SERGE LANG

CALCULO I

517
L27fE
ej. 2

FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
BIBLIOTECA
Facultad de Ciencias Economicas y de Admin.

CALCULO I

Serge Lang
Yale University

Versión en español:

M. en C. Federico Velasco Coba
Universidad de Veracruz, México

Prof. Manuel López Mateos
Universidad Nacional Autónoma de México

Ing. Hugo Pereyra
Universidad Nacional de Ingeniería, Lima

517/L27fE
Cálculo I /
Lang, Serge

FCEA32417

FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO
MEXICO • BOGOTA • CARACAS • SANTIAGO • SAN JUAN

Versión en español de la obra titulada *A First Course in Calculus, Third Edition*, por Serge Lang, publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, E.U.A. © 1973.

Esta edición en español es la única autorizada.

Fondo Educativo Interamericano lamenta profundamente comunicar que el Profesor Velasco Coba, que inició la traducción de esta obra, falleció antes de poder dar fin a su tarea.

© 1976 por **Fondo Educativo Interamericano, S.A.**
Wilmington, Delaware, U.S.A.

© 1986 por **Sistemas Técnicos de Edición, S.A. de C.V.**
San Marcos 102, Tlalpan. 14000 México, D.F.

Reservados todos los derechos. Ni todo el libro ni parte de él pueden ser reproducidos, archivados o transmitidos en forma alguna o mediante algún sistema electrónico, mecánico de fotorreproducción, memoria o cualquier otro, sin permiso por escrito del editor.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, registro número 1312.

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

ISBN 968-6630-05-8
EFGHIJ-M-89876

517
L27fE
4.2

Prólogo

El propósito de un primer curso de cálculo es enseñar al estudiante las nociones básicas de derivada e integral, así como las técnicas y aplicaciones básicas que acompañan a tales conceptos.

En la actualidad la tendencia es introducir el cálculo en el bachillerato; en mi opinión, el material que cubre este volumen debe terminar por ser el bagaje habitual de los dos últimos años previos a la universidad.

Independientemente de cuándo se enseñe, creo que la presentación permanece más o menos sin variaciones. El estudiante de gran talento, con una aptitud obvia para la matemática, necesitará rápidamente un curso de funciones de una variable real, más o menos en la forma en que lo entiende un matemático profesional. Este libro no está dirigido primordialmente a un estudiante de tal tipo (aunque tengo la esperanza de que podría servirle como una buena introducción en una etapa preliminar).

No he escrito este curso en el estilo que usaría para una monografía avanzada sobre temas complicados. Se escribe una monografía avanzada para uno mismo, porque se desea dar forma permanente a la visión personal de una parte hermosa de la matemática, no accesible de otra manera; algo así como el compositor que fija su sinfonía en una notación musical.

Este libro se ha escrito para el estudiante, con el fin de proporcionarle un acceso inmediato y agradable al tema. Tengo la esperanza de haber conseguido un equilibrio apropiado entre el dedicar un tiempo excesivo a los detalles particulares y la falta de suficientes ejercicios técnicos, necesarios para alcanzar la deseada familiaridad con el tema. En cualquier caso, ciertos hábitos rutinarios de los matemáticos sofisticados no son adecuados para un primer curso.

No significa esto que lo que llamamos rigor deba abandonarse. El desarrollo lógico de la matemática de este curso, a partir de los axiomas más básicos, procede a través de las siguientes etapas:

Teoría de conjuntos
Enteros
Números racionales (fracciones)
Números (es decir, números reales)
Límites
Derivadas
Otros temas.

Nadie en su sano juicio sugiere que se deba comenzar un curso con la teoría de conjuntos. El lugar más apropiado para este tema es entre los límites y las derivadas. En otras palabras, cualquier estudiante está preparado para aceptar como intuitivamente obvias las nociones de número y límite y sus

32417

propiedades básicas. Pero, por alguna razón, se ha puesto de moda sostener que el mejor lugar para entrar en materia se encuentra entre los números y los límites. La experiencia muestra que los estudiantes *no* tienen la base psicológica adecuada para aceptar esto y lo resisten tremendamente.

En realidad, resulta que se puede tener lo mejor de ambas ideas. Los argumentos que muestran cómo pueden reducirse las propiedades de los límites a las de los números, forman un conjunto autocontenido. Lógicamente, se encuentra *antes* del tema propio de este curso. Sin embargo, lo hemos insertado como un apéndice. Si algún estudiante lo considera necesario, sólo necesita leerlo como si fuese el capítulo 0.* En ese caso, todo lo que sigue es tan riguroso como cualquier matemático podría desear (al menos en cuanto concierne a los objetos que reciben una definición analítica). Ni una palabra necesita cambiarse en prueba alguna. Espero que esto acabe de una vez con las posibles controversias respecto al llamado rigor.

Algunos objetos reciben una definición geométrica e incluimos aplicaciones a conceptos físicos. En tal caso, es desde luego necesario insertar un paso que sirva de puente entre la noción física y su contraparte matemática. Los ejemplos más importantes de esto son las funciones seno y coseno, y el área como una integral.

Para el seno y el coseno nos basamos en las nociones de la geometría plana. Si se aceptan los teoremas estándar respecto a figuras planas, entonces nuestras pruebas satisfacen los estándares antes mencionados. En otro apéndice** mostramos cómo se pueden dar definiciones y pruebas puramente analíticas sobre las propiedades básicas.

Para la integral damos primero un argumento geométrico. Mostramos después, mediante las habituales sumas de Riemann, cómo este argumento geométrico tiene una contraparte perfecta cuando exigimos que las reglas del juego sean tales que reduzcan todas las definiciones y pruebas a números. Esto debe ser suficiente para todos. Por otra parte, la teoría de la integral se presenta de tal modo que su existencia solamente depende de un argumento geométrico o de una investigación teórica ligeramente complicada (sumas superiores e inferiores). De acuerdo con el nivel de capacidad de la clase, el profesor puede, por tanto, dosificar la teoría de acuerdo con su propio criterio.

No se suele reconocer que algunas de las dificultades en la enseñanza de la matemática son análogas a las de la enseñanza de una lengua extranjera. (Las escuelas secundarias son las responsables de esto. Un entrenamiento adecuado en la secundaria podría eliminar por completo esta dificultad). Por ello, he hecho un gran esfuerzo para guiar al estudiante verbalmente, por decirlo así, en el uso de un lenguaje matemático apropiado. Me parece esencial que los estudiantes tengan que escribir sus ejercicios de matemática en frases completas y coherentes. Una gran parte de sus dificultades con la matemática surge de

* Se refiere al apéndice 1. *(N. del E.)*

** Se refiere al apéndice 3. *(N. del E.)*

su caótico uso de los símbolos y de las fórmulas matemáticas aisladas de toda proposición significativa y todo cuantificador apropiado. Así mismo, todos los trabajos que se presenten deben ser ordenados y legibles. No deben hacer pensar en que una mosca recién salida del tintero se haya arrastrado por el papel. El insistir en estándares de expresión razonables producirá una mejoría drástica en los rendimientos matemáticos.

Creo que no tiene sentido considerar la «teoría» como algo contrario al «cálculo». La presente obra trata a ambos como complementarios. Un teorema nos proporciona casi siempre una herramienta para poder efectuar cálculos más eficientes (por ejemplo, la fórmula de Taylor para el cálculo de valores de funciones). Es claro que en distintas clases se podrá hacer hincapié en algún aspecto, omitiendo algunas pruebas, pero mi experiencia ha sido que, si no se pone demasiada pedantería en el intento, los estudiantes están muy dispuestos a entender las razones que justifican la verdad de un resultado: es decir, su prueba.

No he hecho grandes innovaciones en la exposición del cálculo. Como el tema se descubrió hace ya más de trescientos años es natural que así sea. Lo que sí he hecho es omitir algunos temas especializados que no deben pertenecer ya al currículo. La fórmula de Stirling se incluye sólo para referencia y puede pasarse de largo o usarse para suministrar ejercicios. La fórmula de Taylor se prueba con la forma integral del residuo, que se estima entonces adecuadamente. La prueba por medio de la integración por partes es más natural que la otra (derivar cierta expresión que se saca de no sabe dónde) y es la que se generaliza para dimensiones superiores. He colocado la integración después de la derivación, porque de otro modo no se tienen técnicas adecuadas para evaluar integrales. Pero, en conjunto, todo es bastante estándar.

He reducido la cantidad de geometría analítica a lo necesario y suficiente para un primer curso general en este tipo de matemática. Para algunas aplicaciones se necesita algo más, pero tales aplicaciones son bastante especializadas. Por ejemplo, si se necesitan las propiedades particulares del foco de una parábola en un curso de óptica, entonces tal curso es el lugar adecuado para presentarlas y no un curso general que ha de servir a matemáticos, físicos, químicos, biólogos e ingenieros, para mencionar sólo unos pocos. Considero el tremendo énfasis sobre la geometría analítica de las cónicas, que ha estado de moda durante muchos años, como un desafortunado accidente histórico. Lo importante es que la idea básica de representar una gráfica por medio de una figura en el plano sea completamente entendida, junto con unos cuantos ejemplos básicos. Las propiedades más abstrusas de elipses, parábolas e hipérbolas se deben pasar por alto.

En cuanto a la pregunta: ¿Por qué escribir otro libro de cálculo?, yo contestaría: porque prácticamente todos los existentes son demasiado largos (de 500 a 600 páginas) y se pierde la visión de las ideas de conjunto, sacrificadas en beneficio de temas que han persistido por costumbre; mala costumbre, en mi opinión. Espero que el orden de los capítulos suministre al lector una sólida visión del tema.

Para concluir, si se me permite aquí otra nota personal, debo añadir que aprendí de Artin cómo enseñar el presente curso el año en que escribí mi tesis doctoral. No pude haber tenido una mejor introducción al tema.

New Haven, Connecticut SERGE LANG

Mis editores, Addison-Wesley, han producido mis libros durante estos últimos diez años. Deseo reconocer cuánto aprecio su extraordinario desempeño en todos los niveles: consejo editorial general, edición específica de los manuscritos y, esencialmente, tipografía y hojas de prueba impecables. Es extraordinariamente agradable haber encontrado tal compañía con la cual tratar.

Serge Lang

Indice general

Primera parte

Revisión de material básico

Capítulo I

Números y funciones

Capítulo II

Gráficas y curvas

Segunda parte

Derivación y funciones elementales

Capítulo III

La derivada

Capítulo IV

Seno y coseno

Capítulo V

El teorema del valor medio

Capítulo VI

Trazado de curvas

Capítulo VII

Funciones inversas

Capítulo VIII

Exponentes y logaritmos

Tercera parte
Integración

Capítulo IX

Integración

Capítulo X

Propiedades de la integral

Capítulo XI

Técnicas de integración

Capítulo XII

Algunos ejercicios importantes

Capítulo XIII

Aplicaciones de la integración

Cuarta parte

Series

CAPÍTULO XIV

La fórmula de Taylor

CAPÍTULO XV

Series

Quinta parte

Miscelánea

CAPÍTULO XVI

Números complejos

CALCULO I

PRIMERA PARTE

REVISION DE MATERIAL BASICO

Si el lector está familiarizado con las propiedades elementales de los números, sabe de coordenadas y conoce las gráficas de las ecuaciones estándar (ecuaciones lineales, parábolas, elipses), entonces puede comenzar inmediatamente con el capítulo III sobre derivadas.

CAPITULO I

Números y funciones

Al comenzar el estudio de cualquier clase de matemática no podemos demostrarlo todo. Cada vez que introducimos un nuevo concepto, debemos definirlo en términos de un concepto cuyo significado ya se conoce y es imposible estar siempre marchando hacia atrás para definirlo todo. Debemos, pues, escoger nuestro punto de partida, lo que suponemos conocido, y lo que deseamos explicar y probar en términos de estos supuestos.

Al comienzo de este capítulo describiremos la mayor parte de las cosas que en este curso suponemos conocidas. En realidad, no es gran cosa. En términos generales, suponemos que el lector conoce los números, la adición, la substracción, la multiplicación y la división (por números distintos de 0). Recordaremos las propiedades de las desigualdades (cuando un número es más grande que otro). En algunas ocasiones supondremos como dadas ciertas propiedades de los números que puede no haber conocido anteriormente y que siempre formularemos con precisión. Las pruebas de estas propiedades aparecerán en los apéndices para aquellos que estén interesados en ellas.

§1. Números enteros, números racionales y números reales

Los números más comunes son 1, 2, 3, ..., que se denominan **enteros positivos.**

Los números $-1, -2, -3, -4, \ldots$ se llaman **enteros negativos.** Cuando deseamos hablar de los enteros positivos junto con los enteros negativos y 0, les llamamos simplemente **enteros.** Así, pues, los enteros son $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$.

La suma y el producto de dos enteros es de nuevo un entero.

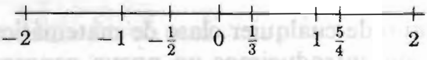
Además de los enteros tenemos las **fracciones,** tales como $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{8}, -\frac{101}{27}, \frac{8}{16}, \ldots$, que pueden ser positivas o negativas y que pueden escribirse como cocientes m/n, donde m y n son enteros y n no es igual a cero. A tales fracciones se les llama **números racionales.** Todo entero m es un número racional, porque se puede escribir como $m/1$, pero, desde luego, no es cierto que todo número racional sea un entero. Observamos que la suma y el producto de dos números racionales es un número racional. Si a/b y m/n son dos números racionales (siendo a, b, m y n enteros y b y n distintos de 0), entonces su suma y su producto están dados por las siguientes fórmulas, que el lector conoce desde la escuela elemental:

$$\frac{a}{b}\frac{m}{n} = \frac{am}{bn},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + bm}{bn}.$$

En esta segunda fórmula simplemente hemos puesto las dos fracciones con el denominador común bn.

Podemos representar geométricamente sobre una línea recta los enteros y los números racionales. Primero elegimos una unidad de longitud. Los enteros son múltiplos de esta unidad y los números racionales son partes fraccionarias de esta unidad. Sobre la recta de abajo hemos marcado unos pocos números racionales.



Obsérvese que los enteros negativos y los números racionales negativos aparecen a la izquierda del cero.

Finalmente, tenemos los números que pueden representarse por infinitos decimales, tales como $\sqrt{2} = 1{,}414...$ ó $\pi = 3{,}14159...$, a los cuales llamamos **números reales** o, simplemente, **números.**

Geométricamente, los números se representan como la colección de todos los puntos sobre la mencionada línea recta, no solamente aquellos que son una parte racional de la unidad de longitud o un múltiplo de ésta.

Notamos que la suma y el producto de dos números son números. Si a es un número distinto de cero, entonces hay un número único b tal que $ab = ba = 1$, y escribimos

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{ó} \quad b = a^{-1}.$$

Decimos que b es el **inverso** de a, o, simplemente, «a inverso». Insistimos en que la expresión

$$\mathbf{1/0} \quad \text{ó} \quad \mathbf{0^{-1}} \quad \textbf{no está definida.}$$

En otras palabras, no podemos dividir por cero y no atribuimos ningún significado a los símbolos $1/0$ ó 0^{-1}.

Sin embargo, si a es un número, entonces el producto $0 \cdot a$ está definido y es igual a 0. El producto de cualquier número por 0 es 0. Por otra parte, si b es cualquier número distinto de 0, entonces $0/b$ está definido y es igual a 0. Se puede escribir también en la forma $0 \cdot (1/b)$.

Si a es un número racional distinto de 0, entonces $1/a$ es también un número racional. Ciertamente, si podemos escribir $a = m/n$, con enteros m, n ambos distintos de 0, entonces

$$\frac{1}{a} = \frac{n}{m}$$

es también un número racional.

No todos los números son números racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ *no es un número racional;* probaremos ahora tal afirmación.

Recordemos que los **números pares** son los enteros 0 ± 2, ± 4, ± 6, $\pm 8, \ldots$, que pueden escribirse en la forma $2n$ para un cierto entero n. Un número **impar** es un entero como ± 1, ± 3, ± 5, $\pm 7, \ldots$, que puede escribirse en la forma $2n + 1$ para algún entero n. Así, $6 = 2 \cdot 3$ es par (seleccionamos $n = 3$) y

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

es impar (seleccionamos $n = 5$).

Observamos que el cuadrado de un número par es par. Ciertamente, si n es un entero y $2n$ un entero par, entonces

$$(2n)^2 = 4n^2$$

es un número par, que puede escribirse como $2(2n^2)$, el producto de 2 y el entero $2n^2$.

El cuadrado de un número impar es impar. Para probar esto, sea $2n + 1$ un número impar (donde n es un entero). Entonces, su cuadrado es

$$\begin{aligned}(2n + 1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2(2n^2 + 2n) + 1.\end{aligned}$$

Como $2n^2 + 2n$ es un entero, hemos escrito el cuadrado de nuestro número impar en la forma $2m + 1$ para cierto entero m y hemos mostrado así que nuestro cuadrado es impar.

Estamos ahora preparados para probar que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional. Supongamos que lo fuese. Esto significaría que podemos encontrar un número racional a tal que $a^2 = 2$. Podemos escribir

$$a = \frac{m}{n}$$

en donde m, n son enteros y ninguno de ellos es 0. Por otra parte, podemos suponer que ni n ni m son pares porque podemos poner la fracción m/n en su mínima expresión y cancelar tantas potencias de 2 como sea necesario dividiendo por ellas a m, n. Podemos, pues, suponer que al menos uno de los enteros m o n es impar.

Por nuestra hipótesis de que $a^2 = 2$, tenemos $(m/n)^2 = 2$, o sea:

$$\frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por n^2 obtenemos

$$m^2 = 2n^2$$

y el segundo miembro es par. Pero, como vimos anteriormente, esto significa que m

es par y podemos, por tanto, escribir $m = 2k$ para algún entero k. Substituyendo, obtenemos

$$(2k)^2 = 2n^2$$

ó $4k^2 = 2n^2$. Simplificando por 2 tenemos $2k^2 = n^2$. Esto significa que n^2 es par y, por tanto, como vimos antes, que n es par. Hemos, pues, llegado a la conclusión de que tanto m como n son pares, lo que contradice el hecho de que expresamos la fracción en forma irreducible. Podemos, por tanto, concluir que no hay ninguna fracción m/n cuyo cuadrado sea 2.

Generalmente, es muy difícil determinar si un número dado es un número racional o no. Por ejemplo, el hecho de que π no es racional fue descubierto solamente a fines del siglo XVIII.

§2. Desigualdades

Aparte de la adición, la substracción, la multiplicación y la división (por números distintos de 0), discutiremos ahora otro importante rasgo de los números reales.

Tenemos los **números positivos**, representados geométricamente sobre la recta por aquellos números distintos de 0 y que se encuentran a la derecha de 0. Si a es un número positivo, escribimos $a > 0$. No hay duda de que el lector ha trabajado ya con números positivos y con disigualdades. Las dos propiedades siguientes son las más básicas respecto a la positividad.

POS 1. *Si a, b son positivos, también lo es su producto ab y su suma $a + b$.*

POS 2. *Si a es un número, entonces ó a es positivo, ó $a = 0$, ó $-a$ es positivo, y estas posibilidades son mutuamente excluyentes.*

Si un número no es ni positivo ni cero, entonces decimos que este número es **negativo.** Por POS 2, si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

Aunque el lector ya sabe que el número 1 es positivo, en realidad tal hecho se puede **probar** mediante nuestras dos propiedades. Puede ser interesante ver la prueba, que es como sigue y muy sencilla. Por POS 2, sabemos que 1 ó -1 es positivo. Si 1 no es positivo, entonces -1 es positivo. Pero, por POS 1, de ello se seguiría entonces que $(-1)(-1)$ es positivo. Pero este producto es igual a 1. Por consiguiente, debe ser 1 el que es positivo y no -1. Usando la propiedad POS 1, podríamos ahora concluir que $1 + 1 = 2$ es positivo, que $2 + 1 = 3$ es positivo, y así sucesivamente.

Si $a > 0$, diremos que a es **mayor que** 0. Si deseamos decir que a es positivo o igual a cero, escribimos

$$a \geqq 0$$

lo que leemos: «a es mayor o igual que cero»

Dados dos números a y b, diremos que a es **mayor que** b y escribiremos $a > b$, si $a - b > 0$. Escribimos $a < 0$ si $-a > 0$ y $a < b$ si $b > a$. Así, $3 > 2$ porque $3 - 2 > 0$.

Escribiremos $a \geq b$ cuando deseemos decir que a es **mayor que o igual a** b. Así, $3 \geq 2$ y $3 \geq 3$ son ambas desigualdades verdaderas.

Usando solamente nuestras dos propiedades **POS 1** y **POS 2**, probaremos ahora todas las reglas comunes concernientes a las desigualdades. Probablemente el lector ya las conoce, pero probarlas sistemáticamente servirá tanto para aguzar su conocimiento como para fijarlas más profundamente.

En lo que sigue, a, b, c serán números.

Regla 1. *Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.*

Regla 2. *Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.*

Regla 3. *Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

La regla 2 expresa el hecho de que se **preserva** una desigualdad que se multiplica por un número positivo. La regla 3 nos dice que si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, entonces se invierte la desigualdad. Por ejemplo, tenemos la desigualdad

$$1 < 3.$$

Como $2 > 0$, tenemos también $2 \cdot 1 < 2 \cdot 3$. Pero -2 es negativo, y si multiplicamos ambos miembros por -2 obtenemos

$$-2 > -6.$$

En la representación geométrica de los números reales sobre la recta, -2 se encuentra a la derecha de -6. Esto nos da la representación geométrica del hecho de que -2 es mayor que -6.

Para probar la regla 1, supongamos que $a > b$ y $b > c$. Por definición, esto quiere decir que $(a - b) > 0$ y $(b - c) > 0$. Usando la propiedad **POS 1**, concluimos que

$$a - b + b - c > 0,$$

y la cancelación de b nos da $(a - c) > 0$. Por definición, esto significa que $a > c$, como teníamos que probar.

Para probar la regla 2, supongamos que $a > b$ y $c > 0$. Por definición,

$$a - b > 0.$$

De donde, usando la propiedad **POS 1** concerniente al producto de números positivos, concluimos que

$$(a - b)c > 0.$$

El primer miembro de esta desigualdad no es otro que $ac - bc$, que es, por tanto, > 0. De nuevo, por definición, esto nos dice que

$$ac > bc.$$

Dejamos la prueba de la regla 3 como ejercicio.

Si a es un número, entonces definimos el **valor absoluto** de a como

el mismo a si $a \geqq 0$.
$-a$ si $a < 0$.

En el segundo caso, cuando a es negativo, $-a$ es positivo. Así pues, el valor absoluto de un número es siempre un número positivo o cero. Por ejemplo, el valor absoluto de 3 es el mismo 3. El valor absoluto de -3 es $-(-3) = 3$. El valor absoluto de $-\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}$. El valor absoluto de $\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}$ y el valor absoluto de $-\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}$. Representaremos el valor absoluto de un número colocándole entre dos barras verticales. Así, el valor absoluto de un número a se representa por $|a|$. Por ejemplo, $|3| = 3$, y $|-3| = 3$ también. Tenemos, por definición, que $|0| = 0$. En general, para cualquier número x se cumple que

$|3| = |-3|$

$$|x| = |-x|.$$

Sea a un número > 0. Entonces existe un número cuyo cuadrado es a. Este es uno de los hechos que admitimos aquí acerca de los números. Si $b^2 = a$, entonces observamos que

$$(-b)^2 = b^2$$

es también igual a a. Así pues, b o $-b$, uno de ellos, es positivo. Convenimos en representar por $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada **positiva** y la llamaremos simplemente **raíz cuadrada de** a. Así, pues, $\sqrt{4}$ es igual a 2, y no a -2, aunque es cierto que $(-2)^2 = 4$. Esta es la convención más práctica que se puede hacer sobre el uso del signo $\sqrt{\ }$. Desde luego, la raíz cuadrada de 0 es el mismo 0. Un número negativo *no* tiene raíz cuadrada.

Teorema 1. *Si a es un número, entonces* $|a|^2 = a^2$ *y*

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Demostración. Si a es positivo, entonces $|a| = a$, y nuestra primera afirmación es evidente. Si a es negativo, entonces $|a| = -a$ y

$$(-a)^2 = a^2,$$

de forma que de nuevo tenemos $|a|^2 = a^2$. Cuando $a = 0$, nuestra primera afirmación simplemente significa: $0 = 0$. Finalmente, tomando la raíz cuadrada (positiva), tenemos

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Teorema 2. *Si a y b son números, entonces*

$$|ab| = |a|\,|b|.$$

Demostración. Tenemos

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2} = |a|\,|b|.$$

Como ejemplo, vemos que

$$|-6| = |(-3)\cdot 2| = |-3|\,|2| = 3 \cdot 2 = 6.$$

Hay una última desigualdad, la cual es extraordinariamente importante.

Teorema 3. *Si a y b son dos números, entonces*

$$|a + b| \leqq |a| + |b|.$$

Demostración. Observamos primero que ab es positivo, o negativo o cero. En cualquier caso, tenemos

$$ab \leqq |ab| = |a|\,|b|.$$

De donde, multiplicando ambos miembros por 2, obtenemos la desigualdad

$$2ab \leqq 2|a|\,|b|.$$

De donde se obtiene

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ &\leqq a^2 + 2|a|\,|b| + b^2\\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

$(a+b)^2$ $\qquad$ $a^2 = |a|^2$

Podemos tomar la raíz cuadrada de ambos miembros y usar el teorema 1 para concluir que

$$|a + b| \leqq |a| + |b|,$$

probando con ello nuestro teorema.

El lector encontrará más adelante muchos ejercicios relacionados con desigualdades. Estudiaremos algunos ejemplos numéricos para mostrarle un poco el camino.

Ejemplo 1. Determinar los números que satisfacen la desigualdad

$$|x + 1| = 2.$$

Esta desigualdad quiere decir que $x + 1 = 2$ ó $-(x + 1) = 2$, porque el valor absoluto de $x + 1$ es $(x + 1)$ ó $-(x + 1)$. En el primer caso, despejando x tenemos $x = 1$; y en el segundo caso tenemos $-x - 1 = 2$, luego $x = -3$. Así, pues, la respuesta es $x = 1$ ó $x = -3$.

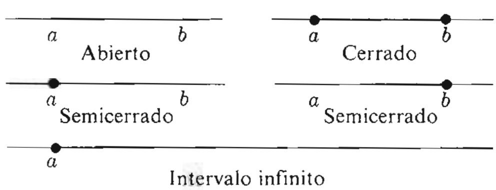
Daremos también un ejemplo que nos muestre cómo determinar números que satisfagan ciertas desigualdades. Para esto necesitamos alguna terminología. Sean a, b números y supongamos que $a < b$.

La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b, y se denota a veces por (a, b).

La colección de números x tales que $a \leqq x \leqq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b, y se denota a veces por $[a, b]$. Un punto sólo se llamará también intervalo cerrado.

En ambos casos, los números a y b se denominan **extremos** de los intervalos. Algunas veces deseamos incluir solamente uno de ellos en el intervalo y entonces definimos la colección de los números x tales que $a \leqq x < b$ como un **intervalo semicerrado,** lo mismo para los números x tales que $a < x \leqq b$.

Finalmente, si a es un número, la colección de los números $x > a$ ó $x \geqq a$ o $x < a$ o $x \leqq a$ se denomina **intervalo infinito.** Abajo mostramos algunos dibujos de intervalos.



Ejemplo 2. Determinar todos los intervalos de números que satisfacen

$$|x| \leqq 4.$$

Distinguimos dos casos. El primer caso es $x \geqq 0$. Entonces $|x| = x$, y en este caso nuestra desigualdad es equivalente a

$$0 \leqq x \leqq 4.$$

El segundo caso es el de $x < 0$. En este caso, $|x| = -x$, y nuestra desigualdad es equivalente a $-x \leqq 4$, ó, en otras palabras, a $-4 \leqq x$. Así, pues, en el segundo caso, los números que satisfacen nuestra desigualdad son precisamente los del intervalo

$$-4 \leqq x < 0.$$

Considerando ahora ambos casos en forma conjunta, vemos que el intervalo de números que satisfacen nuestra desigualdad $|x| \leqq 4$, es el intervalo

$$-4 \leqq x \leqq 4.$$

En general, si a es un número positivo, un número x satisface la desigualdad $|x| < a$ si y sólo si

$$-a < x < a$$

El argumento para probar esto es el mismo que el del caso particular $a = 4$ que hemos estudiado antes.

Ejemplo 3. Determinar todos los intervalos de números que satisfacen la desigualdad

$$|x + 1| > 2.$$

Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades

$$x + 1 > 2 \quad \text{ó} \quad -(x + 1) > 2.$$

De la primera se sigue la condición $x > 1$ y de la segunda la condición $-x - 1 > 2$, ó, en otras palabras, $x < -3$. Hay, pues, dos intervalos (infinitos), a saber:

$$x > 1 \quad \text{y} \quad x < -3.$$

Ejercicios

Determinar todos los intervalos de números x que satisfacen las siguientes desigualdades:

1. $|x| < 3$
2. $|2x + 1| \leqq 1$
3. $|x^2 - 2| \leqq 1$
4. $|x - 5| > 2$
5. $(x + 1)(x - 2) < 0$
6. $(x - 1)(x + 1) > 0$
7. $(x - 5)(x + 5) < 0$
8. $x(x + 1) \leqq 0$
9. $x^2(x - 1) \geqq 0$
10. $(x - 5)^2(x + 10) \leqq 0$
11. $(x - 5)^4(x + 10) \leqq 0$
12. $(2x + 1)^6(x - 1) \geqq 0$
13. $(4x + 7)^{20}(2x + 8) < 0$
14. $|x + 4| < 1$
15. $0 < |x + 2| < 1$
16. $|x| < 2$
17. $|x - 3| < 5$
18. $|x - 3| < 1$

19. $|x - 3| < 7$ 20. $|x - 3| > 7$

21. $|x + 3| > 7$

Probar las siguientes desigualdades para todos los números x, y.

22. $|x + y| \geqq |x| - |y|$ [*Sugerencia:* Escribir $x = x + y - y$, y aplicar el teorema 3, junto con el hecho de que $|-y| = |y|$.]

23. $|x - y| \geqq |x| - |y|$

24. $|x - y| \leqq |x| + |y|$

25. (a) Sean a, b números positivos tales que $a < b$. Demostrar que $a^2 < b^2$.
(b) Si el lector ha leído el apéndice sobre inducción*, probar que $a^n < b^n$ para todo entero positivo n.

26. Sean a, b, c números > 0, tales que $a/b < c/d$. Demostrar que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

27. Sean a, b números > 0. Demostrar que

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

§3. Funciones

Una función, definida para todos los números, es una relación que asocia a cualquier número dado otro número.

Es habitual representar una función por alguna letra, exactamente como la letra «x» denota un número. Así, si denotamos una función dada por f, y si x es un número, entonces denotamos por $f(x)$ al número asociado con x por la función. Esto, desde luego, no significa «f veces x». No hay aquí ninguna multiplicación. El símbolo $f(x)$ se lee «f de x». La asociación del número $f(x)$ al número x se representa algunas veces por una flecha,

$$x \mapsto f(x).$$

Consideremos, por ejemplo, la función que asocia a cada número x el número x^2. Si f representa esta función, entonces tenemos $f(x) = x^2$. En particular, el cuadrado de 2 es 4 y, por tanto, $f(2) = 4$. El cuadrado de 7 es 49, luego $f(7) = 49$. El cuadrado de $\sqrt{2}$ es 2 y, por tanto, $f(\sqrt{2}) = 2$. El cuadrado de $(x + 1)$ es $x^2 + 2x + 1$, luego $f(x + 1) = x^2 + 2x + 1$. Si h es un número cualquiera, entonces

$$f(x + h) = x^2 + 2xh + h^2.$$

Considerando otro ejemplo. Sea g la función que asocia a cada número x el número $x + 1$. Entonces podemos describir a g por los símbolos

$$x \mapsto x + 1$$

y escribir $g(x) = x + 1$. Por tanto, $g(1) = 2$. Asimismo $g(2) = 3$, $g(3) = 4$, $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1$, y $g(x + 1) = x + 2$ para cualquier número x.

Podemos considerar el **valor absoluto** como una función,

$$x \mapsto |x|$$

definida por la regla: dado cualquier número a, lo asociamos consigo mismo si $a \geqq 0$ y con el número $-a$ si $a < 0$. Representemos por F la función valor absoluto. Entonces, $F(x) = |x|$ para cualquier número x. Tenemos en particular, $F(2) = 2$ y asimismo $F(-2) = 2$. El valor absoluto no está definido por medio de una fórmula como x^2 ó $x + 1$. Damos al lector otro ejemplo de función que, como esta última, tampoco está definida por una fórmula.

Consideremos la función G descrita por la siguiente regla:

$$G(x) = 0 \text{ si } x \text{ es un número racional.}$$

$$G(x) = 1 \text{ si } x \text{ no es un número racional.}$$

Entonces, en particular, $G(2) = G(2/3) = G(-3/4) = 0$, pero

$$G(\sqrt{2}) = 1.$$

El lector debe saber que se puede construir una función con sólo prescribir arbitrariamente la regla que asocia un número a un número dado.

Si f es una función y x es un número, entonces $f(x)$ se llama **valor** de la función en x. Así, si f es la función

$$x \mapsto x^2,$$

el valor de f en 2 es 4 y el valor de f en $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$.

