2n+1} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n-1} x,$$

de donde

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx$$

y entonces

$$1 \leqslant \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx : \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx$$

$$\leqslant \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx : \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx \leqslant \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Por consiguiente el cociente de integrales considerado tiende en el límite a 1.

De aquí concluimos por (26) que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}\right]. \tag{27}$$

Esta fórmula da la (25) inmediatamente, puesto que $\lim_{n=\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Observaciones. (α) Aplicamos la fórmula de Wallis también en la siguiente forma:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n=\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{\sqrt{n(2n)!}}. \tag{28}$$

A saber, tenemos

$$2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n = n! \cdot 2^n,$$

$$1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}.$$

Substituyendo las fórmulas anteriores en la fórmula (25) y tomando la raíz cuadrada obtenemos la igualdad (28).

(β) La fórmula de Wallis puede escribirse también en la forma de un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots \tag{29}$$

En efecto, denotando por p_n el producto parcial

$$p_n = \frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 1^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4n^2}{4n^2-1} = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1},$$

tenemos, según (27), $\lim\limits_{n=\infty} p_n = \frac{\pi}{2}$. Al mismo tiempo

$$\lim_{n=\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1},$$

de donde se sigue la fórmula (29).

10.10. Fórmula de Stirling [1]

Deduciremos de la fórmula de Wallis la siguiente debida a Stirling:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}} = 1. \tag{30}$$

Escribamos

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

De modo que ha de probarse que $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \sqrt{2\pi}$.

Primero demostraremos que la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ es convergente. Como es una sucesión de términos positivos, es suficiente demostrar que

[1] James Stirling (1692-1770), matemático escocés.

esta sucesión es decreciente, esto es, que $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$. Ahora,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\frac{(n+1)^{n+1+1/2}}{n^{n+1/2}(n+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2},$$

de donde

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

Ya que (ver § 7, (54))

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\log(1+x) > 1$$

para $0 < x \leqslant 1$, de manera que substituyendo $x = \frac{1}{n}$ hallamos

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1, \quad \text{esto es,} \quad \log\frac{a_n}{a_{n+1}} > 0,$$

de donde $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$.

Por consiguiente, la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ es convergente. Escribamos $\lim\limits_{n=\infty} a_n = g$. Demostraremos que $g \neq 0$.

Para este propósito nótese que

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_n^{n+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

ya que el arco de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, $n \leqslant x \leqslant n+1$, está por debajo del segmento que une los puntos $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ y $\left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$.

De aquí

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

y entonces

$$\log\frac{a_1}{a_n} < \frac{1}{4} \qquad \text{esto es,} \qquad a_n > e^{3/4}.$$

Queda por demostrar que $g = \sqrt{2\pi}$. Para este fin aplicaremos ahora la fórmula (28) tomando en cuenta las ecuaciones

$$a_n^2 = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n} n} \quad \text{y} \quad a_{2n} = \frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}.$$

Obtenemos

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}\cdot\sqrt{2}} = \frac{g^2}{g\sqrt{2}}, \qquad \text{esto es,} \qquad g = \sqrt{2\pi}.$$

Observación. La importancia práctica de la fórmula de Stirling se basa en el hecho de que para valores grandes de n la expresión $\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ da un valor aproximado de $n!$. Decimos que es un *valor asintótico de* $n!$ (lo que significa que el cociente de estas dos expresiones tiende a 1).

10.11*. Integral de Riemann. Integrales superior e inferior de Darboux

Los teoremas del § 10.3 son el punto de partida para una generalización de la noción de una integral definida a ciertas clases de funciones discontinuas. Para este propósito introduciremos las integrales de Darboux.

Se da una función acotada (pero no necesariamente continua) $y = f(x)$ $a \leqslant x \leqslant b$. Además, una sucesión de particiones del intervalo ab en $2n$ partes iguales ($n = 0, 1, \ldots$). Denotemos los puntos de la n-ésima partición por

$$a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,2^n}, \quad \text{donde} \quad a_{n,0} = a,\ a_{n,2^n} = b.$$

Sea $M_{n,k}$ la cota superior de la función f en el intervalo $a_{n,k-1}\, a_{n,k}$. Finalmente, sea

$$S_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}. \tag{31}$$

La sucesión $\{S_n\}$ es decreciente (en el sentido amplio). En efecto para toda $k = 1, 2, \ldots, n$ los intervalos $a_{n+1,\,2k-2}\, a_{n+1,\,2k-1}$ y $a_{n+1,\,2k-1}\, a_{n+1,\,2k}$ están contenidos en el intervalo $a_{n,k-1}\, a_{n,k}$. Por consiguiente

$$M_{n+1,2k-1} \leqslant M_{n,k} \quad \text{y} \quad M_{n+1,2k} \leqslant M_{n,k},$$

esto es,

$$\tfrac{1}{2}(M_{n+1,2k-1} + M_{n+1,2k}) \leqslant M_{n,k}.$$

De aquí

$$S_{n+1} = \frac{b-a}{2^n}\left(\frac{M_{n+1,0}+M_{n+1,1}}{2} + \cdots + \frac{M_{n+1,2n+1-1}+M_{n+1,2n+1}}{2}\right) \leqslant S_n.$$

Por consiguiente la sucesión $\{S_n\}$ es no creciente. Es simultáneamente una sucesión acotada, ya que denotando por m la cota inferior de la función f tenemos obviamente $S_n \geqslant m(b-a)$. De aquí que es una sucesión convergente. Su límite se llama *integral superior de Darboux* y se representa por el símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} S_n. \tag{32}$$

Similarmente, denotando por $m_{n,k}$ la cota inferior de la función f en el intervalo $a_{n,k-1}\, a_{n,k}$ y escribiendo

$$s_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k} \tag{33}$$

demostramos que la sucesión S_n es creciente (en el sentido amplio) y acotada, y por lo tanto, convergente. Su límite se llama *integral inferior de Darboux* y se representa por el símbolo

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} s_n. \tag{34}$$

Si las integrales superior e inferior son iguales, entonces se dice que la función f es *integrable en el sentido de Riemann*; el valor común de estas dos integrales se llama *integral de Riemann de la función f* y se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$ como en el caso de la integral definida de una función continua. La misma simbología puede aplicarse, porque (como se deduce inmediatamente del Teorema 2 del § 10.3) *la integral de Riemann de una función continua es igual a la integral definida de esta función* (en el sentido de la definición dada en el § 10.1).

La clase de funciones integrables en el sentido de Riemann es mayor que la clase de funciones continuas. En particular, las funciones acotadas que tienen un número finito de puntos de discontinuidad (hablaremos de estas funciones en el § 11) y las funciones monótonas son integrables. Sin embargo, existen funciones no integrables (acotadas) en el sentido de Riemann. Un ejemplo de tales funciones es la de Dirichlet que ya vimos

(ver § 4.5), igual a 1 en puntos racionales y a 0 en irracionales; para esta función tenemos siempre $S_n = 1$ y $s_n = 0$ y entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Añadamos que existe una definición de la integral (Lebesgue) que atribuye la integral a una clase mayor de funciones que la integral de Riemann ([1]).

Basamos la definición de las integrales de Darboux en la consideración de una sucesión de particiones "diádicas" del intervalo de integración. Demostraremos ahora que se obtiene el mismo resultado considerando una sucesión de particiones arbitraria. Más precisamente, demostraremos el siguiente teorema:

Sea dada una sucesión normal de particiones de un segmento ab definida por los puntos

(35) $$a'_{n,0} < a'_{n,1} < \ldots < a'_{n,l_n}, \quad \text{donde} \quad a'_{n,0} = a,\ a'_{n,l_n} = b$$

Sea $M'_{n,k}$ la cota superior de la función f en el intervalo $a'_{n,k-1}\,a'_{n,k}$ y sea

(36) $$S'_n = \sum_{k=1}^{l_n} M'_{n,k}(a'_{n,k} - a'_{n,k-1}).$$

Entonces

(37) $$\lim_{n=\infty} S'_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La demostración de este teorema se basará en el siguiente lema:

Sean dadas dos particiones del intervalo ab

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b \quad \text{y} \quad a = a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_r = b.$$

Sean d y d' la longitud del intervalo mayor de la primera y la segunda partición, respectivamente. Sean M_k y M'_k las cotas superiores de la función f en los intervalos $a_{k-1}a_k$ y $a'_{k-1}a'_k$, respectivamente, y sean

(38) $$S = \sum_{k=1}^{r} M_k(a_k - a_{k-1}) \quad \text{y} \quad S' = \sum_{k=1}^{r'} M'_k(a'_k - a'_{k-1}).$$

Finalmente, sea M un número que satisface la desigualdad $M > |f(x)|$ para toda x del intervalo ab.

([1]) Ver S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, vol. 7 (1937).

Entonces se verifica la relación

(39) $$S' \leqslant S + 3rMd'.$$

Los intervalos de la segunda partición pueden dividirse en $r+1$ clases; un intervalo dado de esta partición pertenecerá a la k-ésima clase (para $k = 1, 2, \ldots, r$), si está contenido en el intervalo $a_{k-1}a_k$ y a la $r+1$-ésima clase, si no está contenido en ninguno de los intervalos de la primera partición, esto es, si contiene alguno de los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$. Es claro que algunas de estas clases pueden ser vacías.

Si la k-ésima clase (para $k \leqslant r$) es no vacía, entonces p_k denotará el primer índice i y j_k el último que satisface la condición $a_{k-1} \leqslant a'_i \leqslant a_k$. Ya que para los intervalos $a'_{i-1}a'_i$ de la k-ésima clase se verifica la desigualdad $M'_i \leqslant M_k$, de modo que denotando por $\sum^k$ la suma sobre todos los intervalos de la k-ésima clase, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum^k M'_i(a'_i - a'_{i-1}) &\leqslant M_k \sum^k (a'_i - a'_{i-1}) = M_k(a'_{j_k} - a'_{p_k}) \\
&= M_k(a_k - a_{k-1}) - M_k(a'_{p_k} - a_{k-1}) - M_k(a_k - a'_{j_k}) \\
&\leqslant M_k(a_k - a_{k-1}) + M(a'_{p_k} - a_{k-1}) + M(a_k - a'_{j_k}) \\
&\leqslant M_k(a_k - a_{k-1}) + 2Md'.
\end{aligned}$$

Si la k-ésima clase es vacía, entonces $\sum^k = 0$. Finalmente nótese que hay a lo más $r-1$ intervalos de la $r+1$-ésima clase. Por consiguiente

$$\sum^{r+1} M'_i(a'_i - a'_{i-1}) \leqslant (r-1)\,M\,d'.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
S' = \sum^1 M'_i(a'_i - a'_{i-1}) + \cdots + \sum^r M'_i(a'_i - a'_{i-1}) + \\
+ \sum^{r+1} M'_i(a'_i - a'_{i-1}) \leqslant M_1(a_1 - a_0) + \cdots + \\
+ M_r(a_r - a_{r-1}) + 2rMd' + (r-1)Md',
\end{aligned}$$

de donde se deduce la fórmula (39).

Por consiguiente nuestro lema se ha demostrado.

Para demostrar el teorema, considérese una $\varepsilon > 0$ y escójase un índice q tal que $S_q < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$. Como la sucesión de particiones considerada es normal, tenemos $d'_n < \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot 2^q M}$ para n suficientemente grande.

De aquí, según el lema, tenemos

$$S'_n \leqslant S_q + 3\cdot 2^q M d'_n < \int_a^b f(x)\,dx + 2\varepsilon.$$

Además, escójase para toda n un índice j_n tal que la desigualdad $\frac{b-a}{2^{j_n}} < \frac{\varepsilon}{3 l_n M}$ se verifique. Por tanto

$$S_{j_n} \leqslant S'_n + 3 l_n M \frac{b-a}{2^{j_n}} < S'_n + \varepsilon,$$

de donde

$$\int_a^b f(x)\,dx < S'_n + \varepsilon, \quad \text{porque} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S_{j_n}.$$

En consecuencia,

$$\int_a^b f(x)\,dx < S'_n + \varepsilon < \int_a^b f(x)\,dx + 3\varepsilon.$$

El número ε es arbitrario luego esta desigualdad implica la fórmula (37).

Por consiguiente, nuestro teorema está completamente comprobado. Hay un teorema similar para la integral inferior.