Para describir una función sólo necesitamos dar su valor en cualquier número x. Esa es la razón por la que usamos la notación $x \mapsto f(x)$. Algunas veces, por brevedad, hablamos de una función $f(x)$, indicando así la función f cuyo valor en x es $f(x)$. Por ejemplo, diremos: «Sea $f(x)$ la función $x^3 + 5$», en lugar de decir: «Sea f la función que a cada número x le asocia $x^3 + 5$». Usando la flechita especial $\mapsto$, podríamos también decir «Sea f la función $x \mapsto x^3 + 5$».

Nos gustaría también poder definir una función para ciertos números y dejarla indefinida para otros. Por ejemplo, nos gustaría decir que $\sqrt{x}$ es una función (la función raíz cuadrada, cuyo valor en un número x es la raíz cuadrada de ese número), pero observamos que un número negativo no tiene raíz cuadrada. Es por ello deseable generalizar un poco más el concepto de función estableciendo explícitamente para qué números está definida. Por ejemplo, la raíz cuadrada está definida. Por ejemplo, la raíz cuadrada está definida solamente para números $\geqslant 0$. Esta función se representa por $\sqrt{x}$. El valor $\sqrt{x}$ es el único número $\geqslant 0$ cuyo cuadrado es x.

Sea pues, en general, S una colección de números. Por una **función definida**

sobre S, entendemos una asociación que a cada número x en S le asocia un número. Llamamos a S **dominio de definición** de la función. Por ejemplo, el dominio de definición de la función raíz cuadrada es la colección de todos los números $\geqq 0$.

Demos otro ejemplo de una función que no está definida para todos los números. Sea S la colección de todos los números $\neq 0$. La función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

está definida para los números $x \neq 0$, y está así definida sobre el dominio S. Para esta función particular tenemos $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$ y

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Una palabra final antes de pasar a los ejercicios: no hay ninguna razón mágica para que debamos usar siempre la letra x para describir una función $f(x)$. Así, en lugar de hablar de la función $f(x) = 1/x$, podríamos muy bien hablar de $f(y) = 1/y$ ó $f(q) = 1/q$. Desafortunadamente, la forma más neutral de escribir sería f(blanco) $= 1$/blanco, lo que no es nada conveniente.

Ejercicios

1. Sea $f(x) = 1/x$. ¿Qué representan $f(\frac{3}{4})$ y $f(-\frac{2}{3})$?
2. Sea de nuevo $f(x) = 1/x$. ¿Qué representa $f(2x + 1)$ (para cualquier número x tal que $x \neq -\frac{1}{2}$?
3. Sea $g(x) = |x| - x$. ¿Qué representan $g(1)$, $g(-1)$, $g(-54)$?
4. Sea $f(y) = 2y - y^2$. ¿Qué representan $f(z)$, $f(w)$?
5. ¿Para qué números podría definirse una función $f(x)$ por la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}?$$

¿Cuál es el valor de esta función para $x = 5$?
6. ¿Para qué números se podría definir una función $f(x)$ por la fórmula $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (raíz cúbica de x)? ¿Qué representa $f(27)$?
7. Sea $f(x) = x/|x|$, definida para $x \neq 0$. ¿Qué representan

(a) $f(1)$ (b) $f(2)$ (c) $f(-3)$ (d) $f(-\frac{4}{3})$

8. Sea $f(x) = x + |x|$. Decir qué representan:

(a) $f(\frac{1}{2})$ (b) $f(2)$ (c) $f(-4)$ (d) $f(-5)$

9. Sea $f(x) = 2x + x^2 - 5$. Decir qué representan:

(a) $f(1)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(x+1)$

10. ¿Para qué números se puede definir una función $f(x)$ por la fórmula $f(x) = \sqrt[4]{x}$ (raíz cuarta de x)? ¿Qué representa $f(16)$?

11. Se dice que una función (definida para todos los números) es una función **par** si $f(x) = f(-x)$ para todo x. Se dice que es una función **impar** si $f(x) = -f(-x)$ para todo x. Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares o impares:

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$.

12. Sea f una función cualquiera definida para todos los números. Demostrar que la función $g(x) = f(x) + f(-x)$ es par. ¿Qué podemos decir de la función

$$h(x) = f(x) - f(-x),$$

es par, impar o ninguna de las dos cosas?

13. Demostrar que cualquier función definida para todos los números puede escribirse como la suma de una función par y una función impar.

§4. Potencias

En esta sección nos limitamos a presentar un resumen de algunos aspectos de aritmética elemental.

Sea n un entero $\geqq 1$ y sea a un número cualquiera. Entonces, a^n es el producto de a por sí mismo n veces. Por ejemplo, sea $a = 3$. Si $n = 2$, entonces $a^2 = 9$. Si $n = 3$, entonces $a^3 = 27$. Obtenemos así una función que se llama la **potencia** n-ésima. Si f denota esta función, entonces $f(x) = x^n$.

Recordamos la regla

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

para cualquier número x y enteros cualesquiera $m, n \geqq 1$.

Sea de nuevo n un entero $\geqq 1$, y sea a un **número positivo**. Definimos $a^{1/n}$ como el único número positivo b, tal que $b^n = a$. (El hecho de que existe tal número b se admite como parte de las propiedades de los números.) Hemos definido así una función a la que llamamos **raíz n-ésima**. Así, pues, si f es la raíz cuarta, entonces $f(16) = 2$ y $f(81) = 3$.

La función raíz n-ésima puede también definirse en 0, siendo la raíz n-ésima de 0 es igual a 0 mismo.

Pregunta: Si n es un entero impar como 1, 3, 5, 7, ..., ¿se puede definir una función raíz n-ésima para todos los números?

Si a, b son dos números $\geqq 0$ y n es un entero $\geqq 1$, entonces

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Hay otra regla útil y elemental. Sean m, n enteros $\geqq 1$ y sea a un número $\geqq 0$. Definimos $a^{m/n}$ como $(a^{1/n})^m$, lo que también es igual a $(a^m)^{1/n}$. Esto nos permite definir potencias fraccionarias y nos da una función

$$f(x) = x^{m/n}$$

definida para todo $x \geqq 0$.

Llegamos ahora a las potencias con números negativos ó 0. Deseamos definir x^a cuando a es un número racional negativo ó 0 y $x > 0$. Deseamos que la regla fundamental

$$x^{a+b} = x^a x^b$$

sea cierta. Esto significa que debemos definir x^0 como igual a 1. Por ejemplo, como

$$2^3 = 2^{3+0} = 2^3 2^0,$$

vemos por este ejemplo que la única forma en que esta ecuación se verifica es si $2^0 = 1$. Análogamente, en general, si la relación

$$x^a = x^{a+0} = x^a x^0$$

es verdadera, entonces x^0 debe ser igual a 1.

Supongamos finalmente que a es un número racional positivo y sea x un número > 0. Definimos x^{-a} como

$$\frac{1}{x^a}.$$

Así, pues,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \qquad \text{y} \qquad 4^{-2/3} = \frac{1}{4^{2/3}}.$$

Observamos que en este caso particular,

$$(4^{-2/3})(4^{2/3}) = 4^0 = 1.$$

En general, $x^a x^{-a} = x^0 = 1$.

Estamos tentados a definir x^a, incluso cuando a no es un número racional. Esto es más sutil. Por ejemplo, carece absolutamente de sentido decir que $2^{\sqrt{2}}$ es el resultado de multiplicar 2 por sí misma $\sqrt{2}$ veces. El problema de definir 2^a (o x^a) cuando a no es racional lo pospondremos hasta un capítulo ulterior. Hasta ese capítulo, cuando tratemos con tal potencia, supondremos que hay una función, escrita x^a, descrita en igual forma que para los números racionales y que satisface la relación fundamental

$$x^{a+b} = x^a x^b, \qquad x^0 = 1.$$

Ejemplo. Tenemos una función $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ definida para todo $x > 0$. Es realmente difícil describir sus valores para números particulares como, por ejemplo, $2^{\sqrt{2}}$. No se supo durante mucho tiempo si $2^{\sqrt{2}}$ era o no un número racional. La solución (no es racional) fue hallada solamente en 1927 por el matemático Gelfond, quien se hizo famoso por haber resuelto un problema calificado como muy difícil.

Advertencia. No hay que confundir una función como x^2 y una función como 2^x. Dado un número $c > 0$, podemos considerar c^x como una función definida para todo x. (Esto se discutirá en detalle en el capítulo VIII.) Esta función se denomina **función exponencial.** Así, 2^x y 10^x son funciones exponenciales. Elegiremos un número

$$e = 2{,}718...$$

y la función exponencial e^x por tener propiedades particulares que la hacen mejor que cualquier otra función exponencial. El significado de nuestro uso de la palabra «mejor» se explicará en el capítulo VIII.

Ejercicios

Hallar a^x y x^a para los siguientes valores de x y a.

1. $a = 2$ y $x = 3$
2. $a = 5$ y $x = -1$
3. $a = \frac{1}{2}$ y $x = 4$
4. $a = \frac{1}{3}$ y $x = 2$
5. $a = -\frac{1}{2}$ y $x = 4$
6. $a = 3$ y $x = 2$
7. $a = -3$ y $x = -1$
8. $a = -2$ y $x = -2$
9. $a = -1$ y $x = -4$
10. $a = -\frac{1}{2}$ y $x = 9$
11. Determinar si $2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{3}}$ es un número racional. (Este es realmente un problema de investigación mayor cuya solución no se conoce en la actualidad. Posteriormente en este curso trataremos con los números e y π. Aunque se sabe que ni e ni π son racionales, no se sabe si $e\pi$ o $e + \pi$ es racional.)

CAPITULO II

Gráficas y curvas

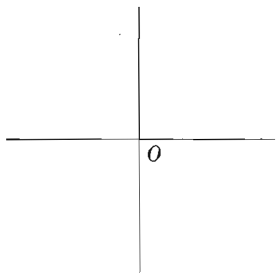
Las ideas contenidas en este capítulo nos permiten traducir ciertas afirmaciones en una y otra dirección entre el lenguaje de los números y el lenguaje de la geometría.

Esto es realmente fundamental para lo que sigue, porque podemos usar nuestra intuición geométrica para ayudarnos a resolver problemas relacionados con números y funciones y, recíprocamente, podemos usar teoremas relacionados con números y funciones para conseguir resultados referentes a la geometría.

§1. Coordenadas

Una vez que se ha elegido una unidad de longitud, podemos representar los números como puntos sobre una recta. Extenderemos ahora el procedimiento al plano y a pares de números.

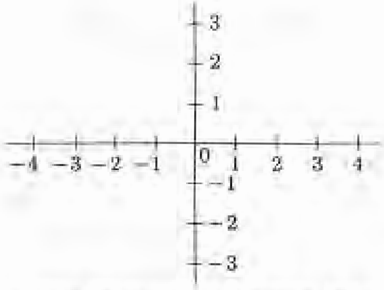
Visualicemos una recta horizontal y una vertical que se intersecan en el origen O.



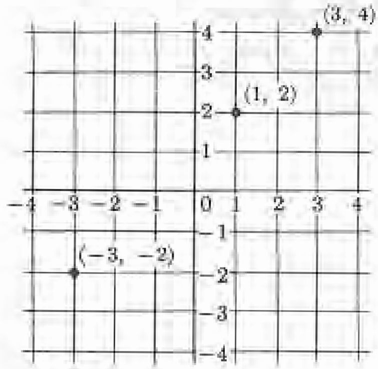
Estas rectas se llaman **ejes de coordenadas** o, simplemente, **ejes**.

Elegimos una unidad de longitud y cortamos la recta horizontal en segmentos de longitudes 1, 2, 3 . . . a la izquierda y a la derecha; hacemos lo mismo con la recta vertical, pero arriba y abajo, como se indica en la figura siguiente.

Sobre la recta vertical visualizamos los puntos que se encuentran bajo el 0 como correspondientes a los enteros negativos, exactamente como visualizamos los puntos a la izquierda sobre la recta horizontal como correspondientes a los enteros negativos. Seguimos la misma idea usada al graduar un termómetro, en donde los números bajo cero se consideran como negativos. Véase la figura de la página 20.



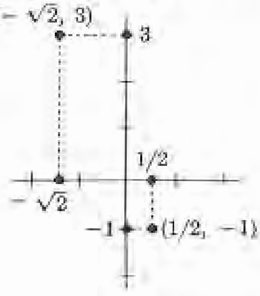
Podemos cortar ahora el plano en cuadrados cuyos lados tengan longitud 1.



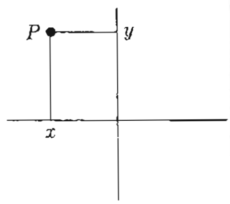
Podemos describir cada punto en donde se intersecan dos rectas por un par de enteros. Supongamos que se nos da un par de enteros como (1, 2). Vamos a la derecha del origen 1 unidad y verticalmente hacia arriba 2 unidades para alcanzar el punto (1, 2) que hemos señalado en la figura. Hemos señalado también el punto (3, 4). El diagrama es exactamente como un mapa.

Además, podríamos usar también números negativos. Por ejemplo, para describir el punto $(-3, -2)$ vamos a la izquierda del origen 3 unidades y verticalmente hacia abajo 2 unidades.

No hay relamente ninguna razón por la que debamos limitarnos a puntos que se describen por enteros. Por ejemplo, podemos tener también el punto $(\frac{1}{2}, -1)$ y el punto $(-\sqrt{2}, 3)$, como en la figura siguiente.



No hemos trazado todos los cuadrados sobre el plano. Hemos trazado solamente las rectas pertinentes para encontrar nuestros dos puntos

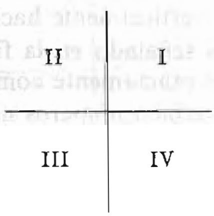


En general, si tomamos cualquier punto P en el plano y trazamos las rectas perpendiculares al eje horizontal y al eje vertical, obtenemos dos números x, y como en la figura de la derecha.

La recta perpendicular desde P al eje horizontal determina un número x que es negativo en la figura porque se encuentra a la izquierda el origen. El número y, determinado por la perpendicular desde P al eje vertical, es positivo porque se encuentra sobre el origen. Los dos números x, y se llaman **coordenadas** del punto P, y podemos escribir $P = (x, y)$.

Todo par de números (x, y) determina un punto del plano. Encontramos el punto recorriendo una distancia x desde el origen 0 en la dirección horizontal y luego una distancia y en la dirección vertical. Si x es positivo, vamos hacia la derecha de 0. Si x es negativo, vamos hacia la izquierda de 0. Si y es positivo, vamos verticalmente hacia arriba, y si y es negativo, vamos verticalmente hacia abajo. Las coordenadas del origen son $(0, 0)$. Generalmente, llamamos al eje horizontal **eje de las** x, y al eje vertical **eje de las** y. Si un punto P se describe por dos números, digamos $(5, -10)$, es habitual llamar al primer número su abscisa y al segundo número su ordenada. Así, pues, 5 es la abscisa y -10 la ordenada de nuestro punto. Desde luego, podríamos usar otras letras aparte de x e y: por ejemplo, t y s, o u y v.

Nuestros dos ejes separan el plano en cuatro cuadrantes que se enumeran como se indica en la figura.



Si (x, y) es un punto del primer cuadrante, entonces tanto x como y son posivos. Si (x, y) es un punto del cuarto cuadrante, entonces $x > 0$ pero $y < 0$.

Ejercicios

1. Marcar los siguientes puntos: $(-1, 1)$, $(0, 5)$, $(-5, -2)$, $(1, 0)$.
2. Marcar los siguientes puntos: $(\frac{1}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{4}{3}, -2)$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.
3. Sean (x, y) las coordenadas de un punto del segundo cuadrante. ¿Es x positiva o negativa? ¿Es y positiva o negativa?

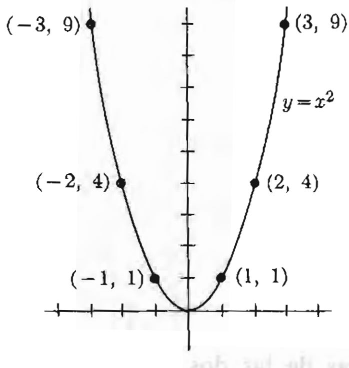
4. Sean (x, y) las coordenadas de un punto del tercer cuadrante. ¿Es x positiva o negativa? ¿Es y positiva o negativa?
5. Marcar los puntos 1,2, -2,3), (1,7, 3).
6. Marcar los siguientes puntos: $(-2{,}5, \frac{1}{3})$, $(-3{,}5, \frac{5}{4})$.
7. Marcar los siguientes puntos: $(1{,}5, -1)$, $(-1{,}5, -1)$.

§2. Gráficas

Sea f una función. Definimos la **gráfica** de f como la colección de todos los pares de números $(x, f(x))$ cuya primera coordenada es cualquier número para el que f esté definida y cuya segunda coordenada es el valor de la función en la primera coordenada.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ consta de todos los pares (x, y), tales que $y = x^2$. En otras palabras, es la colección de todos los pares (x, x^2), como $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, 1)$, $(-3, 9)$, etc.

Como cada par de números corresponde a un punto del plano (una vez que se ha seleccionado un sistema de ejes y una unidad de longitud), podemos considerar la gráfica de f como una colección de puntos del plano. La gráfica de la función $f(x) = x^2$ ha sido trazada en la figura de abajo, junto con los puntos que se dieron como ejemplo.



Para determinar la gráfica, marcamos unos cuantos puntos haciendo una tabla que nos da las abscisas y las ordenadas.

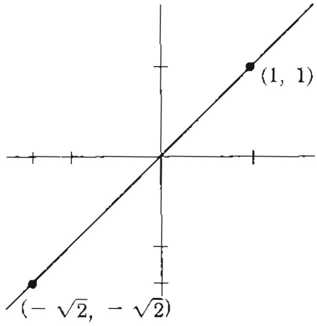
x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

x	$f(x)$
-1	1
-2	4
-3	9
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

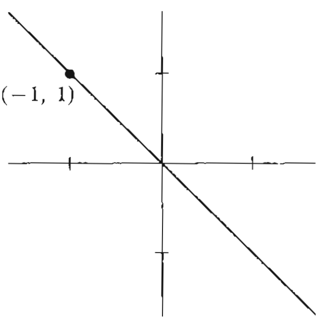
A estas alturas del juego no existe para el lector otro método que éste de prueba y error para determinar la gráfica de una función. Posteriormente, desarrollaremos técnicas que le permitirán hacer esto con mayor eficiencia.

Presentamos a continuación varios ejemplos de gráficas de funciones que aparecen frecuentemente en lo que sigue.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = x$. Los puntos sobre su gráfica son del tipo (x, x). La primera coordenada debe ser igual a la segunda. Así, $f(1) = 1$, $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, etc. La gráfica tiene este aspecto:

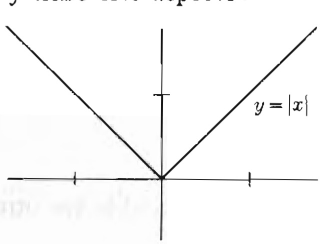


Ejemplo 2. Sea $f(x) = -x$. Su gráfica tiene este aspecto:



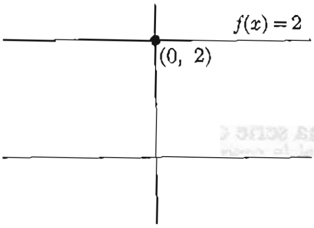
Obsérvese que las gráficas de las dos funciones precedentes son líneas rectas. Posteriormente estudiaremos el caso general de una línea recta.

Ejemplo 3. Sea $f(x) = |x|$. Cuando $x \geqq 0$, sabemos que $f(x) = x$. Cuando $x \leqq 0$, sabemos que $f(x) = -x$. De donde la gráfica de $|x|$ se obtiene combinando las dos precedentes y tiene este aspecto:



Todos los valores de y son $\geqq 0$, bien sea x positivo o negativo.

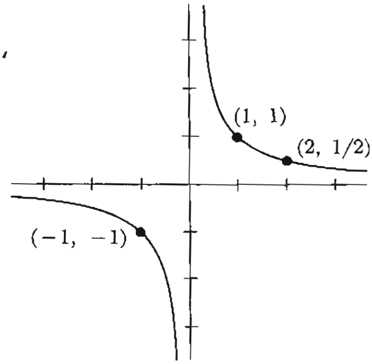
Ejemplo 4. Hay un tipo de función aún más sencillo que los estudiados; a saber, las funciones constantes. Por ejemplo, podemos definir una función f tal que $f(x) = 2$ para todos los números x. En otras palabras, asociamos el número 2 a cualquier número x. Es una asociación muy sencilla y la gráfica de esta función es una recta horizontal que interseca al eje vertical en el punto $(0, 2)$.



Si hubiésemos tomado la función $f(x) = -1$, entonces la gráfica hubiera sido una recta horizontal intersecando al eje vertical en el punto $(0, -1)$.

En general, sea c un número fijo. La gráfica de la función $f(x) = c$ es la recta horizontal que interseca al eje vertical en el punto $(0, c)$. La función $f(x) = c$ se denomina función **constante.**

Ejemplo 5. El último de nuestros ejemplos es la función $f(x) = 1/x$ (definida para $x \neq 0$). Marcando en el plano unos pocos puntos de la gráfica, el lector puede ver que tiene este aspecto:



Por ejemplo, se pueden marcar los siguientes puntos:

x	$1/x$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{3}$	3

x	$1/x$
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{3}$	-3

Cuando x toma un valor positivo muy grande, $1/x$ se hace muy pequeño. Cuando x tiende a 0 por la derecha, $1/x$ se hace muy grande. Un fenómeno análogo aparece cuando x se aproxima a 0 por la izquierda; entonces x es negativa y $1/x$ es también negativo. De donde, en ese caso, $1/x$ es un negativo muy grande.

Al intentar determinar cuál es el aspecto de la gráfica de una función, el lector puede examinar lo siguiente:

> Los puntos en que la gráfica interseca los dos ejes coordenados. Lo que sucede cuando x se hace muy grande positiva y muy grande negativa.

En conjunto, sin embargo, al efectuar los ejercicios, la técnica principal debe ser exactamente la de marcar una serie de puntos hasta que sea claro cuál es el aspecto de la gráfica.

Ejercicios

Trazar las gráficas de las siguientes funciones y marcar al menos tres puntos sobre cada gráfica. Damos el valor de la función en x en cada caso.

1. $x + 1$	2. $2x$	3. $3x$
4. $4x$	5. $2x + 1$	6. $5x + \frac{1}{2}$
7. $\dfrac{x}{2} + 3$	8. $-3x + 2$	9. $2x^2 - 1$
10. $-3x^2 + 1$	11. x^3	12. x^4
13. $\sqrt{x}$	14. $x^{-1/2}$	15. $2x + 1$
16. $x + 3$	17. $\lvert x\rvert + x$	18. $\lvert x\rvert + 2x$
19. $-\lvert x\rvert$	20. $-\lvert x\rvert + x$	21. $\dfrac{1}{x + 2}$
22. $\dfrac{1}{x - 2}$	23. $\dfrac{1}{x + 3}$	24. $\dfrac{1}{x - 3}$
25. $\dfrac{2}{x - 2}$	26. $\dfrac{2}{x + 2}$	27. $\dfrac{2}{x}$
28. $\dfrac{-2}{x + 5}$	29. $\dfrac{3}{x + 1}$	30. $\dfrac{x}{\lvert x\rvert}$

(En los ejercicios 13, 14 y 21 a 30, las funciones no están definidas para todos los valores de x.)

31. Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$f(x) = 0$ si $x \leqq 0$. $f(x) = 1$ si $x < 0$.

32. Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$f(x) = x$ si $x < 0$. $f(0) = 2$. $f(x) = x$ si $x > 0$.

33. Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$f(x) = x^2$ si $x < 0$. $f(x) = x$ si $x \geqq 0$.

34. Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$f(x) = |x| + x$ si $-1 \leqq x \leqq 1$.
$f(x) = 3$ si $x > 1$. [$f(x)$ no está definida para otros valores de x.]

35. Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$f(x) = x^3$ si $x \leqq 0$. $f(x) = 1$ si $0 < x < 2$.
$f(x) = x^2$ si $x \geqq 2$.

36. Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$f(x) = x$ si $0 < x \leqq 1$. $f(x) = x - 1$ si $1 < x \leqq 2$.
$f(x) = x - 2$ si $2 < x \leqq 3$. $f(x) = x - 3$ si $3 < x \leqq 4$.

[Dejamos a $f(x)$ indefinida para otros valores de x, pero el lector debe intentar definirla por sí mismo, de forma que se preserve la simetría de la gráfica.]

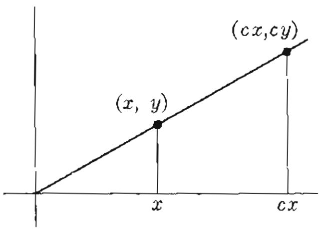
§3. La línea recta

Uno de los tipos más fundamentales de funciones es aquel cuya gráfica representa una línea recta. Ya hemos visto que la gráfica de la función $f(x) = x$ es una línea recta. Si tomamos $f(x) = 2x$, entonces la recta sube mucho más rápidamente y aún más para, por ejemplo, $f(x) = 3x$. La gráfica de la función $f(x) = 10.000x$ nos parecería casi vertical. En general, si a es un número positivo, entonces la gráfica de la función

$$f(x) = ax$$

representa una línea recta. El punto $(2, 2a)$ se encuentra sobre la recta porque $f(2) = 2a$. El punto $(\sqrt{2}; \sqrt{2}a)$ también se encuentra sobre la recta y, si c es cualquier número, el punto (c, ca) se encuentra sobre la recta. Las coordenadas (x, y) de estos puntos se obtienen por medio de una transformación de semejanza, comenzando con las coordenadas $(1, a)$ y multiplicándolas por algún número c.

Podemos visualizar este procedimiento por medio de triángulos semejantes. En la figura de abajo tenemos una línea recta. Si elegimos un punto (x, y) sobre la recta y trazamos la perpendicular desde ese punto al eje de las x, obtenemos un triángulo rectángulo.

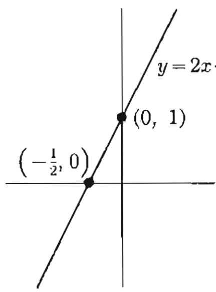


Si x es la longitud de la base del triángulo más pequeño de la figura e y su altura, y si cx es la longitud de la base del triángulo mayor, entonces cy es la altura del triángulo mayor: el triángulo más pequeño es semejante al triángulo más grande.

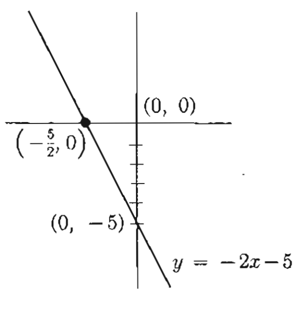
Si a es un número < 0, entonces la gráfica de la función $f(x) = ax$ es también una línea recta que sube hacia la izquierda. Por ejemplo, las gráficas de $f(x) = -x$ o $f(x) = -2x$.

Sean a, b dos números. La gráfica de la función $g(x) = ax + b$ es también una línea recta paralela a la recta determinada por la función $f(x) = ax$. Para convencernos de tal cosa observemos lo siguiente. Cuando $x = 0$ vemos que $g(x) = b$. Sea $y' = y - b$. La ecuación $y' = ax$ es del tipo antes discutido. Si tenemos un punto (x, y') sobre la recta $y' = ax$, entonces obtenemos un punto $(x, y' + b)$ sobre la línea recta $y = ax + b$, con sólo añadir b a la segunda coordenada. Esto significa que la gráfica de la función $g(x) = ax + b$ es la línea recta paralela a la recta determinada por la función $f(x) = ax$ que pasa por el punto $(0, b)$.

Ejemplo 1. Sea $g(x) = 2x + 1$. Cuando $x = 0$, entonces $g(x) = 1$. Cuando $g(x) = 0$, entonces $x = -\frac{1}{2}$. La gráfica tiene este aspecto:



Ejemplo 2. Sea $g(x) = -2x - 5$. Cuando $x = 0$, entonces $g(x) = -5$. Cuando $g(x) = 0$, entonces $x = -\frac{5}{2}$. La gráfica tiene este aspecto:



Frecuentemente se habla de una función $f(x) = ax + b$ como de una línea recta (aunque, desde luego, es su gráfica la que es una línea recta).

El número a, que es el coeficiente de x, se llama **pendiente** de la recta y determina el grado de inclinación de la recta. Como ya hemos visto en muchos ejemplos, cuando la pendiente es positiva la recta sube hacia la derecha, y cuando la pendiente es negativa sube hacia la izquierda. La relación $y = ax + b$ se llama también **ecuación** de la recta. Nos da la relación entre las coordenadas x e y de un punto de la recta.

Sea $f(x) = ax + b$ una recta, y sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos de ésta. Es fácil encontrar la pendiente de la recta en términos de las coordenadas de estos dos puntos. Por definición sabemos que

$$y_1 = ax_1 + b$$

y

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Restando obtenemos

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1).$$

Por consiguiente, si los dos puntos son distintos, $x_2 \neq x_1$, entonces podemos dividir por $x_2 - x_1$ y obtenemos

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Esta fórmula nos da la pendiente en términos de las coordenadas de dos puntos distintos sobre la recta.

Ejemplo 3. Observemos la recta $f(x) = 2x + 5$. Haciendo $x = 1$, tenemos $f(x) = 7$, y haciendo $x = -1$ tenemos $f(x) = 3$. Así, pues, los puntos $(1, 7)$ y $(-1, 3)$ pertenecen a la recta. La pendiente es 2 y es igual a

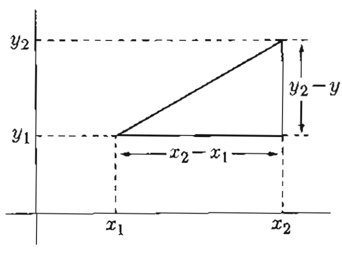
$$\frac{7 - 3}{1 - (-1)}$$

como era de esperar.

Geométricamente, nuestro cociente

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es simplemente la razón entre el lado vertical y el lado horizontal del triángulo en el siguiente diagrama:



Recíprocamente, dados dos puntos en el plano, es fácil determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos.

Ejemplo 4. Sean (1, 2) y (2, −1) los dos puntos. ¿Cuál es la pendiente de la recta entre ellos? ¿Cuál es la ecuación de la recta?

Primero encontramos la pendiente. Debe ser el cociente

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

que es igual a

$$\frac{-1-2}{2-1} = -3.$$

Así, pues, sabemos que nuestra recta está dada por la ecuación

$$y = -3x + b$$

para algún número b. Por otra parte, sabemos también que la recta debe pasar por el punto (1; 2). Si $f(x) = -3x + b$, entonces debemos tener $f(1) = 2$. De esto podemos despejar b. En efecto,

$$2 = -3 \cdot 1 + b$$

nos da $b = 2 + 3 = 5$. Por tanto, la ecuación de la recta es

$$f(x) = -3x + 5.$$

Obsérvese que no importa a cuál punto llamemos (x_1, y_1) y a cuál llamemos (x_2, y_2), siempre obtendríamos la misma respuesta para la pendiente.

Conociendo dos puntos sobre una recta, determinamos primero la pendiente y luego despejamos la constante b, usando las coordenadas de uno de los puntos.

Podemos también determinar la ecuación de una recta siempre que conozcamos la pendiente y un punto.

Ejemplo 5. Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente −7 y pasa por el punto (−1, 2).

La ecuación debe ser del tipo

$$y = -7x + b$$

para algún número b. Por otra parte, cuando $x = -1$, debemos tener $y = 2$. Luego,

$$2 = (-7)(-1) + b$$

y $b = -5$. De donde la ecuación de la recta es

$$y = -7x - 5.$$

Ejemplo 6. En general, sea a un número y (x_1, y_1) algún punto. *Deseamos encontrar la ecuación de la recta que tiene una pendiente igual a a y que pasa por el punto* (x_1, y_1). La condición de que un punto (x, y) con $x \neq x_1$ esté en la recta es equivalente a la condición de que

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a.$$

Así, pues, la ecuación de la recta deseada es

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1).}$$

En el ejemplo 5, podríamos también haber buscado la solución usando la descripción presente, obteniendo

$$y - 2 = -7(x - (-1)),$$

y de ello también

$$y = -7x - 5.$$

Ejemplo 7. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos distintos cualesquiera, con $x_1 \neq x_2$. Deseamos encontrar la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos. Su pendiente debe ser igual a

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por el ejemplo precedente, encontramos que la ecuación de la recta puede expresarse por la fórmula

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq x_1$.

Debemos, finalmente, mencionar las rectas verticales. Estas no se pueden representar por ecuaciones del tipo $y = ax + b$. Supongamos que tenemos una recta vertical que interseca el eje de las x en el punto $(2, 0)$. La ordenada de cualquier punto de la recta puede ser arbitraria. Así, pues, la ecuación de la recta es simplemente $x = 2$. En general, la ecuación de la recta vertical que interseca al eje de las x en el punto $(c, 0)$ es $x = c$.

Ejercicios

Trazar las gráficas de las siguientes rectas:

1. $y = -2x + 5$
2. $y = 5x - 3$
3. $y = \frac{x}{2} + 7$
4. $y = -\frac{x}{3} + 1$

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos?

5. $(-1, 1)$ y $(2, -7)$
6. $(3, \frac{1}{2})$ y $(4, -1)$
7. $(\sqrt{2}, -1)$ y $(\sqrt{2}, 1)$
8. $(-3, -5)$ y $(\sqrt{3}, 4)$

¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto dado?

9. Pendiente 4 y punto $(1, 1)$.
10. Pendiente -2 y punto $(\frac{1}{2}, 1)$.
11. Pendiente $-\frac{1}{2}$ y punto $(\sqrt{2}, 3)$
12. Pendiente $\sqrt{3}$ y punto $(-1, 5)$.

Trazar las gráficas de las siguientes rectas:

13. $x = 5$
14. $x = -1$
15. $x = -3$
16. $y = -4$
17. $y = 2$
18. $y = 0$.

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos?

19. $(1, \frac{1}{2})$ y $(-1, 1)$
20. $(\frac{1}{4}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, -1)$
21. $(2, 3)$ y $(\sqrt{2}, 1)$
22. $(\sqrt{3}, 1)$ y $(3, 2)$

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos?

23. $(\pi, 1)$ y $(\sqrt{2}, 3)$.
24. $(\sqrt{2}, 2)$ y $(1, \pi)$.
25. $(-1, 2)$ y $(\sqrt{2}, -1)$.
26. $(-1, \sqrt{2})$ y $(-2, -3)$.
27. Trazar las gráficas de las siguientes rectas:

    (a) $y = 2x$ (b) $y = 2x + 1$ (c) $y = 2x + 5$

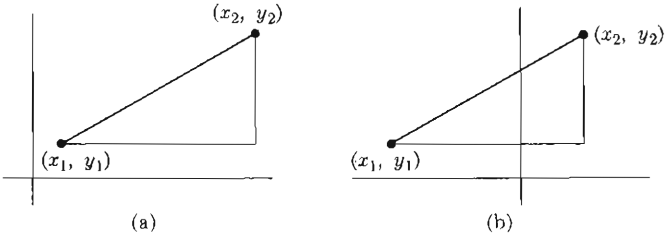
    (d) $y = 2x - 1$ (e) $y = 2x - 5$
28. Se dice que dos líneas rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente. Sean $y = ax + b$ e $y = cx + d$ las ecuaciones de dos líneas rectas con $b \neq d$. (a) Si son paralelas, demostrar que no tienen ningún punto en común. (b) Si no son paralelas, demostrar que tienen exactamente un punto en común.
29. Hallar el punto común de los siguiente pares de rectas:

    (a) $y = 3x + 5$ e $y = 2x + 1$. (b) $y = 3x - 2$ e $y = -x + 4$.

    (c) $y = 2x + 3$ e $y = -x + 2$ (d) $y = x + 1$ e $y = 2x + 7$

§4. Distancia entre dos puntos

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos en el plano, como, por ejemplo, en los siguientes diagramas:



Podemos construir entonces un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento rectilíneo que une nuestros dos puntos puede determinarse por las longitudes de los dos lados. El cuadrado del lado inferior es $(x_2 - x_1)^2$, que es también igual a $(x_1 - x_2)^2$. Esto está claro en la parte (a) de la figura. Es también cierto en la parte (b) (el lector puede convencerse a sí mismo mediante un ejemplo como el 2 siguiente). La longitud del lado vertical es $(y_2 - y_1)^2$, que es igual a $(y_1 - y_2)^2$. Si L denota la longitud del segmento rectilíneo, entonces

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

y, por consiguiente,

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 1. Sean los dos puntos el (1, 2) y el (1, 3). Entonces la longitud del segmento rectilíneo entre ellos es

$$\sqrt{(1 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = 1.$$

La longitud L también se denomina **distancia** entre los dos puntos.

Ejemplo 2. Hallar la distancia entre los puntos $(-1, 5)$ y $(4, -3)$.
La distancia es

$$\sqrt{(4 - (-1))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{89}.$$

(El lector debería representar estos puntos y convencerse a sí mismo de que los signos menos no afectan a la validez de nuestra fórmula para la longitud del segmento rectilíneo entre los dos puntos.)

Ejercicios

Hallar la distancia entre los siguientes puntos:

1. Los puntos $(-3, -5)$ y $(1, 4)$.
2. Los puntos $(1, 1)$ y $(0, 2)$.
3. Los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.

4. Los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 2)$.
5. Los puntos $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(1, 1)$.
6. Hallar las coordenadas del cuarto vértice de un rectángulo, tres de cuyos vértices son $(-1, 2)$, $(4, 2)$, $(-1, -3)$.
7. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo del ejercicio 6?
8. Hallar las coordenadas del cuarto vértice de un rectángulo, tres de cuyos vértices son $(-2, -2)$, $(3, -2)$, $(3, 5)$.
9. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo del ejercicio 8?
10. Si x, y son números, defínase la distancia entre estos dos números como $|x - y|$. Demostrar que es la misma distancia existente entre los puntos $(x, 0)$ y $(y, 0)$ en el plano.
11. Denotar por $d(x, y)$ la distancia entre dos números x e y. Demostrar que si x, y, z son números, entonces

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$$
$$d(x, y) = d(y, x).$$

§5. Curvas y ecuaciones

Sea $F(x, y)$ una expresión en la que aparece un par de números (x, y). Sea c un número. Consideramos la ecuación

$$F(x, y) = c.$$

La colección de puntos (a, b) del plano que satisfacen esta ecuación, es decir, tales que

$$F(a, b) = c,$$

se llama **gráfica** de la ecuación. Esta gráfica se conoce también como una **curva** y generalmente no se hará distinción alguna entre la ecuación

$$F(x, y) = c$$

y la curva que representa dicha ecuación.

Por ejemplo,

$$x + y = 2$$

es la ecuación de una línea recta y su gráfica es la línea recta. Estudiaremos a continuación ejemplos importantes de ecuaciones que surgen con frecuencia.

Si f es una función, entonces podemos formar la expresión $y - f(x)$ y la gráfica de la ecuación

$$y - f(x) = 0$$

no es otra que la gráfica de la función f como se estudió en §2.

El lector debe observar que hay ecuaciones del tipo

$$F(x, y) = c$$

que no se obtienen a partir de una función $y = f(x)$. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una ecuación de ese tipo.

Estudiaremos ahora importantes ejemplos de gráficas de las ecuaciones

$$F(x, y) = 0 \quad \text{o} \quad F(x, y) = c.$$

§6. La circunferencia

La expresión $F(x, y) = x^2 + y^2$ tiene una sencilla interpretación geométrica. Es el cuadrado de la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Así, pues, los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1^2 = 1$$

son simplemente aquellos puntos cuya distancia al origen es 1. Es decir, la circunferencia de radio 1 y centro en el origen.

Análogamente, los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4$$

son aquellos puntos cuya distancia al origen es 2. Constituyen la circunferencia de radio 2. En general, si c es un número cualquiera > 0, entonces la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = c^2$$

es la circunferencia de radio c y centro en el origen.

Hemos hecho notar ya que la **ecuación**

$$x^2 + y^2 = 1$$

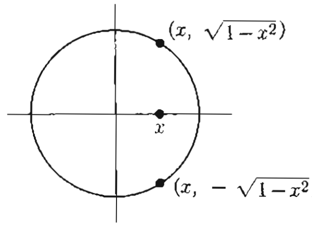
o $x^2 + y^2 - 1 = 0$ no es del tipo $y - f(x) = 0$; es decir, no proviene de una función $y = f(x)$. Sin embargo, podemos escribir nuestra ecuación en la forma

$$y^2 = 1 - x^2.$$

Para cualquier valor de x entre -1 y $+1$, podemos despejar y y obtenemos

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Si $x \neq 1$ y $x \neq -1$, entonces tenemos dos valores de y para cada valor de x. Geométricamente, estos dos valores corresponden a los puntos indicados en el siguiente diagrama:



Hay una función definida para $-1 \leqq x \leqq 1$, tal que

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

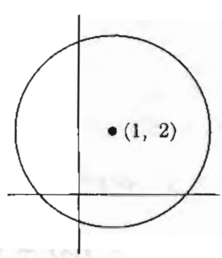
y la gráfica de esta función es la mitad superior de nuestra circunferencia. Análogamente, hay otra función

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

definida también para $-1 \leqq x \leqq 1$, cuya gráfica es la mitad inferior de la circunferencia. Ninguna de estas funciones está definida para otros valores de x.

Pasamos ahora a la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (1, 2) y cuyo radio tiene longitud 3. Consta de los puntos (x, y) cuya distancia a (1, 2) es 3. Estos son los puntos que satisfacen la ecuación.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$



La gráfica de esta ecuación aparece arriba.

Para tener otro ejemplo, deseamos determinar los puntos que están a una distancia igual a 2 del punto $(-1, -3)$. Son los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$(x - (-1))^2 + (y - (-3))^2 = 4$$

o, en otras palabras,

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

(Obsérvese cuidadosamente la cancelación del signo menos.) Así, pues, la gráfica de esta ecuación es la circunferencia de radio 2 y centro $(-1, -3)$.

Sean, en general, a y b dos números y r un número mayor que 0. Entonces, la circunferencia de radio r y centro (a, b) es la gráfica de la ecuación

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

En nuestro último ejemplo, tenemos:

$$r=2, \quad a=-1, \quad b=-3.$$

Ejemplo 1. Supongamos que tenemos una expresión cuadrática como

$$x^2+2x.$$

Podemos completar el cuadrado y escribirla como

$$x^2+2x=(x+1)^2-1.$$

Análogamente, dada la expresión y^2-3y, podemos escribirla

$$y^2-3y=(y-\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{9}{4}.$$

Dada una ecuación

$$x^2+y^2+2x-3y-5=0,$$

podemos usar el artificio de completar el cuadrado para ver cuál es el aspecto de su gráfica. Nuestra ecuación puede escribirse en la forma

$$(x+1)^2+(y-\tfrac{3}{2})^2=5+\tfrac{9}{4}+1=\tfrac{33}{4}.$$

Así pues, nuestra ecuación es una circunferencia de centro $(-1, 3/2)$ y radio $\sqrt{33/4}$.

Ejercicios

Trazar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. (a) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ (b) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
   (c) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ (d) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$
2. (a) $x^2+(y-1)^2=9$ (b) $x^2+(y-1)^2=4$
   (c) $x^2+(y-1)^2=25$ (d) $x^2+(y-1)^2=1$
3. (a) $(x+1)^2+y^2=1$ (b) $(x+1)^2+y^2=4$
   (c) $(x+1)^2+y^2=9$ (d) $(x+1)^2+y^2=25$

4. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

6. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

7. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

8. $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

9. $4x^2 + 25y^2 = 100$

10. $\dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

11. $25x^2 + 16y^2 = 400$

12. $(x-1)^2 + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

(En los ejercicios 4 a 12, la gráfica de la ecuación se denomina **elipse.** Es como un círculo estirado. Investigue el lector por sí mismo el efecto de cambiar los coeficientes de x_2 e y^2 en estas ecuaciones.)

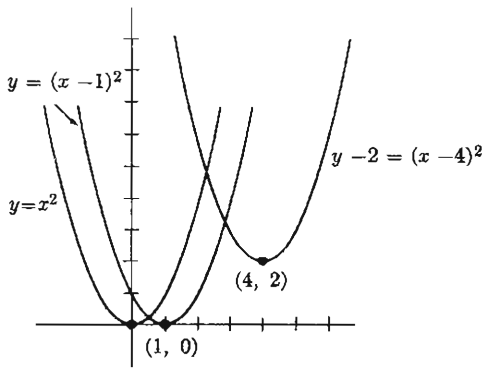
§7. La parábola. Cambios de coordenadas

Hemos visto cuál es el aspecto de la gráfica de la ecuación $y = x^2$. Supóngase que obtenemos la gráfica de $y = (x - 1)^2$. Encontraremos que su aspecto es del todo análogo, pero como si el origen hubiera estado en el punto (1, 0).

Análogamente, la curva $y - 2 = (x - 4)^2$ es de nuevo como la $y = x^2$, salvo en que toda la curva se ha desplazado como si el origen fuera el punto (4, 2). Las gráficas de estas ecuaciones aparecen trazadas en el siguiente diagrama.

Podemos formalizar estas observaciones como sigue. Supongamos que en nuestro sistema de coordenadas dado escogemos un punto (a, b) como nuevo origen. Sean las nuevas coordenadas $x' = x - a$ e $y = y - b$. Así, cuando $x = a$ tenemos $x' = 0$ y cuando $y = b$ entonces $y' = 0$. Si tenemos una curva.

$$y' = x'^2$$



en el nuevo sistema de coordenadas cuyo origen está en el punto (a, b), entonces da lugar a la ecuación

$$(y - b) = (x - a)^2$$

en términos del antiguo sistema de coordenadas. Este tipo de curva se conoce como **parábola.**

Podemos aplicar la misma técnica de completar el cuadrado que usamos para la circunferencia.

Ejemplo. ¿Cuál es la gráfica de la ecuación

$$2y - x^2 - 4x + 6 = 0?$$

Completando el cuadrado, podemos escribir

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4.$$

Luego nuestra ecuación puede escribirse de nuevo en la forma

$$2y = (x + 2)^2 - 10$$

o sea

$$2(y + 5) = (x + 2)^2.$$

Escogemos un nuevo sistema de coordenadas

$$x' = x + 2 \quad \text{y} \quad y' = y + 5$$

de forma que nuestra ecuación se haga

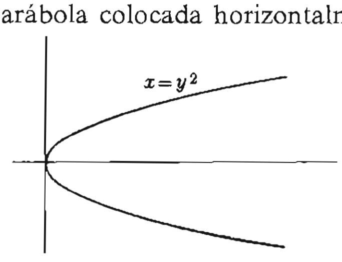
$$2y' = x'^2$$

o $y' = \frac{1}{2}x'^2$. Esta es una función cuya gráfica ya conocemos y cuyo dibujo dejamos al lector.

Finalmente, observamos que si tenemos una ecuación

$$x - y^2 = 0 \qquad \text{o} \qquad x = y^2,$$

entonces obtenemos una parábola colocada horizontalmente.



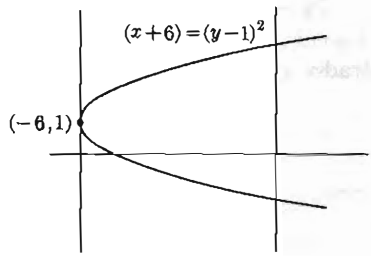
Podemos entonces aplicar la técnica de cambiar el sistema de coordenadas para ver cómo es la gráfica de una ecuación más general; por ejemplo la gráfica de

$$x - y^2 + 2y + 5 = 0.$$

Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$(x + 6) = (y - 1)^2$$

de donde su gráfica tiene el siguiente aspecto:



Ejercicios

Trazar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $y = -x + 2$
2. $y = 2x^2 + x - 3$
3. $x - 4y^2 = 0$
4. $x - y^2 + y + 1 = 0$

Completar el cuadrado en las siguientes ecuaciones y cambiar el sistema de coordenadas para ponerlas en la forma

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \quad \text{o} \quad y' = cx'^2 \quad \text{o} \quad x' = cy'^2$$

con una constante c adecuada.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$
8. $y - 2x^2 - x + 3 = 0$
9. $y - x^2 - 4x - 5 = 0$
10. $y - x^2 + 2x + 3 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -3$
12. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -3$
13. $x - 2y^2 - y + 3 = 0$
14. $x - y^2 - 4y = 5$

§8. La hipérbola

Hemos visto ya cuál es el aspecto de la gráfica de la ecuación

$$xy = 1.$$

Es, desde luego, el mismo de la gráfica para la función $f(x) = 1/x$ (definida para $x \neq 0$). Si escogemos un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el punto (a, b), la ecuación

$$y - b = \frac{1}{x - a}$$

se conoce como **hipérbola.** En términos del nuevo sistema de coordenadas $x' = x - a$ e $y' = y - b$, nuestra hipérbola tiene el viejo tipo de la ecuación

$$x'y' = 1.$$

Si se nos da una ecuación como

$$xy - 2x + 3y + 4 = 5,$$

podemos factorizar el primer miembro y volver a escribir la ecuación en la forma

$$(x + 3)(y - 2) + 6 + 4 = 5$$

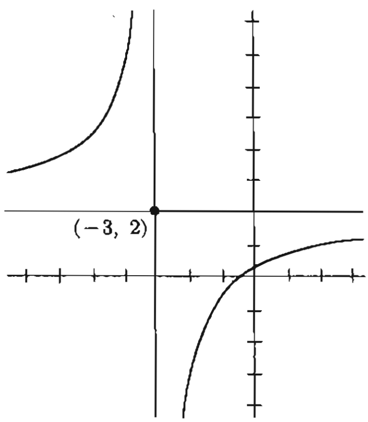
o

$$(x + 3)(y - 2) = -5.$$

En términos del sistema de coordenadas $x' = x + 3$ e $y' = y - 2$, obtenemos la ecuación

$$x'y' = -5.$$

La gráfica de esta ecuación aparece en el siguiente diagrama.



Ejercicios

Trazar las gráficas de las siguientes curvas:

1. $(x - 1)(y - 2) = 2$
2. $x(y + 1) = 3$
3. $xy - 4 = 0$
4. $y = \dfrac{2}{1 - x}$

5. $y = \frac{1}{x+1}$

6. $(x+2)(y-1) = 1$

7. $(x-1)(y-1) = 2$

8. $(x-1)(y-1) = 1$

9. $y = \frac{1}{x-2} + 4$

10. $y = \frac{1}{x+1} - 2$

11. $y = \frac{4x-7}{x-2}$

12. $y = \frac{-2x-1}{x+1}$

13. $y = \frac{x+1}{x-1}$

14. $y = \frac{x-1}{x+1}$

SEGUNDA PARTE

DERIVACION Y FUNCIONES ELEMENTALES

32417

En esta parte aprendemos cómo derivar. En términos geométricos esto equivale a encontrar la pendiente de una curva o su razón de cambio. Analizamos sistemáticamente las técnicas para hacer esto y la manera como se aplican a las funciones elementales: polinomiales, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y funciones inversas.

Una de las razones por las que posponemos la integración hasta después de esta sección es que las técnicas de integración, hasta cierto punto, dependen de nuestro conocimiento de las derivadas de ciertas funciones, porque una de las propiedades de la integración es que constituye la operación inversa de la derivación.

CAPITULO III

La derivada

Los dos conceptos fundamentales de este curso son los de derivada e integral. En este capítulo trataremos del primero.

La derivada nos proporciona la pendiente de una curva en un punto. Tiene también aplicaciones en física, donde puede interpretarse como la razón de cambio.

Debemos desarrollar algunas técnicas básicas que nos permitirán calcular la derivada en todas las situaciones estándar que es probable encontrar en la práctica.

§1. La pendiente de una curva

Consideremos una curva y tomemos un punto P en ésta. Deseamos definir las nociones de pendiente de la curva en ese punto y de recta tangente a la curva en el punto. Algunas veces se dice que la tangente a la curva en el punto es la recta que toca la curva solamente en dicho punto. Esto no tiene sentido, como lo demuestran los siguientes dibujos:

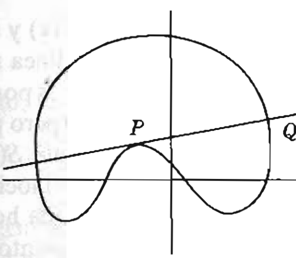


Figura 1

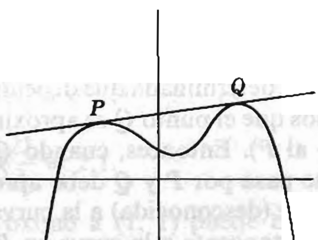


Figura 2

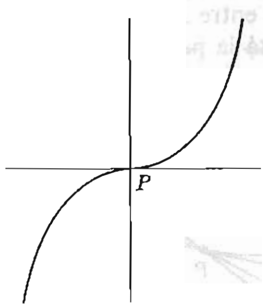


Figura 3

En las Figs. 1, 2 y 3 observamos las rectas tangentes a la curva en el punto P. En la fig. 1 la recta corta a la curva en el otro punto Q. En la fig. 2 la recta es también tangente a la curva en el punto Q. En la fig. 3 se supone que la curva es muy plana cerca del punto P y la recta horizontal corta a la curva en P, pero nos gustaría decir que es tangente a la curva en P si la curva fuera muy plana. La recta vertical corta a la curva solamente en P, pero no es tangente.

Obsérvese también que no se puede salir de las dificultades tratando de distinguir entre una recta que «toca» a la curva y una que la «corta», o diciendo que la recta debe encontrarse sobre un lado de la curva (ver fig. 1).

Por tanto, debemos olvidarnos de la idea de tocar la curva solamente en un punto y buscar otra.

Tenemos que hacer frente a dos problemas. Uno de ellos es dar la idea geométrica correcta que nos permita definir la tangente a la curva, y el otro comprobar si esa idea nos permite calcular efectivamente esta recta tangente cuando la curva está dada por una sola ecuación con coeficientes numéricos. Es una cosa notable que nuestra solución del primer problema nos dará en efecto una solución para el segundo.

En el primer capítulo hemos visto que el conocer la pendiente de una recta y uno de los puntos de la misma nos permite determinar la ecuación de la recta. Definiremos por ello la pendiente de una curva en un punto y luego obtendremos su tangente mediante el método del capítulo II.

Los ejemplos nos demuestran que para definir la pendiente de la curva en P no deberíamos considerar lo que sucede en un punto Q que está muy alejado de P. Lo que realmente importa es lo que sucede cerca de P.

Tomemos, pues, un punto cualquiera Q de la curva dada $y = f(x)$ y supongamos que $Q \neq P$. Entonces los dos puntos P y Q determinan una línea recta con una pendiente determinada que depende de P y Q, y que representamos por $S(P, Q)$. Supongamos que el punto Q se aproxima al punto P sobre la curva (pero permanece distinto al P). Entonces, cuando Q llega cerca de P, la pendiente $S(P, Q)$ de la recta que pasa por P y Q debe aproximarse a la pendiente (desconocida) de la recta tangente (desconocida) a la curva en P. En el siguiente diagrama hemos trazado la recta tangente a la curva en P y dos rectas entre P y otro punto sobre la curva junto a P (fig. 4). El punto Q_2 está más próximo a P sobre la curva y, por tanto, la pendiente de la recta entre P y Q_2 está más próxima a la pendiente de la recta tangente de lo que lo está la pendiente de la recta entre P y Q_1.

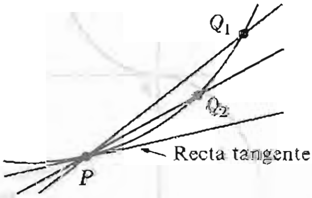


Figura 4

Si el límite de la pendiente $S(P, Q)$ existe cuando Q se aproxima a P, entonces debe ser considerado como la pendiente de la propia curva en P. Esta es la idea básica en que se fundamenta nuestra definición de la pendiente de la curva en P. La tomamos como una definición, quizá la definición más importante de este libro. Repitamosla:

> Dada una curva $y = f(x)$, sea P un punto sobre la curva. La **pendiente** de la curva en P es el límite de la pendiente de las rectas entre P y otro punto Q sobre la curva, cuando Q se aproxima a P.

La idea de definir la pendiente de esta manera fue descubierta en el siglo XVII por Newton y Leibnitz. Veremos que, efectivamente, esta definición nos permite determinar la pendiente en la práctica.

Observemos primero que cuando $y = ax + b$ es una línea recta, entonces la pendiente de la recta entre dos puntos distintos cualesquiera sobre la curva es siempre la misma, y es la pendiente de la recta como se definió en el capítulo precedente.

Consideremos ahora el sencillo ejemplo siguiente:

$$y = f(x) = x^2.$$

Deseamos determinar la pendiente de esta curva en el punto (1, 1).

Buscamos un punto próximo a (1, 1); por ejemplo, un punto cuya abscisa sea 1,1. Entonces, $f(1,1) = (1,1)^2 = 1,21$. Así, pues, el punto (1,1, 1,21) se encuentra sobre la curva. La pendiente de la recta entre los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por tanto, la pendiente de la recta entre (1, 1) y (1,1, 1,21) es

$$\frac{1,21 - 1}{1,1 - 1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1.$$

En general, la abscisa de un punto próximo a (1, 1) puede escribirse como $1 + h$, donde h es algún número pequeño, positivo o negativo, pero $h \neq 0$. Tenemos

$$f(1 + h) = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2.$$

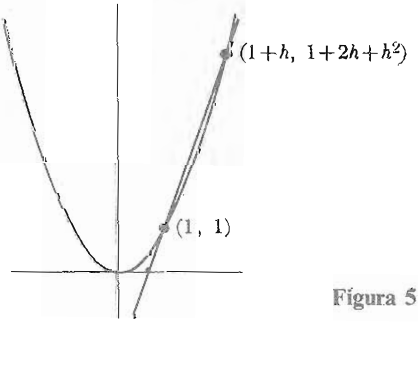


Figura 5

Así, pues, el punto $(1 + h, 1 + 2h + h^2)$ se encuentra sobre la curva. Cuando h es positivo, la recta entre nuestros dos puntos se parecería a la de la fig. 5. Cuando h es negativo, entonces $1 + h$ es menor que 1 y la recta tendría el siguiente aspecto:

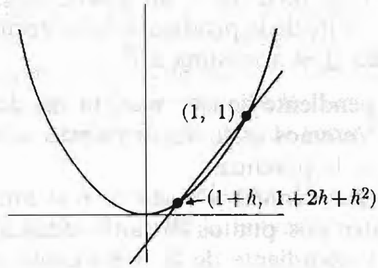


Figura 6

Por ejemplo, h podría ser $-0{,}1$ y $1 + h = 0{,}9$.

La pendiente de la recta entre nuestros dos puntos es, por tanto,el cociente

$$\frac{(1 + 2h + h^2) - 1}{(1 + h) - 1},$$

que es igual a

$$\frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

Cuando el punto cuya abscisa es $1 + h$ se aproxima al punto $(1, 1)$, el número h tiende a 0. Cuando h se aproxima a 0, la pendiente de la recta entre nuestros dos puntos se aproxima a 2, que es, por tanto, la pendiente de la curva en el punto $(1, 1)$, por definición.

El lector apreciará qué sencillo resulta el cálculo y qué fácil es obtener esta pendiente.

Pasemos a otro ejemplo. Deseamos encontrar la pendiente de la misma curva $f(x) = x^2$ en el punto $(-2, 4)$. De nuevo tomamos un punto cercano cuya abscisa es $-2 + h$ para un $h \neq 0$ pequeño. La ordenada de este punto cercano es:

$$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 = 4 - 4h + h^2.$$

La pendiente de la recta entre los dos puntos es, por tanto,

$$\frac{4 - 4h + h^2 - 4}{-2 + h - (-2)} = \frac{-4h + h^2}{h} = -4 + h.$$

Cuando h se aproxima a 0, el punto cercano se aproxima al punto $(-2, 4)$ y vemos que la pendiente se aproxima a -4.

Ejercicios

Hallar las pendientes de las siguientes curvas en los puntos indicados:

1. $y = 2x^2$ en el punto $(1, 2)$.
2. $y = x^2 + 1$ en el punto $(-1, 2)$.
3. $y = 2x - 7$ en el punto $(2, -3)$.
4. $y = x^3$ en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
5. $y = 1/x$ en el punto $(2, \frac{1}{2})$
6. $y = x^2 + 2x$ en el punto $(-1, -1)$.
7. $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$.
8. $y = x^2$ en el punto $(3, 9)$.
9. $y = x^3$ en el punto $(1, 1)$.
10. $y = x^3$ en el punto $(2, 8)$
11. $y = 2x + 3$ en el punto cuya abscisa es 2.
12. $y = 3x - 5$ en el punto cuya abscisa es 1.
13. $y = ax + b$ en un punto cualquiera.

(En los ejercicios 11, 12 y 13 utilizar el método h y verificar que este método nos da la misma respuesta para la pendiente que la obtenida en el capítulo 11, §3.)

§2. La derivada

Continuamos con la función $y = x^2$. En lugar de escoger un valor numérico definido para la abscisa de un punto, podríamos considerar un punto cualquiera sobre la curva. Sus coordenadas son entonces (x, x^2). Escribimos la abscisa de un punto cercano como $x + h$ para un cierto h pequeño, positivo o negativo, pero $\neq 0$. La ordenada de este punto cercano es

$$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2.$$

Por tanto, la pendiente de la recta entre los dos puntos es

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{x + h - x}\\ &= \frac{2xh + h^2}{h}\\ &= 2x + h.\end{aligned}$$

Cuando h se aproxima a 0, $2x + h$ se aproxima a $2x$. Por consiguiente, la pendiente de la curva $y = x^2$ en un punto cualquiera (x, y) es $2x$. En particular, cuando $x = 1$, la pendiente es 2 y cuando $x = -2$, la pendiente es -4, como encontramos antes por cálculo explícito usando las abscisas particulares 1 y -2.

Esta vez, sin embargo, hemos encontrado una fórmula general que nos da la pendiente para cualquier punto de la curva. Así, cuando $x = 3$, la pendiente es 6 y cuando $x = -10$, la pendiente es -20.

El ejemplo que hemos estudiado nos da el procedimiento para tratar funciones más generales.

Dada una función $f(x)$, formamos el cociente.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Este cociente es la pendiente de la recta entre los puntos

$$(x, f(x)) \quad \text{y} \quad (x+h, f(x+h)).$$

Lo llamaremos **cociente de Newton.** Si se aproxima a un límite cuando h se aproxima a 0, entonces el límite se llama **derivada** de f en x, y decimos que f es **derivable** (o diferenciable) en x. El límite se expresa en la forma abreviada,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

La derivada se expresa como $f'(x)$ y, por tanto, tenemos:

$$f'(x)=\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

La derivada puede considerarse entonces como una función f', definida para todos los números x en los que el cociente de Newton se aproxima a un límite cuando h tiende a 0.

Decimos que f es **derivable** cuando lo es en todos los puntos en que está definida. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es derivable y su derivada es $2x$.

Será también conveniente usar otra notación para la derivada, a saber:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}$$

(o df/dx). Así, pues, las dos expresiones $f'(x)$ y df/dx significan la misma cosa. Hacemos notar, sin embargo, que en la expresión df/dx no multiplicamos f o x por d ni dividimos df por dx. La expresión debe leerse *como un todo*. Encontraremos posteriormente que la expresión, bajo ciertas circunstancias, se comporta *como si* estuviéramos dividiendo; por esta razón, adoptamos esta forma clásica de expresar la derivada.

Estudiaremos algunos ejemplos antes de dar al lector los ejercicios de esta sección.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = 2x + 1$. **Encontrar la derivada** $f'(x)$.

Formamos el cociente de Newton. Tenemos $f(x + h) = 2(x + h) + 1$. Luego

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2x+2h+1-(2x+1)}{h}=\frac{2h}{h}=2.$$

A medida que h se aproxima a 0 (lo que también escribimos $h \to 0$), este número es igual a 2 y, por tanto, el límite es 2. Así, pues,

$$f'(x) = 2$$

para todos los valores de x. La derivada es una constante.

Ejemplo 2. Hallar la pendiente de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ en el punto cuya abscisa es 3, y asimismo la ecuación de la recta tangente en ese punto.

También podemos encontrar la pendiente de un punto cualquiera sobre la gráfica. Es la derivada $f'(x)$. Tenemos:

$$f(x + h) = 2(x + h)^2 = 2(x^2 + 2xh + h^2).$$

El cociente de Newton es

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 2x^2}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2}{h} \\ &= 4x + 2h. \end{aligned}$$

Cuando $h \to 0$, el límite es $4x$. Luego $f'(x) = 4x$. En el punto $x = 3$ obtenemos $f'(3) = 12$, que es la pendiente deseada.

En cuanto a la ecuación de la recta tangente, cuando $x = 3$ tenemos $f(x) = 18$. Debemos, por tanto, encontrar la ecuación de una recta que pase por el punto $(3, 18)$ y tenga pendiente igual a 12. Esto es fácil; a saber, la ecuación es

$$y - 18 = 12(x - 3).$$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2$ en el punto de abscisa -2.

En el ejemplo precedente calculamos la fórmula general para la pendiente de la recta tangente. Es

$$f'(x) = 4x.$$

En el punto $x = -2$, la pendiente es, por tanto, -8. La recta tangente tiene una ecuación

$$y = -8x + b$$

para cierto número b. La ordenada de nuestro punto es $2(-2)^2 = 8$. Debemos tener, por tanto,

$$8 = -8(-2) + b$$

y despejando b tenemos

$$b = -8.$$

Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y = -8x - 8.$$

Al definir el cociente de Newton podemos tomar h positiva o negativa. Al tomar el límite resulta a veces conveniente considerar solamente valores positivos de h. De esta forma obtenemos lo que se llama **derivada derecha.** Si al tomar el límite del cociente de Newton consideramos solamente valores negativos para h, obtendremos la **derivada izquierda.**

Ejemplo 4. Sea $f(x) = |x|$. Hallar su derivada derecha y su derivada izquierda cuando $x = 0$.

La derivada derecha es el límite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}.$$

Cuando $h > 0$, tenemos

$$f(0 + h) = f(h) = h,$$

y $f(0) = 0$. Luego

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

El límite cuando $h \to 0$ y $h > 0$ es, por tanto, 1.

La derivada izquierda es el límite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}.$$

Cuando $h < 0$ tenemos

$$f(0 + h) = f(h) = -h.$$

De donde

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$

El límite cuando $h \to 0$ y $h < 0$ es, por tanto, -1.

Vemos que la derivada derecha en 0 es 1 y la derivada izquierda es -1. No son iguales. Deberíamos desde luego esperar esto, dada la gráfica de nuestra función

$$f(x) = |x|,$$

que tiene el aspecto que se muestra en la fig. 7.

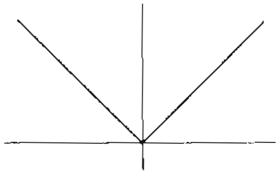


Figura 7

Existen tanto la derivada derecha de f como la derivada izquierda, pero no son iguales.