Las siguientes fórmulas son una consecuencia importante de nuestro teorema:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{40}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

si $a < c < b$.

En efecto, divídanse los segmentos ac y cb en 2^n partes iguales. Denótense los puntos de la partición por

$$\begin{aligned} a = a_{n,0} < a_{n,1} < \ldots < a_{n,2^n} = c = \\ = b_{n,0} < b_{n,1} < \ldots < b_{n,2^n} = b. \end{aligned} \tag{41}$$

Sea $M_{n,k}$ la cota superior de la función f en el intervalo $a_{n,k-1}\,a_{n,k}$ y $P_{n,k}$ la cota superior en el intervalo $b_{n,k-1}\,b_{n,k}$. Entonces tnemos

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}(a_{n,k} - a_{n,k-1})$$

y

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{2^n} p_{n,k}(b_{n,k} - b_{n,k-1}).$$

Además

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}(a_{n,k} - a_{n,k-1}) + \sum_{k=1}^{2^n} p_{n,k}(b_{n,k} - b_{n,k-1}) \right\},$$

puesto que los puntos (41) definen una sucesión normal de particiones del segmento ab. De aquí se deduce la primera de las fórmulas (40). La demostración de la segunda es análoga.

Se sigue de las fórmulas (40) que si la función f es integrable en los intervalos ac y cb (donde $a < c < b$), entonces también es integrable en el intervalo ab y se verifica la fórmula 5 del § 10.2 (sobre división del intervalo de integración).

Recíprocamente, si una función $f(x)$ es integrable en el intervalo ab entonces es también integrable en los intervalos ac y cb (y también en todo intervalo contenido en ab).

En efecto, tenemos por la hipótesis que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Comparando este par de ecuaciones con las fórmulas (40) obtenemos

$$\left(\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right) + \left(\int_c^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\right) = 0.$$

De aquí concluimos por las desigualdades obvias

$$\int_a^c f(x)\,dx \leqslant \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \int_c^b f(x)\,dx \leqslant \int_c^b f(x)\,dx$$

que

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Al igual que para funciones continuas consideremos las fórmulas (2) y (3) para funciones integrables arbitrarias y comprobamos los teoremas 1, 2, 6, 7, y 8 del § 10.2. En lugar del teorema del valor medio tenemos

para funciones integrables arbitrarias la doble desigualdad.

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a), \tag{42}$$

donde $a < b$ y M y m denotan las cotas superior e inferior de la función f en el intervalo ab respectivamente.

El Teorema 10 del § 10.2 sobre la derivabilidad de la función $g(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ no se verifica para funciones integrables arbitrarias. Sin embargo, puede comprobarse que la función $g(x)$ es continua.

En efecto, denotando por M la cota superior de la función $|f(x)|$ en el intervalo ab tenemos (por las fórmulas (40) y (42)):

$$|g(x+h)-g(x)| = \left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right|$$
$$= \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant |h|\cdot M,$$

de donde $\lim\limits_{h=0} g(x+h) = g(x)$.

Ejercicios del § 10

1. Demuéstrese que $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

2. Evalúese la suma $\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \cdots \pm \frac{1}{2n+1}\binom{n}{n}$.

Sugerencia: aplique la substitución $x = \cos t$ a la integral $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

3. Deduzca la fórmula (Cavalieri)

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$$

aplicando la integral $\int_0^1 x^m\,dx$ (ver también los ejercicios 2 y 3 del § 1).

4. Evalúese $\lim\limits_{n=\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right)$ (integrando la función $\frac{1}{1+x^2}$).

5. Demuéstrese que $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \log 2$.

6. Dé una interpretación geométrica de la constante de Euler (ver § 7, Ejemplo 18) $C = \lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$, aplicando la ecuación $\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$.

7. Demuéstrese que $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$. Descompóngase el intervalo de integración en mitades y substitúyase en la segunda integral $x = \pi - t$.

8. Demuéstrese que $\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ (primero demuéstrese que $\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\,dx$).

9. Calcúlese la longitud del arco de la parábola dada por la ecuación $y = x^2$, que está entre los puntos de abscisas 0 y a.

10. Dada una elipse de excentricidad e y de eje mayor de longitud 2 exprese su perímetro por medio de una serie de potencias con respecto a e.

11. La circunferencia dada por la ecuación $(x-a)^2+y^2 = r^2$ que está en el plano XY gira (en el espacio) alrededor del eje Y. Evalúe el área de la superficie del sólido así obtenido, llamado toro (consideramos $a > r$).

12. Evalúe el área de la parte común de la circunferencia con radio r y una elipse con ejes a y b que tenga el mismo centro que la circunferencia.

13. Aplicando la fórmula de Simpson a la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, evalúe las primeras 5 cifras del desarrollo decimal del número $\frac{1}{4}\pi$.

14. Demuestre que la fórmula de Simpson (24) da el área con un error menor que $\frac{M(b-a)^4}{576}$, donde M denota la cota superior de $|f^{iv}(x)|$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$.

Para comprobar esto, introduzca una función auxiliar:

$$g(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3}\left[f(c-t)+4f(c)+f(c+t)\right],$$

donde $c = \dfrac{a+b}{2}$,

y deduzca la desigualdad $-\dfrac{|t|}{3}\,2M \leqslant g'''(t) \leqslant \dfrac{|t|}{3}\,2M$. Obtenga el resultado pedido, integrando esta desigualdad.

15. Demuestre la desigualdad de Schwarz para integrales:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

(Aplique la desigualdad $\int_a^b [f(x)+c\cdot g(x)]^2 dx \geqslant 0$ que se verifica para toda c.)

16. Dé la fórmula para el radio de curvatura en un punto x, y para las curvas siguientes:

1) hipérbola $xy = 1$, 2) elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

3) parábola $y = 4px^2$, 4) hipocicloide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,

5) la curva $y = x^3$.

17. Calcule en la curva exponencial $y = e^x$ el punto en el que la curvatura es máxima.

18. Dada la hipocicloide del ejercicio (16, 4), evalúe su longitud, el área de la región contenida en ella, el volumen y el área del sólido de revolución obtenido por la rotación de esta hipocicloide alrededor del eje X.

19. Un sistema de funciones $f_1, \ldots, f_n$ es *linealmente independiente* si no existe un sistema de n constantes $c_1, \ldots, c_n$ (excepto el de n ceros) tal que la desigualdad

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

se verifique para todo valor de x.

Demuestre que una condición necesaria y suficiente para la independencia lineal de un sistema de n funciones en un intervalo ab es que la desigualdad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

se verifique, donde

$$a_{km} = \int_a^b f_k(x)\,f_m(x)\,dx.$$

(Aplique las condiciones para la existencia de soluciones no triviales de un sistema de n ecuaciones

$$a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

con n incógnitas.)

20. Un sistema finito o infinito de funciones $f_1, f_2, \ldots$ es *ortogonal* en el intervalo ab, si se satisfacen las condiciones

$$\int_a^b f_k(x)\,f_m(x)\,dx \begin{cases} = 0 & \text{para } k \neq m, \\ \neq 0 & \text{para } k = m. \end{cases}$$

Dé ejemplos de sistemas ortogonales entre las funciones trigonométricas.

21. Demuéstrese que los polinomios (*los llamados polinomios de Legendre* [1]) definidos por la fórmula

$$w_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

constituyen un sistema ortogonal en el intervalo $-1, +1$.

(Primero compruebe que si $m < n$, entonces $\int_{-1}^{+1} w_n(x)\cdot x^m\,dx = 0$.)

[1] Adrien Legendre (1752-1833), gran matemático francés.

§ 11. INTEGRALES IMPROPIAS Y SUS RELACIONES CON LAS SERIES INFINITAS

11.1. Integrales con un intervalo de integración no acotado

Sea dada una función continua $y = f(x)$ en un intervalo infinito $x \geqslant a$. Entonces existe la integral $\int_a^x f(z)\,dz$ para toda $x \geqslant a$. Si existe

$$\lim_{x=\infty} F(x), \quad \text{donde} \quad F(x) = \int_a^x f(z)\,dz,$$

entonces este límite se denota por el símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y se llama *integral impropia* (de la primera clase) *de la función f desde a hasta ∞*. Considerando la existencia de este límite, tenemos entonces

$$(1) \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(z)\,dz.$$

También decimos en este caso que la integral impropia es convergente. Si $\lim_{x=\infty} \int_a^x f(z)\,dz = \infty$ (ó $-\infty$), entonces escribimos $\int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$ (ó $-\infty$); en este caso decimos que la integral diverge a $+\infty$ ó a $-\infty$.

Similarmente, definimos:

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{x=-\infty} \int_x^a f(z)\,dz,$$

$$\text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Tenemos por la definición:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} [F(x) - F(a)] = \lim_{x=\infty} F(x) - F(a),$$

donde F es una función primitiva de la función f.

Por ejemplo,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1.$$

De aquí, esta integral es convergente. Más generalmente, para $s > 1$ la

integral

$$(3) \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{s-1}$$

es convergente.

Pero para $s = 1$ obtenemos una integral que diverge a ∞:

$$(4) \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\log x]_1^\infty = \infty.$$

Un ejemplo de una integral que no tiene límite finito ni infinito es $\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$, ya que $\lim_{x=\infty} \cos x$ no existe.

En el ejemplo anterior el hecho esencial es que la función bajo el signo de la integral adquiere valores tanto positivos como negativos. De hecho el siguiente teorema es válido:

1. *Si $f(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$, entonces la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tiene o un valor finito o bien uno infinito (según que la función $F(x) = \int_a^x f(z)\,dz$ sea acotada o no acotada en la región $x \geqslant a$).*

En efecto, por ser $F(x)$ no decreciente, tiene límite $\lim_{x=\infty} F(x)$ finito o infinito según que sea acotada, o no acotada (ver el § 4.7, 1).

El Teorema 4′ del § 4.7 implica el siguiente teorema inmediatamente:

2. *Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (a un límite finito) es, que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número r tal que las condiciones $x > r$ y $x' > r$ implican la desigualdad*

$$\left|\int_{x'}^x f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

En efecto, la existencia del límite $\lim_{x=\infty} F(x)$ es equivalente a la condición que para toda $\varepsilon > 0$ existe un número r tal que $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$ siempre que $x > r$ y $x' > r$. Puesto que

$$F(x) - F(x') = \int_{x'}^x f(z)\,dz, \quad \text{entonces} \quad \left|\int_{x'}^x f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Geométricamente interpretamos la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ como la integral en límites finitos: si $f(x) \geqslant 0$, ésta significa el área de la región no acotada de puntos x, y tales que $x \geqslant a$ y $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

11.2. Integrales de funciones no definidas en un punto

Sea dada una función continua f en un intervalo $a \leqslant x < b$ (el intervalo sin el punto b). Entonces para toda x que satisface la condición anterior existe la integral definida $\int_a^x f(z)\,dz$. Si existe el límite $\lim\limits_{x=b-0} F(x)$ donde $F(x) = \int_a^x f(z)\,dz$, entonces este límite es denotado por el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$, como en el caso considerado en la sección anterior, a saber, como en el caso en que la función f es definida y continua en todo el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ (incluyendo los extremos). En el caso anterior la definición dada en el § 10 (fórmula (1)) es compatible con la definición del símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ dada ahora. En otras palabras, *si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$* (en el sentido de la definición del § 10, (fórmula (1)) *satisface la condición*

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x=b-0} F(x), \quad \textit{donde} \quad F(x) = \int_a^x f(z)\,dz.$$

Esta ecuación significa que $F(b) = \lim\limits_{x=b-0} F(x)$, esto es, que la función $F(x)$ es continua (por la izquierda) en el punto b; pero esto viene del Teorema 10 del § 10 (Observación (β)).

La integral de una función f definida en un intervalo $a \leqslant x < b$ se llama *integral impropia* (de la segunda clase). Si existe esta integral, esto es, si existe el $\lim\limits_{x=b-0} F(x)$ entonces decimos que la integral es *convergente*.

Si la función f está definida y es continua en un intervalo $a < x \leqslant b$, entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se define análogamente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x=a+0} \int_x^b f(z)\,dz.$$

Más generalmente, si una función f se define y es continua en un intervalo abierto $a < x < b$ y si las integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes siendo c un punto arbitrario del intervalo $a < x < b$, entonces por la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ entendemos

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se ve fácilmente que esta suma no depende de la elección del punto c.