Podemos ahora enunciar de nuevo nuestra definición de la derivada y decir que la derivada de una fı ɿción $f(x)$ está definida cuando la derivada derecha y la derivada izquierda existen y son iguales, en cuyo caso este valor común se llama simplemente **derivada.**

Ejemplo 5. Sea $f(x) = x$ si $0 < x \leqq 1$ e igual a $x - 1$ si $1 < x \leqq 2$. No definimos f para otros valores de x. La gráfica de f tiene entonces el siguiente aspecto:

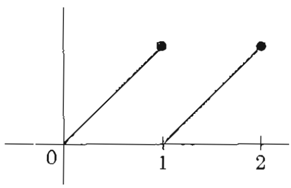


Figura 8

La derivada izquierda de f en 1 existe y es igual a 1, pero la derivada derecha de f en 1 no existe. Dejamos al lector la verificación de la primera afirmación. Para verificar nuestra segunda aserción debemos ver si el límite

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

existe. Como $1 + h > 1$, tenemos

$$f(1 + h) = 1 + h - 1 = h.$$

También $f(1) = 1$. Luego el cociente de Newton es

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h-1}{h} = 1 - \frac{1}{h}.$$

Cuando h se aproxima a 0 el cociente $1/h$ no tiene límite, ya que se hace arbitrariamente grande. Así, pues, el cociente de Newton no tiene límite para $h > 0$ y la función no tiene una derivada derecha cuando $x = 1$.

Ejercicios

Hallar las derivadas de la siguientes funciones:

1. $x^2 + 1$
2. x^3
3. $2x^3$
4. $3x^2$
5. $x^2 - 5$
6. $2x^2 + x$
7. $2x^2 - 3x$
8. $\frac{1}{2}x^3 + 2x$
9. $\dfrac{1}{x+1}$
10. $\dfrac{2}{x+1}$
11. En los ejercicios 1 a 10, hallar la pendiente de la gráfica en el punto cuya abscisa es 2 y, asimismo, la ecuación de la recta tangente en ese punto.
12. Sea $f(x)$ definida como sigue:

$$f(x) = -x \quad \text{si} \quad x \leqq 0 \qquad f(x) = 2 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Hallar $f'(x)$ cuando $x = -1$. Hallar las derivadas derecha e izquierda de f en $x = 0$, si existen.

13. Sea $f(x) = |x| + x$. ¿Existe $f'(0)$? ¿Existe $f'(x)$ para valores de x distintos de 0?
14. Sea $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ y $f(x) = x$ si $x > 1$. Trazar la gráfica y hallar las derivadas derecha e izquierda de f cuando $x = 1$. Hallar $f'(x)$ para todos los otros valores de x.
15. Determinar si las siguientes funciones tienen una derivada en 0; si es así, hallar la derivada.

(a) $f(x) = x|x|$ (b) $f(x) = x^2|x|$ (c) $f(x) = x^3|x|$

§3. Límites

Al definir la pendiente de una curva en un punto, o sea la derivada, usamos la noción de límite, que consideramos como intuitivamente clara. Ciertamente lo es. El lector puede ver en el apéndice cómo se pueden definir límites usando solamente propiedades de números, pero aquí no nos preocupamos de esas cosas. Sin embargo, debemos hacer una lista de las propiedades de los límites que usaremos a continuación, sólo para estar seguros de lo que suponemos respecto de ellos y también para dar al lector una técnica sobre cálculo de límites.

Observemos en primer lugar, que si F es una función constante, $F(x) = c$

Biblioteca Universidad de la República, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

para todo x, entonces

$$\lim_{h \to 0} F(h) = c$$

es la constante misma.

Si $F(h) = h$, entonces

$$\lim_{h \to 0} F(h) = 0.$$

Las siguientes propiedades relacionan los límites con la adición, la substracción, la multiplicación, la división y las desigualdades.

Supongamos que tenemos dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ que están definidas para los mismos números. Entonces podemos formar la suma de las dos funciones $F + G$, cuyo valor en un punto x es $F(x) + G(x)$. Así, cuando $F(x) = x^4$ y $G(x) = 5x^{3/2}$, tenemos

$$F(x) + G(x) = x^4 + 5x^{3/2}.$$

El valor de $F(x) + G(x)$ se escribe también como $(F + G)(x)$. La primera propiedad de los límites se relaciona con la suma de dos funciones.

Propiedad 1. *Supongamos que tenemos dos funciones F y G definidas para valores pequeños de h, y que los límites*

$$\lim_{h \to 0} F(h) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} G(h)$$

existen. Entonces

$$\lim_{h \to 0} [F(h) + G(h)]$$

existe y

$$\lim_{h \to 0} (F + G)(h) = \lim_{h \to 0} F(h) + \lim_{h \to 0} G(h).$$

En otras palabras, el límite de una suma es igual a la suma de los límites.

Una proposición análoga se verifica para la diferencia $F - G$, a saber:

$$\lim_{h \to 0} \big(F(h) - G(h)\big) = \lim_{h \to 0} F(h) - \lim_{h \to 0} G(h).$$

Después de la suma estudiamos el producto. Supongamos que tenemos dos funciones F y G definidas para los mismos números. Podemos entonces formar su producto FG, cuyo valor en el número x es

$$(FG)(x) = F(x)G(x).$$

Por ejemplo, si $F(x) = 2x^2 - 2^x$ y $G(x) = x^2 + 5x$, entonces el producto es

$$(FG)(x) = (2x^2 - 2^x)(x^2 + 5x).$$

Propiedad 2. *Sean F y G dos funciones definidas para pequeños valores de h, y supongamos que*

$$\lim_{h \to 0} F(h) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} G(h)$$

existen. Entonces el límite del producto existe y tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} (FG)(h) &= \lim_{h\to 0} [F(h)G(h)] \\ &= \lim_{h\to 0} F(h) \cdot \lim_{h\to 0} G(h). \end{aligned}$$

Esto es, podemos decir que el producto de los límites es igual al límite del producto.

Como caso particular, supongamos que $F(x)$ es la función constante $F(x) = c$. Entonces podemos formar la función cG, producto de la constante por G, y tenemos

$$\lim_{h\to 0} cG(h) = c \cdot \lim_{h\to 0} G(h).$$

Ejemplo. Sea $F(h) = 3h + 5$. Entonces, $\lim\limits_{h \to 0} F(h) = 5$.

Ejemplo. Sea $F(h) = 4h^3 - 5h + 1$. Entonces, $\lim\limits_{h \to 0} F(h) = 1$.

Podemos ver esto considerando los límites

$$\lim_{h \to 0} 4h^3 = 0, \quad \lim_{h \to 0} 5h = 0, \quad \lim_{h \to 0} 1 = 1,$$

y tomando las sumas apropiadas.

Ejemplo. Tenemos $\lim\limits_{h \to 0} 3xh = 0$, y

$$\lim_{h\to 0} (3xh - 7y) = -7y.$$

En tercer lugar, pasamos a los cocientes. Sean F, G como antes, pero supongamos que $G(x) \neq 0$ para cualquier x. Entonces podemos formar la función cociente F/G, cuyo valor en x es

$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

Ejemplo. Sea $F(x) = 2x^3 - 4x$ y $G(x) = x^4 + x^{1/3}$. Entonces

$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{2x^3 - 4x}{x^4 + x^{1/3}}.$$

Propiedad 3. *Supongamos que los límites*

$$\lim_{h \to 0} F(h) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} G(h)$$

existen y que

$$\lim_{h \to 0} G(h) \neq 0.$$

Entonces el límite del cociente existe y tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(h)}{G(h)} = \frac{\lim F(h)}{\lim G(h)}.$$

Es decir, el cociente de los límites es igual al límite del cociente.

Como hemos hecho antes, omitiremos algunas veces el escribir $h \to 0$ en beneficio de una mayor sencillez.

Propiedad 4. *Sean F y G dos funciones definidas para pequeños valores de* h, *y supongamos que $G(h) \leqq F(h)$. Supongamos también que*

$$\lim_{h \to 0} F(h) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} G(h)$$

existen. Entonces

$$\lim_{h \to 0} G(h) \leqq \lim_{h \to 0} F(h).$$

Propiedad 5. *Sean los mismos supuestos de la propiedad* 4 *y, además, supóngase que*

$$\lim_{h \to 0} G(h) = \lim_{h \to 0} F(h).$$

Sea E otra función definida para los mismos números que en el caso de F, G, tal que

$$G(h) \leqq E(h) \leqq F(h)$$

para todos los valores pequeños de h. Entonces

$$\lim_{h \to 0} E(h)$$

existe y es igual a los límites de F y G.

Se conoce a la propiedad 5 como **proceso del prensado.** El lector encontrará en lo que sigue muchas ocasiones en que aplicarla.

Ejemplo. Hallar el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{2xh + 3}{x^2 - 4h}$$

cuando $x \neq 0$.

El numerador de nuestro cociente tiende a 3 cuando $h \to 0$ y el denominador tiende a x^2. El cociente tiende, pues, a $3/x^2$. Podemos justificar estos pasos de un modo más formal aplicando nuestras tres propiedades. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} (2xh + 3) &= \lim_{h \to 0} (2xh) + \lim_{h \to 0} 3 \\
&= \lim (2x) \lim (h) + \lim 3 \\
&= 2x \cdot 0 + 3 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Para el denominador tenemos

$$\begin{aligned}
\lim (x^2 - 4h) &= \lim x^2 + \lim (-4h) \\
&= x^2 + \lim (-4) \lim (h) \\
&= x^2 + (-4) \cdot 0 \\
&= x^2.
\end{aligned}$$

Usando la regla para el cociente vemos que el límite buscado es igual a $3/x^2$.

Ejemplo. En los ejemplos previos, resulta que podíamos substituir el valor 0 para h y encontrar el límite apropiado. Esto no puede hacerse en general. Supongamos, por ejemplo, que deseamos encontrar el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 - h}{h^3 + 2h}.$$

Si hacemos la substitución $h = 0$ obtenemos una expresión sin sentido $0/0$ y, por tanto, no obtenemos información sobre el límite. Sin embargo, para $h \neq 0$ podemos eliminar h del cociente y vemos que

$$\frac{h^2 - h}{h^3 + 2h} = \frac{h - 1}{h^2 + 2}.$$

Por la expresión del segundo miembro se puede deducir el límite. Es claro, en efecto, que $h - 1$ se aproxima a -1 cuando h se aproxima a 0. Asimismo, que

$h^2 + 2$ se aproxima a 2 cuando h tiende a 0. De donde, por la regla para cociente de límites, se concluye que

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2 - h}{h^3 + 2h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 1}{h^2 + 2} = \frac{-1}{2}.$$

Las propiedades de los límites que acabamos de enunciar permitirán al lector calcular límites en la determinación de derivadas. Ilustramos esto con un ejemplo.

Ejemplo. *Sea* $f(x) = 1/x$ (definida para $x \neq 0$). *Hallar la* derivada df/dx.

El cociente de Newton es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}.$$

Ponemos todo sobre el común denominador $(x + h)xh$. El cociente de Newton es igual a

$$\frac{x - (x + h)}{(x + h)xh} = \frac{-h}{(x + h)xh} = \frac{-1}{(x + h)x}.$$

Tenemos, pues, que determinar el límite de un cociente cuando h se aproxima a 0. Usando la propiedad del producto, tenemos

$$\lim\, (x + h)x = \lim\, (x + h) \lim x = x^2.$$

Usando la propiedad de los cocientes, vemos que el cociente de Newton para la función $1/x$ tiende a $-1/x^2$. Luego

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ejercicios

Hallar las derivadas de las siguientes funciones, justificando los pasos dados al tomar límites por medio de las tres propiedades:

1. $f(x) = 2x^2 + 3x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
4. $f(x) = x(x + 1)$
5. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$
6. $f(x) = 3x^3$
7. $f(x) = x^4$
8. $f(x) = x^5$
9. $f(x) = 2x^3$
10. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x$

§4. Potencias

Hemos visto que la derivada de la función x^2 es $2x$.
Consideremos la función $f(x) = x^3$ y encontremos su derivada. Tenemos

$$f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

De donde el cociente de Newton es

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Usando las propiedades de los límites de sumas y productos, vemos que $3x^2$ permanece igual a sí misma cuando h tiende a 0, y que $3xh$ y h^3 tienden ambos a 0. Por tanto,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 3x^2.$$

Esto sugiere que, en general, siempre que $f(x) = x^n$ para algún entero positivo n, la derivada $f'(x)$ debe ser nx^{n-1}. Este es ciertamente el caso y lo enunciamos como un teorema.

Teorema 1. *Sea n un entero $\geqq 1$ y sea $f(x) = x^n$. Entonces*

$$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}.$$

Demostración. Tenemos

$$f(x + h) = (x + h)^n = (x + h)(x + h) \cdots (x + h),$$

en donde el factor se repite n veces. Seleccionando x en cada uno de los factores obtenemos x^n. Si tomamos x de todos, salvo de un factor, y h de ese factor restante, obtenemos hx^{n-1} n veces. Esto nos da el término $nx^{n-1}h$. Todos los otros términos implicarán la selección de h de al menos dos factores y el término correspondiente será divisible por h^2. Obtenemos, pues,

$$f(x + h) = (x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + h^2g(x, h),$$

en donde $g(x, h)$ es simplemente cierta expresión en que aparecen potencias de x y de h con coeficientes numéricos que no es necesario determinar. Sin embargo, usando las reglas para los límites de sumas y productos podemos concluir que

$$\lim_{h\to 0} g(x, h)$$

será algún número que no necesitamos determinar.

El cociente de Newton es, por tanto,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2g(x,h) - x^n}{h}$$

Podemos eliminar x^n y nos queda

$$\frac{nx^{n-1}h + h^2g(x,h)}{h}.$$

Podemos ahora dividir el numerador y el denominador por h, lo que nos da

$$nx^{n-1} + hg(x, h).$$

Cuando h tiende a 0, el término nx^{n-1} permanece sin cambio alguno. El límite de h cuando h tiende a 0 es 0 y, por tanto, por la regla del producto, el término $hg(x, h)$ tiende a 0 cuando h tiende a 0. Así, pues, tenemos finalmente

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1},$$

lo que prueba nuestro teorema.

Teorema 2. *Sea a un número cualquiera y sea $f(x) = x^a$ (definida para $x > 0$). Entonces $f(x)$ tiene una derivada, que es*

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

No sería difícil probar el teorema 2 cuando a es un entero negativo. Es mejor, sin embargo, esperar hasta que tengamos una regla para obtener la derivada de un cociente antes de hacer nuestra demostración. Podríamos también dar una prueba para el caso en que a es un número racional. Sin embargo, como probaremos el resultado general en un capítulo posterior, preferimos aguardar hasta entonces, cuando tengamos más técnicas a nuestra disposición.

Ejemplos. Si $f(x) = x^{10}$, entonces $f'(x) = 10x^9$.
Si $f(x) = x^{3/2}$ (para $x > 0$), entonces $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$.
Si $f(x) = x^{-5/4}$, entonces $f'(x) = -\frac{5}{4}x^{-9/4}$.
Si $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, entonces $f'(x) = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$.

Nótese en particular el caso especial en que $f(x) = x$. Entonces $f'(x) = 1$.

Ejemplo. Podemos ahora encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a ciertas curvas que antes no sabíamos como tratar. Consideremos la curva

$$y = x^5.$$

Deseamos encontrar la ecuación de su recta tangente en el punto (2, 32). Por el teorema 1, si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) = 5x^4$. De donde la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es

$$f'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80.$$

De donde la ecuación de la recta tangente en (2, 32) es

$$y = 80x + b$$

para cierto número b. Debemos tener $32 = 80 \cdot 2 + b$, de forma que podemos despejar b y tenemos

$$b = 32 - 160 = -128.$$

De donde finalmente la ecuación de la recta tangente en (2, 32) es

$$y = 80x - 128.$$

Ejercicios

1. Escribir el desarrollo de $(x + h)^4$ en términos de potencias de x y h.
2. Hallar la derivada de la función x^4 directamente, usando el cociente de Newton.
3. ¿Cuáles son las derivadas de las siguientes funciones?

   (a) $x^{2/3}$ (b) $x^{-3/2}$ (c) $x^{7/6}$
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^9$ en el punto (1,1)?
5. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = x^{2/3}$ en el punto (8, 4)? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?
6. Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^{-3/4}$ en el punto cuya abscisa es 16.
7. Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa 3.
8. Hallar las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   (a) $f(x) = x^{1/4}$ en $x = 5$ (b) $f(x) = x^{-1/4}$ en $x = 7$
   (c) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ en $x = 10$ (d) $f(x) = x^{\pi}$ en $x = 7$

§5. Sumas, productos y cocientes

En esta sección deduciremos varias reglas que nos permitirán encontrar las derivadas para sumas, productos y cocientes de funciones cuando se conocen las derivadas de cada término.

Antes de enunciar y probar estas reglas hacemos una observación respecto de la derivada.

Sea $f(x)$ una función que tiene una derivada $f'(x)$. Como el cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tiende a un límite cuando h se aproxima a 0, y como

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

usando las reglas para sumas y productos de límites, concluimos que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x),$$

y que $f(x+h) - f(x)$ tiende a 0 cuando h tiende a 0.

Desde luego, nunca podemos hacer $h = 0$ en nuestro cociente, porque entonces se hace igual a 0/0, lo cual no tiene sentido. Geométricamente, el hacer $h = 0$ es equivalente a tomar los dos puntos sobre la curva como iguales entre sí. Es entonces imposible tener una recta única que pasa por un punto. Nuestro procedimiento de tomar el límite del cociente de Newton tiene sentido solamente si $h \neq 0$.

Si una función satisface la propiedad de que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x),$$

entonces decimos que la función es **continua** en x. Si una función es continua en todo punto de su dominio de definición, decimos simplemente que es continua.

Ejemplo. Sea $f(x) = |x|$. Entonces la función valor absoluto, f, es continua en 0, aunque no es derivable en 0. Sigue siendo cierto que

$$f(0+h) = f(h) = |h|$$

se aproxima a 0 cuando h se aproxima a 0, aunque la función no es derivable en 0.

Ejemplo. Sea $f(x) = 0$ si $x < 0$, y $f(x) = 1$ si $x \geqq 0$. La gráfica de f se muestra en la fig. 9.

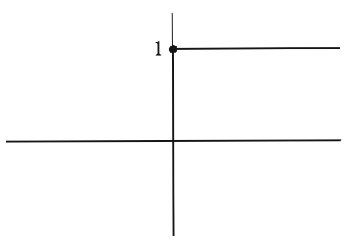
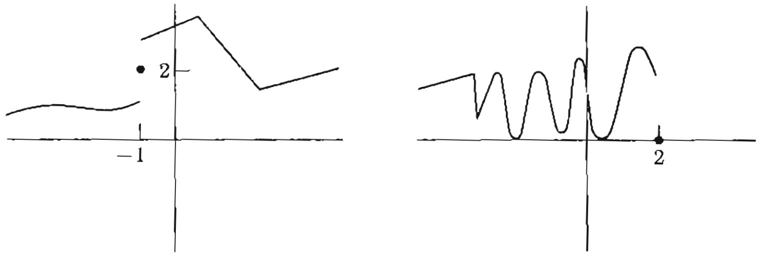


Figura 9

La función f no es continua en 0. Podríamos decir que la función no es continua en 0 porque su gráfica tiene una «ruptura» en 0. En la fig. 10 aparecen otros ejemplos de gráficas con discontinuidades.



(a) (b)

Figura 10

En la fig. 10(a), la función es continua excepto en $x = -1$. En la fig. 10(b), la función es continua excepto en $x = 2$.

La observación hecha al comienzo de esta sección muestra que si una función es derivable, entonces es continua. Como por el momento estamos tratando principalmente con funciones derivables, no profundizamos más en el tema de las funciones continuas y esperaremos hasta que el concepto nos resulte más pertinente.

Sea c un número y $f(x)$ una función que tiene una derivada $f'(x)$ para todos los valores de x para los que está definida. Podemos multiplicar f por la constante c para obtener otra función cf cuyo valor en x es $cf(x)$.

Constante por función. *La derivada de cf está entonces dada por la fórmula*

$$(cf)'(x) = c \cdot f'(x);$$

en otras palabras, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Para probar esta regla usamos la definición de derivada. El cociente de Newton para la función cf es

$$\frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tomemos el límite cuando h tiende a 0. Entonces c permanece fijo y

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tiende a $f'(x)$. De acuerdo con la regla para el producto de límites, vemos que nuestro cociente de Newton tiende a $cf'(x)$, como queríamos probar.

Ejemplo. Sea $f(x) = 3x^2$. Entonces, $f'(x) = 6x$. Si $f(x) = 17x^{1/2}$, entonces $f'(x) = \frac{17}{2} x^{-1/2}$. Si $f(x) = 10x^a$, entonces $f'(x) = 10ax^{a-1}$.

A continuación pasamos a considerar la suma de dos funciones.

Suma. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente. Entonces la suma $f(x) + g(x)$ tiene una derivada, y*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

Para probar esto tenemos por definición

$$(f + g)(x + h) = f(x + h) + g(x + h)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Por tanto, el cociente de Newton para $f + g$ es

$$\frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h}.$$

Reduciendo términos y separando la fracción, vemos que esta expresión es igual a

$$\frac{f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

Tomando el límite cuando h tiende a 0, y usando la regla para el límite de una suma, vemos que esta última suma tiende a $f'(x) + g'(x)$ cuando h tiende a 0. Lo cual prueba lo que afirmamos.

Ejemplo. La derivada de la función $x^3 + x^2$ es $3x^2 + 2x$. La derivada de la función $4x^{1/2} + 5x^{-10}$ es

$$2x^{-1/2} - 50x^{-11}.$$

Llevados por nuestro entusiasmo al ver con qué facilidad se determinan las derivadas de funciones construidas a partir de otras, mediante constantes y sumas, podríamos ahora estar tentados a enunciar la regla de que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Desafortunadamente, esto es falso. Para ver que la regla es falsa, consideremos un ejemplo.

Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Entonces, $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Por tanto,

$f'(x)g'(x) = 2x$. Sin embargo, la derivada del producto $(fg)(x) = x^3$ es $3x^2$, que ciertamente no es igual a $2x$. Así, pues, el producto de las derivadas no es igual a la derivada del producto.

A través de pruebas y errores se descubrió la regla correcta, que se puede enunciar como sigue:

Producto. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces la función producto $f(x)g(x)$ tiene una derivada, que está dada por la fórmula*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Es decir, la derivada del producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo, más el primer factor por la derivada del segundo.

La demostración no es mucho más difícil que las otras ya estudiadas. Por definición, tenemos

$$(fg)(x+h) = f(x+h)g(x+h)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Por consiguiente, el cociente de Newton para la función producto fg es

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

A estas alturas parece que no hay esperanza de que se transforme este cociente de tal forma que veamos fácilmente a qué límite tiende cuando h tiende a 0. Pero volvamos a escribir nuestro cociente insertando

$$-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)$$

en el numerador: es claro que esto no cambia el valor de nuestro cociente que ahora toma la forma

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Podemos partir esta fracción en una suma de dos fracciones:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Podemos factorizar $g(x+h)$ en el primer término y $f(x)$ en el segundo, para obtener

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

La situación está ahora totalmente bajo control. Cuando h tiende a 0, $g(x+h)$ tiende a $g(x)$, y los dos cocientes en la expresión que acabamos de escribir tienden a $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente. Luego el cociente de Newton para fg tiende a

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

probando con ello nuestra afirmación.

Para ilustrar las reglas de los productos, encontremos la derivada de

$$(x+1)(3x^2).$$

Aplicando la regla, vemos que es igual a

$$1\cdot(3x^2)+(x+1)6x.$$

Análogamente, sea $f(x)=2x^5+5x^4$ y $g(x)=2x^{1/2}+x^{-1}$. Entonces, la derivada de $f(x)g(x)$ es

$$(10x^4+20x^3)(2x^{1/2}+x^{-1})+(2x^5+5x^4)\left(x^{-1/2}-\frac{1}{x^2}\right),$$

lo que puede y debe dejarse tal como está sin intentar simplificar la expresión.

La última regla de esta sección concierne a la derivada de un cociente. Comenzamos con un caso particular.

Sea $g(x)$ una función que tiene derivada $g'(x)$, tal que $g(x)\neq 0$. Entonces la derivada del cociente' $1/g(x)$ existe y es igual a

$$\frac{-1}{g(x)^2}g'(x).$$

Para demostrar esto, consideremos el cociente de Newton

$$\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

que es igual a

$$\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}=-\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Haciendo que h se aproxime a 0 vemos inmediatamente que nuestra expresión tiende a

$$\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)$$

como se buscaba.

El caso general de la regla para cocientes puede ahora enunciarse y demostrarse fácilmente.

Cociente. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente, con $g(x) \neq 0$. Entonces la derivada del cociente $f(x)/g(x)$ existe y es igual a*

$$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

O dicho en otras palabras: lo de abajo por la derivada de lo de arriba menos lo de arriba por la derivada de lo de abajo, sobre el cuadrado de lo de abajo

(y esto lo debe memorizar el lector como un poema).

Para demostrar esta regla, escribamos nuestro cociente en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$$

y usemos la regla para la derivada de un producto, junto con el caso especial que acabamos de probar. Obtenemos su derivada:

$$f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-1}{g(x)^2}g'(x).$$

Poniendo esta expresión sobre el denominador común $g(x)^2$ se tiene

$$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

que es la derivada deseada.

Veamos algunos ejemplos.

Sea $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x^4 - 2x$. Entonces la derivada de $f(x)/g(x)$ es

$$\frac{(3x^4 - 2x)2x - (x^2 + 1)(12x^3 - 2)}{(3x^4 - 2x)^2}.$$

Otro más: la derivada de $2x/(x + 4)$ es

$$\frac{(x + 4)\cdot 2 - 2x \cdot 1}{(x + 4)^2}.$$

Para futura referencia, escribimos las varias reglas que hemos demostrado en la notación df/dx. La primera:

$$\frac{d(cf)}{dx} = c \cdot \frac{df}{dx}.$$

La suma: $$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

El producto: $$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}.$$

El cociente: $$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g(x)^2}.$$

Ejercicios

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $2x^{1/3}$
2. $5x^{11}$
3. $\frac{1}{2}x^{-3/4}$
4. $7x^3 + 4x^2$
5. $25x^{-1} + 12x^{1/2}$
6. $\frac{3}{5}x^2 - 2x^8$
7. $(x^3 + x)(x - 1)$
8. $(2x^2 - 1)(x^4 + 1)$
9. $(x + 1)(x^2 + 5x^{3/2})$
10. $(2x - 5)(3x^4 + 5x + 2)$
11. $(x^{-2/3} + x^2)\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$
12. $(2x + 3)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$
13. $\frac{2x + 1}{x + 5}$
14. $\frac{2x}{x^2 + 3x + 1}$

Para romper la monotonía de la letra x, usemos otra.

15. $f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{(t + 1)(t - 1)}$
16. $\frac{t^{-5/4}}{t^2 + t - 1}$
17. ¿Cuál es la pendiente de la curva
$$y = \frac{t}{t + 5}$$
en el punto $t = 2$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?
18. ¿Cuál es la pendiente de la curva
$$y = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$
en $t = 1$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?

§6. La regla de la cadena

Sabemos cómo construir nuevas funciones a partir de funciones dadas, por medio de sumas, productos y cocientes. Hay otra forma importante de construir nuevas funciones. Daremos primero ejemplos de esta nueva forma.

Consideremos la función $(x + 2)^{10}$. Podemos decir que esta función está formada por la función potencia décima y por la función $x + 2$. Es decir, dado un número x, primero le sumamos 2 y luego tomamos la potencia décima. Sea

$$g(x) = x + 2$$

y sea f la función potencia décima. Entonces podemos tomar el valor de f en $x + 2$, a saber,

$$f(x + 2) = (x + 2)^{10}$$

y podemos también escribirlo como

$$f(x + 2) = f\big(g(x)\big).$$

Otro ejemplo: consideremos la función $(3x^4 - 1)^{1/2}$. Si hacemos $g(x) = 3x^4 - 1$ y f es la función raíz cuadrada, entonces

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt{3x^4 - 1} = (3x^4 - 1)^{1/2}.$$

Para no confundirnos con el uso de la letra x, que puede no servirnos ya en otros contextos, usamos otra letra para denotar los valores de g. Podemos así escribir $f(u) = u^{1/2}$.

Análogamente, sea $f(u)$ la función $u + 5$ y $g(x) = 2x$. Entonces,

$$f\big(g(x)\big) = f(2x) = 2x + 5.$$

Un ejemplo más del mismo tipo: sea

$$f(u) = \frac{1}{u + 2}$$

y

$$g(x) = x^{10}.$$

Entonces,

$$f\big(g(x)\big) = \frac{1}{x^{10} + 2}.$$

Para dar al lector suficiente práctica con muchos tipos de funciones, mencionamos ahora varias de ellas cuyas definiciones daremos más tarde. Serán éstas el seno y el coseno (que escribiremos sen y cos), log (que leeremos logaritmo o simplemente log) y la función exponencial, exp. Elegiremos un número especial e (cuyo valor aproximado es 2,718...), tal que la función exponencial está dada por

$$\exp(x) = e^x.$$

Veamos ahora cómo formar nuevas funciones a partir de éstas.

Sea $f(u) = \operatorname{sen} u$ y $g(x) = x^2$. Entonces,

$$f(g(x)) = \operatorname{sen}(x^2).$$

Sea $f(u) = e^u$ y $g(x) = \cos u$. Entonces,

$$f(g(x)) = e^{\cos x}.$$

Sea $f(v) = \log v$ y $g(t) = t^3 - 1$. Entonces,

$$f(g(t)) = \log(t^3 - 1).$$

Sea $g(w) = w^{10}$ y $f(z) = \log z + \operatorname{sen} z$. Entonces,

$$g(f(z)) = (\log z + \operatorname{sen} z)^{10}.$$

El lector debe practicar con la parte (a) de los ejercicios, para asimilar adecuadamente la terminología y los mecanismos de estas funciones combinadas.

Siempre que tengamos dos funciones f y g tales que f esté definida para todos los números que sean valores de g, podemos construir una nueva función denotada por $f \cdot g$, cuyo valor en el número x es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

La regla que define esta nueva función es: Tómese el número x, encuéntrese el número $g(x)$ y luego tómese el valor de f en $g(x)$. Este es el valor de $f \cdot g$ en x. La función $f \cdot g$ se llama **función compuesta** de f y g. Decimos que g es la función **interior** y que f es la función **exterior.**

Es importante recordar que podemos componer dos funciones solamente cuando la función exterior está definida para todos los valores de la función interior. Por ejemplo, sea $f(u) = u^{1/2}$ y $g(x) = -x^2$. Entonces no podemos formar la función compuesta $f \cdot g$ porque f está definida solamente para números positivos (o 0) y los valores de g son todos negativos o 0. Así, pues, $(-x^2)^{1/2}$ no tiene sentido.

Sin embargo, por el momento lo importante es que el lector aprenda el mecanismo de las funciones compuestas exactamente como aprendió la tabla de multiplicar, para que adquiera reflejos condicionados eficientes ante las funciones compuestas. Por tanto, para los ejercicios al final de la sección, debe olvidarse por un momento del significado de los símbolos y operar con ellos formalmente, sólo para que aprenda apropiadamente las reglas formales.

Llegamos al problema de cómo derivar una función compuesta.

Comenzamos con un ejemplo. Supóngase que deseamos encontrar la derivada de la función $(x + 1)^{10}$. El cociente de Newton sería una expresión muy larga, prácticamente imposible de desenmarañar a base de fuerza bruta, camino que

Veamos ahora cómo formar nuevas funciones a partir de éstas.

Sea $f(u) = \text{sen } u$ y $g(x) = x^2$. Entonces,

$$f(g(x)) = \text{sen } (x^2).$$

Sea $f(u) = e^u$ y $g(x) = \cos u$. Entonces,

$$f(g(x)) = e^{\cos x}.$$

Sea $f(v) = \log v$ y $g(t) = t^3 - 1$. Entonces,

$$f(g(t)) = \log (t^3 - 1).$$

Sea $g(w) = w^{10}$ y $f(z) = \log z + \text{sen } z$. Entonces,

$$g(f(z)) = (\log z + \text{sen } z)^{10}.$$

El lector debe practicar con la parte (a) de los ejercicios, para asimilar adecuadamente la terminología y los mecanismos de estas funciones combinadas.

Siempre que tengamos dos funciones f y g tales que f esté definida para todos los números que sean valores de g, podemos construir una nueva función denotada por $f \cdot g$, cuyo valor en el número x es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

La regla que define esta nueva función es: Tómese el número x, encuéntrese el número $g(x)$ y luego tómese el valor de f en $g(x)$. Este es el valor de $f \cdot g$ en x. La función $f \cdot g$ se llama **función compuesta** de f y g. Decimos que g es la función **interior** y que f es la función **exterior.**

Es importante recordar que podemos componer dos funciones solamente cuando la función exterior está definida para todos los valores de la función interior. Por ejemplo, sea $f(u) = u^{1/2}$ y $g(x) = -x^2$. Entonces no podemos formar la función compuesta $f \cdot g$ porque f está definida solamente para números positivos (o 0) y los valores de g son todos negativos o 0. Así, pues, $(-x^2)^{1/2}$ no tiene sentido.

Sin embargo, por el momento lo importante es que el lector aprenda el mecanismo de las funciones compuestas exactamente como aprendió la tabla de multiplicar, para que adquiera reflejos condicionados eficientes ante las funciones compuestas. Por tanto, para los ejercicios al final de la sección, debe olvidarse por un momento del significado de los símbolos y operar con ellos formalmente, sólo para que aprenda apropiadamente las reglas formales.