Más generalmente, si la función f esta definida y es continua en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ *excepto en un número finito de puntos* (en los cuales la función no está definida o es discontinua), entonces por la integral (impropia) de la función f en este intervalo entendemos la suma

$$(7) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx,$$

donde $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, y todos los puntos tales que f no está definida o es discontinua en estos puntos están contenidos en el sistema de puntos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente, si todas las integrales del segundo miembro de la fórmula (7) son convergentes.

1. *Si una función $f(x)$ es acotada definida y continua excepto en un número finito de puntos del intervalo ab, entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente.*

Según las fórmulas (6) y (7) es suficiente demostrar este teorema en el caso especial en que la función f sea definida y continua para $a \leqslant x < b$.

Para este fin nótese que existe una condición necesaria y suficiente para la convergencia de integrales impropias de la segunda clase, análoga a la condición dada para integrales impropias de la primera clase (§ 11.1, 2).

2. *Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función definida y continua en $a \leqslant x < b$ es, que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que las condi-*

ciones $0 < b-x < \delta$ *y* $0 < b-x' < \delta$ *implican la desigualdad*

$$\left|\int_{x'}^{x} f(z)\,dz\right| < \varepsilon. \tag{8}$$

En efecto, escribiendo $F(x) = \int_a^x f(z)\,dz$ concluimos del Teorema 4 del § 4.7 que la existencia del límite $\lim_{x=b-0} F(x)$ es equivalente a la desigualdad $|F(x)-F(x)| < \varepsilon$ (cuando x y x' satisfacen las condiciones anteriormente mencionadas). Pero

$$F(x)-F(x') = \int_{x'}^{x} f(z)\,dz,$$

de donde se deduce la fórmula (8).

Demostremos ahora el Teorema 1. Dada una $\varepsilon > 0$, se elige un número $\delta > 0$ tal que las condiciones $0 < b-x < \delta$ y $0 < b-x' < \delta$ implican la desigualdad (8).

La función $f(x)$ es por suposición acotada en $a \leqslant x < b$. Por consiguiente, existe un número M tal que $M > |f(x)|$ para toda x en el intervalo considerado. Escribamos $\delta = \varepsilon/M$. Ahora,

$$\left|\int_{x'}^{x} f(z)\,dz\right| < |x-x'|M$$

y las desigualdades $0 < b-x < \delta$ y $0 < b-x' < \delta$ implican $|x-x'| < \delta = \varepsilon/M$, de donde se sigue la fórmula (8) requerida.

De esta manera se demuestra el Teorema 1. Por consiguiente, la noción de una integral impropia permite una generalización de la noción de la integral definida a funciones acotadas que tienen un número finito de puntos de discontinuidad.

EJEMPLOS. (α) $\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[x^{1-s}\right]_0^1 = \frac{1}{1-s}$ para $s < 1$ $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$.

(β) $\int_0^1 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$ existe por el Teorema 1, ya que la función bajo el signo de la integral es continua y acotada para $0 < x \leqslant 1$.

(γ) Similarmente, existe la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. En este caso se considera que la integral es aparentemente *impropia*; aunque la función bajo el signo de integral no está definida en el punto 0, tiene un límite en

este punto. Suponiendo que este límite es el valor de la función integrada en el punto 0 obtenemos una integral definida (de una función continua) en el sentido usual.

(δ) Analizando la definición de la integral (impropia) de una función f definida y continua en un intervalo abierto $a < x < b$ vemos que esta integral puede definirse como la diferencia $F(b)-F(a)$, donde $F(x)$ es una función continua arbitraria en el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ y que satisface la condición $F'(x) = f(x)$ en el intervalo abierto $a < x < b$ (por supuesto si tal función F existe).

Por ejemplo, la integral $\int_{-r}^{r} \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$ que expresa la longitud de una semicircunferencia de radio r es una integral impropia (el denominador de la función integrada se anula en los extremos del intervalo de integración). Sin embargo, como la función primitiva de la función integrada, $F(x) = -r \arccos(x/r)$ es continua en todo el intervalo $-r \leqslant x \leqslant r$, el valor de la integral considerada se expresa por la diferencia $F(r)-F(-r) = \pi r$ (justamente como en el ejemplo considerado en el § 10.5).

Observaciones. *Una integral impropia de una función acotada y continua excepto en un número finito de puntos es igual a la integral de Riemann de esta función.* Según el teorema sobre la división del intervalo de integración, la demostración se reduce al caso en que f es continua en el intervalo $a \leqslant x < b$. Además según la continuidad de la integral de Riemann tratada como una función del límite superior de integración (ver § 10.11) y a la integrabilidad de la función f en el sentido de Riemann, la integral de Riemann de la función f en el intervalo ab es igual a $\lim_{x=b-0} \int_a^x f(x)\,dx$, esto es, $= \int_a^b f(x)\,dx$ (los símbolos $\int_a^x$ y $\int_a^b$ son aplicados aquí en el sentido de la definición del § 10.1 y del § 11.2).

11.3. Fórmulas de cálculo

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y definidas para $a \leqslant x < b$, donde b puede también denotar ∞. Consideremos que las integrales (impropias de primera o de segunda clase) $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ son convergentes.

Entonces las fórmulas 1 y 2 del § 10.2 siguen siendo válidas, ya que

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \lim_{x=b}\int_a^x [f(x)\pm g(x)]\,dx$$
$$= \lim_{x=b}\int_a^x f(x)\,dx \pm \lim_{x=b}\int_a^x g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Se demuestra análogamente que la fórmula 2 del § 10.2 es válida.

La fórmula para la integración por partes (esto es, la 3) también sigue siendo verdadera considerando que $f(b)\,g(b)$ denota $\lim\limits_{x=b} f(x)\,g(x)$.

Similarmente indicando $\lim f(x)$ por $f(b)$ (donde b así como $f(b)$ puede ser $=\infty$ se cumple la fórmula 4 para integración por substitución. A saber, considerando que la integral $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$ es convergente, tenemos

$$\int_a^b g[f(x)]f'(x)\,dx = \lim_{x=b}\int_a^x g[f(x)]f'(x)\,dx$$
$$= \lim_{x=b}\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)\,dy = \lim_{y=f(b)}\int_{f(a)}^{y} g(y)\,dy = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy,$$

ya que la integral tratada como función del límite superior de integración es continua (§ 10.2, 10).

Considerando la estricta monotonía de la función f, la convergencia de la integral $\int_a^b g[f(x)]f'(x)\,dx$ implica la convergencia de la $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$. De aquí que la relación previamente comprobada pueda invertirse; a saber según la ecuación $\lim\limits_{y=f(b)} h(y) = b$, donde $h(y)$ denota la función inversa de $y = f(b)$, el argumento anterior puede efectuarse también en el sentido contrario.

Otras fórmulas de cálculo: la fórmula 5 sobre la división del intervalo de integración y las fórmulas 6-8 pueden también generalizarse fácilmente al caso de las integrales impropias.

Observaciones. Sea una función f *seccionalmente continua* en un intervalo ab. Esto significa (ver § 5.1) que existe un sistema de puntos $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, donde $a_0 = a$ y $a_n = b$, tal que la función f_k definida por

las condiciones $f_k(x) = f(x)$ para $a_{k-1} < x < a_k$, $f_k(a_{k-1}) = f(a_{k-}+0)$ y $f_k(a_k) = f(a_k-0)$ es continua en todo el intervalo $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Entonces tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x)\,dx.$$

Usando esta ecuación y tomando en cuenta el hecho de que

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x)\,dx$$

es una integral propia, establecemos fácilmente que la fórmula para la integral de una suma sigue siendo válida si las funciones f y g son seccionalmente continuas y que la fórmula para la integración por substitución sigue siendo válida también cuando las funciones $g[f(x)]$ y $f'(x)$ son seccionalmente continuas.

11.4. Ejemplos

(α) Para evaluar la integral $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, substituimos $x = \tan t$. Como $\tan 0 = 0$ y $\lim\limits_{t=\pi/2-0} \tan t = \infty$ tenemos

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,\frac{d\tan t}{dt}\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\,dt$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{para } n > 1 \quad \text{(ver § 10.1, (ε))}.$$

La misma integral puede evaluarse aplicando la fórmula de recurrencia (§ 9.3, 5, (β)).

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

y tomando en cuenta que

$$\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]_0^\infty = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^\infty = \pi/2.$$

(β) Para demostrar la convergencia de la integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ aplicaremos el segundo teorema del valor medio (§ 10.7) tomando en cuenta el hecho de que la función $\frac{1}{x}$ es decreciente. Obtenemos

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^c \operatorname{sen} x\,dx + \frac{1}{b}\int_c^b \operatorname{sen} x\,dx.$$

Sea dada una $\varepsilon > 0$. Tiene que definirse la r tal que las condiciones $b > a > r$ impliquen (ver § 11.1, 2):

$$\left|\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| < \varepsilon.$$

Ahora

$$\left|\int_a^c \operatorname{sen} x\,dx\right| \leqslant 2 \quad \text{y así} \quad \left|\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| \leqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) < \frac{4}{a} < \frac{4}{r}.$$

Por consiguiente, es suficiente suponer que $r = \frac{4}{\varepsilon}$.

Notamos que

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad (a > 0). \tag{9}$$

A saber, substituyamos $y = nx$. Obtenemos

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx = \int_0^{na} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy \tag{10}$$

y

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{na} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy,$$

porque $\lim_{n=\infty} na = \infty$.

Observaciones. Escribamos $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Entonces tenemos

$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty I_n$. Esta es una serie alternante (que también se ilustra geométricamente en la gráfica de la función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, ver Fig. 25) con términos (absolutamente) decrecientes tendientes a 0. En efecto, substituyendo $y = x - n\pi$ tenemos

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(y+n\pi)}{y+n\pi}\,dy = \pm\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y+n\pi}\,dy$$

y

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y+n\pi}\,dy < \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y+(n-1)\pi}\,dy = \mp I_{n-1}.$$

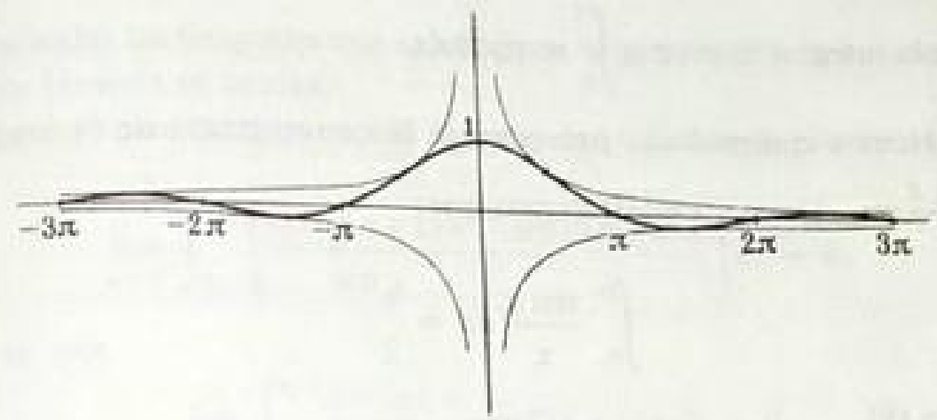


Fig. 25

De aquí se sigue que para toda $a > 0$, tenemos la fórmula

$$\left|\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx. \tag{11}$$

Esta fórmula junto con la (10) da

$$\left|\int_0^a \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx. \tag{12}$$

(γ) Similarmente, como en el ejemplo anterior, comprobamos la convergencia de la integral $\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ (la integral de Fresnel apli-

cada en óptica) aunque no conocemos la integral indefinida. Substituyendo $x^2 = t$ obtenemos

$$\int_1^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Aplicando el segundo teorema del valor medio a la última integral vemos que

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_a^{\xi} \operatorname{sen} t\,dt + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_{\xi}^{b} \operatorname{sen} t\,dt$$

y comprobamos la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt$ por los mismos argumentos como en el ejemplo anterior. Por consiguiente, la integral $\int_1^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ es convergente también asi como la integral $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$, ya que la integral es propia $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$.

(δ) Hemos comprobado previamente la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Ahora, demostraremos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Según (9),

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx,$$

de donde

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{x}\,dx.$$

Reduciremos la integral anterior a la $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x}\,dx$, que evaluaremos ahora. A saber, demostraremos que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

En efecto se deduce de la fórmula (ver § 1, (2)).

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

que

$$\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \cdots + 2\cos 2nx,$$

de donde

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx + \cdots + 2\int_0^{\pi/2} \cos 2nx\,dx = \frac{\pi}{2},$$

ya que todas las integrales que aparecen en la parte media de la expresión de esta fórmula se anulan.

Por tanto, se ha demostrado la fórmula (14). Queda por comprobar que

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{x}\right] dx = 0,$$

esto es, que

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \operatorname{sen}(2n+1)x\,dx = 0.$$

Ahora, la ecuación anterior es una consecuencia directa de la fórmula

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi/2} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx = 0$$

que ya hemos comprobado (§ 10.2, (γ)), después de la substitución

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \quad \text{para} \quad x > 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0.$$

La función f definida en esta forma es continua, puesto que $\lim_{x=0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = 0$ (ver § 8.4, (18)).

(ε) Integral de Dirichlet: $\int_0^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx$.

Comprobaremos que si la función f es monótona y si f' es continua en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant a\ (a > 0)$, entonces

$$\lim_{n=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0). \tag{15}$$

Sea dado un número $\varepsilon > 0$. Escogemos c de tal manera que

$$|f(c)-f(0)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad 0 < c < a. \tag{16}$$

Para calcular la diferencia $\int_0^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}f(0)$,

describamos

$$\int_0^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}f(0) = \int_0^c [f(x)-f(0)]\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx + \\ + f(0)\left(\int_0^c \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}\right) + \int_c^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx$$

y estimemos cada uno de los tres términos del segundo miembro, independientemente.

Al primer término le podemos aplicar el segundo teorema del valor medio, ya que la función $g(x) = f(x)-f(0)$ es monótona. Tomando en cuenta que $g(0) = 0$ obtenemos

$$\int_0^c [f(x)-f(0)]\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx = [f(c)-f(0)]\int_{\xi_n}^c \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx, \\ 0 \leqslant \xi_n \leqslant c.$$

Por (12),

$$\left|\int_{\xi_n}^c \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx\right| \leqslant 2\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Esta desigualdad junto con la (16) da

$$\left|\int_0^c [f(x)-f(0)]\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx\right| \leqslant 2\varepsilon\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx. \tag{17}$$

Para estimar el segundo término, nótese que por (9) y (13),

$$\lim_{n=\infty}\int_0^c \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

De aquí tenemos

$$\left|\int_0^c \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon \tag{18}$$

para n suficientemente grande.

Finalmente, substituyendo $f(x)$ en la fórmula del § 10.2 (γ) por $\frac{f(x)}{x}$ y tomando en cuenta la desigualdad $0 < c < a$, obtenemos

$$\lim_{n=\infty}\int_c^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx = 0.$$

De donde concluimos que

$$\left|\int_c^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx\right| < \varepsilon \tag{19}$$

es válida para n suficientemente grande.

Las estimaciones (17)-(19) dan la requerida para

$$\left|\int_0^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}f(0)\right|,$$

de donde obtenemos la fórmula (15).

Observaciones. La fórmula (15) sigue siendo válida, si reemplazamos la hipótesis de continuidad de f' y la de la monotonía de f por otra más débil a saber, por la hipótesis de que la función f es *seccionalmente continua junto con su derivada y seccionalmente monótona*; aquí $f(0)$ tiene que substituirse por $f(+0)$ (en el caso en que la función f es discontinua en el punto 0), esto es

$$\lim_{n=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}f(+0). \tag{20}$$

En efecto, nuestra hipótesis significa (ver § 5.1) que existe un sistema de puntos $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m = a$ tal que la función f_k defi-

nida por las condiciones

$$f_k(x) = f(x) \quad \text{para} \quad a_{k-1} < x < a_k$$

$$\text{y} \quad f_k(a_{k-1}) = f(a_{k-1}+0), \quad f_k(a_k) = f(a_k - 0)$$

es continua junto con su derivada, y monótona en todo el intervalo

$$a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k \quad \text{para toda} \quad k \leqslant m.$$

Aplicando el teorema sobre la división del intervalo a las integrales impropias obtenemos

$$\int_0^a f(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx = \int_{a_0}^{a_1} f_1(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx + \cdots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} f_m(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx.$$

De aquí

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a f(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n=\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx.$$

Pero esto da la fórmula (20), ya que por (15) tenemos

$$\lim_{n=\infty} \int_{a_0}^{a_1} f_1(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} f_1(0) = \frac{\pi}{2} f(+0),$$

y, por otra parte, tenemos por § 10.2, (γ),

$$\lim_{n=\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx = 0$$

para toda $k > 1$, la función $\dfrac{f_k(x)}{x}$ es continua en el intervalo $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k$.

(ζ) La siguiente fórmula que será usada en la teoría de las series de Fourier se deduce fácilmente de la fórmula (15):

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a f(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\, dx = \frac{\pi}{2} f(+0), \qquad 0 < a < \pi; \tag{21}$$

aquí suponemos como antes que la función f es seccionalmente continua (junto con su derivada) y seccionalmente monótona.

Para este propósito es suficiente notar que si tenemos $0 \leqslant u < v < \pi$

entonces

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_u^v f(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\, dx - \int_u^v f(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_u^v f(x) \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

Ya que, tomando en cuenta la ecuación $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = 0$ (ver § 8.4, (18)) y la desigualdad $x < \pi$, podemos substituir por la función $f(x)$ en la fórmula del § 10.2, (γ), la función $f(x) \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$.

(η) Integral de Poisson [1] $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Antes que nada, obsérvese que aplicando la substitución $x = z\sqrt{n}$, obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{n} \int_0^\infty e^{-nz^2}\, dz. \tag{22}$$

Para poder comparar última integral con las integrales

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)} \tag{23}$$

y

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

que ya conocemos (ver § 10.2, (5) y Ejemplo (α)), aplicamos la doble desigualdad

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

que se deduce de la desigualdad $e^t \geqslant 1 + t$ (ver § 8.4, (16)) por substitución $t = -x^2$ y $t = x^2$. Entonces tenemos

$$(1 - x^2)^n \leqslant e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

[1] Siméon Poisson, autor de numerosas obras sobre cálculo de probabilidades, mecánica, física y astronomía.

(la primera desigualdad es válida para $|x| \leqslant 1$), de donde

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx \leqslant \int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Tomando en cuenta las fórmulas (22) y (23) concluimos que

$$\sqrt{n}\,\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)} \leqslant \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{n}.$$

Denotando por a_n el término de la izquierda de esta relación y por b_n el de la derecha, tenemos $a_n \leqslant \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant b_n$ para toda $n = 1, 2, \ldots$

Ahora, tenemos por la fórmula de Wallis (§ 10.9, (25)):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n=\infty} c_n \quad \text{donde} \quad c_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}.$$

De aquí $a_n = c_n\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$ y, como la sucesión $\{c_n\}$ es decreciente como es fácil ver, $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} < c_n$, esto es, $\dfrac{\pi}{2} < 2c_n^2$; por tanto

$$b_n \leqslant \sqrt{n}\,\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\,2c_n^2 = c_n\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Consecuentemente, concluimos que

$$c_n\cdot\frac{2n}{2n+1} \leqslant \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant c_n\cdot\frac{2n}{2n-1}$$

y como

$$\lim_{n=\infty}\frac{2n}{2n+1} = 1 = \lim_{n=\infty}\frac{2n}{2n-1},$$

tenemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{n=\infty} c_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

11.5. La función Gamma $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,\ x > 0$

Esta integral tiene para $x < 1$ ambas singularidades: a saber, es una integral en un intervalo infinito de integración y además, la función integrada tiende a ∞ a medida que t tiende a 0. Para demostrar su convergencia la descompondremos en dos integrales:

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \text{y} \quad \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \tag{24}$$

y probaremos la convergencia de cada una de éstas separadamente.

Para comprobar la convergencia de la primera de estas integrales nótese que $0 < t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$, ya que $t > 0$. Pero la integral $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ es convergente, puesto que $1-x < 1$ (ver § 11.2, (α)); por tanto deducimos la convergencia de la primera de las integrales (24).

Ahora,

$$t^{x-1}e^{-t} = \frac{t^{x+1}}{e^t}\cdot\frac{1}{t^2} \quad \text{y} \quad \lim_{t=\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t} = 0 \qquad \text{(ver § 7, (27))},$$

de donde tenemos $t^{x-1}e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$ para t suficientemente grande, y la convergencia de la segunda de las integrales (24) se deduce de la convergencia de $\int_1^\infty \dfrac{dt}{t^2}$ (ver (3)).

En esta forma se demuestra la convergencia de la integral $\Gamma(x)$ para toda $x > 0$.

Ahora comprobaremos para enteros positivos n la fórmula

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{15}$$

Para este fin aplicamos la fórmula para integración por partes a la integral $\Gamma(x)$ para $x > 1$:

$$\Gamma(x) = -\int_0^\infty t^{x-1}\frac{de^{-t}}{dt}\,dt \tag{26}$$

$$= -\left[t^{x-1}e^{-t}\right]_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt = (x-1)\Gamma(x-1).$$

De aquí deducimos la fórmula (25) por inducción, aplicando la igualdad

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 = 0!$$

Nótese que la integral de Poisson considerada en el § 11.4 es la mitad del valor de la función Γ para $x = \frac{1}{2}$, ya que substituyendo $t = z^2$ obtenemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}. \tag{27}$$

11.6. La relación entre la convergencia de una integral y la convergencia de una serie infinita

El Teorema de Cauchy-Maclaurin. *Sea la función $f(x)$, $x \geqslant a$, continua, decreciente y positiva. Entonces una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es la convergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^\infty f(a+n)$.*

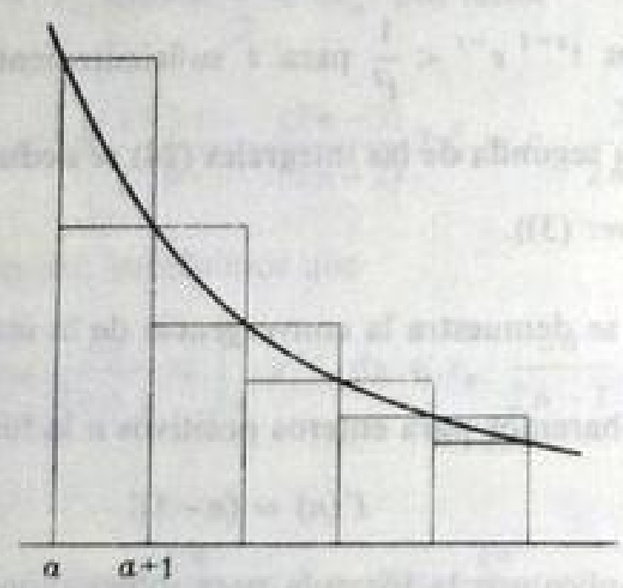


Fig. 26

Por las hipótesis $f(a+n) \leqslant f(x) \leqslant f(a+n-1)$ para $a+n-1 \leqslant x \leqslant a+n$. De aquí

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(a+n)\,dx \leqslant \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx \leqslant \int_{a+n-1}^{a+n} f(a+n-1)\,dx,$$

esto es,

$$f(a+n) \leqslant \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx \leqslant f(a+n-1).$$

Denotando por S_n la suma parcial de la serie $\sum_{m=1}^\infty f(a+m)$, esto es, $S_n = f(a+1)+\ldots+f(a+n)$, tenemos

$$S_n \leqslant \int_a^{a+n} f(x)\,dx \leqslant S_{n-1} + f(a).$$

Suponiendo que la integral es convergente, concluimos que la serie considerada es acotada: $S_n \leqslant \int_a^\infty f(x)\,dx$ y por tanto es convergente (por ser una serie con términos positivos). Recíprocamente, considerando la convergencia de la serie, tenemos

$$\int_a^{a+n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{m=0}^\infty f(a+m) \qquad \text{para toda } n.$$

De aquí

$$\int_a^x f(x)\,dx \leqslant \sum_{m=0}^\infty f(a+m) \qquad \text{para toda } x,$$

ya que, denotando para una x dada, por n, un entero positivo tal que $x < a+n$, tenemos

$$\int_a^x f(x)\,dx \leqslant \int_a^{a+n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{m=0}^\infty f(a+m).$$

De modo que la función $\int_a^x f(x)\,dx$ es acotada y, consecuentemente la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente (ver § 11.1, 1).