Llegamos al problema de cómo derivar una función compuesta.

Comenzamos con un ejemplo. Supóngase que deseamos encontrar la derivada de la función $(x + 1)^{10}$. El cociente de Newton sería una expresión muy larga, prácticamente imposible de desenmarañar a base de fuerza bruta, camino que hasta ahora hemos seguido. Es, por tanto, una sorpresa agradable que haya una forma más fácil de encontrar la derivada. He aquí la respuesta: la derivada de esta función es $10(x + 1)^9$. Esto parece muy relacionado con la derivada de una potencia.

Antes de probar y enunciar el teorema general, presentamos otros ejemplos. La derivada de $(x^2 + 2x)^{3/2}$ es $\frac{3}{2}(x^2 + 2x)^{1/2}(2x + 2)$. Obsérvese cuidadosamente el término extra $2x + 2$, que es la derivada de la expresión $x^2 + 2x$.

La derivada de $(x^2 + x)^{10}$ es $10(x^2 + x)(2x + 1)$. Obsérvese de nuevo la presencia del término $2x + 1$, que es la derivada de $x^2 + x$.

¿Puede el lector conjeturar sobre cuál es la regla general para las afirmaciones anteriores? La regla general se descubrió también por prueba y error, pero nos beneficiamos de tres siglos de experiencia, y por ello podemos enunciarla y probarla muy sencillamente, como sigue:

Regla de la cadena. *Sean f y g dos funciones con derivada, y tales que f está definida en todos los números que son valores de g. Entonces la función compuesta $f \circ g$ tiene una derivada dada por la fórmula*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Esto puede expresarse en palabras diciendo que tomamos *la derivada de la función exterior por la derivada de la función interior* (*o la derivada de lo que está dentro*).

La afirmación precedente se conoce como **regla de la cadena,** y la pasamos a demostrar.

Debemos considerar el cociente de Newton de la función compuesta $f \circ g$. Por definición, es

$$\frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h}.$$

Hagamos $u = g(x)$ y

$$k = g(x + h) - g(x).$$

Entonces, k depende de h y tiende a 0 cuando h tiende a 0. Nuestro cociente de Newton es igual a

$$\frac{f(u + k) - f(u)}{h}.$$

Supongamos que k es distinto de 0 para valores pequeños de h. Entonces podemos multiplicar y dividir este cociente por k y obtener

$$\frac{f(u + k) - f(u)}{k}\frac{k}{h} = \frac{f(u + k) - f(u)}{k}\frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

Si hacemos que h tienda a 0 y usamos la regla para el límite de un producto, vemos que nuestro cociente de Newton tiende a

$$f'(u)g'(x),$$

y esto probaría nuestra regla de la cadena bajo la hipótesis de que k no es igual a 0.

No sucede muy frecuentemente que $k = 0$ para valores arbitrariamente pequeños de h; pero cuando sucede, el anterior argumento ya no es válido. Para aquellos lectores que estén interesados, mostraremos cómo puede modificarse ligeramente el argumento de modo que sea válido en todos los casos. El lector no interesado puede saltarse lo que sigue.

Volvemos a esta definición de la derivada de f. Dado un número u tal que $f(u)$ esté definida, sabemos que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(u + k) - f(u)}{k} = f'(u).$$

Por tanto, el límite de la expresión

$$\varphi(k) = \frac{f(u + k) - f(u)}{k} - f'(u)$$

cuando k tiende a 0 es igual a 0. En símbolos:

$$\lim_{k \to 0} \varphi(k) = 0.$$

Multiplicando por k obtenemos

$$k\varphi(k) = f(u + k) - f(u) - kf'(u)$$

o

$$f(u + k) - f(u) = k \cdot f'(u) + k \cdot \varphi(k).$$

Hasta el momento esto es válido cuando k no es 0. Pero si definimos $\varphi(0)$ como igual a 0, entonces notamos que la relación que hemos obtenido es aún válida cuando $k = 0$ porque k no aparece en el denominador. Substituyendo $k = 0$ nos da

$$f(u) - f(u) = 0,$$

lo que ciertamente es válido.

Sea ahora $u = g(x)$ y $k = g(x + h) - g(x)$. Cuando h tiende a cero, también lo hace k.

El cociente de Newton para la función compuesta $f \circ g$ es

$$\frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(u + k) - f(u)}{h},$$

que, por la expresión que acabamos de deducir, es igual a

$$\frac{k \cdot f'(u) + k \cdot \varphi(k)}{h},$$

o substituyendo el valor de k, es igual a

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} f'(u) + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \varphi(k).$$

Tomando el límite cuando h tiende a 0, vemos que el primer término tiende a $g'(x)f'(u)$. En cuanto al segundo término, tomando el límite, tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \varphi(k) = g'(x) \cdot 0 = 0$$

porque el límite de $\varphi(k)$ cuando h o k tiende a 0 es 0. Esto prueba que el cociente de Newton de $f \circ g$ tiende a

$$f'(u)g'(x)$$

y concluye la prueba de la regla de la cadena para el caso general.

Estamos ahora en posición de comprender la razón para la notación dg/dx. La regla de la cadena en esta notación puede expresarse por la fórmula

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

si $u = g(x)$ es una función de x. Así, pues, la derivada se comporta *como si* pudiéramos cancelar du. Una vez que hemos probado este resultado, nada hay equivocado en trabajar como una máquina en el cálculo de derivadas de las funciones compuestas; daremos aquí unos cuantos ejemplos antes de los ejercicios.

Sea $f(u) = u^{10}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Entonces $f'(u) = 10u^9$ y $g'(x) = 2x$. Así, pues,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = 10u^9 \cdot 2x = 10(x^2 + 1)^9 2x.$$

Sea $f(u) = 2u^{1/2}$ y $g(x) = 5x + 1$. Entonces, $f'(u) = u^{-1/2}$ y $g'(x) = 5$. Luego

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = (5x + 1)^{-1/2} \cdot 5.$$

(Se debe prestar atención a la constante 5, que es la derivada de $5x + 1$. Es muy probable que el lector se olvide de ella.)

Para proporcionar al lector más ejercicios de los que le pueden dar las funciones que hasta ahora hemos considerado, como las potencias, resumimos las derivadas de las funciones elementales que más tarde consideraremos.

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x. \qquad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x.$$

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \text{ (sí, } e^x\text{, lo mismo que la función).}$$

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Teniendo en cuenta esto, y la regla de la cadena, vemos que la derivada de $(\operatorname{sen} x)^7$ es $7(\operatorname{sen} x)^6(\cos x)$. (Aquí de nuevo subrayamos la aparición de $\cos x$, que es la derivada de lo que está dentro de nuestra función compuesta.)

La derivada de $(\log x)^{1/2}$ es $\frac{1}{2}(\log x)^{-1/2} \cdot \frac{1}{x}$.

La derivada de $e^{\operatorname{sen} x}$ es $e^{\operatorname{sen} x}(\cos x)$.
La derivada de $\cos(2x^2)$ es $-\operatorname{sen}(2x^2) \cdot 4x$. (El término $4x$ es la derivada de $2x^2$.)

Ejercicios

(a) En cada caso en que sea aplicable, hallar dos funciones $f(u)$ y $g(x)$ tales que la función indicada sea del tipo $f(g(x))$.
(b) Hallar la derivada de la función indicada. No debe intentarse simplificar las respuestas.

1. $(x+1)^8$
2. $(2x-5)^{1/2}$
3. $(\operatorname{sen} x)^3$
4. $(\log x)^5$
5. $\operatorname{sen} 2x$
6. $\log(x^2+1)$
7. $e^{\cos x}$
8. $\log(e^x + \operatorname{sen} x)$
9. $\operatorname{sen}\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right)$
10. $\dfrac{x+1}{\operatorname{sen} 2x}$
11. $(2x^2+3)^3$
12. $\cos(\operatorname{sen} 5x)$
13. $\log(\cos 2x)$
14. $\operatorname{sen}[(2x+5)^2]$
15. $\operatorname{sen}[\cos(x+1)]$
16. $\operatorname{sen}(e^x)$
17. $\dfrac{1}{(3x-1)^4}$
18. $\dfrac{1}{(4x)^3}$
19. $\dfrac{1}{(\operatorname{sen} 2x)^2}$
20. $\dfrac{1}{(\cos 2x)^2}$
21. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x}$
22. $(\operatorname{sen} x)(\cos x)$

23. $(x^2 + 1)e^x$

24. $(x^3 + 2x)(\operatorname{sen} 3x)$

25. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

26. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}$

27. $\dfrac{\log x}{x^2 + 3}$

28. $\dfrac{x + 1}{\cos 2x}$

29. $(2x - 3)(e^x + x)$

30. $(x^3 - 1)(e^{3x} + 5x)$

31. $\dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$

32. $\dfrac{x^2 - 1}{2x + 3}$

33. $(x^{4/3} - e^x)(2x + 1)$

34. $(\operatorname{sen} 3x)(x^{1/4} - 1)$

35. $\operatorname{sen}(x^2 + 5x)$

36. e^{3x^2+8}

37. $\dfrac{1}{\log(x^4 + 1)}$

38. $\dfrac{1}{\log(x^{1/2} + 2x)}$

39. $\dfrac{2x}{e^x}$

40. Descanse.

§7. Derivadas de orden superior

Dada una función derivable f definida en un intervalo, su derivada f' es también una función en este intervalo. Si resulta que también es derivable (lo que generalmente es el caso), entonces su derivada se llama **segunda derivada** de f y se denota por $f''(x)$. Por ejemplo, la primera derivada de $(x^2 + 1)^2$ es $2(x^2 + 1)2x = 4x^3 + 4x$ y la segunda derivada $f''(x)$ es $12x^2 + 4$.

No hay ninguna razón para detenerse en la segunda derivada; se puede desde luego continuar con la tercera, la cuarta, etc., con tal de que existan.

Ejemplo. La primera derivada de la función $f(x) = x^3$ es $3x^2$. Su segunda derivada es $6x$ y su tercera derivada es la función constante 6. La cuarta derivada es 0.

La acumulación de tildes después de f sería una notación engorrosa; entonces para denotar las derivadas sucesivas se escribe

$$f^{(n)}$$

para representar la n-ésima derivada de f. Así, f'' se escribe también $f^{(2)}$.

Ejercicios

Hallar las segundas derivadas de las siguientes funciones:

1. $3x^3 + 5x + 1$
2. $(x^2 + 1)^5$
3. Hallar la octogésima derivada de $x^7 + 5x - 1$.
4. Hallar la séptima derivada de $x^7 + 5x - 1$.

5. Hallar la tercera derivada de $x^2 + 1$.
6. Hallar la tercera derivada de $x^3 + 2x - 5$.
7. Hallar la tercera derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.
8. Hallar la cuarta derivada de la función $g(x) = \cos x$.
9. Hallar la décima derivada de sen x.
10. Hallar la décima derivada de cos x.
11. Hallar la centésima derivada de sen x.
12. Hallar la centésima derivada de cos x.

§8. Razón de cambio

La derivada tiene una interpretación física interesante, que estuvo muy íntimamente vinculada con ella en su desarrollo histórico, y que merece la pena mencionar.

Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta en cierta distancia que depende del tiempo t. Entonces la distancia s es una función de t que escribimos como $s = f(t)$.

Para dos valores del tiempo, t_1 y t_2, el cociente

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

puede considerarse como una especie de velocidad promedio de la partícula. En un tiempo t_0 dado, es por tanto razonable considerar el límite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

como la razón de cambio de s con respecto a t. Esto no es otra cosa que la derivada $f'(t)$.

Por ejemplo, si la partícula es un objeto que cae bajo la influencia de la gravedad, entonces los datos experimentales muestran que

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

en donde g es la constante gravitatoria. En ese caso,

$$\frac{ds}{dt} = gt$$

es su velocidad.

La razón de cambio de la velocidad es la aceleración. En el caso de la gravedad, tomamos la derivada de la velocidad y obtenemos simplemente la constante g.

En general, dada una función $y = f(x)$, la derivada $f'(x)$ se interpreta como la razón de cambio de y con respecto a x. Así, f' es también una función. Si x está dada como alguna función del tiempo, digamos $x = g(t)$, entonces podemos determinar tanto la razón de cambio de y con respecto a x, es decir, dy/dx, como la razón de cambio de y con respecto a t, a saber:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

de acuerdo con la regla de la cadena.

Ejemplo 1. Una partícula se mueve de forma que en el tiempo t la distancia recorrida está dada por la función

$$s(t) = t^2 + 1.$$

La derivada $s'(t)$ es igual a $2t$. Así, pues, la velocidad de la partícula es igual a 0 en el instante $t = 0$. Su velocidad es igual a 4 en el instante $t = 2$.

Ejemplo 2. Un cuadrado se expande de forma que su lado cambia a razón de 2 pulgadas por segundo. Cuando su lado es de 6 pulgadas de largo, hallar la razón de cambio de su área.

El área de un cuadrado como función de su lado está dada por la función

$$A(x) = x^2.$$

Si el lado x está dado como una función del tiempo t, digamos $x = x(t)$, entonces la razón de cambio del área con respecto al tiempo es por definición

$$\frac{d(A(x(t)))}{dt}.$$

Usamos, pues, la regla de la cadena, y si denotamos el área por A, encontramos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Sabemos que $dx/dt = 2$ y $dA/dx = 2x$. Así, pues, cuando $x(t) = 6$, encontramos que

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 6 \cdot 2 = 24 \text{ pulgadas}^2/\text{segundo}.$$

Ejemplo 3. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^3$, de forma que su abscisa cambia a razón de 2 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 3$?

Tenemos por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}.$$

Así, pues, cuando $x = 3$, tenemos $dy/dt = 3 \cdot 9 \cdot 2 = 54$ unidades por segundo.

Ejemplo 4. En lo alto de un farol brilla una luz a 25 pies del suelo. Un hombre con una estatura de 6 pies se aleja caminando desde el farol. ¿Cuál es la longitud de su sombra cuando está a 40 pies de distancia respecto de la base del farol? Si camina a razón de 5 pies por segundo, ¿a qué velocidad aumenta su sombra en ese punto?

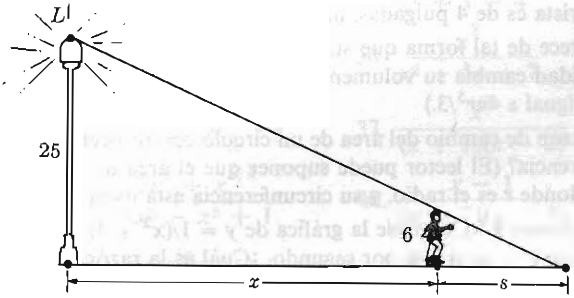


Figura 11

Sea s la longitud de la sombra y sea x la distancia entre el hombre y la base del poste. Entonces, por semejanza de triángulos, vemos que

$$\frac{25}{x+s} = \frac{6}{s}.$$

Multiplicando en cruz, vemos que $25s = 6x + 6s$, de donde

$$s = \tfrac{6}{19}x.$$

Por tanto,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{6}{19}\frac{dx}{dt}.$$

Como $dx/dt = 5$, obtenemos lo que deseamos: la sombra aumenta a razón de 30/19 pie/segundo. Además, cuando $x = 40$ encontramos que la longitud de su sombra está dada por

$$s = \frac{6 \cdot 40}{19} = \frac{240}{19} \text{ pies.}$$

Ejercicios

1. Una partícula se mueve de tal forma que en el instante t, la distancia está dada por $s(t) = t^3 - 2t$. ¿En qué momento es la aceleración igual a

(a) 1, (b) 0, (c) -5?

2. Una partícula se mueve de tal forma que en el instante t la distancia está dada por la función $s(t) = 2t^4 + t^2$. ¿En qué momento es la velocidad igual a 0?
3. Un objeto se mueve sobre una línea recta con velocidad dada por la función $v(t) = 4t^5$. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.
4. Una partícula se mueve de tal forma que en el instante t, la distancia recorrida está dada por $s(t) = t^3 - 2t + 1$. ¿En qué instante es la aceleración igual a 0?
5. Un cubo se expande de tal forma que su arista cambia a razón de 5 pulgadas por segundo. Cuando su arista es de 4 pulgadas, hallar la razón de cambio del volumen.
6. Una esfera crece de tal forma que su radio aumenta a razón de 1 pulgada por segundo. ¿A qué velocidad cambia su volumen cuando su radio es de 3 pulgadas? (El volumen de una esfera es igual a $4\pi r^3/3$.)
7. ¿Cuál es la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio, a su diámetro, a su circunferencia? (El lector puede suponer que el área de un círculo está dada por la fórmula πr^2 donde r es el radio, y su circunferencia está dada por $2\pi r$.)
8. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = 1/(x^2 + 4)$ de tal forma que su abscisa cambia a razón de 3 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 2$?
9. En lo alto de un farol brilla una luz a 20 pies del suelo. Una mujer con una estatura de 5 pies se aleja caminando desde el farol. Hallar la razón en que aumenta su sombra si se aleja a razón de
   (a) 4 pies por segundo, (b) 3 pies por segundo.
10. Si en el ejercicio 9 la mujer camina hacia la luz, hallar la razón en que su sombra decrece si camina a razón de
   (a) 5 pies por segundo, (b) 6 pies por segundo.

Ejercicios suplementarios

Hallar las derivadas de las siguientes funciones. No simplificar las respuestas.

1. $3x^3 - 4x + 5$
2. $x^2 + 2x + 27$
3. $x^2 + x - 1$
4. $x^{1/2} - 8x^4 + x^{-1}$
5. $x^{5/2} + x^{-5/2}$
6. $x^7 + 15x^{-1/5}$
7. $(x^2 - 1)(x + 5)$
8. $\left(x^5 + \dfrac{1}{x}\right)(x^5 + 1)$
9. $(x^{3/2} + x^2)(x^4 - 99)$
10. $(x^2 + x + 1)(x^5 - x - 25)$
11. $(2x^2 + 1)\left(\dfrac{1}{x^2} + 4x + 8\right)$
12. $(x^4 - x^2)(x^2 - 1)$
13. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$
14. $5(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)$
15. $x^3(x^2 + 1)(x + 1)$
16. $(x^4 + 1)(x + 5)(2x + 7)$
17. $\dfrac{1}{2x + 3}$
18. $\dfrac{1}{7x + 27}$
19. $\dfrac{-5}{x^3 + 2x^2}$
20. $\dfrac{3}{2x^4 + x^{3/2}}$
21. $\dfrac{-2x}{x + 1}$
22. $\dfrac{x + 1}{x - 5}$

23. $\frac{3x^{1/2}}{(x+1)(x-1)}$
24. $\frac{2x^{1/2}+x^{3/4}}{(x+1)x^3}$
25. $\frac{x^5+1}{(x^2+1)(x+7)}$
26. $\frac{(x+1)(x+5)}{x-4}$
27. $\frac{x^3}{1-x^2}$
28. $\frac{x^5}{x^{3/2}+x}$
29. $\frac{x^2-x}{x^2+1}$
30. $\frac{x^2+2x+7}{8x}$
31. $\frac{2x+1}{x^2+x-4}$
32. $\frac{x^5}{x^2+3}$
33. $\frac{4x-x^3}{x^2+2}$
34. $\frac{x^3}{x^2-5x+7}$
35. $\frac{1-5x}{x}$
36. $\frac{1+6x+x^{3/4}}{7x-2}$
37. $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$
38. $\frac{x^{1/2}-x^{-1/2}}{x^{3/4}}$
39. $\frac{3x^4+x^{5/4}}{4x^3-x^5+1}$
40. $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes curvas en el punto dado.

41. $y = x^{1/4} + 2x^{3/4}$ en $x = 16$
42. $y = 2x^3 + 3$ en $x = \frac{1}{2}$
43. $y = (x-1)(x-3)(x-4)$ en $x = 0$
44. $y = 2x^2 + 5x - 1$ en $x = 2$
45. $y = (x^2+1)(2x+3)$ en $x = 1$
46. $y = \frac{x-1}{x+5}$ en $x = 2$
47. $y = \frac{x^2}{x^3+1}$ en $x = 2$
48. $y = \frac{x^2+1}{x^3+1}$, en $x = 2$
49. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ en $x = 2$
50. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ en $x = 1$

51. Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar el punto de tangencia.
52. Demostrar que la recta $y = 9x - 15$ es tangente a la curva $y = x^3 - 3x + 1$. Hallar el punto de tangencia.
53. Demostrar que las gráficas de las ecuaciones

$$y = 3x^2 \qquad \text{y} \qquad y = 2x^3 + 1$$

tienen una tangente común en el punto $(1, 3)$. Trazar las gráficas.
54. Demostrar que hay exactamente dos rectas tangentes a la gráfica de $y = (x+1)^2$ que pasan por el origen y hallar sus ecuaciones.
55. Hallar todos los puntos (x_0, y_0) sobre la curva

$$y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$$

tales que la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) sea paralela a la recta

$$16x - y + 5 = 0.$$

Hallar la recta tangente a la curva en cada uno de esos puntos.

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $(2x+1)^2$
2. $(2x+5)^3$
3. $(5x+3)^7$
4. $(7x-2)^{81}$
5. $(2x^2+x-5)^3$
6. $(2x^3-3x)^4$
7. $(3x+1)^{1/2}$
8. $(2x-5)^{5/4}$
9. $(x^2+x-1)^{-2}$
10. $(x^4+5x+6)^{-1}$
11. $(x+5)^{-5/3}$
12. $(x^3+2x+1)^3$
13. $(x-1)(x-5)^3$
14. $(2x^2+1)^2(x^2+3x)$
15. $(x^3+x^2-2x-1)^4$
16. $(x^2+1)^3(2x+5)^2$
17. $\dfrac{(x+1)^{3/4}}{(x-1)^{1/2}}$
18. $\dfrac{(2x+1)^{1/2}}{(x+5)^5}$
19. $\dfrac{(2x^2+x-1)^{5/2}}{(3x+2)^9}$
20. $\dfrac{(x^2+1)(3x-7)^8}{(x^2+5x-4)^3}$
21. $\sqrt{2x+1}$
22. $\sqrt{x+3}$
23. $\sqrt{x^2+x+5}$
24. $\sqrt{2x^3-x+1}$

En los siguientes ejercicios podemos suponer que hay funciones sen u, cos u, log u y e^u cuyas derivadas están dadas por las siguientes fórmulas:

$$\frac{d \operatorname{sen} u}{du} = \cos u, \qquad \frac{d \cos u}{du} = -\operatorname{sen} u,$$

$$\frac{d(e^u)}{du} = e^u, \qquad \frac{d \log u}{du} = \frac{1}{u}.$$

Hallar la derivada de cada función (con respecto a x):

25. $\operatorname{sen}(x^3+1)$
26. $\cos(x^3+1)$
27. e^{x^3+1}
28. $\log(x^3+1)$
29. $\operatorname{sen}(\cos x)$
30. $\cos(\operatorname{sen} x)$
31. $e^{\operatorname{sen}(x^3+1)}$
32. $\log[\operatorname{sen}(x^3+1)]$
33. $\operatorname{sen}[(x+1)(x^2+2)]$
34. $\log(2x^2+3x+5)$
35. $e^{(x+1)(x-3)}$
36. e^{2x+1}
37. $\operatorname{sen}(2x+5)$
38. $\cos(7x+1)$
39. $\log(2x+1)$
40. $\log\dfrac{2x+1}{x+3}$
41. $\operatorname{sen}\dfrac{x-5}{2x+4}$
42. $\cos\dfrac{2x-1}{x+3}$
43. e^{2x^2+3x+1}
44. $\log(4x^3-2x)$
45. $\operatorname{sen}[\log(2x+1)]$
46. $\cos(e^{2x})$
47. $\cos(3x^2-2x+1)$
48. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^3+1}\right)$
49. $(2x+1)^{80}$
50. $(\operatorname{sen} x)^{50}$
51. $(\log x)^{49}$
52. $(\operatorname{sen} 2x)^4$
53. $(e^{2x+1}-x)^5$
54. $(\log x)^{20}$

55. $(3\log(x^2+1)-x^3)^{1/2}$
56. $(\log(2x+3))^{4/3}$
57. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}$
58. $\dfrac{\operatorname{sen}(2x+5)}{\cos(x^2-1)}$
59. $\dfrac{\log 2x^2}{\operatorname{sen} x^3}$
60. $\dfrac{e^{x^3}}{x^2-1}$
61. $\dfrac{x^4+4}{\cos 2x}$
62. $\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-2)}{\operatorname{sen} 2x}$
63. $\dfrac{(2x^2+1)^4}{(\cos x^3)}$
64. $\dfrac{e^{-x}}{\cos 2x}$
65. e^{-3x}
66. e^{-x^2}
67. e^{-4x^2+x}
68. $\sqrt{e^x+1}$
69. $\dfrac{\log(x^2+2)}{e^{-x}}$
70. $\dfrac{\log(2x+1)}{\operatorname{sen}(4x+5)}$

RAZON DE CAMBIO

1. Una partícula se mueve en forma derivable sobre la parábola $y = x^2$. ¿En qué punto de la curva se mueven a igual velocidad su abscisa y su ordenada? Hallar tales velocidades para el tiempo $t = 1$ en el caso $x = t^3$ y en el caso $y = 4t$.
2. Un lado de un triángulo rectángulo decrece a razón de 1 pulgada por minuto, mientras que el otro lado aumenta a razón de 2 pulgadas por minuto. En cierto momento el primer lado tiene 8 pulgadas y el segundo 6 pulgadas. ¿A qué velocidad está aumentando el área después de 2 minutos?
3. La longitud del lado de un cuadrado aumenta a razón de 3 pulgadas por segundo. Hallar la velocidad a la que el área aumenta cuando el lado tiene 15 pulgadas de longitud.
4. Una escalera se encuentra apoyada contra una pared vertical. La escalera tiene 17 pies. Si la parte inferior de la escalera se aleja respecto de la base de la pared a razón de 3 pies por segundo, ¿a qué velocidad está descendiendo su parte superior cuando el extremo inferior se encuentra a 8 pies de la pared?
5. Una piscina tiene 25 pies de ancho, 40 pies de largo y 3 pies de profundidad en un extremo y 9 pies en el otro, siendo el fondo un plano inclinado. Si se bombea agua al interior de la piscina a razón de 10 pies cúbicos por minuto, ¿a qué velocidad se está elevando el nivel del agua cuando tal nivel es de 4 pies en el extremo más profundo?
6. Un depósito de 10 pies de altura tiene la forma de un cono con el vértice hacia abajo. El radio en la parte superior es de 4 pies. Se le echa agua a razón de 5 pies cúbicos por minuto, ¿a qué velocidad se está elevando el agua cuando la profundidad de ésta es de 5 pies? (El volumen de un cono cuya base tiene radio r y altura h es $\pi r^2 h/3$.)
7. Una partícula se mueve de tal forma que en el instante t la distancia recorrida está dada por $s(t) = 2t^2 - t$. ¿En qué momento es su velocidad igual a 0? ¿Cuál es la aceleración de la partícula?
8. Un punto se mueve sobre la parábola de ecuación $y = x^2 - 6x$. Hallar el punto sobre la curva en el que la razón de cambio de la ordenada es igual a cuatro veces la razón de cambio en la abscisa.
9. El agua fluye hacia el interior de un tanque en forma de hemisferio, con radio de 10 pies y parte superior plana, a la velocidad de 4 pies cúbicos por minuto. Sea h la profundidad del agua, r el radio de la superficie del agua y V el volumen del agua en el tanque. Supon-

gamos que $dV/dt = \pi r^2\, dh/dt$. Hallar a qué velocidad está subiendo el nivel del agua cuando $h = 5$ pies.

10. Un tren sale de una estación en un momento determinado y viaja hacia el norte a una velocidad de 50 millas por hora. Un segundo tren sale de la misma estación 2 horas después que el primer tren y viaja hacia el oriente a una velocidad de 60 millas por hora. Hallar la razón a la que los dos trenes se están separando 1,5 horas después de que el segundo tren sale de la estación.
11. Sobre una pila de forma constantemente cónica cae arena a razón de 3 pies cúbicos por minuto. Supóngase que el diámetro en la base del montón es siempre tres veces su altura. ¿A qué velocidad está aumentando la altura cuando ésta ha llegado a los 4 pies?

CAPITULO IV

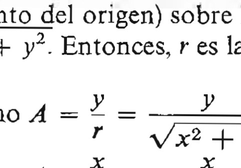
Seno y coseno

A partir del seno y del coseno de un ángulo, definiremos funciones de números y determinaremos sus derivadas.

Es conveniente recordar todos los aspectos trigonométricos que necesitaremos en lo que sigue, especialmente la fórmula que nos da el seno y el coseno de la suma de dos ángulos. Así nuestro tratamiento de las funciones trigonométricas resulta suficiente; el lector no necesita saber nada de senos ni cosenos antes de comenzar a leer este capítulo. Sin embargo, la mayoría de las demostraciones para los enunciados de §1 provienen de la geometría plana y se dejan al lector.

§1. Las funciones seno y coseno

Supongamos que tenemos unos ejes coordenados y cierto ángulo, como nos muestra la siguiente figura:



Elegimos un punto (x, y) (distinto del origen) sobre la recta que determina nuestro ángulo A. Hacemos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Entonces, r es la distancia desde $(0, 0)$ al punto (x, y). Definimos

$$\text{seno } A = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{coseno } A = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Si elegimos otro punto (x_1, y_1) sobre la recta que determina nuestro ángulo A y usamos sus coordenadas para obtener el seno y el coseno, entonces obtendremos los mismos valores que con (x, y). Ciertamente, hay un número positivo c tal que

$$x_1 = cx \qquad \text{y} \qquad y_1 = cy.$$

Luego

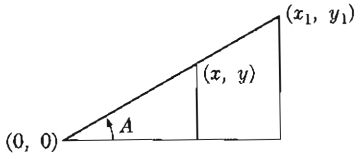
$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_1^2}} = \frac{cy}{\sqrt{c^2x^2 + c^2y^2}}.$$

Podemos factorizar c en el denominador y cancelar después la c tanto en el num-
rador como en el denominador para obtener

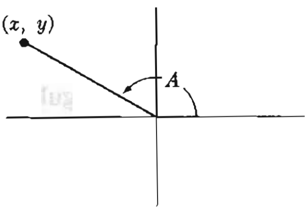
$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

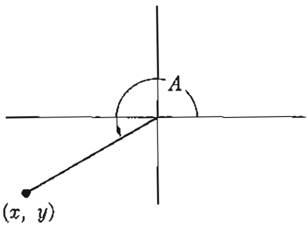
En esta forma vemos que sen A no depende de la elección del punto (x, y).

La interpretación geométrica del anterior argumento es sencillamente que lo
triángulos del siguiente diagrama son semejantes.



El ángulo A puede variar libremente. Por ejemplo, podríamos tener un ángul
determinado por un punto (x, y) en el segundo o en el tercer cuadrante.



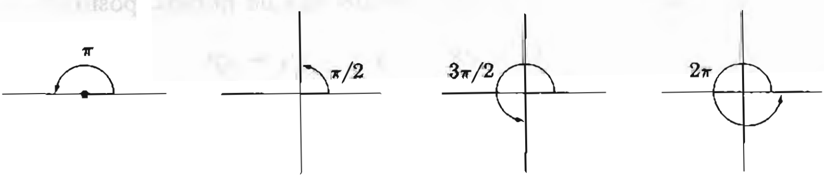


Cuando el ángulo A está en el primer cuadrante, entonces su seno y coseno so
positivos porque ambas coordenadas x, y son positivas. Cuando el ángulo A est
en el segundo cuadrante, su seno es positivo porque y es positiva, pero su cosen
es negativo porque x es negativa.

Cuando A está en el tercer cuadrante, el seno de A es negativo y el coseno de
es también negativo.

Para definir el seno de un **número,** elegimos una unidad para medir ángulo
Representamos por π el área del círculo de radio 1. Luego escogemos un ángul
unidad tal que el ángulo llano sea igual a π veces el ángulo unidad. (Véanse la
siguientes figuras.) El ángulo recto tiene la medida $\pi/2$. El ángulo total que reco
todo el círculo es entonces 2π.

La unidad de medida para la que el ángulo llano es π se llama **radián.** Así, pue
el ángulo recto tiene $\pi/2$ radianes.



Hay otra unidad común de medida para la que el ángulo llano es 180. Esta unidad se llama **grado.** El ángulo llano tiene, pues, 180 grados y el ángulo recto tiene 90 grados. Tenemos también:

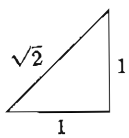
$$\begin{aligned} 360 \text{ grados} &= 2\pi \text{ radianes} \\ 60 \text{ grados} &= \pi/3 \text{ radianes} \\ 45 \text{ grados} &= \pi/4 \text{ radianes} \\ 30 \text{ grados} &= \pi/6 \text{ radianes.} \end{aligned}$$

Presentamos una tabla de los senos y cosenos de estos ángulos.

Angulo	Seno	Coseno
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
π	0	-1
2π	0	1

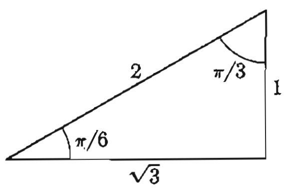
A menos que se indique lo contrario, *siempre usaremos la medida en radianes;* nuestra tabla está dada para esta medida.

Los valores de esta tabla se determinan fácilmente usando las propiedades de los triángulos semejantes y la geometría plana. Por ejemplo, obtenemos el seno y el coseno del ángulo de $\pi/4$ radianes para un triángulo rectángulo con dos lados iguales:



Podemos determinar el seno de $\pi/4$ por medio del punto $(1, 1)$. Entonces $r = \sqrt{2}$ y sen $\pi/4$ radianes es $1/\sqrt{2}$. Análogamente para el coseno.