Observaciones. (α) La suposición de que la función f es positiva puede omitirse en el teorema anterior. A saber, si una función decreciente es negativa, entonces la integral, así como la serie considerada, divergen a $-\infty$.

(β) Si la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de una función decreciente es convergente, entonces $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$ como es fácil ver. Sin embargo si la función no es decreciente, entonces la integral puede ser convergente

aunque esta desigualdad no se verifique. La evidencia la da la integral $\int_0^x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ que ya hemos considerado en el § 11.4, (γ); esta integral es convergente pero el límite de sen (x^2) a medida que x tiende a ∞, existe.

Suponiendo que $f(x) \geqslant 0$, puede obtenerse una singularidad aún más intensa. A saber, construyamos una sucesión infinita de triángulos isósceles de altura 1 y con intervalos $(0, 1), (1, 1\frac{1}{2}), \cdots, \left(n, n+\frac{1}{2^n}\right), \cdots$ del eje X como bases, sucesivamente. Sea $y = f(x)$ la gráfica de una línea poligonal infinita constituida por los lados de estos triángulos de bases diferentes y los segmentos del eje X uniendo los triángulos sucesivos. Por consiguiente, la región contenida entre esta línea poligonal y el eje X está constituida por los triángulos anteriores; de aquí, su área es la suma de sus áreas, esto es,

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots = 1.$$

Sin embargo, $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ no existe.

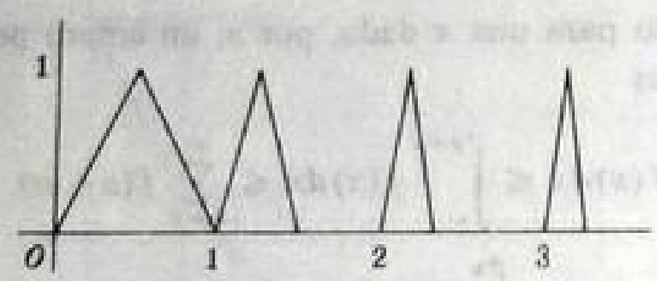


FIG. 27

EJEMPLOS. (α) La serie $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ es convergente para toda $s > 1$ (¹), ya que la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ es convergente (ver § 11.1, (3)).

(β) La serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ es convergente para $s > 1$ y divergente para $s = 1$.

(¹) La función (Riemann) $\zeta(s)$ es de gran importancia en la teoría de los números.

Para demostrar esto, consideremos la integral $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^s}$.

Ahora

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^s} = \int \frac{d\log x}{(\log x)^s} = \frac{1}{1-s}\cdot\frac{1}{(\log x)^{s-1}} \quad \text{para} \quad s > 1.$$

Como

$$\lim_{x=\infty} (\log x)^{s-1} = \infty,$$

tenemos

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^s} = \frac{1}{(s-1)(\log 2)^{s-1}}.$$

De aquí concluimos por el Teorema de Cauchy-Maclaurin que nuestra serie es convergente para $s > 1$. Sin embargo para $s = 1$ esta serie es divergente, porque

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{d\log x}{\log x} = \log(\log x).$$

Según la ecuación $\lim\limits_{x=\infty} \log(\log x) = \infty$ esto implica la divergencia de la integral $\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}$.

(γ) Similarmente, puede comprobarse que la integral

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x(\log x)[\log(\log x)]^s}$$

es convergente para $s > 1$ y divergente para $s = 1$ (donde a es suficientemente grande). De aquí la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)[\log(\log n)]^s}$$

es convergente para $s > 1$ y divergente para $s = 1$.

Resultados más generales pueden obtenerse considerado el producto de n iteraciones sucesivas del logaritmo el último de los cuales es elevado a la potencia s (en el ejemplo anterior $n = 2$, la iteración cero $= x$).

Esto conduce a otros tipos de series convergentes y a una sucesión infinita de series infinitas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \qquad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)} \quad \text{etc.}$$

divergentes cada vez más lentamente.

(δ) Criterios Logarítmicos. La comparación de los términos de una serie dada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ con los términos de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ conduce al siguiente criterio de convergencia:

si $a_n > 0$ y si

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(na_n)}{\log(\log n)} < -1, \tag{28}$$

entonces la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ es convergente: si este límite es > -1, entonces la serie es divergente.

En efecto, supongamos que la desigualdad (28) se satisface y denotemos por $-s$ un número mayor que el límite considerado y menor que -1. Entonces tenemos $s > 1$ y

$$\log(na_n) < -s \log(\log n) = \log(\log n)^{-s}$$

para n suficientemente grande, por lo tanto

$$na_n < (\log n)^{-s}, \quad \text{esto es,} \quad a_n < \frac{1}{n(\log n)^s}.$$

Por consiguiente, por el teorema sobre la comparación de series con términos positivos, la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ implica la convergencia de $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Pero si el límite considerado en la fórmula (28) es mayor que -1, entonces para n suficientemente grande tenemos $\log(na_n) > -\log(\log n)$, de donde $na_n > (\log n)^{-1}$, esto es, $a_n > \frac{1}{n \log n}$ y la divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ implica la divergencia de $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

El caso en que el límite considerado es igual a -1 es para nuestro criterio logarítmico un caso "dudoso" esto es, no podemos establecer por este criterio si la serie es convergente o divergente. Sin embargo en este caso pueden aplicarse criterios logarítmicos más fuertes que los considerados en el ejemplo (γ).

Añadamos que existen series (con términos positivos), que no reaccionan a ningún criterio logarítmico.

11.7. Series de Fourier [1]

Supóngase que tenemos una serie trigonométrica convergente de la forma

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + \\ + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots \tag{29}$$

Observamos que si la serie dada es uniformemente convergente en el intervalo $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, entonces los coeficientes a_n y b_n pueden expresarse fácilmente por medio de la suma de la serie, esto es, de la función f. Porque, según la convergencia uniforme, tenemos (ver § 10.2, 12)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)\,dx$$

y como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0,$$

tenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{30}$$

[1] Jean Fourier (1768-1830). Fourier introdujo los desarrollos de funciones conocidas con su nombre en relación con su trabajo en la teoría de conducción del calor.

Para evaluar a_n, multiplicamos ambos miembros de la identidad (29) por $\cos nx$ y obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx\,dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_m\cos mx\cos nx + b_m \operatorname{sen} mx\cos nx)\,dx,$$

justamente como en el cálculo anterior.

Como (ver § 10.1, (δ))

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi$$

$$\text{y}\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} mx\cos nx\,dx$$

para $m \neq n$, tenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \tag{31}$$

Similarmente calculamos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx. \tag{32}$$

Surge la siguiente pregunta: ¿Qué funciones f pueden representarse en la forma (29), con coeficientes a_n y b_n que satisfagan las fórmulas (30)-(32) (las llamadas *fórmulas de Euler-Fourier*)? Si existe dicho desarrollo entonces se llama *serie de Fourier de la función f*.

Como las funciones cos y sen son periódicas, es evidente que la periodicidad de la función f tiene que ser considerada también. Además, consideramos que la función f es seccionalmente monótona (ver § 4.2).

Demostraremos el siguiente

TEOREMA. *Toda función periódica f con período 2π (esto es, $f(x+2\pi) = f(x)$), seccionalmente continua (junto con su derivada), seccionalmente monótona y que satisface la condición (en los puntos de discontinuidad)*

$$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{33}$$

puede desarrollarse en una serie de Fourier.

Denotemos por $S_n(x)$ la n-ésima suma parcial de la serie (29), esto es,

$$S_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\operatorname{sen} x) + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx). \tag{34}$$

Tenemos que demostrar que si los coeficientes satisfacen las condiciones (30)-(32) entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x). \tag{35}$$

Las condiciones mencionadas anteriormente permiten transformar la fórmula (34) como sigue:

$$\begin{aligned}\pi S_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{2}f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos t\cos x + \operatorname{sen} t\operatorname{sen} x)\,dt + \\ &\quad + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt\cos nx + \operatorname{sen} nt\operatorname{sen} nx)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\tfrac{1}{2} + \cos(t-x) + \cdots + \cos n(t-x)\right]dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{t-x}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{t-x}{2}}\,dt\end{aligned} \tag{36}$$

por la fórmula conocida (ver § 1, (2)):

$$\tfrac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{2n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}}.$$

Substituyamos $\dfrac{t-x}{2} = z$. Obtenemos

$$\pi S_n(x) = \int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz. \tag{37}$$

Descomponiendo esta integral en dos integrales en los intervalos

desde 0 hasta $\frac{\pi-x}{2}$ y desde $\frac{-\pi-x}{2}$ hasta 0 y substituyendo en la segunda integral $z = -y$, obtenemos

$$(38)\qquad \pi S_n(x) = \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz + \int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2y)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)y}{\operatorname{sen} y}\,dy.$$

Ahora, demostraremos la ecuación (35) para $-\pi < x < \pi$. Según (33) es suficiente comprobar que

$$(39)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz = \frac{\pi}{2}f(x+0)$$

y

$$(40)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2y)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)y}{\operatorname{sen} y}\,dy = \frac{\pi}{2}f(x-0).$$

Dada x, escribamos $f(x+2z) = g(z)$. Entonces la función $g(z)$ es seccionalmente continua (junto con su derivada) y seccionalmente monótona. Por tanto satisface la fórmula (ver (21)).

$$(41)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{a} g(z)\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\,dz = \frac{\pi}{2}g(+0),\quad \text{si}\quad 0 < a < \pi.$$

En esta fórmula puede reemplazarse a por $\frac{\pi-x}{2}$, porque la desigualdad $-\pi < x < \pi$ implica la $0 < \frac{\pi-x}{2} < \pi$. Como $g(+0) = f(x+0)$, la fórmula (41) da (39) inmediatamente (nos restringimos de la sucesión $n = 1, 2, \ldots$ a la subsucesión de números impares).

La fórmula (40) se obtiene de una forma similar, escribiendo $f(x-2y) = h(y)$ y tomando en cuenta que $0 < \frac{\pi+x}{2} < \pi$ y que $h(+0) = f(x-0)$.

Por consiguiente, nuestro teorema se ha demostrado para $-\pi < x < \pi$ queda por considerar el caso en que $x = -\pi$ (o cuando $x = \pi$). Sea $x = -\pi$. Según (37) tenemos

$$\pi S_n(-\pi) = \int_0^{\pi} f(-\pi+2z)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz.$$

Descomponiendo esta integral en dos integrales en los intervalos de 0 a $\frac{1}{2}\pi$ y de $\frac{1}{2}\pi$ a π y substituyendo $y = \pi - z$ en la segunda integral obtenemos

$$\pi S_n(-\pi) = \int_0^{\pi/2} f(-\pi+2z)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz + \int_0^{\pi/2} f(\pi-2y)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)y}{\operatorname{sen} y}\,dy.$$

La primera de estas integrales tiende a $\frac{1}{2}\pi f(-\pi+0)$ como antes y la segunda tiende a $\frac{1}{2}\pi f(\pi-0)$, esto es, a $\frac{1}{2}\pi f(-\pi-0)$ (puesto que la función f es periódica).

De aquí la fórmula (33) se verifica también para $x = -\pi$; y según la periodicidad, es válida para toda x.

De esta manera nuestro teorema está comprobado completamente.

11.8. Aplicaciones y ejemplos

(α) Sea $f(x)$ una función periódica con período 2π dada por las siguientes condiciones:

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}\pi \quad \text{para} \quad -\pi < x < 0,\ f(0) = 0,$$

$$f(x) = \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{para} \quad 0 < x < \pi,\ f(\pm\pi) = 0.$$

La gráfica de esta función consiste de segmentos de longitud π colocados en las rectas $y = \frac{1}{4}\pi$ y $y = -\frac{1}{4}\pi$, alternadamente y de los puntos sobre el eje X que son múltiplos enteros del número π (los extremos de los segmentos no pertenecen a la gráfica).

FIG. 28

Se ve inmediatamente que la función definida de esta forma es seccionalmente continua y seccionalmente monótona (a saber, es monótona en intervalos de la forma $((M-1)\pi < x < m\pi$, donde m es un entero); además la condición (33) se satisface. Por lo tanto el teorema sobre el desarrollo en serie de Fourier puede aplicarse a esta función.

Calculamos los coeficientes a_n y b_n según las fórmulas (30)-(32).

Obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{4}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{4}\left\{\int_{-\pi}^{0} -\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right\} = 0 \quad (n > 0),$$

$$b_n = \frac{1}{4}\left\{\int_{-\pi}^{0} -\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx\right\} = \frac{1}{4n}(2-2\cos n\pi),$$

y entonces $b_n = 0$ para n par y $b_n = 1/n$ para n impar.

Consecuentemente,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots \tag{42}$$

Entonces, cuando x satisface la condición $0 < x < \pi$, $f(x)$ puede reemplazarse por $\frac{1}{4}\pi$.

En particular, substituyendo $x = \frac{1}{2}\pi$ obtenemos el desarrollo de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

que ya deducimos (ver § 7, (51)).

(β) Sea $f(x)$ la función de período 2π definida como sigue:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x, \text{ cuando } -\pi < x < \pi,\ f(-\pi) = 0 = f(\pi).$$

Vemos fácilmente que la función f definida de esta manera es seccionalmente continua y seccionalmente monótona (ver Fig. 29).

FIG. 29

Además la condición (33) se satisface. Por consiguiente, la función f puede desarrollarse en una serie de Fourier.

Calculando los coeficientes a_n y b_n según las fórmulas (30)-(32) obtenemos

$$\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}\cdots, \quad -\pi < x < \pi. \tag{43}$$

Nótese que substituyendo $x = \frac{1}{2}\pi$, obtenemos el desarrollo de Leibniz para $\frac{1}{4}\pi$ (justamente como en el ejemplo anterior).

(γ) Desarrollemos la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Para otras x la función se define por la condición $f(x+2m\pi) = f(x)$. De aquí que sea una función continua en todo el eje X. La gráfica de esta función es una línea poligonal.

Ahora calculamos los coeficientes del desarrollo de la serie de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx = 0 \quad \text{ó} \quad -\frac{4}{\pi n^2}$$

según que n sea par (> 0) o impar, porque

$$\int x\cos nx\,dx = \frac{1}{n}x\operatorname{sen} nx - \frac{1}{n}\int \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n}x\operatorname{sen} nx + \frac{1}{n^2}\cos nx.$$

Similarmente, vemos que $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\operatorname{sen} nx\,dx = 0$, por lo tanto

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right). \tag{44}$$

Nótese que al substituir $x = 0$ obtenemos

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \tag{45}$$

De aqui obtenemos la fórmula de Euler

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \tag{46}$$

Porque, denotando por s la suma de esta serie, tenemos

$$\frac{s}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \quad \text{y entonces} \quad s - \frac{s}{4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots,$$

esto es, $\frac{3}{4}s = \frac{1}{8}\pi^2$, o sea $s = \frac{1}{6}\pi^2$.

(δ) Sea $y = \cos tx$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ y supongamos que t no es un entero, las fórmulas (30)-(32) dan fácilmente:

$$a_0 = \frac{2}{\pi t} \operatorname{sen} \pi t, \quad a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{t}{t^2 - n^2} \operatorname{sen} \pi t, \quad b_n = 0.$$

Por tanto,

$$\pi \cos tx = 2t \operatorname{sen} \pi t \left(\frac{1}{2t^2} - \frac{\cos x}{t^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{t^2 - 2^2} - \cdots \right). \tag{47}$$

En particular, substituyendo $x = \pi$ y dividiendo ambos miembros de la identidad (47) por sen πt obtenemos:

$$\pi \cot \pi t = \frac{1}{t} + 2t \left(\frac{1}{t^2 - 1^2} + \frac{1}{t^2 - 2^2} + \cdots \right). \tag{48}$$

La fórmula (48) tiene la siguiente aplicación interesante. Escribamos

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}.$$

Sea dado un número x que satisface la condición $0 < x < 1$, la serie $S(t)$ es uniformemente convergente en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant x$, ya que $\frac{t}{n^2 - t^2} \leqslant \frac{1}{n^2 - x^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$ es convergente, como se ve fácilmente.

Por tanto la serie $S(t)$ puede integrarse término a término en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant x$. Como

$$\int \frac{2t}{n^2 - t^2} dt = -\log(n^2 - t^2),$$

tenemos

$$\int_0^x \frac{2t}{n^2 - t^2} dt = -\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

De aqui (ver § 10.2, 12 y § 5, (12)):

$$\int_0^x S(t)\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = -\log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Por otra parte,

$$\pi \int \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t}\right) dt = \log \operatorname{sen} \pi t - \log \pi t = \log \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t}.$$

Por tanto

$$\pi \int_0^x \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t}\right) dt$$

$$= \log \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} - \lim_{t \to +0} \log \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t} = \log \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x},$$

puesto que

$$\lim_{t \to +0} \log \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t} = \log \lim_{t \to +0} \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t} = \log 1 = 0.$$

Tomando en cuenta el hecho de que la relación (48) se verifica para toda t que satisface la desigualdad $0 < t \leqslant x$ y que la función $\cot \pi t - \frac{1}{\pi t}$ tiene un límite por la derecha en el punto 0, a saber

$$\lim_{t \to +0} \left(\cot t - \frac{1}{t}\right) = 0 \text{ (ver § 8, (19))}, \text{ concluimos que}$$

$$\pi \int_0^x \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t}\right) dt = -\int_0^x S(t)\,dt,$$

esto es,

$$\log \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} = \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

por tanto

$$\text{sen}\,\pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \quad -1 < x < 1. \tag{49}$$

Nótese que substituyendo en la fórmula (49), $x = \frac{1}{2}$, obtenemos la fórmula de Wallis ya deducida (ver § 10, (29)):

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots = \frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\ldots \tag{50}$$

Substituyendo $x = \frac{1}{4}$, obtenemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(4n)^2}\right] = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\frac{11\cdot 13}{12\cdot 12}\cdot\ldots,$$

de lo que concluimos por (50) que

$$\sqrt{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\ldots = \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{100}{99}\cdot\ldots$$

Ejercicios del § 11

1. Evalúe $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

2. Investigue la convergencia de las integrales

$$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx.$$

3. Se dan el $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = 0$ y un número $c > 0$. Escribamos

$$a_n = \int_{a+c(n-1)}^{a+cn} f(x)\,dx.$$

Si la serie $a_1 + a_2 + \cdots$ es convergente, entonces la integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente también, y es igual a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aplique el teorema anterior a la demostración de la convergencia de la integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx.$$

4. Una integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *es absolutamente convergente*, si la integral $\displaystyle\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ es convergente. Demuéstrese que una integral absolutamente convergente es también convergente en el sentido usual.

5. Demuéstrese que la serie $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}$ es convergente $(k > a)$.

6. Demuéstrese que $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$.

(Desarróllese la función bajo el signo de la integral en una serie infinita y aplíquese la fórmula (45).)

7. Demuéstrese que $\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$ (ver la fórmula (45)).

8. Desarróllense las funciones:

1) x^2, 2) $x\cos x$, 3) $|\text{sen}\,x|$,
4) $\text{senh}\,tx$, 5) $\cosh tx$

en serie de Fourier.

9. Considerando que el sistema de funciones $f_1, f_2, \ldots$ es ortogonal y que la serie $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ es uniformemente convergente (en el intervalo considerado ab), calcule los coeficientes a_n (por medio de las funciones $f, f_1, f_2, \ldots$).

EJERCICIOS ADICIONALES

Ejercicios del § 1

1.1. Demuéstrese que

$$|a \operatorname{sen} x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

1.2. Demuéstrese que

$$\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{1+|a_1+a_2+\cdots+a_n|} \leqslant \frac{|a_1|}{1+|a_1|}+\frac{|a_2|}{1+|a_2|}+\cdots+\frac{|a_n|}{1+|a_n|}.$$

1.3. Demuéstrense las desigualdades

$$\sqrt[m]{a+b} \leqslant \sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b} \quad \text{y} \quad |\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}| \leqslant \sqrt[m]{|a-b|}$$

para $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (siendo m un entero positivo).

1.4. Demuéstrese que si $c \geqslant 1$, entonces la desigualdad

$$\left|\frac{a}{1+a^2}-\frac{b}{1+b^2}\right| \leqslant c\,|a-b|$$

se verifica para toda a y b. Demuéstrese que los números $c < 1$ no tienen esta propiedad.

1.5. Demuéstrese que

$$\sqrt[m]{1+a} \leqslant 1+\frac{a}{m}$$

para $a \geqslant -1$ (m es un entero positivo).

* Escrito por W. Kolodziej.

1.6. Demuestre que para cualesquiera enteros positivos n y k se verifica la siguiente desigualdad

$$2^n \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Sugerencia: Substitúyase un entero m adecuado en la desigualdad $2^m \geqslant 1+m$ (obtenida de la desigualdad de Bernoulli).

1.7. Hállense las cotas superior e inferior del conjunto de todas las fracciones decimales de la forma 0.11 ... 1.

1.8. Similarmente: hállense las cotas del conjunto de todos los números de la forma $\dfrac{(n+m)^2}{2^{nm}}$, siendo n y m enteros positivos.

1.9. Sean Z_x y Z_y dos conjuntos acotados no vacíos de números reales. Representando por Z_{x+y} el conjunto de todas las sumas $x+y$, donde x pertenece a Z_x y y pertenece a Z_y, demuéstrese que

$$\sup Z_{x+y} = \sup Z_x + \sup Z_y,$$
$$\inf Z_{x+y} = \inf Z_x + \inf Z_y$$

(los símbolos sup Z e inf Z significan las cotas superior e inferior del conjunto Z, respectivamente).

Ejercicios del § 2

2.1. Evalúense los límites

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}), \quad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{1+2^{(-1)^n}},$$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k} \quad (k \text{ es un entero}), \quad \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

2.2. Demuéstrese que las sucesiones

$$\left\{\left(\cos\frac{2\pi n}{3}\right)^n\right\} \quad \text{y} \quad \{(-1)^{n(n+1)/2}\sqrt[n]{n}\}$$

son divergentes.

2.3. Análogamente: demuéstrese la divergencia de las sucesiones

$$\{\operatorname{sen} nt\} \quad \text{y} \quad \{\cos nt\} \quad (0 < t < \pi).$$

Sugerencia: Cada intervalo de longitud t contiene un número x de la forma $x = nt$, donde n es un entero.

2.4. Sea $\{a_n\}$ una sucesión no decreciente de números positivos. Demuéstrese que

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = \lim_{n=\infty} a_n.$$

2.5. Sea Z un conjunto no vacío y acotado superiormente. Demuéstrese que el número M es la cota superior del conjunto Z, si y sólo si $M \geqslant x$ para toda x de Z y $\lim_{n=\infty} x_n = M$ para cada sucesión $\{x_n\}$ con términos de Z.
Exprese y demuéstrese un teorema análogo referente a la cota inferior.

2.6. Dado un número $c > 0$ definimos la sucesión $\{a_n\}$ por inducción como sigue:

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \left[a_n + \frac{c}{a_n}\right].$$

Demuéstrese que $\lim_{n=\infty} a_n = \sqrt{c}$.

Sugerencia: Demuéstrese que la sucesión $a_2, a_3, \ldots$ es decreciente.

2.7. Demuéstrese que toda sucesión convergente contiene un término máximo o uno mínimo.

2.8. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es *de variación acotada*, si la sucesión $\{s_n\}$ con términos

$$s_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|$$

es acotada. Demuéstrese que toda sucesión de variación acotada es convergente. Demuéstrese con un ejemplo, que el teorema recíproco se verifica.

2.9. Hállese el límite de la sucesión $\{a_n\}$ definida por inducción

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$$

Sugerencia: Obsérvese que $|a_{n+1} - a_n| \leqslant (\frac{1}{2})^{n-1}|a_2 - a_1|$.

2.10. Sea $\{a_n\}$ una sucesión no acotada, ni superior ni inferiormente y tal

que $\lim_{n=\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Demuéstrese que todo número real es el límite de cierta subsucesión de ésta.