Obtenemos el seno de un ángulo de $\pi/6$ radianes al considerar un triángulo tal que dos ángulos tengan $\pi/6$ y $\pi/3$ radianes (es decir, 30° y 60°, respectivamente).



Si hacemos que el lado opuesto al ángulo de 30° tenga longitud 1, entonces la hipotenusa tiene longitud 2 y el lado adyacente al ángulo de 30° tiene longitud $\sqrt{3}$.

De donde se tiene que

$$\operatorname{sen} \pi/6 = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2.$$

La siguiente es una importante regla que relaciona al seno con el coseno.

Teorema 1. *Para cualquier ángulo A tenemos*

$$\text{coseno } A = \text{seno}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{o} \quad \text{seno } A = \text{coseno}\left(A - \frac{\pi}{2}\right)\cdot$$

Demostración. Podemos usar teoremas de geometría plana para probar nuestro teorema. Dejamos esta tarea al lector.

Definimos una función de números, a la que llamaremos también **seno**, mediante la asociación:

Para cualquier número x le asociamos el número que es el seno de x radianes.

Esta función se denota por sen x y se define para todo x. Así, pues, sen $\pi = 0$, sen $\pi/2 = 1$, sen $2\pi = 0$, sen $0 = 0$.

Análogamente, tenemos la **función coseno**, que se define para todos los números x por la regla:

cos x es el número que es el coseno del ángulo de x radianes.

Así, pues, $\cos 0 = 1$ y $\cos \pi = -1$.

Podemos también definir la función tangente, tan x, que es el cociente

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y está definida para todos los números x tales que $\cos x \neq 0$. Estos son los números x que son distintos de

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \ldots;$$

en general, $x \neq (2n + 1)\pi/2$ para todo entero n.

Si se utilizara la medida de ángulos en grados se obtendría *otra* función seno que no es igual a la función seno definida en términos de radianes. Supongamos que llamamos a esta otra función sen*. Entonces

$$\operatorname{sen}^* (180) = \operatorname{sen} \pi,$$

y, en general,

$$\operatorname{sen}^* (180x) = \operatorname{sen} \pi x$$

para cualquier número x. Así, pues,

$$\operatorname{sen}^* x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

es la fórmula que relaciona nuestras dos funciones seno. Más tarde se comprenderá por qué hemos escogido la medida en radianes en lugar de cualquier otra.

Por el momento no tenemos ningún medio de calcular valores para el seno y el coseno, salvo en los casos muy especiales que aparecen en nuestra anterior lista (y algunos análogos basados en simples simetrías de triángulos rectángulos). Solamente en el capítulo XIV desarrollaremos un método que nos permitirá encontrar el sen x y el cos x para cualquier valor de x hasta cualquier grado de exactitud que se desee.

Ejercicios

Hallar los siguientes valores de la función sen y de la función cos:

1. $\operatorname{sen} 3\pi/4$ 2. $\operatorname{sen} 2\pi/6$ 3. $\operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}$ 4. $\operatorname{sen}\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$

5. $\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$ 6. $\cos\left(\pi + \dfrac{2\pi}{6}\right)$ 7. $\cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$ 8. $\cos \dfrac{5\pi}{4}$

Hallar los siguientes valores:

9. $\tan \dfrac{\pi}{4}$ 10. $\tan \dfrac{2\pi}{6}$ 11. $\tan \dfrac{5\pi}{4}$ 12. $\tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

13. Probar mediante la geometría plana que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$.
14. Probar mediante la geometría plana que $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
15. Probar mediante la geometría plana que $\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$.
16. Probar mediante la geometría plana que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.
17. Probar mediante la geometría plana que $\cos(-x) = \cos x$.
18. Sea a un número dado. Determinar todos los números x tales que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$. (Podemos suponer que $0 \leqslant a < 2\pi$ y distinguir los casos $a = \pi/2$, $a = 3\pi/2$ y $a \neq \pi/2, 3\pi/2$.)

§2. Las gráficas

Deseamos dibujar la gráfica de la función seno.

Sabemos que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Cuando x va de 0 a $\pi/2$, el seno de x crece hasta que x alcanza $\pi/2$, punto en que el seno es igual a 1.

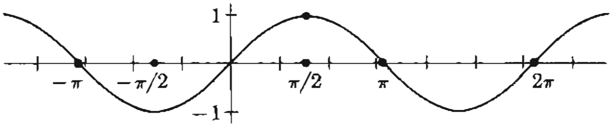
Cuando x va de $\pi/2$ a π, el seno decrece hasta que se hace $\operatorname{sen} \pi = 0$.

Cuando x va de π a $3\pi/2$, el seno se hace negativo pero, por lo demás, se comporta en una forma análoga a la del primer cuadrante hasta que llega a

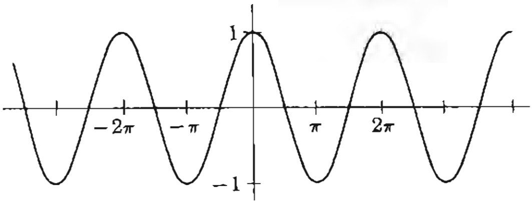
$$\operatorname{sen} 3\pi/2 = -1.$$

Finalmente, cuando x va de $3\pi/2$ a 2π, el seno de x va de -1 a 0, y ya estamos listos para que todo comience de nuevo.

La gráfica tiene este aspecto:



La gráfica del coseno será como la del seno, pero comienza con cos 0 = 1. En el siguiente dibujo la escala usada sobre el eje vertical es diferente de la del eje horizontal, de forma que tenemos más espacio para los arcos de la gráfica. El dibujo es la gráfica de $y = \cos x$.

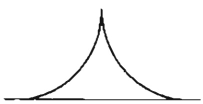


Siempre que recorremos 2π, tanto el seno como el coseno toman los mismos valores; en otras palabras

$$\begin{aligned}\text{sen}\,(x + 2\pi) &= \text{sen}\, x\\ \cos\,(x + 2\pi) &= \cos x\end{aligned}$$

para todo x. Esto se verifica tanto para x positivo como para x negativo; lo mismo sería cierto si tomáramos $x - 2\pi$ en lugar de $x + 2\pi$.

El lector tendría derecho a preguntarse por qué un arco del seno (o del coseno) tiene la forma que hemos trazado y no la siguiente:

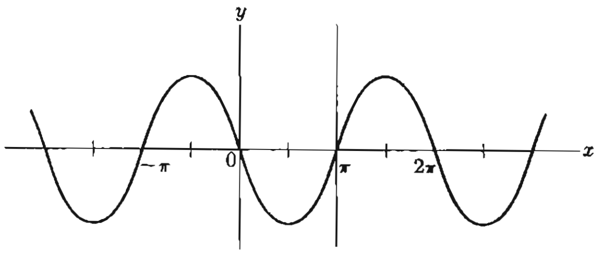


En la próxima sección encontraremos que la pendiente de la curva $y = \text{sen}\, x$, es igual a $\cos x$. Así, pues, cuando $x = 0$, la pendiente es $\cos 0 = 1$. Por otra parte, cuando $x = \pi/2$, tenemos $\cos \pi/2 = 0$ y, por tanto, la pendiente es 0. Esto quiere decir que la curva se hace horizontal y no puede tener un pico como en el dibujo anterior.

Por el momento no tenemos medio alguno para calcular más valores de sen x y cos x. Sin embargo, usando los pocos que tenemos y la derivada, podemos convencernos de que las gráficas tienen el aspecto de las que hemos trazado.

Ejemplo. Trazar la gráfica de $y = \text{sen}\,(x - \pi)$.

Sean $x' = x - \pi$, $y' = y$. Sabemos cómo dibujar la gráfica de $y = x'$ respecto de los ejes (x', y). Cuando $x = 0$, tenemos $x' = -\pi$. Así, pues, la gráfica de $y =$ sen $(x - \pi)$ tiene el siguiente aspecto:



Los valores indicados, π, 0, π, 2π, son los correspondientes a la coordenada x.

Ejercicios

1. Trazar la gráfica de tan x.
2. Sea sec $x = 1/\cos x$ definida cuando $\cos x \neq 0$. Trazar la gráfica de sec x.
3. Sea cot $x = 1/\tan x$. Trazar la gráfica de cot x.
   (Sec y cot son abreviaturas para secante y cotangente.)
4. Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

   (a) $y = \text{sen } 2x$ (b) $y = \text{sen } 3x$
   (c) $y = \cos 2x$ (d) $y = \cos 3x$
   (e) $y = \tan 2x$ (f) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
   (g) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (h) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
   (i) $y = \text{sen } \frac{1}{2}x$ (j) $y = \cos \frac{1}{2}x$

5. Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

   (a) $y = 1 + \text{sen } x$ (b) $y = 1 + \text{sen } 2x$
   (c) $y = -2 + \cos(x - 1)$ (d) $y = -\cos \frac{2}{3}\pi x$
   (e) $y = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ (f) $y = 5 \text{ sen } \frac{1}{2}\pi x$
   (g) $y = 4 \cos \frac{1}{2}\pi x$ (h) $y = -\cos 2x$

6. Trazar la gráfica de la función sen $(1/x)$ para $0 < x \leqslant \pi$.
7. Trazar la gráfica de la función x sen $(1/x)$ para $0 < x \leqslant \pi$.
8. Trazar la gráfica de la función x^2 sen $(1/x)$ para $0 < x \leqslant \pi$.
   (En los ejercicios 6, 7 y 8, la función no está definida para $x = 0$.)
9. Sea $f(x) = x^2$ sen $(1/x)$, cuando $x \neq 0$, y sea $f(0) = 0$. Usando el cociente de Newton, demostrar que f tiene una derivada en 0 y que $f'(0) = 0$.

10. Sea $f(x) = x$ sen $(1/x)$ cuando $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demostrar que f no tiene una derivada en 0. Considérense pequeños valores de x como

$$h = \frac{2}{n\pi},$$

siendo n un entero grande. Ensáyese con $n = 1, 2, 3, 4$, etc., y véase lo que le sucede a los valores de $f(x)$ y al cociente de Newton.

$$\frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

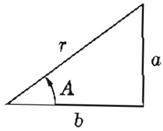
§3. Fórmula de la adición

En esta sección enunciaremos y probaremos las fórmulas más importantes sobre senos y cosenos.

Para comenzar, por el teorema de Pitágoras observamos que

$$(\text{sen}\, x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

para todo x. Esto es cierto, pues si tenemos un ángulo A y determinamos su seno y su coseno por el triángulo rectángulo, como en la siguiente figura,



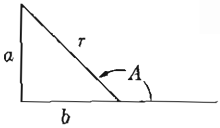
entonces tenemos

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Lo que dividido por r^2 nos da:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1.$$

El mismo argumento es válido cuando A es mayor que $\pi/2$, por medio de un triángulo como éste:



En ambos casos tenemos: sen $A = a/r$ y cos $A = b/r$, de forma que tenemos la relación

$$(\text{seno}\, A)^2 + (\text{coseno}\, A)^2 = 1.$$

Es habitual escribir el cuadrado del seno y del coseno como $\text{sen}^2 A$ y $\cos^2 A$. En el segundo caso nótese que b es negativo.

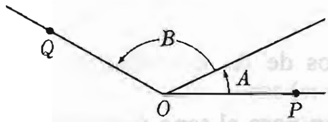
Nuestro resultado principal es la **fórmula de la adición.**

Teorema 2. *Para ángulos cualesquiera A y B,* tenemos

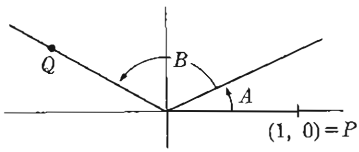
$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Demostración. Probaremos primero la segunda fórmula.

Consideramos dos ángulos A, B y su suma:



Tomamos dos puntos P, Q como los que se indican, a una distancia 1 del origen O. Calcularemos la distancia de P a Q, usando dos sistemas diferentes de coordenadas. Primero tomamos el sistema corriente de coordenadas:



Entonces, las coordenadas de P son $(1, 0)$ y las de Q son

$$(\cos(A + B), \operatorname{sen}(A + B)).$$

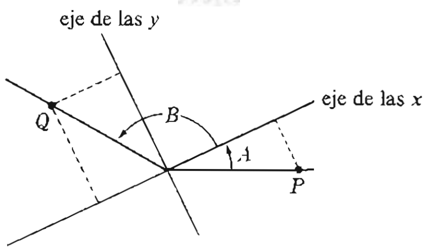
El cuadrado de la distancia entre P y Q es

$$\operatorname{sen}^2(A + B) + (\cos(A + B) - 1)^2,$$

que es igual a

$$-2\cos(A + B) + 2.$$

A continuación, empleamos el sistema de coordenadas que se muestra en la siguiente figura:



Entonces, las coordenadas de P se hacen

$$(\cos A, \operatorname{sen}(-A)) = (\cos A, -\operatorname{sen} A).$$

Las de Q son simplemente $(\cos B, \operatorname{sen} B)$. El cuadrado de la distancia entre P y Q es

$$(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A)^2 + (\cos B - \cos A)^2,$$

que es igual a

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 B + 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 B - 2\cos B \cos A + \cos^2 A \\ = 2 + 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - 2 \cos A \cos B. \end{aligned}$$

Si igualamos los cuadrados de las dos distancias entre sí, obtenemos nuestra fórmula.

La fórmula de la adición para el seno puede obtenerse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A + B) &= \cos\left(A + B - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos A \cos\left(B - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(B - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \\ &= \cos A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \cos B, \end{aligned}$$

con lo que se prueba nuestra fórmula.

Ejemplo. Hallar sen $(\pi/12)$.

Escribimos

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Entonces, $\operatorname{sen}(\pi/12) = \operatorname{sen}(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\operatorname{sen}(\pi/4)$, y substituyendo los valores conocidos encontramos que

$$\operatorname{sen}(\pi/12) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Ejercicios

1. Hallar sen $7\pi/12$. [*Sugerencia:* $7\pi/12 = 4\pi/12 + 3\pi/12$.]
2. Hallar cos $7\pi/12$.
3. Hallar los siguientes valores:

(a) sen $\pi/12$	(b) cos $\pi/12$
(c) sen $5\pi/12$	(d) cos $5\pi/12$
(e) sen $11\pi/12$	(f) cos $11\pi/12$
(g) sen $10\pi/12$	(h) cos $10\pi/12$

4. Probar las siguientes fórmulas:

(a) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ (b) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

(c) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ (d) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

5. Hallar una fórmula para sen $3x$ en términos de sen x y cos x. Análogamente, para cos $3x$.
6. Probar por inducción que para cualesquiera enteros positivos m, n, sen nx y cos mx pueden expresarse como sumas de términos

$$\sum a_{ij}(\operatorname{sen} x)^i(\cos x)^j$$

donde los a_{ij} son enteros.
7. Probar las fórmulas

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos (m - n)x - \cos (m + n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} (m + n)x + \operatorname{sen} (m - n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos (m + n)x + \cos (m - n)x].$$

8. Expresar $\operatorname{sen}^3 x$ como una suma de términos $a_n \cos nx$ y $b_n \operatorname{sen} nx$, donde a_n y b_n son números. Demostrar que, para cualquier entero positivo k, se puede expresar $\operatorname{sen}^k x$ como una suma de términos $a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, donde a_n y b_n son números. (En realidad, números racionales.) Probar lo mismo para $\cos^k x$. Usese inducción.

§4. Las derivadas

Probaremos:

Teorema 3. *Las funciones* sen x y cos x *tienen derivadas* y

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x.$$

Demostración. Determinaremos primero la derivada de sen x. Tenemos que considerar el cociente de Newton de sen x. Es

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}.$$

Usando la fórmula de la adición para el desarrollo de sen $(x + h)$, vemos que el cociente de Newton es igual a

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}.$$

Juntando los dos términos en que aparece sen x:

$$\frac{\cos x \operatorname{sen} h + \operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h}$$

Separamos ahora nuestro cociente en la suma de dos términos:

$$\cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} + \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Nos enfrentamos ahora con el problema de encontrar el límite de

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\cos h - 1}{h} \qquad \text{cuando } h \text{ tiende a } 0.$$

Este es un problema algo más difícil que los anteriores. No podemos decir desde el primer momento cuáles serán esos límites. En la siguiente sección probaremos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Una vez que conocemos estos límites, vemos inmediatamente que el primer término tiende a $\cos x$ y el segundo tiende a

$$(\operatorname{sen} x) \cdot 0 = 0.$$

De donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x.$$

Lo cual prueba que

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x.$$

Para encontrar la derivada de $\cos x$, podríamos proceder de la misma forma y encontraríamos los mismos límites. Sin embargo, hay un artificio que nos evita este esfuerzo.

Sabemos que $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Sea $u = x + \frac{\pi}{2}$ y usemos la regla de la cadena. Obtenemos

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen} u)}{du} \frac{du}{dx}.$$

Sin embargo, $du/dx = 1$. De donde

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \cos u = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x,$$

Con lo que probamos nuestro teorema.

Observación. No es cierto que la derivada de la función $\operatorname{sen}^* x$ sea $\cos^* x$. Usando la regla de la cadena, hallar cuál es su derivada. La razón para usar la medida en radianes de los ángulos es la de obtener una función sen x cuya derivada sea cos x.

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen} 4x$ en el punto $x = \pi/16$. Esto se puede hacer fácilmente. Sea $f(x) = \operatorname{sen} 4x$. Entonces,

$$f'(x) = 4 \cos 4x.$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = \pi/16$ es igual a

$$f'(\pi/16) = 4 \cos 4\pi/16 = 4 \cos \pi/4 = 4/\sqrt{2}.$$

De donde la ecuación de la recta es de la forma

$$y = \frac{4}{\sqrt{2}} x + b$$

para cierto número b que pasamos a calcular. Como la curva pasa por el punto $(\pi/16, 1/\sqrt{2})$, debemos tener

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{16} + b.$$

De donde

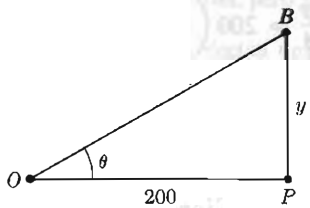
$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}},$$

y la ecuación de la recta finalmente está dada por

$$y = \frac{4}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Ejemplo. Un globo está subiendo a partir de un punto P. Un observador que se encuentra a 200 pies observa el globo; el ángulo θ formado por el globo aumenta a razón de $\frac{1}{20}$ de radián por segundo. Hallar la velocidad a que está aumentando la distancia del globo al suelo cuando $\theta = \pi/4$.

La imagen tiene el siguiente aspecto. En ella y es la distancia del globo al suelo:



Tenemos $\tan \theta = y/200$, de donde

$$y = 200 \cdot \tan \theta.$$

Al tomar la derivada con respecto al tiempo t tenemos

$$\frac{dy}{dt} = 200\frac{d\tan\theta}{dt}.$$

El lector probará en el ejercicio 1 que

$$\frac{d\tan\theta}{d\theta} = \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta.$$

De donde la velocidad a que $\tan\theta$ está cambiando es igual a

$$\frac{d\tan\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}(1 + \tan^2\theta).$$

Evaluada en $\theta = \pi/4$, esto nos da $\frac{1}{20}\cdot 2 = \frac{1}{10}$. De donde

$$\text{cuando } \theta = \pi/4, \frac{dy}{dt} \text{ es igual a } 200\cdot\frac{1}{10} = 20 \text{ pies por segundo.}$$

Esta es nuestra respuesta.

Ejemplo. En el ejemplo precedente, hallar la velocidad a que está aumentando la distancia del globo al suelo cuando sen $\theta = 0{,}2$.
Ya hemos visto que

$$\frac{dy}{d\theta} = 200\frac{d\tan\theta}{d\theta} = 200\left(1 + \tan^2\theta\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Cuando sen $\theta = 0{,}2$, tenemos sen$^2\,\theta = 0{,}04$, y

$$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\,\theta = 0{,}96.$$

De donde

$$\tan^2\theta = \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

Luego, cuando sen $\theta = 0{,}2$, encontramos

$$\frac{dy}{d\theta} = 200\left(1 + \frac{1}{24}\right)\frac{1}{20} = \frac{125}{12}.$$

Como $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$, encontramos que la velocidad buscada es $\frac{125}{12}$ pies/segundo.

Ejercicios

1. ¿Cuál es la derivada
   (a) de $\tan x$? (b) de $\cot x$?

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

2. $\operatorname{sen}(3x)$
3. $\cos(5x)$
4. $\operatorname{sen}(4x^2 + x)$
5. $\tan(x^3 - 5)$
6. $\tan(x^4 - x^3)$
7. $\tan(\operatorname{sen} x)$
8. $\operatorname{sen}(\tan x)$
9. $\cos(\tan x)$

10. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto de abscisa π?

Hallar la pendiente de las siguientes curvas en el punto indicado (sólo damos la abscisa del punto):

11. $y = \cos(3x)$ en $x = \pi/3$
12. $y = \operatorname{sen} x$ at $x = \pi/6$
13. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ en $x = 3\pi/4$
14. $y = \tan x$ en $x = -\pi/4$
15. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ en $x = -\pi/6$

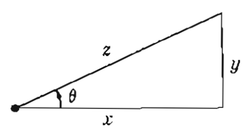
16. Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto indicado:

(a) $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/2$
(b) $y = \cos x$ en $x = \pi/6$
(c) $y = \operatorname{sen} 2x$ en $x = \pi/4$
(d) $y = \tan 3x$ en $x = \pi/4$
(e) $y = 1/\operatorname{sen} x$ en $x = \pi/2$
(f) $y = 1/\cos x$ en $x = \pi/4$
(g) $y = 1/\tan x$ en $x = \pi/4$
(h) $y = \tan \dfrac{x}{2}$ en $x = 3\pi$
(i) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$ en $x = \pi/3$
(j) $y = \cos \dfrac{\pi x}{3}$ en $x = 1$
(k) $y = \operatorname{sen} \pi x$ en $x = \frac{1}{2}$
(l) $y = \tan \pi x$ en $x = \frac{1}{6}$

17. En el siguiente triángulo rectángulo, supóngase que θ está decreciendo a razón de $\frac{1}{30}$ de radián por segundo. Hallar cada una de las derivadas que se indican:

(a) dy/dt, cuando $\theta = \pi/3$ y x es constante, $x = 12$.

(b) dz/dt, cuando $\theta = \pi/4$ si y es constante, $y = 10\sqrt{2}$.



(c) dx/dz, cuando $x = 1$ si x e y cambian ambas, pero z es constante, $z = 2$.

18. Una rueda de feria de 50 pies de diámetro efectúa una revolución cada 2 minutos. Si el centro de la rueda está a 30 pies por encima del nivel del suelo, ¿a qué velocidad se está moviendo verticalmente un pasajero cuando se encuentra a 42,5 pies sobre el suelo?

19. Un globo se eleva a partir de cierto punto P. Un observador O, situado a 300 pies, observa el globo; el ángulo θ formado por el globo aumenta a razón de 0,3 radiantes por segundo. Hallar la velocidad a la cual aumenta la distancia del globo al suelo cuando

(a) $\theta = \pi/4$,
(b) $\theta = \pi/3$,
(c) $\cos\theta = 0{,}2$,
(d) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}3$,
(e) $\tan\theta = 4$.

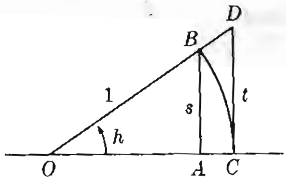
§5. Dos límites básicos

Probaremos primero que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando h tiende a 0, y no obtenemos ninguna información intentando un procedimiento de cancelación análogo al que empleamos en el caso de las potencias.

Supongamos primero que h es positivo y observemos el siguiente diagrama:



Tomamos un círculo de radio 1 y un ángulo de h radianes. Sea s la altura del triángulo pequeño y t la del triángulo grande. Entonces

$$\operatorname{sen} h = \frac{s}{1} = s$$

y

$$\tan h = \frac{t}{1} = t = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Vemos que:

área del triángulo $OAB <$ área del sector $OCB <$ área del triángulo OCD.

La base OA del triángulo pequeño es igual a $\cos h$ y su altura es $\operatorname{sen} h$.

La base OC del triángulo grande es igual a 1. Su altura es

$$t = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

El área de cada uno de los triángulos es la mitad de la base por la altura.

El área del sector es la fracción $h/2\pi$ del área del círculo, que es π. Luego el área del sector es $h/2$. Obtenemos así:

$$\frac{1}{2}\cos h \operatorname{sen} h < \frac{1}{2} h < \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Multiplicamos todos los miembros por 2 y obtenemos:

$$\cos h \operatorname{sen} h < h < \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Aquí hay realmente dos desigualdades. La primera es

$$\cos h \operatorname{sen} h < h.$$

Como h es positiva, podemos dividirla por h y luego dividir por $\cos h$, que es también positivo. Esto nos da

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} < \frac{1}{\cos h}.$$

La segunda desigualdad es

$$h < \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

La multiplicamos por $\cos h$ y la dividimos por h para obtener

$$\cos h < \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Juntando nuestras dos desigualdades, tenemos

$$\cos h < \frac{\operatorname{sen} h}{h} < \frac{1}{\cos h}.$$

Ya tenemos casi ganado el juego. Cuando h tiende a 0, vemos que $(\operatorname{sen} h)/h$ se encuentra comprimida entre dos magnitudes que tienden a 1. Por consiguiente, también debe tender a 1, y nuestra prueba está completa.

Tenemos aún que considerar el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

y mostrar que es 0. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)}.\end{aligned}$$

Podemos escribir esta última expresión en la forma

$$-\frac{\operatorname{sen} h}{h} (\operatorname{sen} h) \frac{1}{\cos h + 1}.$$

Usando la propiedad concerniente a los productos de límites, tenemos un producto de tres factores. El primero es

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

y tiende a -1 cuando h tiende a 0.

El segundo es sen h y tiende a 0 cuando h tiende a 0.

El tercero es

$$\frac{1}{\cos h + 1}$$

y su límite es $\frac{1}{2}$ cuando h tiende a 0.

Por tanto, el límite del producto es 0 y todo está probado.

Todavía queda algo de que ocuparnos. Calculamos nuestro límite cuando $h > 0$. Supongamos que $h < 0$. Podemos escribir

$$h = -k$$

con $k < 0$. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(-k)}{-k} = \frac{-\operatorname{sen} k}{-k} = \frac{\operatorname{sen} k}{k}.$$

Cuando h tiende a 0, también lo hace k. Con lo que hemos reducido el límite a nuestro anterior caso, puesto que $k > 0$. Una observación análoga se aplica a nuestro límite, en que aparece cos h.

Partiendo de estos dos límites básicos podemos obtener otros con los que se encuentran relacionados.

Ejemplo. Encontrar el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tan^2 h}{h^2}.$$

Para hallar este límite escribimos $\tan h = \operatorname{sen} h/\cos h$. Debemos por tanto encontrar el límite, cuando h tiende a 0, de

$$\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h^2} \frac{1}{\cos^2 h}.$$

Podemos usar el teorema concerniente al producto de límites, aplicado a los factores

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h}, \quad \frac{\operatorname{sen} h}{h}, \quad \frac{1}{\cos^2 h}.$$

Encontramos así que el límite buscado es igual a 1. Un argumento análogo prueba que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{h} = 1.$$

Ejemplo. Queremos determinar

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{\operatorname{sen} h}.$$

Tenemos

$$\frac{\tan h}{\operatorname{sen} h} = \frac{\tan h}{h} \frac{h}{\operatorname{sen} h}.$$

Usando el teorema concerniente a los límites de productos y cocientes, encontramos que este límite es igual a 1.

Ejercicios

Hallar los siguientes límites cuando h tiende a 0.

1. $\dfrac{\operatorname{sen} 2h}{h}$ $\left[\textit{Sugerencia:} \text{ Igualar } k = 2h. \text{ Entonces } \dfrac{\operatorname{sen} 2h}{h} = 2\dfrac{\operatorname{sen} k}{k}.\right]$

2. $\dfrac{\operatorname{sen} 3h}{h}$

3. $\dfrac{\operatorname{sen} h}{3h}$

4. $\dfrac{\tan h}{\operatorname{sen} h}$

5. $\dfrac{\cos 2h}{1 + \operatorname{sen} h}$

6. $\dfrac{\operatorname{sen} h^2}{h}$

7. $\dfrac{\operatorname{sen} 2h^2}{3h}$

8. $\dfrac{\operatorname{sen} h^3}{h^3}$

9. $\dfrac{\operatorname{sen} 2h^3}{h^3}$

10. $\dfrac{h \operatorname{sen} h}{\operatorname{sen} 2h^2}$

11. $\dfrac{(\operatorname{sen} h)(\operatorname{sen} 2h)}{(\operatorname{sen} 3h)h}$

12. $\dfrac{\tan h}{h \cos h}$

13. $\dfrac{\tan^2 h}{h \operatorname{sen} h}$

14. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 h}{h \tan h}$

15. $\dfrac{\tan^3 h}{h^2 \operatorname{sen} h \cos h}$

16. $\dfrac{(\operatorname{sen} h)(\tan h)}{h^2}$

17. $\dfrac{\operatorname{sen} h}{1 - \cos h}$

18. $\dfrac{\tan h}{1 - \cos h}$

CAPITULO V

El teorema del valor medio

Dada una curva $y = f(x)$, usaremos la derivada para obtener información sobre la curva. Por ejemplo, encontraremos el máximo y el mínimo de la gráfica, y las regiones en donde la curva es creciente o decreciente. Usaremos el teorema del valor medio, que es básico en la teoría de las derivadas.

§1. El teorema de máximo y el mínimo

Sea f una función derivable. Un punto c tal que $f'(c) = 0$ se llama **punto crítico** de la función. El hecho de que la derivada sea cero significa que la pendiente de la recta tangente es 0; es decir, que la recta tangente es horizontal. Hemos dibujado tres ejemplos de este fenómeno.

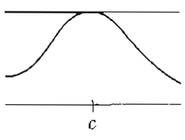


Figura 1

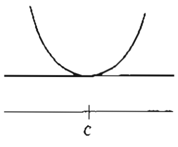


Figura 2

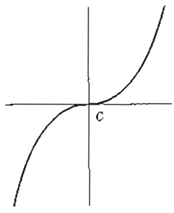


Figura 3

El tercer ejemplo es el de una función como $f(x) = x^3$. Tenemos $f'(x) = 3x^2$ y, por tanto, cuando $x = 0$, $f'(0) = 0$.

Los otros dos ejemplos son los de un máximo y un mínimo, respectivamente, si consideramos la gráfica de la función solamente en las proximidades del punto c. Formalizaremos ahora todos estos conceptos.

Sean a, b dos números con $a < b$. Trataremos repetidamente del intervalo de números entre a y b. Algunas veces deseamos incluir los puntos extremos a y b, y algunas veces no. Recordamos la terminología estándar.

La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b.

La colección de números x tales que $a \leqq x \leqq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b. Denotamos este intervalo cerrado por los símbolos $[a, b]$. (Un solo punto se llama también intervalo cerrado.)

Si deseamos incluir solamente un punto extremo, decimos que el intervalo es **semicerrado.** Tenemos desde luego dos intervalos semicerrados, a saber: el que consiste en los números x tales que $a \leqq x < b$ y el que consiste en los números x tales que $a < x \leqq b$.

Algunas veces, si a es un número, llamamos a la colección de números $x > a$ (o $x < a$) un intervalo abierto. El contexto aclarará todo esto.

Sea f una función y c un número en el que f está definida. Decimos que c es un **máximo** de la función si

$$f(c) \geqq f(x)$$

para todos los números x en que f está definida. Si tenemos solamente $f(c) \geqq f(x)$ para todos los números x de un cierto intervalo, entonces decimos que **la función f tiene un máximo en c en ese intervalo.**

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \text{sen}\, x$. Entonces, f tiene un máximo en $\pi/2$ porque $f(\pi/2) = 1$ y $\text{sen}\, x \leqq 1$ para todos los valores de x. Esto se ilustra en la fig. 4. Nótese que $-3\pi/2$ es también un máximo para sen x.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = 2x$, y consideremos f como la función definida solamente en el intervalo

$$0 \leqq x \leqq 2.$$

Entonces la función tiene un máximo en 2 en este intervalo porque $f(2) = 4$ y $f(x) \leqq 4$ para todo x en el intervalo. Esto se ilustra en la fig. 5.

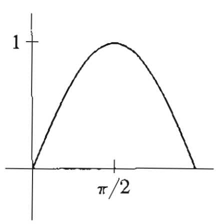


Figura 4

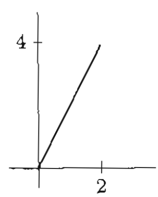


Figura 5

Ejemplo 3. Sea $f(x) = 1/x$. Sabemos que f no está definida para $x = 0$. Esta función no tiene máximo alguno. Se hace arbitrariamente grande cuando x tiende a 0 y $x > 0$. Esto se ilustra en la fig. 6.

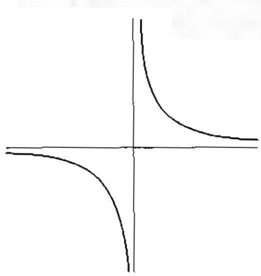


Figura 6

Sea f una función. Decimos que f **tiene un máximo en** c si $f(c) \leqq f(x)$ para todo x en que la función está definida.

Ilustramos varios mínimos con las gráficas de ciertas funciones.