Ejercicios del § 3

3.1. Demuéstrese la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[2+(-1)^n]^n}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{8}.$$

3.2. Demuéstrese la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

3.3. Examínese la convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

3.4. Suponiendo que t no es un múltiplo entero del número 2π, demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^{\alpha}}$ es absolutamente convergente para $\alpha > 1$ y condicionalmente convergente para $0 < \alpha \leqslant 1$.

Sugerencia : Para verificar la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nt}{n^{\alpha}}\right|$ para $0 < \alpha \leqslant 1$, empléese la desigualdad $|\cos nt| \geqslant \cos^2 nt$.

3.5. Demuéstrese que si $a_n \geqslant 0$, entonces la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

3.6. Demuéstrese que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ también es convergente.

3.7. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie divergente con términos positivos. Demuéstrese que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

también es divergente.

Sugerencia: Aplíquese el teorema de Cauchy (§ 3.2.1).

3.8. Verifíquese la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ cuyo término general es

$$a_n = 2\sqrt{n} - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Sugerencia: Obsérvese que toda sucesión es la sucesión de las sumas parciales de una serie.

3.9. Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n}$ es convergente.

3.10. Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt[4]{n}]} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ tiene la siguiente propiedad: Para todo número real x, se pueden agrupar sus términos de tal manera que se obtenga una serie convergente a x.

Sugerencia: Aplíquese el teorema del ejercicio 2.10.

Ejercicios del § 4

4.1. Evalúense los límites

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \lim_{x=0} x \log(x+x^2),$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}, \quad \lim_{x=0} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

4.2. Evalúense los límites

$$\lim_{x=\infty} (\operatorname{sen}\sqrt{x+1} - \operatorname{sen}\sqrt{x}), \quad \lim_{x=\infty} \frac{\log(x+2^x)}{\log(x+3^x)}.$$

4.3. Investíguese la existencia de los límites

$$\lim_{x=0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x=0} (1+x)^{1/x^2},$$

$$\lim_{x=0}\left(\left[\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x=\infty}\frac{e^x}{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}.$$

4.4. Demuéstrese con un ejemplo que el siguiente teorema es falso: si $\lim_{x=a} f(x) = A$ y $\lim_{y=A} g(y) = B$, entonces $\lim_{x=a} g[f(x)] = B$ (ver § 4.6 (16)).

4.5. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x+1}.$$

Demuéstrese que $\lim_{x=+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$

Ejercicios del § 5

5.1. Evalúense los siguientes límites

$$\lim_{x=0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}, \quad \lim_{x=0}\frac{\log(1+x)}{x},$$

$$\lim_{x=0}\frac{a^x-1}{x}\ (a>0), \quad \lim_{x=0}(\cos x)^{1/x^2}.$$

5.2. Demuéstrese que la siguiente fórmula se verifica para toda x:

$$e^x = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

5.3. Supóngase que la función f satisface para toda x y y la condición

$$f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Demuéstrese que si f es continua en un punto a, entonces es continua en todo punto.

5.4. Sea la función f continua en el intervalo $a < x \leqslant b$ y admitamos que para toda sucesión $\{x_n\}$ con términos racionales de este intervalo, la condición $\lim_{n=\infty} x_n = a$ implica que $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$.

Demuéstrese que el $\lim_{x=\infty} f(x) = g$ existe.

5.5. Considerando que la función f es continua en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, represéntese por $F(x)$ la cota superior de esta función en el intervalo $a \leqslant t \leqslant x$. Demuéstrese que la función F es continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$.

Sugerencia: Si $x_1 < x_2$, entonces obviamente $F(x_1) \leqslant F(x_2)$. Demuéstrese que si $F(x_1) < F(x_2)$, entonces $F(x_2) = f(t_0)$ para algún punto t_0 del intervalo $x_1 \leqslant t \leqslant x_2$; conclúyase finalmente que $F(x_2)-F(x_1) \leqslant f(t_0)-f(x_1)$.

5.6. Se da una función f continua en un intervalo infinito $x \geqslant a$. Demuéstrese que la existencia del $\lim_{x=\infty} f(x)$ finito implica la acotación de esta función.

5.7. Investíguese cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas:

$$\frac{1}{\sqrt{x}},\ e^x,\ x^2,\ \frac{x}{|x|+1}.$$

5.8. Demuéstrese que el producto de dos funciones uniformemente continuas y acotadas es uniformemente continuo, y considerando el ejemplo de la función $x \operatorname{sen} x$, demuestre que es esencial la hipótesis de que ambas funciones son acotadas.

5.9. Demuéstrese que toda función f uniformemente continua en un intervalo finito $a < x < b$ tiene límites finitos $\lim_{x=a} f(x)$ y $\lim_{x=b} f(x)$.

5.10. Sea f una función continua definida en un intervalo infinito $x \geqslant a$. Demuéstrese que la existencia del $\lim_{x=\infty} f(x)$ finito implica la continuidad uniforme de esta función.

5.11. Demuéstrese que una función continua en un intervalo infinito $x \geqslant a$ y no acotada ni superior ni inferiormente toma cada valor real una infinidad de veces.

5.12. Dese un ejemplo de una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$, biunívoca y continua en el punto $x = 0$, y tal que la función inversa $x = g(y)$ sea discontinua en el punto $y_0 = f(0)$.

Ejercicios del § 6

6.1. Investíguese la convergencia uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geqslant 1).$$

6.2. Análogamente: examínese la convergencia uniforme de las siguientes series de funciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^4+x^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} (x \geqslant 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

6.3. Demuéstrese que la función f dada por la fórmula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$$

es continua en todo punto en que está definida (esto es, para $x \neq \pm n$).

6.4. Demuéstrese que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-n^2 x}$$

es continua en el intervalo $x > 0$, y discontinua en el punto $x = 0$.

6.5. Demuéstrese que si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ son continuas y positivas en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a una función continua, entonces la convergencia es uniforme.

(Obsérvese que la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es equivalente a que la sucesión $R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$ converja uniformemente a 0. Suponiendo que la convergencia no sea uniforme, conclúyase la existencia de una sucesión convergente $\{x_m\}$ tal que $R_m(x_m) \geqslant \varepsilon > 0$ para una infinidad de índices m. Escribiendo $x_0 = \lim_{m=\infty} x_m$, demuéstrese que $R_n(x_0) \geqslant \varepsilon$ para toda n.)

6.6. Hállese el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2+(-1)^n]^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n \text{ (donde } \varepsilon_n = 0 \text{ ó } 1).$$

6.7. Sea r el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Demuéstrese que si r es finito y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \infty$ entonces $\lim_{x=r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \infty$ (complemento al Teorema de Abel).

Sugerencia: Redúzcase la demostración al caso especial $r = 1$; obsérvese también que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donde $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

6.8. Demuéstrese que si $a_n \geqslant 0$, entonces el teorema de Abel puede invertirse. Hablando con más precisión, si r representa el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces (considerando que r es finito) la existencia del $\lim_{x=r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = g$ finito implica la convergencia a g de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$

6.9. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Demuéstrese que si el producto de Cauchy de estas series, esto es, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ donde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$, es convergente, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

(compárese esto con el Teorema de Cauchy del § 3.8).

Sugerencia: Obsérvese que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ para $0 \leqslant x < 1$ y aplíquese el Teorema de Abel.

6.10. Sea r el radio de convergencia de una serie de potencias dada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Demuéstrese que el producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} (1+a_n x^n)$ es convergente si $|x| < r$ y divergente si $|x| > r$.

Ejercicios del § 7

7.1. Demuéstrese que, si la función f es derivable en un intervalo infinito $x > a$ y el $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$, entonces la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene en este intervalo menos raíces que la ecuación $f(x) = 0$.

7.2. Sea la función f derivable en un intervalo $a < x < b$ (finito o infinito). Demuéstrese que si la derivada f' es acotada, entonces f es uniformemente continua en este intervalo.

7.3. Demuéstrese que si la función f es derivable en un intervalo infinito $x > a$ y $\lim_{x=\infty} f'(x) = \infty$, entonces no es uniformemente continua en este intervalo.

7.4. Sea f una función derivable en un intervalo infinito $x > a$. Demuéstrese que si $\lim_{x=\infty} f'(x) = g$, entonces, se verifica también que

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = g.$$

Sugerencia: Puede aplicarse el teorema del ejercicio 5, § 4.

7.5. Demuéstrese que

$$\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,tan} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} \quad (x > -1).$$

Sugerencia: Obténgase la derivada del primer miembro.

7.6. Demuéstrese que si $\alpha > 1$, entonces

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \leqslant x^\alpha + (1-x)^\alpha \leqslant 1$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

7.7. Demuéstrese que si $0 < \alpha < 1$, entonces

$$(x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha$$

para toda x y y positivas (una generalización de la desigualdad dada en el ejercicio 1.3).

7.8. Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x}$ es uniformemente convergente en el intervalo $x \geqslant 0$.

Sugerencia: Hállese la cota superior de la función $x^2 e^{-n^2 x}$.

7.9. Demuéstrese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad (|x|<1).$$

7.10. Desarróllense las funciones $\dfrac{1}{(1-x)(2+x)}$ y $\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$ en series de potencias.

7.11. Demuéstrese que si $f'(x) = f(x)$ para toda $a < x < b$, entonces $f(x) = Ce^x$, donde C es una constante, dedúzcase que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

para toda x.

7.12. Demuéstrese que si $0 < \alpha < 1$, entonces la ecuación

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \alpha e^x$$

tiene, en el intervalo $x \geqslant 0$, exactamente una raíz $x = x(n)$. Demuéstrese que $\lim_{n=\infty} x(n) = \infty$.

7.13. Demuéstrese que si $\lim_{n=\infty} a_n = g$ (finito), entonces

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = g.$$

Ejercicios del § 8

8.1. Sea

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Investíguese la existencia de la segunda derivada $f''(x)$.

8.2. Demuéstrese que si una función f tiene segunda derivada en el punto x, entonces

$$f''(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

8.3. Demuéstrese que si la n-ésima derivada $f^{(n)}$ de una función f está acotada en un intervalo finito $a < x < b$, entonces la función f también está acotada.

8.4. Demuéstrese que si $|x| < \frac{1}{2}$, entonces la fórmula aproximada

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2$$

da el valor de $\sqrt{1+x}$ con un error menor que $\frac{1}{2}|x|^3$

8.5. Aplicando la fórmula de Maclaurin a la función e^x, evalúense las cuatro primeras cifras del desarrollo decimal del número e.

8.6. Desarróllense las funciones arc senh x y $\operatorname{sen}^4 x$ en series de potencias.

8.7. Dedúzcase la fórmula

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} (1-x^2)^n$$

para $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

8.8. Sea f una función continua en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Demuéstrese que, si existe su segunda derivada dentro de este intervalo y $f''(x) > 0$, entonces

$$f(\alpha a + \beta b) < \alpha f(a) + \beta f(b)$$

para cualesquiera números positivos α y β que satisfagan la condición $\alpha + \beta = 1$.

De igual manera, si $f''(x) < 0$, entonces

$$f(\alpha a + \beta b) > \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Dé una interpretación geométrica de estas desigualdades.

Sugerencia: Investíguese el signo de la función auxiliar

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

8.9. Sean $p > 0$, $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demuéstrese que

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

para $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Sugerencia: Substituya en el ejercicio anterior: $f(x) = \log x$.

Ejercicios del § 9

9.1. Dé un ejemplo de una función definida en un intervalo $a < x < b$, que no tenga una función primitiva en este intervalo.

9.2. Demuéstrese la existencia de una función primitiva de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

9.3. Calcúlese la integral

$$\int (|x-1| + |x+1|)\, dx.$$

9.4. Dedúzcanse las fórmulas de recurrencia

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x} = \frac{-\cos x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x}$$

y

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

(n es un entero > 2).

9.5. Calcúlense las integrales

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

9.6. Aplicando el método de recurrencia, calcúlense las integrales

$$\int \frac{dx}{x^n(1+x^2)} \quad \text{y} \quad \int \log^n x\, dx,$$

siendo n un entero positivo.

Ejercicios del § 10

10.1 Aplicando la fórmula

$$\int \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + 2 \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$$

se obtiene

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\log 5 - 2\arctan 2 < 0 .$$

Este resultado es falso, puesto que la función que está dentro del signo de integración es positiva: Explique a qué se debe este error y obtenga el valor vendadero de la integral anterior.

10.2 Demuéstrese que si la función f es continua y positiva en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, entonces representando por M su cota superior, se verifica la siguiente fórmula

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\,dx} = M .$$

10.3. Sea f una función definida y continua para todo valor de x. Hállese la derivada de la función g definida por la fórmula

$$g(x) = \int_a^b f(x+t)\,dt .$$

10.4. Calcúlese el límite

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^m+3^m+\cdots+(2n-1)^m}{n^{m+1}}$$

Sugerencia : $\dfrac{2k-1}{2n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k-1}{n}+\dfrac{k}{n}\right)$.

10.5. Evalúese

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} .$$

10.6. Demuéstrese que si la función f tiene derivadas continuas en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces

$$\lim_{n=\infty} n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right] = \frac{f(1)-f(0)}{2} .$$

Aplíquese esta fórmula para evaluar

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}} - \frac{1}{m+1}\right).$$

10.7. Evalúense los límites:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \sqrt[n]{x}\,\operatorname{sen} x\,dx , \quad \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\sqrt{1+x}}\,dx .$$

10.8. Demuéstrese que si la función f tiene derivada continua de orden $(n+1)$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_0^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx ,$$

(otra forma de la fórmula de Taylor).

Sugerencia : Demostración por inducción matemática.

Ejercicios del § 11

11.1. Verifíquese la convergencia de las integrales

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sqrt{x(\pi-x)}}\,dx , \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx , \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x}\,dx .$$

11.2. Demuéstrese que la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ no es absolutamente convergente (y por consiguiente es un ejemplo de una integral condicionalmente convergente).

Sugerencia : $|\operatorname{sen} x| \geqslant \operatorname{sen}^2 x$.

11.3. Demuéstrese que si la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ es absolutamente convergente, entonces

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos nx\,dx = 0 = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

(ver § 10.2, Ejemplo (8)).

11.4. Demuéstrese que si la integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente y la función g es monótona, acotada y tiene primera derivada continua en el intervalo $x \geqslant a$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,g(x)dx$ también es convergente.

Sugerencia: Aplíquese el Teorema de Cauchy (§ 11.1, 2), tomando en cuenta el segundo teorema del valor medio (§ 10.7).

11.5. Demuéstrese que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

11.6. Demuéstrese que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} \quad \text{para} \quad \alpha > 0.$$

11.7. Demuéstrese que

$$\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sugerencia: Aplíquese la fórmula $\dfrac{z}{1-z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$.

11.8. Sea la función f continua y monótona en el intervalo $x \geqslant a$. Demuéstrese que la convergencia de la integral $\int_a^{\infty} x^{\alpha} f(x)\,dx$ implica que $\lim\limits_{x=\infty} x^{\alpha+1} f(x) = 0$.

Sugerencia: Considérese la integral $\int_x^{2x} t^{\alpha} f(t)\,dt$.

11.9. Suponiendo que f es una función continua y monótona en el intervalo $0 < x \leqslant 1$ y que la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ es convergente, demuéstrese la fórmula

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

11.10. Sea la función f continua, decreciente y positiva en el intervalo $x \geqslant 0$. Demuéstrese que si la integral $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces se verifica la siguiente fórmula

$$\lim_{t=+0} t \sum_{n=1}^{\infty} f(tn) = \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

En particular, hállese el límite

$$\lim_{t=+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{1+n^2t^2}.$$

Sugerencia: Véase la demostración del Teorema de Cauchy-Maclaurin (§ 11.6).

11.11. Demuéstrese que si f es una función continua en el intervalo $x \geqslant 0$ y $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = g$ (finito), entonces

$$\lim_{t=+0} t \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x)\,dx = g$$

INDICE

— A —

Abel
teorema de, 55
transformación de, 57
Acotada
conjunto, 19
función, 90
serie, 54
sucesión, 30
Alternativas, 118
Area de una región, 220
Ar cosh, ar senh, ar tanh, 147, 148
Arc cos, arc sen, arc tan, 81
Argumento de una función, 75
Armónica
media, 24
serie, 61
Asíntotas, 162

— C —

CAUCHY
criterio de convergencia de, 59
definición de continuidad de, 96
Hadamard fórmula de, 125
Maclaurin teorema de, 272
residuo, de, 173
teoremas de, 41, 53, 66, 69, 143
Control
de curvatura, 229
de masa, 229
Ciclométrica, 81
biunívoca, 79
continuidad uniforme de una, 100
creciente, 77
decreciente, 77
derivable, 130
de Dirichlet, 85
elemental, 80, 149
entera, 77
de Euler, 271
de segundo grado, 80
exponencial, 80
extremos de una, 139
hiperbólica, 146
impar, 94
inversa, 79
de Lejeume-Dirichlet, 85
límite de una, 82
lineal, 80
máximo de una, 138
mínimo de una, 139
monótona, 77
par, 94
periódica, 77
poligonal, 116
primitiva, 187
proposicional, 120
racional, 80
seccionalmente monótona, 77, 78
trigonométrica, 81
valor de una, 76
Cociente diferencial, 127
Composición de funciones, 86
Comutatividad de una serie, 64
Condición de Lipschitz, 107
Condición suficiente, 39
Condición necesaria, 39
Conjunción, 118
Conjunto
acotado, 19
cota de un, 19
Continuidad
definición de Cauchy de, 95
definición de Heine de, 95
por la derecha, 95
de una función, 94
por la izquierda, 95
lateral, 94
principio de, 95
seccional, 95, 260
uniforme, 100
Convergencia absoluta de una integral, 287
de series, 63
Convergencia absoluta de una serie, 64
absoluta de un integral, 287
absoluta de un producto, 73

condicional de series, 64
criterio de d'Alembert de, 58
criterio de Cauchy de, 59
criterio Logarítmico de, 276
de una integral, 254, 256
de un producto, 69
radio de, 113
de una serie, 51
de una sucesión, 27
uniforme, de una serie, 111
uniforme, de una sucesión de funciones ,108
Convergencia condicional de una serie, 63
Cortadura, 18
Coseno director, 227
Cotas (superior e inferior)
de una función, 101
de un conjunto, 19
Creciente
estrictamente, 77
función, 77
sucesión, 26
Criterio de d'Alembert para convergencia, 58
Criterio de convergencia
de d'Alembert, 58
de Cauchy, 59
logarítmico, 276
de Raabe, 63
Criterio de Raabe, 63
Cuantificador, 120
Cuantificador existencial, 120
Curvatura, 228

— D —

Darboux
integrales de (superior e inferior), 245,
propiedad de, 102
Decreciente
función, 77
sucesión, 26
Definición por recurrencia, 26
Derecha, por la
continuidad, 95
derivada, 129
límite, 84
Derivada, 127
por la derecha, 129
generalizada, 166
por la izquierda, 129
lateral, 128
logarítmica, 146
segunda, 167
Derivada generalizada, 166
Desigualdad de Bernoulli, 12
Desigualdad de Schawrz, 17, 252
Diferencial, 162
Divergente
sucesión, 27
serie, 51
Divergencia e infinito, 41
Dirichlet
función, 85
integral, 266

— E —

e, 44
Elemento
de área, 224
de longitud, 225
Enteros positivos, 11
Euler
constante de, 167, 177
fórmula de, 278
función gamma de, 271
Extremos de una función, 139
Expresión indeterminada, 151

— F —

Factores de un producto infinito, 69
Fórmula
Cauchy-Hadamard, 125
de Cavalieri, 250
de Euler, 278
de L'Hospital, 152
de Leibniz, 160, 171
de Maclaurin, 173, 174
de Simpson, 230
de Stirling, 242
de Taylor, 171
Fórmula del binomio de Newton, 14, 179
Fourier
integral de, 211
serie de, 278
Función, 75
argumento de una, 75
compuesta, 99
continua, 94, 95
acotada, 90
acotada de una, 101
función superior e inferiormente acotada, 90
Funciones ciclométricas, 81
Función continua, 94, 95
Función compuesta, 99
Función derivable, 130
Función elemental, 80, 149
Función entera, 77
Función exponencial, 80
Función hiperbólica, 146
Función inversa, 79
Función par, 94
Función periódica, 77
Función poligonal, 116

Función primitiva, 187
Función proporcional, 119

— G —

Geométrica
interpretación de una función, 76
media, 24, 47
Gráfica de una función, 76

— H —

Hipocicloide, 252

— I —

Implicación, 119
Inducción matemática, 12
Infinito
producto, 70
sucesión, 25
serie, 51
Integración
por partes, 191
por sustitución, 192
Integral
aparentemente impropia, 258
convergente, 254, 256
Darboux (superior e inferior), 245
definida, 210
de Dirichlet, 226
elíptica, 255, 257
de Fourier, 211
de Fresnel, 263
impropia, 254, 256
indefinida, 187
de Poisson, 269
de Riemann, 245
Integral elíptica, 254, 256
Integral definido, 210
Integral de Fresnel, 263
Integral de Poisson, 269
Integral indefinida, 187
Integral impropia, 254, 256
Interpolación, 238
Intervalo
cerrado, 75
de convergencia de una serie de potencias, 114
abierto, 75
Intervalo abierto, 75
Intervalo cerrado, 75
Incrementos finitos (teorema), 141

— L —

Lagrange
interpolación de, 238
residuo de, 173
teorema de, 141
Leyes de Morgan, 119, 121
Límites, 27
por la derecha, 84
impropio, 42, 84
inferior, 49
por la izquierda, 84
por un lado, 84
superior, 49
Lineal
función, 79
independencia, 252
Logaritmo, 80
Logaritmo natural, 45, 81
Logarítmico
criterio de convergencia de series, 276
derivada, 146
Longitud de un arco, 224

— M —

Máximo de una función, 138
Media
aritmética, 25, 46
armónica, 25
geométrica, 25, 47
Método de coeficientes indeterminados, 197
Mínimo de función, 139
Monótona
función, 76
sucesión, 26
Negación, 119
Normal
a una curva, 130
región, 223
Número real, 11

— P —

Parcial
fracción, 197
producto, 69
suma, 52
Permutación, 64
Polinomios, 80
Polinomios de Legendre, 253
Por un lado
continuidad, 95
derivada, 129
límite, 84
Principio de continuidad de Dedekind, 18
Producto de proporciones, 118
Propiedad local, 97
Punto de inflexión, 184

BIBLIOTECA NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

—ooo—

— R —

Racional
función, 80
número, 11
Radio
de convergencia de una serie de potencias, 113
de curvatura, 228
Rapidez del incremento de una sucesión, 60
Ruta numérica, 11
Residuo
de Cauchy, 172
en la fórmula de Taylor, 173
de Lagrange, 173
de una serie, 52
Rieman
integral de, 245
teorema de, 66

— S —

Secante, 128
Serie
acotada, 53
alternante, 54
anarmónica, 55
conmutatividad de una, 65
convergencia condicional de una, 63
convergencia uniforme de una, 111
convergente, 51
divergente, 51
de Fourier, 278
infinita, 51
de potencia, 112
Serie de potencias, 112
Series alternantes, 54
Series anarmónicas, 55
Sistema ortogonal, 253
Sólido de revolución, 230
Subsucesión, 35
Sucesión
acotada, 30
convergente, 28
creciente, 27
decreciente, 26
divergente, 28
infinita, 25
monótona, 27
rapidez del incremento de una, 60
término de una, 25
uniformemente convergente, 109
Superficie lateral, 231
Por la izquierda
continuidad, 94
derivada, 129
límite, 84
Suma de proposiciones, 118
Suma de series infinitas, 51

— T —

Tangente de una curva, 128
Teorema
de Abel, 55, 114
de Ascoli, 49
de Bolzano-Weierstrass, 36
de Cauchy, 41, 53, 66, 70, 143
de Cauchy-Maclaurin, 272
de Guldin, 233
de incrementos finitos, 141
de Kummer, 62
de Lagrange, 141
de Riemann, 66
de Rolle, 140
del valor medio (en el cálculo integral), 214, 234
de valor medio (Lagrange), 141
de Weierstrass, 36, 101
Término de una sucesión, 25
Toro, 251
Triángulo de Pascal, 50

— V —

Valor absoluto, 18
Valor asintótico de $n!$, 244
Valor medio
teorema del cálculo integral del, 214, 234
teorema de Lagrange del, 141

—oOo—