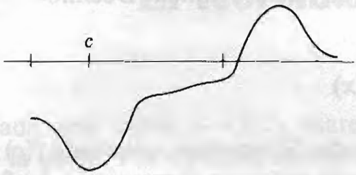


Figura 7

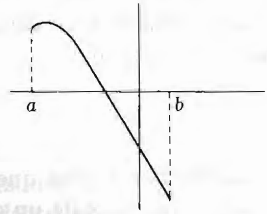


Figura 8

En la fig. 7 la función tiene un mínimo. En la fig. 8 el mínimo está en el punto extremo del intervalo. En las figs. 3 y 6 la función no tiene mínimo alguno.

En el siguiente dibujo, el punto c_1 parece como un máximo y el punto c_2 como un mínimo, siempre y cuando que permanezcamos próximos a dichos puntos y no consideremos lo que sucede a la curva cuando nos alejamos de ellos.

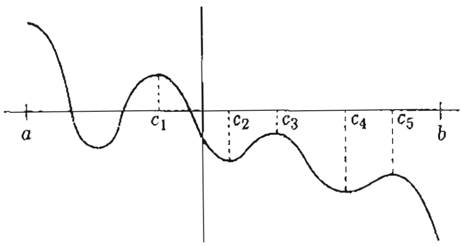


Figura 9

Hay un nombre para tales puntos. Se dice que un punto c es un **mínimo local** de la función f si existe un intervalo

$$a_1 < c < b_1$$

tal que $f(c) \leqq f(x)$ para todos los números x con $a_1 \leqq x \leqq b_1$.

Definimos análogamente el concepto de **máximo local.** (Formule el lector la definición.) En la fig. 9, el punto c_3 es un máximo local, el c_4 es un mínimo local y el c_5 es un máximo local.

El máximo y el mínimo reales aparecen en los puntos extremos.

Usando las propiedades básicas de los números, se puede probar el siguiente teorema que es, sin embargo, más bien obvio, por lo que omitimos su prueba.

Teorema 1. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un punto en el intervalo en donde f tiene un máximo y existe también un punto donde f tiene un mínimo.*

Como hemos mencionado, el punto en que f tiene un máximo puede aparecer en los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, cuando un punto tal no está en un extremo y la función es derivable, entonces hay una situación análoga a la de las figs. 4 ó 9, donde vemos que la tangente a la curva en ese punto es una recta horizontal; en otras palabras, la derivada de la función es 0. Podemos probar esto como un teorema.

Teorema 2. *Sea f una función que está definida y es derivable en el intervalo abierto $a < x < b$. Sea c un número en el intervalo en el que la función tiene un máximo o un mínimo local. Entonces,*

$$f'(c) = 0.$$

Demostración. Damos la prueba para el caso de un máximo local. Si tomamos pequeños valores de h (positivos o negativos), el número $c + h$ se encontrará en el intervalo

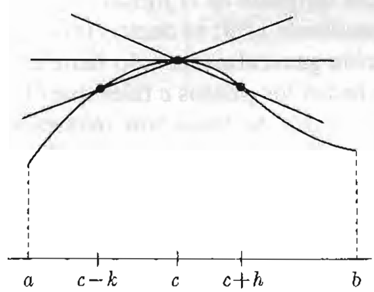


Figura 10

Tomemos primero un h positivo (véase la fig. 10). Debemos tener

$$f(c) \geqq f(c + h)$$

no importa cuál sea h (con tal de que sea pequeño). Por tanto, $f(c + h) - f(c) \leqq 0$. Como $h > 0$, el cociente de Newton

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

es $\leqq 0$. Luego el límite es $\leqq 0$, o, en símbolos:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqq 0.$$

Tomemos ahora h negativo, digamos $h = -k$ con $k > 0$. Entonces

$$f(c - k) - f(c) \leqq 0, \qquad f(c) - f(c - k) \geqq 0$$

y el cociente es

$$\frac{f(c - k) - f(c)}{-k} = \frac{f(c) - f(c - k)}{k}.$$

Así, pues, el cociente de Newton es $\geqslant 0$. Tomando el límite cuando h (o k) tiende a 0, vemos que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0.$$

La única forma en que nuestros dos límites pueden ser iguales es que ambos sean 0. Por tanto, $f'(c) = 0$.

Podemos interpretar nuestro argumento geométricamente diciendo que la recta que une los dos puntos se inclina hacia la izquierda cuando tomamos $h > 0$ y se inclina hacia la derecha cuando tomamos $h < 0$. Cuando h tiende a 0, ambas rectas deben aproximarse a la recta tangente a la curva. La única forma en que esto es posible es que la recta tangente en el punto cuya abscisa es c sea horizontal. Quiere esto decir que su pendiente es 0; es decir, $f'(c) = 0$.

En la práctica, una función generalmente sólo tiene un número finito de puntos críticos y es fácil encontrar todos los puntos c tales que $f'(c) = 0$. Se puede entonces determinar por inspección cuáles de éstos son máximos, cuáles son mínimos y cuáles no son ni una cosa ni la otra.

Ejemplo 1. Hallar los puntos críticos de la función $f(x) = x^3 - 1$.

Tenemos, $f'(x) = 3x^2$. Aquí hay solamente un punto crítico, a saber, $x = 0$.

Ejemplo 2. Hallar los puntos críticos de la función

$$y = x^3 - 2x + 1.$$

La derivada es $3x^2 - 2$. Es igual a 0 precisamente cuando

$$x^2 = \tfrac{2}{3},$$

lo cual significa que se ha de tener $x = \sqrt{2/3}$ o $x = -\sqrt{2/3}$. Estos son los puntos críticos.

Ejemplo 3. Hallar los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

Los máximos y mínimos locales deben ser puntos críticos; tenemos, por tanto, sólo dos posibilidades: las encontradas en el ejemplo 2. Estas son $x = \sqrt{2/3}$ y $x = -\sqrt{2/3}$. Hagamos una pequeña tabla de valores de nuestra función:

x	y
0	1
-1	2
-2	-3
1	0
2	5

Por inspección, se debe poder ver que $\sqrt{2/3}$ debe ser un mínimo local. Se dará un argumento más riguroso en el ejemplo 2, §3.

Análogamente, debe estar claro que $-\sqrt{2/3}$ es un máximo local. El esquema de la gráfica es parecido al que sigue:

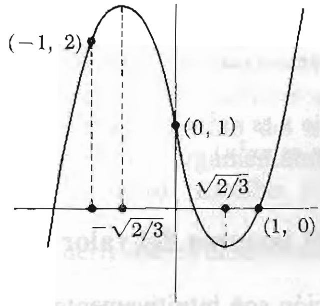


Figura 11

Ejemplo 4. Demostrar que entre todas las cercas rectangulares de longitud fija, la que comprende el área máxima debe ser un cuadrado.

Para resolver esto, sea c la longitud fija y x uno de los lados. Si y es el otro lado, entonces

$$2x + 2y = c,$$

de forma que $y = (c - 2x)/2$. Por tanto, el área rodeada por la cerca es igual a

$$xy = \frac{x(c-2x)}{2} = \frac{xc - 2x^2}{2} = A(x).$$

Esta área $A(x)$ es una función de x, que tiene un punto crítico cuando $A'(x) = 0$. Pero

$$A'(x) = \tfrac{1}{2}(c - 4x).$$

Luego $A'(x) = 0$ precisamente cuando $c = 4x$; es decir, $x = c/4$. Esto debe ser un máximo, porque cuando x se hace más grande, $xc - 4x^2$ se hace un número negativo grande y la gráfica de $A(x)$ es una parábola. Encontramos que cuando $x = c/4$, también $y = c/4$; en otras palabras, la cerca debe ser un cuadrado.

Ejercicios

Encuéntrense los puntos críticos de las siguientes funciones:

1. $x^2 - 2x + 5$
2. $2x^2 - 3x - 1$
3. $3x^2 - x + 1$
4. $-x^2 + 2x + 2$
5. $-2x^2 + 3x - 1$
6. $x^3 + 2$
7. $x^3 - 3x$
8. $\operatorname{sen} x + \cos x$

9. $\cos x$ 10. $\operatorname{sen} x$

11. Una caja con su parte superior abierta ha de tener la base cuadrada y una superficie constante C. Determinar los lados de la caja si el volumen ha de ser máximo.
12. Un recipiente de forma cilíndrica con su parte superior abierta ha de tener una superficie de área fija C. Hallar el radio de su base y su altura si queremos que tenga el máximo volumen.
13. Resolver los dos problemas anteriores si la caja y el recipiente son cerrados en su parte superior.

(El área de un círculo de radio x es πx^2 y su longitud es $2\pi x$. El volumen de un cilindro cuya base tiene radio x y altura y, es $\pi x^2 y$.)

§2. El teorema del valor medio

Los teoremas de esta sección son intuitivamente bastante obvios y, por tanto, si el lector lo desea, puede omitir sus pruebas una vez que sus enunciados han sido totalmente comprendidos.

Supongamos primero que tenemos una función en un intervalo cerrado $[a, b]$, cuya gráfica tiene el siguiente aspecto:

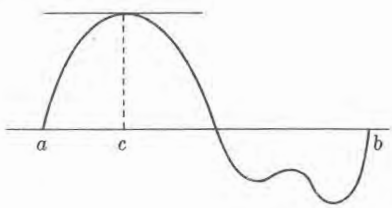


Figura 12

Entonces tenemos el siguiente teorema sobre una función como ésta:

Teorema 3 (teorema de Rolle). *Sean a, b dos números, $a < b$. Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado*

$$a \leqq x \leqq b$$

y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$. Supongamos que

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Entonces existe un punto c tal que

$$a < c < b$$

y $f'(c) = 0$.

Demostración. Si la función es constante en el intervalo, entonces su derivada es 0 en cualquier punto del intervalo abierto $a < x < b$, luego cualquier punto sirve.

Si la función no es constante, entonces existe algún punto en el intervalo en donde la función no es 0, y este punto no puede ser ninguno de los extremos a o b. Supongamos que algún valor de nuestra función es positivo. Por el teorema 1, la función tiene un máximo en un punto c. Luego $f(c)$ debe ser mayor que 0, y c no puede estar en ninguno de los puntos extremos. Por consiguiente,

$$a < c < b.$$

Por el teorema 2, debemos tener $f'(c) = 0$. Esto prueba nuestro teorema en el caso en que la función es positiva en algún punto del intervalo.

Si la función es negativa en algún punto del intervalo, entonces usamos el teorema 1 para obtener un mínimo y argumentamos de forma análoga usando el teorema 2 (aplicado a un mínimo). (Escribir el argumento completo como ejercicio.)

Sea $f(x)$ una función que es derivable en el intervalo cerrado.

$$a \leqq x \leqq b.$$

Continuamos con la hipótesis de que $a < b$. Esta vez no suponemos, como en el teorema 3, que $f(a) = f(b) = 0$. Probaremos que existe un punto c entre a y b tal que la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ es igual a la pendiente de la recta entre los puntos extremos de nuestra gráfica. En otras palabras, la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los extremos de la gráfica.

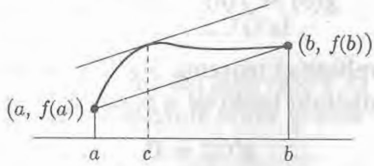


Figura 13

La pendiente de la recta que pasa por los extremos es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

debido a que las coordenadas de los extremos son $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ respectivamente. Tenemos, pues, que encontrar un punto c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 4. *Sea $a < b$ como antes. Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$ y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$. Entonces existe un punto c tal que $a < c < b$ y*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. La ecuación de la recta entre los puntos extremos es

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Vemos que la pendiente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es el coeficiente de x. Cuando $x = a$, $y = f(a)$. Hemos, pues, escrito la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por uno de los puntos dados. Cuando $x = b$ notamos que $y = f(b)$.

Consideramos ahora geométricamente la diferencia entre $f(x)$ y la recta. En otras palabras, consideramos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Entonces

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

y

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

también.

Podemos, por tanto, aplicar el teorema 3 a la función $g(x)$. Sabemos que hay un punto c entre a y b, y distinto tanto de a como de b, tal que

$$g'(c) = 0$$

pero

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por consiguiente,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esto nos da el valor deseado para $f'(c)$.

La diferencia entre $f(x)$ y la recta se hace igual a 0 en los púntos extremos. Esta es la idea geométrica que nos permite aplicar el teorema 3.

El punto del teorema del valor medio no es tanto encontrar explícitamente un valor c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

como utilizarlo para las consideraciones teóricas de la siguiente sección. En la sección siguiente aparecen, pues, aplicaciones y ejercicios en los que entrará en juego.

§3. Funciones crecientes y decrecientes

Sea f una función definida en cierto intervalo (que puede ser abierto o cerrado). Se dice que f es **creciente** en este intervalo si

$$f(x_1) \leqq f(x_2)$$

siempre que x_1 y x_2 sean dos puntos del intervalo tales que

$$x_1 \leqq x_2.$$

Así, pues, si un número se encuentra a la derecha de otro, el valor de la función en el número más grande debe ser mayor o igual que el valor de la función en el número más pequeño.

En la siguiente figura hemos dibujado la gráfica de una función creciente.

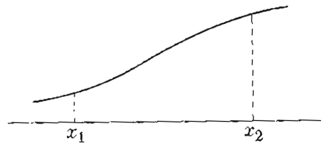


Figura 14

Decimos que una función definida en cierto intervalo es **decreciente** en este intervalo si

$$f(x_1) \geqq f(x_2)$$

siempre que x_1 y x_2 sean dos puntos del intervalo y $x_1 \leqq x_2$.

Obsérvese que una función constante (cuya gráfica es una horizontal) es **tanto** creciente como decreciente.

Si queremos omitir el signo de igualdad en nuestras definiciones utilizamos la palabra **estrictamente** para calificar el decrecimiento o el crecimiento. Así, **una** función f es **estrictamente creciente** si

$$f(x_1) < f(x_2)$$

siempre que $x_1 < x_2$, y f es **estrictamente decreciente** si

$$f(x_1) > f(x_2)$$

siempre que $x_1 < x_2$.

Supongamos que una función tiene una derivada positiva en todos los puntos de un intervalo, como se muestra, por ejemplo, en la fig. 14. Entonces podemos interpretar esto como significando que la razón de cambio de la función es siempre positiva y, por tanto, la función es creciente.

Si el lector está interesado en una prueba formal, le mostraremos ahora cómo conseguir tal prueba usando el teorema del valor medio.

Teorema 5. *Sea f una función que es continua en cierto intervalo y derivable en el intervalo (excluyendo los extremos).*

Si $f'(x) = 0$ en el intervalo (excluyendo los extremos), entonces f es constante.

Si $f'(x) > 0$ en el intervalo (excluyendo los extremos), entonces f es estrictamente creciente.

Si $f'(x) < 0$ en el intervalo (excluyendo los extremos), entonces f es estrictamente decreciente.

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos del intervalo y supongamos $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, existe un punto c tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La diferencia $x_2 - x_1$ es positiva, y tenemos

$$(1) \qquad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Si la derivada de la función es 0 en todos los puntos del intervalo, excluyendo los extremos, entonces el segundo miembro de (1) es igual a 0 y, por tanto, $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que, dados dos puntos cualesquiera del intervalo, los valores de la función son iguales y, por tanto, la función es constante.

Si la derivada $f'(x)$ es >0 para todo x en el intervalo, excluyendo los extremos, entonces $f'(c) > 0$ (porque c está en el intervalo). Por tanto, el producto $(x_2 - x_1) f'(c)$ es positivo y

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Esto prueba que la función es creciente.

Dejamos la prueba de la última afirmación como ejercicio.

En el resto de este capítulo y en el siguiente trataremos principalmente de las afirmaciones del teorema 5 concernientes a las funciones crecientes y decrecientes. Sin embargo, la primera afirmación tiene una consecuencia importante que usaremos muchísimo cuando tratemos de la integración. La enunciamos como un corolario.

Corolario. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en cierto intervalo tales que*

$$f'(x) = g'(x)$$

para todo x en el intervalo. Entonces hay una constante C tal que

$$f(x) = g(x) + C$$

para todo x en el intervalo.

Demostración. Sea $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ la diferencia de nuestras dos funciones. Entonces

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Luego $\varphi(x)$ es constante; es decir, $\varphi(x) = C$ para cierto número C. Esto prueba nuestro corolario.

Para las aplicaciones de este corolario, véase el comienzo del capítulo sobre logaritmos y también el comienzo del capítulo X, §1.

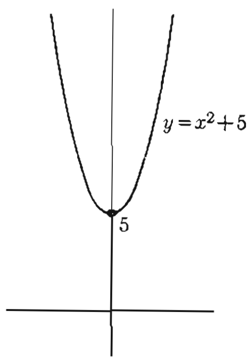
Pasamos ahora a ver cómo puede usarse el teorema 5 para determinar intervalos donde una función es creciente o decreciente.

Ejemplo 1. Determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento para la función $f(x) = x^2 + 5$.

La derivada es $f'(x) = 2x$. Es >0 cuando $x > 0$ y, por tanto, f es estrictamente creciente cuando $x > 0$. La derivada es negativa cuando $x < 0$, de donde f es estrictamente decreciente cuando $x < 0$. Cuando $x = 0$, tenemos

$$f(x) = 5.$$

La gráfica de f, por tanto, tiene este aspecto:



Ejemplo 2. Determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento para la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

La derivada es $3x^2 - 2$. La condición

$$3x^2 - 2 > 0$$

es equivalente a $3x^2 > 2$ ó $x^2 > 2/3$. Así, pues, cuando $x > \sqrt{2/3}$ ó $-x > \sqrt{2/3}$, tenemos $x^2 > 2/3$. La función es estrictamente creciente cuando $x > \sqrt{2/3}$ y cuando $x < -\sqrt{2/3}$.

La condición

$$f'(x) < 0$$

es equivalente a

$$3x^2 - 2 < 0$$

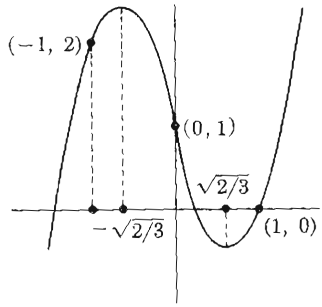
o

$$x^2 < 2/3.$$

Así, pues, la función es decreciente cuando

$$-\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}.$$

Nótese que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Podemos, por tanto, dibujar la gráfica de f como sigue.



Ejemplo 3. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el de menor perímetro es el cuadrado.

Sea a el área dada, y sea x la longitud de un lado del posible rectángulo de área a. Tomamos $0 < x$. Si y es la longitud del otro lado, entonces $xy = a$, luego $y = a/x$ es la longitud del otro lado. De donde

$$f(x) = 2\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

es el perímetro. Tenemos

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{a}{x^2}\right),$$

de forma que $f'(x) = 0$ precisamente cuando $x^2 = a$; es decir, cuando $x = \sqrt{a}$ (porque sólo consideramos $x > 0$). Cuando $0 < x < \sqrt{a}$, se ve que $f'(x) < 0$, luego f es decreciente, y cuando $x > \sqrt{a}$, se ve que $f'(x) > 0$, luego f es creciente. Por tanto, $x = \sqrt{a}$ es un mínimo para f, y en ese caso $y = \sqrt{a}$ también, probando así que el rectángulo es un cuadrado.

Ejemplo 4. Una función f tiene una derivada igual a

$$f'(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3).$$

Determinar los intervalos en que la función es creciente.

Consideramos los intervalos $x < -3$, $-3 < x < 1$, $1 < x < 2$ y $x > 2$, sucesivamente. En el intervalo $x < -3$, todos los tres factores $(x - 1)$, $x - 2$, $x + 3$ son negativos y, por tanto, $f'(x) < 0$, de forma que la función es decreciente. En el intervalo $-3 < x < 1$, los factores $x - 1$ y $x - 2$ son negativos, pero $x + 3$ es positivo. Por tanto, la derivada $f'(x)$ es positiva y la función es creciente. Análogamente, la función es decreciente en $1 < x < 2$, y creciente para $x > 2$.

Ejemplo 5. Determinar los intervalos sobre los que la función

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$$

es creciente y decreciente.

Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 10x \\ &= x(3x + 10). \end{aligned}$$

La derivada $f'(x)$ es, por tanto, igual a 0 precisamente cuando $x = 0$ ó $x = -10/3$.

Cuando

$$x < -\tfrac{10}{3},$$

los dos factores x y $3x + 10$ son negativos y, por tanto, $f'(x)$ es positiva y f estrictamente creciente. Análogamente, vemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad \text{si} \quad -\tfrac{10}{3} < x < 0, \\ f'(x) &> 0 \quad \text{si} \quad 0 < x. \end{aligned}$$

Luego f es estrictamente decreciente en el intervalo $-10/3 < x < 0$ y estrictamente creciente en el intervalo $0 < x$.

Ejemplo 6. Probar que sen $x \leqq x$ para $x \geqq 0$.

Hagamos $f(x) = x - \text{sen } x$. Entonces $f(0) = 0$. Además,

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

Como $\cos x \leqq 1$ para todo x, se sigue que $f'(x) \geqq 0$ para todo x. Luego $f(x)$ es una función creciente. Luego $f(x) \geqq 0$ para todo $x \geqq 0$ y, por tanto, sen $x \leqq x$.

El ejemplo 6 ilustra una técnica que es útil para probar ciertas desigualdades entre funciones. En general:

Supongamos que tenemos dos funciones f y g sobre cierto intervalo $[a, b]$ y supongamos que f, g son derivables. Supongamos que $f(a) \leqq g(a)$ y que $f'(x) \leqq g'(x)$ en todo el intervalo. Entonces $f(x) \leqq g(x)$ en el intervalo.

Vemos esto exactamente igual que en el ejemplo 3. Hacemos

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Entonces $h'(x) \geqq 0$, luego h es creciente en el intervalo y como

$$h(a) = g(a) - f(a) \geqq 0,$$

se sigue que $h(x) \geqq 0$ en el intervalo, de donde

$$g(x) \geqq f(x).$$

El principio que acabamos de enunciar puede visualizarse en el siguiente dibujo, trazado para el caso en que $f(a) = g(a)$.

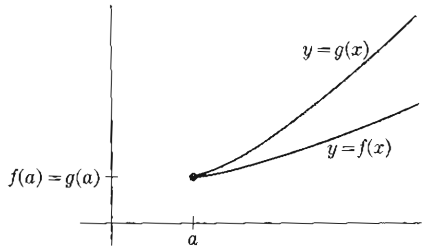


Figura 15

Ejemplo 7. Demostrar que para cualquier entero $n \geqq 1$ y cualquier número $x \geqq 1$, se tiene la desigualdad $x^n - 1 \geqq n(x - 1)$.

Sea $f(x) = x^n - 1$ y $g(x) = n(x - 1)$. Entonces, $f(1) = g(1) = 0$. Por otra parte,

$$f'(x) = nx^{n-1}, \qquad g'(x) = n.$$

Si $x = 1$, nuestra desigualdad es obvia. Si $x \geqq 1$, entonces $nx^{n-1} \geqq n$ porque $x \geqq 1$. De donde concluimos que $f(x) \geqq g(x)$ para todo $x \geqq 1$.

Ejemplo 8. Hallar sobre la gráfica de la ecuación $y^2 = 4x$ el punto que está más próximo al punto $(2, 3)$.

Para minimizar la distancia entre un punto (x, y) y $(2, 3)$ es suficiente minimizar el cuadrado de la distancia, lo que tiene la ventaja de que en su fórmula no aparece raíz cuadrada alguna. El cuadrado de la distancia es igual a

$$(2 - x)^2 + (3 - y)^2.$$

Substituyendo $y = 2\sqrt{x}$, encontramos una expresión para el cuadrado de la distancia solamente en términos de x, a saber:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2 - x)^2 + (3 - 2\sqrt{x})^2 \\ &= 4 - 4x + x^2 + 9 - 12\sqrt{x} + 4x \\ &= 13 + x^2 - 12\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Determinamos ahora los puntos críticos de f. Tenemos

$$f'(x) = 2x - \frac{6}{\sqrt{x}},$$

y esto es igual a 0 precisamente cuando

$$x^{3/2} = 3,$$

o, en otras palabras, $x = \sqrt[3]{9}$. Por inspección de la fig. 16 vemos que este valor de x nos da el mínimo y el correspondiente valor de y es

$$y = 2\sqrt{x} = 2\sqrt[3]{3}.$$

De donde el punto de la gráfica de $y^2 = 4x$ más próximo a (2, 3) es el punto

$$P = (\sqrt[3]{9},\ 2\sqrt[3]{3}).$$

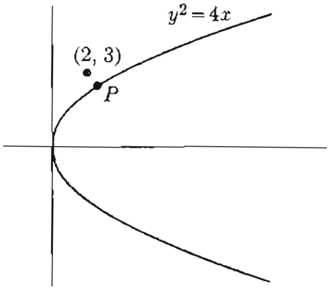


Figura 16

Ejemplo 9. Cuando la luz proveniente de un punto luminoso choca con una superficie plana, la intensidad de la iluminación es proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia respecto de la fuente. ¿A qué altura debe estar colocada una luz por encima del centro de un círculo de 12 pies de radio para obtener la mejor iluminación a lo largo de la circunferencia?

La gráfica de la situación es como sigue:

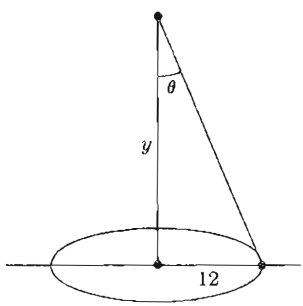


Figura 17

Denotamos por θ el ángulo de incidencia y por y la altura de la luz. Sea I la intensidad de la iluminación. Entonces hay una constante c tal que

$$\begin{aligned} I(y) &= c\,\frac{1}{12^2 + y^2}\,\frac{y}{\sqrt{12^2 + y^2}} \\ &= \frac{cy}{(12^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de $I(y)$ son aquellos en que $I'(y) = 0$. Tenemos:

$$I'(y) = c\left[\frac{(12^2 + y^2)^{3/2} - y \cdot \frac{3}{2}(12^2 + y^2)^{1/2}(2y)}{(12^2 + y^2)^3}\right],$$

y esta expresión es igual a 0 precisamente cuando el numerador es igual a 0; es decir, cuando

$$(12^2 + y^2)^{3/2} = 3y^2(12^2 + y^2)^{1/2}.$$

Cancelando $(12^2 + y^2)^{1/2}$, vemos que esto es equivalente a

$$12^2 + y^2 = 3y^2,$$

o, en otras palabras, a

$$12^2 = 2y^2.$$

Despejando y tenemos

$$y = \pm \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Solamente el valor positivo de y tiene significado físico y así vemos que la altura que nos daría la máxima intensidad es $12/\sqrt{2}$ pies.

Ejercicios

Determinar los intervalos en que son crecientes y decrecientes cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^3 + 1$
2. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
3. $f(x) = x^2 - x + 5$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
5. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$
6. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
7. $f(x) = x^3 + x - 2$
8. $f(x) = -x^3 + 2x + 1$
9. $f(x) = 2x^3 + 5$
10. $f(x) = 5x^2 + 1$
11. Considerar solamente valores de $x \geqq 0$, y sean

$$f_1(x) = x - \operatorname{sen} x \qquad f_2(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$f_3(x) = -x + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \operatorname{sen} x \qquad f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \cos x$$

$$f_5(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \operatorname{sen} x.$$

(a) Determinar si $f_1(x)$ es creciente o decreciente. Usando el valor de $f_1(x)$ en 0, demostrar que $\operatorname{sen} x \leqq x$.

(b) Determinar cuáles de las otras funciones son crecientes y cuáles decrecientes. Usando el valor de cada función en 0, probar las siguientes desigualdades:

$$x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} \leqq \operatorname{sen} x \leqq x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqq \cos x \leqq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

(c) Mostrar cómo puede proseguirse el anterior procedimiento para obtener desigualdades adicionales para sen x y cos x. Dar la fórmula general.

12. Supongamos que hay una función $f(x)$ tal que $f(x) \neq 0$ para cualquier x y $f'(x) = f(x)$. Sea $g(x)$ una función cualquiera tal que $g'(x) = g(x)$. Demostrar que hay una constante C tal que $g(x) = Cf(x)$. [*Sugerencia:* Derivar el cociente g/f.]

Para cada una de las siguientes funciones hallar el máximo, el mínimo (a) para todo x, y (b) en el intervalo dado. También (c) hallar en dónde cada función es creciente y en dónde decreciente.

13. $x^2 - 2x - 8$, $[0, 4]$
14. $x^2 - 2x + 1$, $[-1, 4]$
15. $4 - 4x - x^2$, $[-1, 4]$
16. $x - x^2$, $[-1, 2]$
17. $3x - x^3$, $[-2, \sqrt{3}]$
18. $(x - 4)^5$, $[3, 6]$
19. $x^4 - 2x^2$, $[-2, 1]$
20. $(x - 1)^{1/3} + \frac{1}{2}(x + 1)^{2/3}$, $[-2, 7]$
21. $x^{2/5} + 1$, $[-1, 1]$
22. $\sqrt{x^2 + 1}$, $[0, \sqrt{8}]$

23. Sean f, g dos funciones derivables en un intervalo abierto $a < x < b$. Supongamos que $f'(x) > g'(x)$ para todo x en este intervalo y que existe un número c en este intervalo tal que $f(c) = g(c)$. Demostrar que si x es un punto en el intervalo, entonces $f(x) > g(x)$ si $x > c$, y $f(x) < g(x)$ si $x < c$.
24. Sea f una función que es derivable infinitamente. Sean $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$ números tales que $f(c_i) = 0$ para todo i. Demostrar que f' tiene al menos $r - 1$ ceros (es decir, números b tales que $f'(b) = 0$.)
25. Aplicar el ejercicio precedente a un polinomio

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números y $a_n \neq 0$. Concluir que un polinomio tal tiene cuando más n raíces. [*Sugerencia:* ¿Cuál es la n-ésima derivada de f?)

26. Demostrar que, entre todos los triángulos de un área dada, el triángulo equilátero es el de menor perímetro.

Ejercicios suplementarios

1. Hallar la longitud de los lados de un rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo, siendo su base inferior el diámetro.
2. Una caja rectangular tiene una base cuadrada y no tiene tapa. El área combinada de los

lados y el fondo es de 48 pies cuadrados. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen que cumpla estos requerimientos.

3. Probar que entre todos los rectángulos de un área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.
4. Un camión se debe conducir durante 300 millas a una velocidad constante de x millas por hora. Las leyes sobre velocidad requieren que $30 \leqq x \leqq 60$. Supongamos que la gasolina cuesta 30 centavos por galón y que se consume a razón de $2 + x^2/600$ galones por hora. Si el salario del conductor es de D dólares por hora, hallar la velocidad más económica y el costo del viaje si (a) $D = 0$, (b) $D = 1$, (c) $D = 2$; (d) $D = 3$, (e) $D = 4$.
5. Un rectángulo ha de tener un área de 64 pulgadas cuadradas. Hallar sus dimensiones, de forma que la distancia desde una de sus esquinas al punto medio de un lado no adyacente sea mínima.
6. Expresar el número 4 como la suma de dos números positivos, de tal forma que sea tan pequeña como se pueda la suma del cuadrado del primero y el cubo del segundo.
7. Un alambre de 24 pulgadas de largo se corta en dos y una parte se dobla en forma de círculo y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo deberíamos cortarlo para que la suma de las áreas del círculo y el cuadrado sea (a) un mínimo, (b) un máximo?
8. Hallar el punto de la gráfica de la ecuación $y^2 = 4x$ más próximo al punto $(2, 1)$.
9. Hallar los puntos de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ más próximos al punto $(0, 1)$.
10. Demostrar que $(2, 2)$ es el punto en la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 3x$ que está más cercano al punto $(11, 1)$.
11. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 16$ que son más cercanos al punto $(0, 6)$.
12. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = x + 1$ que se encuentran más cerca del origen.
13. Hallar las coordenadas del punto sobre la curva $y^2 = \frac{5}{2}(x + 1)$ que está más cercano al origen.
14. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y = 2x^2$ que están más próximos al punto $(9, 0)$.
15. Un anillo circular de radio b está uniformemente cargado de electricidad, siendo la carga total Q. La fuerza ejercida por esta carga sobre una partícula a una distancia x del centro del anillo, en la dirección perpendicular al plano del anillo, está dada por $F(x) = Qx(x^2 + b^2)^{-3/2}$. Hallar el máximo de F para todo $x \geqq 0$.
16. Sea F la razón de flujo de agua sobre cierto vertedero. Supongamos que F es proporcional a $y(h - y)^{1/2}$, en donde y es la profundidad de la corriente y h es la carga hidrostática, que es constante. ¿Qué valor de y hace máxima a F?
17. Hallar el punto sobre el eje de las x cuya suma de distancia a los puntos $(2, 0)$ y $(0, 3)$ es un mínimo.
18. Una pieza de alambre de longitud L se corta en dos partes, una de las cuales se dobla en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de círculo. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas limitadas por las dos partes sea (a) un mínimo, (b) un máximo?
19. Un muro de $13\frac{1}{2}$ pies de altura está a 4 pies de la pared de una casa. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta para que uno de sus extremos descanse sobre el nivel del suelo fuera del muro y el otro extremo sobre la pared lateral de la casa?

20. Un tanque deberá tener un volumen dado V y la forma de un cilindro circular recto con hemisferios agregados en cada extremo. El material para los extremos cuesta dos veces más por pie cuadrado que lo que cuesta el de los lados. Hallar las proporciones más económicas.

21. Hallar la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente por una esquina de un corredor de 8 pies de ancho, a otro de 4 pies de ancho.

22. Sean P, Q dos puntos del plano en el mismo lado del eje de las x. Sea R un punto sobre el eje de las x (fig. 18). Demostrar que la suma de las distancias PR y QR es mínima cuando los ángulos θ_1 y θ_2 son iguales.

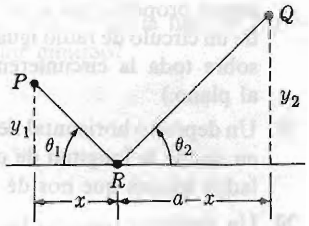


Figura 18

[*Sugerencia:* Sea $f(x)$ la suma de las distancias. Demostrar que la condición $f'(x) = 0$ quiere decir que $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$. Usando valores de x próximos a 0 y a, demostrar que $f(x)$ es decreciente cerca de $x = 0$ y creciente cerca de $x = a$. Por tanto, el mínimo debe estar en el intervalo abierto $0 < x < a$, y es, por tanto, el punto crítico.]

23. Supongamos que la velocidad de la luz es v_1 en el aire y v_2 en el agua. Un rayo de luz que pasa de un punto p_1 sobre la superficie del agua a un punto p_2 debajo de la superficie, recorrerá el camino que requiera un tiempo mínimo. Demostrar que el rayo cruzará la superficie en el punto Q en el plano vertical que pasa por p_1 y p_2 colocado de tal forma que

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2},$$

en donde θ_1 y θ_2 son los ángulos que aparecen en la figura:

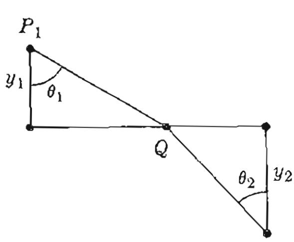


Figura 19

(Puede suponerse que el rayo de luz viajará por el plano vertical que pasa por P_1 y P_2. También se puede suponer que cuando la velocidad es constante, igual a v en toda una región, y s es la distancia recorrida, entonces el tiempo t es igual a $t = s/v$.)

24. Sea p la probabilidad de que cierto hecho ocurrirá en un ensayo cualquiera. En n ensayos, supongamos que se han tenido s éxitos. La función de probabilidad L se define como $L(p) = p^s(1 - p)^{n-s}$. Hallar el valor de p que maximiza la función de probabilidad. (Tómese $0 \leqq p \leqq 1$.)

25. Hallar una ecuación para la recta que pase por el punto (3, 2) formando con los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.

26. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números. Hallar el número x para el que

$$(a_1 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$$

es un mínimo.

27. Cuando la luz de un foco colocado en un punto fijo choca con una superficie plana, la intensidad de iluminación es proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente. ¿A qué altura sobre el centro de un círculo de radio igual a 25 cm debe colocarse la luz para obtener la mejor iluminación sobre toda la circunferencia? (El ángulo de incidencia se mide desde la perpendicular al plano.)

28. Un depósito horizontal tiene una sección transversal que es un triángulo isósceles invertido, en donde la longitud de uno de los lados iguales es de 60 pies. Hallar el ángulo entre los lados iguales que nos dé una capacidad máxima.

29. Un depósito tiene un fondo plano horizontal y una sección transversal como la que se muestra en la figura. Hallar el ángulo de inclinación de los lados con la horizontal que produce la capacidad máxima.

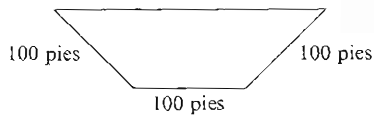


Figura 20

30. Determinar la constante a tal que la función

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$$

tiene (a) un mínimo local en $x = 2$, (b) un mínimo local en $x = -3$. (c) Demostrar que la función no puede tener un máximo local para ningún valor de a.

31. La intensidad de iluminación en cualquier punto es proporcional a la fuerza de la fuente de luz y varía inversamente como el cuadrado de la distancia a la fuente. Si dos fuentes de fuerzas a y b respectivamente están entre sí a una distancia igual a c, ¿en qué punto sobre la recta que las une será mínima la intensidad?

32. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Hallar las dimensiones cuando el perímetro es igual a 12 pies y el área es todo lo grande posible.

33. Hallar el radio y el ángulo del sector circular de área máxima que tiene un perímetro de 16 pies.

34. Dos puntos P y Q son diametralmente opuestos entre sí a la orilla de un estanque circular cuyo radio es igual a 1 milla. Un hombre desea ir de P a Q nadando desde P hasta un punto R sobre la orilla y luego caminando a lo largo de la orilla desde R hasta Q. Este hombre puede nadar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. Hallar el mínimo tiempo posible de P a Q y también el máximo tiempo posible bajo las condiciones dadas.

35. Una escalera de mano debe alcanzar, sobre un muro de 12 pies de alto, hasta una pared situada a 2 pies de distancia detrás del muro. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que se puede usar?

36. Estamos regando el prado y dirigiendo la manguera hacia arriba con un ángulo de in-

clinación igual a θ. Sea r el rango de la manguera, es decir, la distancia desde la manguera hasta el punto de impacto del agua. Entonces, r está dado por

$$r = \frac{2v^2}{g} \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

donde v, g son constantes. ¿Cuál es el ángulo que hace máximo el rango?

37. Probar que $t + 1/t \geqq 2$ para todo $t > 0$. ¿Cuál es el valor mínimo de la función $f(t) = t + 1/t$ para $t > 0$, y para qué valor de t toma f este valor mínimo?

CAPITULO VI

Trazado de curvas

Hemos desarrollado ya suficientes técnicas para poder ahora trazar curvas y gráficas de funciones en forma mucho más eficiente que antes. Investigaremos sistemáticamente el comportamiento de una curva; el teorema del valor medio desempeñará un papel fundamental.

Nos fijaremos especialmente en los siguientes aspectos de la curva:

1. Intersecciones con los ejes de coordenadas.
2. Puntos críticos.
3. Regiones de crecimiento.
4. Regiones de decrecimiento.
5. Máximos y mínimos (incluyendo los locales).
6. Comportamiento cuando x se hace muy grande positivamente y muy grande negativamente.
7. Valores de x cerca de los cuales y se hace muy grande positivamente o muy grande negativamente.

Estas siete piezas de información serán suficientes para darnos una idea bastante exacta respecto de la forma de la gráfica. Dedicaremos una sección a considerar otro aspecto, a saber:

8. Regiones donde la curva es convexa hacia arriba o hacia abajo. Esto nos dirá cómo se va doblando la curva.

Introduciremos también una nueva forma de describir puntos del plano y funciones, a saber: las coordenadas polares. Estas son especialmente útiles en conexión con las funciones trigonométricas.

§1. Comportamiento cuando x se hace muy grande

Supongamos que tenemos una función f definida para todos los números suficientemente grandes. Obtenemos entonces una información substancial respecto a nuestra función, investigando cómo se comporta cuando x se hace muy grande.

Por ejemplo, sen x oscila entre -1 y $+1$.

Sin embargo, los polinomios no oscilan. Cuando $f(x) = x^2$, a medida que x se hace grande positivamente, también lo hace x^2. Análogamente ocurre con la función x^3, x^4, etc.

Ejemplo 1. Consideremos un polinomio

$$f(x) = x^3 + 2x - 1.$$

Podemos escribirlo en la forma

$$x^3\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right).$$

Cuando x se hace muy grande, la expresión

$$1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$

tiende a 1. En particular, dado un número pequeño $\delta > 0$, tenemos, para todos los x suficientemente grandes, la desigualdad

$$1-\delta < 1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3} < 1+\delta.$$

Por tanto, $f(x)$ satisface la desigualdad

$$x^3(1-\delta) < f(x) < x^3(1+\delta).$$

Esto nos dice que $f(x)$ se comporta en forma muy parecida a la de x^3 cuando x es muy grande.

Un argumento análogo puede aplicarse a cualquier polinomio.

Ejemplo 2. Consideremos un cociente de polinomios como

$$Q(x)=\frac{x^3+2x-1}{2x^3-x+1}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador por x^3, tenemos

$$Q(x)=\frac{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}.$$

Cuando x se hace muy grande, el numerador tiende a 1 y el denominador a 2. Luego nuestra fracción tiende a $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 3. Consideremos el cociente

$$Q(x)=\frac{x^2-1}{x^3-2x+1}.$$

¿Tiende hacia algún límite cuando x se hace muy grande?

Si dividimos el numerador y el denominador por x^3, entonces vemos que nuestro cociente puede escribirse

$$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}.$$

A medida que x se hace muy grande, el numerador tiende a 0 y el denominador a 1. Por tanto, el cociente tiende a 0.

Ejemplo 4. Consideremos el cociente

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 5}$$

y determinemos qué sucede cuando x se hace muy grande.

Dividimos el numerador y el denominador por x^2. Esto nos da

$$Q(x) = \frac{x - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{5}{x^2}}.$$

Cuando x se hace muy grande, el numerador es aproximadamente igual a x y el denominador se aproxima a 1. Luego el cociente es aproximadamente igual a x.

Estos cuatro ejemplos son típicos de lo que sucede cuando tratamos con cocientes de polinomios.

En vez de decir «cuando x se hace muy grande», diremos también «cuando x tiende a infinito», o incluso mejor, «cuando x tiende a más infinito».

Así, en el ejemplo 2 escribiríamos

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \tfrac{1}{2}.$$

En el ejemplo 3,

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = 0.$$

En el ejemplo 4,

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty.$$

Insistimos en que esta forma de escribir es una **abreviatura**, una taquigrafía, para las frases que escribimos en nuestros varios ejemplos. No hay **ningún número que se llame infinito.** El símbolo ∞ no se usará excepto en el contexto que acabamos de describir.

Desde luego, podríamos también investigar lo que sucede cuando x se hace muy grande **negativamente** o, como también diremos, cuando x tiende a menos infinito, que representamos por $-\infty$.

En el ejemplo 2 vemos que cuando x se hace muy grande negativamente, nuestro cociente $Q(x)$ sigue aproximándose a $\frac{1}{2}$, porque una fracción como $1/x^3$ se hace muy pequeña. (Por ejemplo, $1/(-10.000) = -1/10.000$ es un negativo muy pequeño.) Así, pues, escribiríamos

$$\lim_{x\to-\infty} Q(x) = \tfrac{1}{2}.$$

Ejercicios

Hallar los límites de los siguientes cocientes $Q(x)$ cuando x se hace muy grande positiva o negativamente. En otras palabras, hallar

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} Q(x).$$

1. $\dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 1}$
2. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
3. $\dfrac{\cos x}{x}$
4. $\dfrac{x^2 + 1}{\pi x^2 - 1}$
5. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x^3}$
6. $\dfrac{5x^4 - x^3 + 3x + 2}{x^3 - 1}$
7. $\dfrac{-x^2 + 1}{x + 5}$
8. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^4 + x^2}$
9. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^3 + x^2}$
10. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^5 + x^2}$

Describir el comportamiento de los siguientes polinomios cuando x se hace muy grande positiva y negativamente.

11. $x^3 - x + 1$
12. $-x^3 - x + 1$
13. $x^4 + 3x^3 + 2$
14. $-x^4 + 3x^3 + 2$
15. $2x^5 + x^2 - 100$
16. $-3x^5 + x + 1000$
17. $10x^6 - x^4$
18. $-3x^6 + x^3 + 1$
19. Una función $f(x)$ que puede expresarse como sigue:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

donde n es un entero positivo y los $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números, se llama polinomio. Si $a_n \neq 0$, entonces n se llama **grado** del polinomio. Describir el comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace muy grande positiva o negativamente, n es par o impar, y $a_n > 0$ ó $a_n < 0$. (El lector deberá considerar ocho casos.)

20. Usando el teorema del valor intermedio, demostrar que cualquier polinomio de grado impar tiene una raíz.

§2. Trazado de curvas

Juntaremos toda la información que hasta ahora hemos recogido para obtener un cuadro exacto de la gráfica de una función. Trataremos sistemáticamente las siete propiedades enumeradas en la introducción; nuestra explicación tomará la forma de resolución y estudio de ejemplos.

Ejemplo 1. Trazar la gráfica de la curva.

$$y = f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

y determinar las siete propiedades enunciadas en la introducción.

1. Cuando $x = 0$, tenemos $f(x) = -1$. Cuando $x = 1, f(x) = 0$.
2. La derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

(Se la puede calcular usando la regla del cociente.) Nunca es 0 y, por tanto, la función no tiene puntos críticos.

3. El denominador es un cuadrado y, por tanto, es siempre positivo en todos los puntos en que está definido; es decir, para $x \neq -1$. Así, pues, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$. La función es creciente para todo x. Desde luego, la función no está definida para $x = -1$ y tampoco lo está su derivada. Sería, pues, más exacto decir que la función es creciente en la región $x < -1$ y en la región $x > -1$.

4. No hay ninguna región en que decrezca.

5. Como la derivada nunca es 0, no hay ningún máximo ni mínimo relativos.

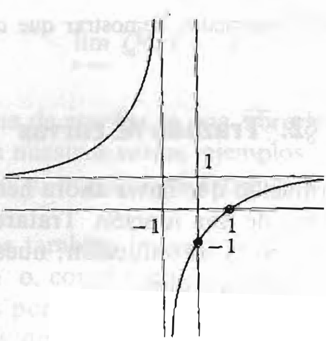
6. Cuando x se hace muy grande positivamente, nuestra función se aproxima a 1 (usando el método de la sección precedente). Cuando x se hace muy grande negativamente, nuestra función se aproxima también a 1.

Finalmente, hay una pieza más de información útil que podemos examinar, cuando $f(x)$ misma se hace muy grande positiva o negativamente:

7. Cuando x tiende a -1, el denominador tiende a 0 y el numerador tiende a -2. Si x se aproxima a -1 desde la derecha, entonces el denominador es positivo y el numerador es negativo. De donde la fracción

$$\frac{x - 1}{x + 1}$$

es negativa y es muy grande negativamente.



Si x tiende a -1 desde la izquierda, entonces $x - 1$ es negativa, pero $x + 1$ es también negativa. Luego $f(x)$ es positiva y muy grande, ya que el denominador es pequeño cuando x está cerca de -1. Juntando toda esta información vemos que la gráfica tiene el aspecto que nos indica la figura precedente.

Hemos dibujado las dos rectas $x = -1$ e $y = 1$, pues éstas juegan un papel importante cuando x tiende a -1 y cuando x se hace muy grande, positiva o negativamente.

Ejemplo 2. Trazar la gráfica de la curva

$$y = -x^3 + 3x - 5.$$

1. Cuando $x = 0$, tenemos $y = -5$.
2. La derivada es

$$f'(x) = -3x^2 + 3.$$

Es 0 cuando $3x^2 = 3$, lo que equivale a decir que

$$x^2 = 1, \qquad \text{o} \qquad x = \pm 1.$$

Estos son los puntos críticos.

3. La derivada es positiva cuando $-3x^2 + 3 > 0$, lo que equivale a decir que

$$3x^2 < 3 \qquad \text{o} \qquad x^2 < 1.$$

Esto es equivalente a la condición

$$-1 < x < 1,$$

que es, por tanto, una región de crecimiento.

4. Cuando $-3x^2 + 3 < 0$, la función decrece. Esta es la región dada por la desigualdad

$$3x^2 > 3$$

o $x^2 > 1$. Así, pues, cuando

$$x > 1 \qquad \text{o} \qquad x < -1,$$

la función decrece.

5. Como la función decrece cuando $x < -1$ y crece cuando $x > -1$ (y es cercana a -1), concluimos que el punto -1 es un mínimo local. Además, $f(-1) = -7$.

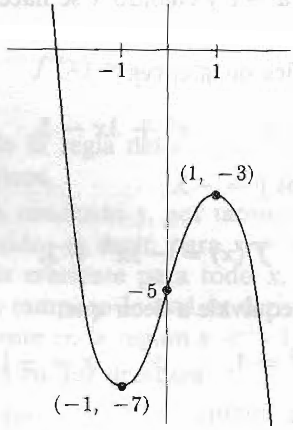
Análogamente, el punto 1 es un máximo relativo y $f(1) = -3$.

6. Cuando x se hace muy grande positivamente, x^3 es muy grande positivamente y $-x^3$ muy grande negativamente. Por tanto, nuestra función se hace muy grande negativamente, como podemos ver si la ponemos en la forma.

$$f(x) = -x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right).$$

Análogamente, cuando x se hace muy grande negativamente, nuestra función se hace muy grande positivamente.

Juntando toda esta información, vemos que la gráfica tiene este aspecto:



Ejercicios

Trazar las siguientes curvas indicando toda la información establecida en la introducción:

1. $y = \dfrac{x^2+2}{x-3}$
2. $y = \dfrac{x-3}{x^2+1}$
3. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$
4. $y = \operatorname{sen}^2 x$
5. $y = \cos^2 x$
6. $y = \dfrac{x^2-1}{x}$
7. $y = \tan^2 x$
8. $y = \dfrac{x^3+1}{x+1}$
9. $y = x^4 - 2x^3 + 1$
10. $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$
11. $y = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
12. $y = x^4 + 4x$
13. $y = x^5 + x$
14. $y = x^6 + 6x$
15. $y = x^7 + x$
16. $y = x^8 + x$
17. ¿Cuáles de los siguientes polinomios tienen un mínimo (para todo x)?

(a) $x^6 - x + 2$ (b) $x^5 - x + 2$
(c) $-x^6 - x + 2$ (d) $-x^5 - x + 2$
(e) $x^6 + x + 2$ (f) $x^5 + x + 2$

Trazar las gráficas de estos polinomios.

18. ¿Cuáles de los polinomios del ejercicio 17 tienen un máximo (para todo x)?

19. Trazar las siguientes curvas:

(a) $x^3 + x - 1$ (b) $x^3 - x - 1$ (c) $-x^3 + 2x + 5$
(d) $-2x^3 + x + 2$ (e) $x^3 - x^2 + 1$ (f) $x^3 + x$

20. Sean a, b, c, d cuatro números distintos. ¿Cómo serían las siguientes curvas? Puede suponerse que $a < b < c < d$.

(i) $(x - a)(x - b)$
(ii) $(x - a)(x - b)(x - c)$
(iii) $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$

Trazar las gráficas de las siguientes funciones y hallar las regiones de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, etc.

21. $4x - \frac{1}{3}x^3$ 22. $(x - 1)^{2/3} + 3$ 23. $x^2 + 4x + 2$

24. $\dfrac{4x}{x^2 - 9}$ 25. $x + \dfrac{3}{x}$ 26. $\dfrac{x^2 - 4}{x^3}$

27. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$ 28. $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ 29. $\dfrac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$

30. $\dfrac{3x - 2}{2x + 3}$ 31. $\dfrac{x}{3x - 5}$ 32. $\dfrac{2x}{x + 4}$

33. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$ 34. $\dfrac{x + 1}{x^2 + 5}$ 35. $\dfrac{x + 1}{x^2 - 5}$

36. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ 37. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ 38. $\dfrac{(x + 1)^2}{x^2 - 1}$

39. $x^{2/3}\sqrt{9 - x^2}$ para $-3 \leqq x \leqq 3$.

40. $(x - 4)^{4/3} + 2(x + 4)^{2/3}$

41. $(x - 1)^{1/3} + \frac{1}{2}(x + 1)^{2/3}$ para $-2 \leqq x \leqq 7$

42. $(x - 1)^{1/3} - \frac{1}{2}(x + 1)^{2/3}$ para $2 \leqq x \leqq 3$

43. $\operatorname{sen} x + \cos x$ 44. $x - \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 46. $x + 2 \cos \dfrac{x}{2}$

47. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x$ 48. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

49. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$ 50. $\cos x - \cos^3 x$

51. Si $a_1, ..., a_n$ son números $\geqq 0$, demostrar que

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leqq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

[*Sugerencia:* Por inducción. La afirmación es obvia cuando $n = 1$. Supongamos que lo es para cierto entero $n - 1 \geqq 1$. Tomando la n-ésima potencia de ambos miembros, es suficiente probar que

$$a_1 \cdots a_n \leqq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n.$$

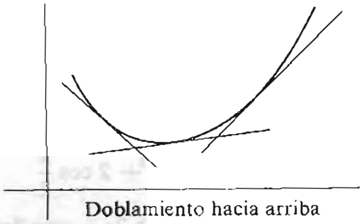
Sea

$$f(x) = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + x}{n}\right)^n - a_1 \cdots a_{n-1}x.$$

Calcular $f'(x)$. Nótese que $f(0) \geqq 0$. Demostrar que $f'(x) = 0$ para exactamente un valor de x, digamos para $x = c$. Si $c \leqq 0$, entonces el signo de f' es constante para $x > 0$, luego f es o decreciente o creciente para $x \geqq 0$. Pero cuando x se hace grande, $f(x)$ se hace grande. Luego f es creciente para $x \geqq 0$, y ya tenemos resuelto este caso. Si, por otra parte, $c > 0$, calcular explícitamente el valor de $f(c)$ y, usando la hipótesis de inducción, demostrar que $f(c) \geqq 0$. Como c es el único punto crítico y como $f(x)$ se hace grande cuando x se hace grande, se sigue que c debe ser un mínimo, y de ello finalmente que $f(x) \geqq 0$ siempre que $x \geqq 0$.] Otra prueba para esta desigualdad se puede dar usando la convexidad del log (en un capítulo posterior).

§3. Convexidad

Sean a, b números, con $a < b$. Sea f una función continua definida sobre el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f' y f'' existen sobre el intervalo $a < x < b$. Consideramos la segunda derivada f'' como la razón de cambio de la pendiente de la curva $y = f(x)$ sobre el intervalo. Si la segunda derivada es positiva en el intervalo $a < x < b$, entonces la pendiente de la curva es creciente, lo cual significa que la curva está doblándose hacia arriba. Si la segunda derivada es negativa, significa que la curva está doblándose hacia abajo. Los dos dibujos siguientes ilustran lo dicho.

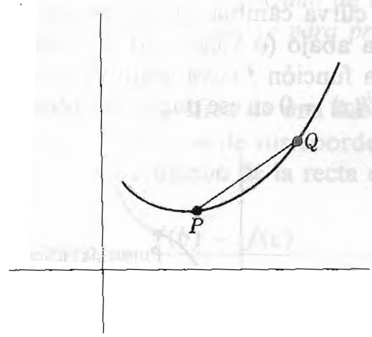


Doblamiento hacia arriba

Doblamiento hacia abajo

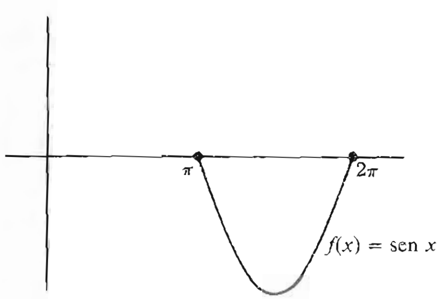
Realmente, es posible caracterizar el anterior comportamiento geométrico de una forma más analítica. ¿Qué significa decir que una curva se dobla hacia arriba?

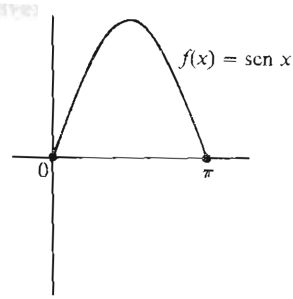
Una condición equivalente sería que, dados dos puntos P y Q sobre la curva, el segmento rectilíneo que une P y Q estuviera *por encima* de la curva entre P y Q, en cuyo caso decimos que la curva es **convexa** hacia arriba. Se ilustra esto en el siguiente dibujo.



Ejemplo 1. La curva $y = x^2$ es convexa hacia arriba. Podemos verlo usando la segunda derivada. Sea $f(x) = x^2$. Entonces $f''(x) = 2$, y la segunda derivada es siempre positiva, de forma que usamos ahora las presentes consideraciones para justificar el haber trazado la curva como lo hemos hecho siempre, es decir, doblándose hacia arriba.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tenemos $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ y, por tanto, $f''(x) > 0$ en el intervalo $\pi < x < 2\pi$. De donde la curva es convexa hacia arriba en este intervalo. Análogamente, $f''(x) < 0$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Luego la curva se dobla hacia abajo en este intervalo, como mostramos en las siguientes figuras. Desde luego, esto simplemente justifica los dibujos que siempre hemos hecho para la gráfica de la función seno.





Ejemplo 3. Determinar los intervalos en donde la curva

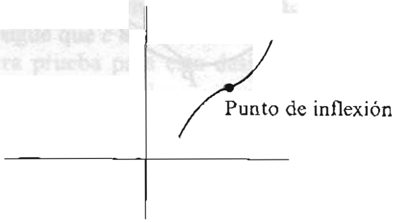
$$y = -x^3 + 3x - 5$$

es convexa hacia arriba y aquellos en que es convexa hacia abajo.

Sea $f(x) = +x^3 + 3x - 5$. Entonces, $f''(x) = -6x$. Así, pues, $f''(x) > 0$ para $x < 0$ y $f''(x) < 0$ para $x > 0$. De donde la curva es convexa hacia arriba para

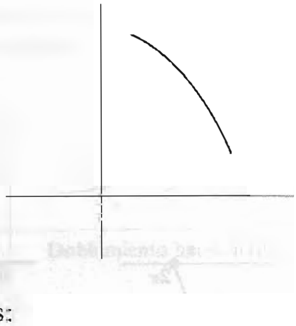
$x \leqq 0$ y es convexa hacia abajo para $x \geqq 0$. La gráfica de esta curva se ha analizado en el ejemplo 2 del §2, pero las presentes consideraciones justifican teóricamente el comportamiento de convexidad que ya habíamos mostrado en tal gráfica.

Un punto donde una curva cambia su comportamiento de convexidad hacia arriba a convexidad hacia abajo (o viceversa) se llama **punto de inflexión.** Si la curva es la gráfica de una función f cuya segunda derivada existe y es continua, entonces debemos tener $f''(x) = 0$ en ese punto. El siguiente dibujo ilustra lo dicho:

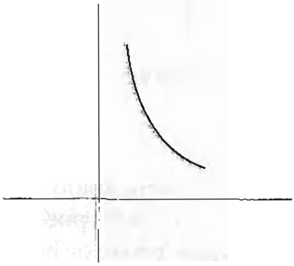


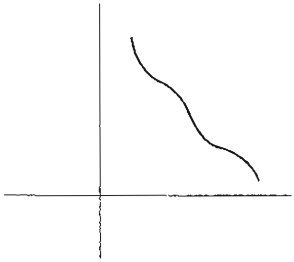
En el anterior ejemplo 3, el punto $(0, -5)$ es un punto de inflexión. De nuevo puede el lector ver la ilustración dada en el ejemplo 2 de §2.

La determinación de regiones de convexidad y puntos de inflexión nos suministra valiosos datos informativos respecto a las curvas. Por ejemplo, el saber que una curva en una región de decrecimiento es realmente convexa hacia abajo nos dice que el decrecimiento ocurre esencialmente como en este ejemplo:



y no como en estos ejemplos:





Exactamente como dimos una prueba para el teorema respecto a las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función, basada en el teorema del valor medio, podemos también dar una prueba semejante para la teoría de la convexidad. Sugerimos que aquellos que no estén interesados en la teoría omitan el resto de esta sección. Sin embargo, aparte de aplicaciones para el trazado de curvas, nótese que los teoremas 1, 2 y 3 siguientes pueden también usarse para probar ciertas desigualdades respecto a las funciones «convexas».

Consideremos la curva que es la gráfica de una función $y = f(x)$. Sean P y Q puntos sobre la curva, dados en términos de sus coordenadas, $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ para números a y b con $a < b$. La ecuación de la recta que pasa por nuestros dos puntos es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

o, en otras palabras,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La ecuación de la curva dada es

$$y = f(x).$$

Así, pues, la condición de que el segmento rectilíneo entre P y Q debe encontrarse por encima de la curva entre estos puntos, puede expresarse por la desigualdad

$$(*) \qquad f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \geqq f(x) \quad \text{para } a < x < b.$$

Así, pues, definimos la curva $y = f(x)$ como **convexa hacia arriba** en un intervalo si para cada $a < b$ en ese intervalo la desigualdad (*) se satisface. Si la desigualdad (*) se verifica cuando el signo $\geqq$ se reemplaza por el signo $>$, entonces decimos que la curva es **estrictamente** convexa hacia arriba.

Teorema 1. *Sean a, b números con $a < b$. Sea f una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f' y f'' existen en el intervalo $a < x < b$ y que $f''(x) > 0$ para todo x en este intervalo. Entonces la curva $y = f(x)$ es estrictamente convexa hacia arriba.*

Demostración. Dados dos números cualesquiera c, d, con $a \leqq c < d \leqq b$, todas nuestras hipótesis se satisfacen para el intervalo $[c, d]$. Será, pues, suficiente probar que el segmento rectilíneo entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, se encuentra sobre la curva en el intervalo $[a, b]$. Sea φ la función que nos da la diferencia entre el segmento rectilíneo y la curva; es decir,

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

Entonces,

$$\varphi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x),$$

y usando el teorema del valor medio concluimos que existe algún número c tal que $a < c < b$ y

$$\varphi'(x) = f'(c) - f'(x)$$

para todo x tal que $a < x < b$. Podemos ahora aplicar el teorema del valor medio a la función f' misma, con respecto a los dos números x y c. Supongamos primero que $a < x \leqq c$. Entonces

$$f'(c) - f'(x) = f''(d)(c - x)$$

para algún número d entre x y c. Como $f''(d) > 0$, se sigue de ello que $\varphi'(x) > 0$ para todo x con $a < x < c$. Luego φ es una función estrictamente creciente en el intervalo $[a, c]$. Como $\varphi(a) = 0$ (como se puede verificar de inmediato), se sigue que $\varphi(x) > 0$ si $a < x \leqq c$. Esto prueba la condición deseada (*) cuando $a < x \leqq c$.

Por otra parte, supongamos que $c < x < b$. Entonces, de nuevo por el teorema del valor medio aplicado a f', encontramos que

$$f'(x) - f'(c) = f''(e)(x - c)$$

para algún número e entre c y x. Esto muestra que

$$\varphi'(x) = f'(c) - f'(x) < 0$$

en el presente caso, y de aquí que φ es estrictamente decreciente en el intervalo $c < x \leqq b$. Como $\varphi(b) = 0$ por un cálculo directo, concluimos de nuevo que $\varphi(x) > 0$, que es la condición deseada (*) cuando $c < x < b$; esto prueba el teorema 1.

Desde luego, el teorema 1 tiene un análogo para curvas que son convexas hacia abajo; es decir, tales que el segmento rectilíneo entre dos puntos de la curva se encuentra debajo de la curva.

Teorema 2. *Sean a, b números tales que $a < b$. Sea f una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f' y f'' existen en el intervalo $a < x < b$ y que $f''(x) < 0$ para todo x en este intervalo. Entonces la curva $y = f(x)$ es estrictamente convexa hacia abajo.*

Demostración. La prueba es por completo análoga a la del teorema 1 y se deja como ejercicio.

Se puede dar otra condición que caracteriza a las curvas convexas. Proviene del hecho de que un punto cualquiera en un intervalo $[a, b]$ se puede escribir en la forma

$$ta + (1 - t)b$$

para algún t tal que $0 \leqq t \leqq 1$. Para ver esto, supongamos que $a \leqq x \leqq b$. Hagamos entonces

$$t = \frac{b - x}{b - a}.$$

Un cálculo directo muestra que $x = ta + (1 - t)b$. Recíprocamente, para cualquier t con $0 \leqq t \leqq 1$, tenemos

$$a \leqq ta + (1 - t)b \leqq b.$$

Las desigualdades izquierda y derecha se siguen de estas:

$$ta + (1 - t)b - a = (1 - t)(b - a) \geqq 0$$

y

$$ta + (1 - t)b - b = t(a - b) \leqq 0.$$

Si hacemos $u = 1 - t$, entonces cuando t va de 0 a 1, vemos que u va de 1 a 0. Así, pues, los puntos del intervalo $[a, b]$ pueden también escribirse en la forma

$$(1 - u)a + ub = a + u(b - a).$$

Teorema 3. *Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

COND. 1. *El segmento rectilíneo entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se encuentra sobre la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.*

COND. 2. *Para todos los números t con $0 \leqq t \leqq 1$, tenemos*

$$f(ta + (1 - t)b) \leqq tf(a) + (1 - t)f(b).$$

Demostración. Supongamos la COND. 1 para cualquier x entre a y b, escribamos

$$x = ta + (1 - t)b$$

con $0 \leqq t \leqq 1$. Refiriéndonos luego a la desigualdad (*), encontramos

$$\begin{aligned} f(ta + (1 - t)b) &\leqq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + b - tb - a) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)(1 - t) \\ &= tf(a) + (1 - t)f(b), \end{aligned}$$

probando así la COND. 2. La recíproca la dejamos como ejercicio.

Una función que satisface las hipótesis del teorema 3 para todo par de puntos $a \leq b$ en algún intervalo de definición, se dice que es **convexa (hacia arriba)** en ese intervalo.

En vez de escribir t y $1 - t$ para los coeficientes de a y b, observamos que t

$+ (1 - t) = 1$ y hacemos $s = 1 - t$. La **COND. 2** puede escribirse de nuevo en la forma

$$f(ta + sb) \leqq tf(a) + sf(b)$$

para todos los números t, $s \geqq 0$ tales que $t + s = 1$. Análogamente, definimos una función g como **convexa hacia abajo** en un intervalo si

$$g(ta + sb) \geqq tg(a) + sg(b)$$

para todos los números t, $s \geqq 0$ tales que $s + t = 1$ y todos los $a < b$ de ese intervalo.

Ejercicios

1. Determinar los intervalos de convexidad para las curvas dadas en los ejercicios del §2, justificando así los aspectos de convexidad de las representaciones previamente hechas de tales curvas.
2. Determinar todos los puntos de inflexión de sen x y cos x.
3. Determinar los puntos de inflexión de las curvas dadas en los ejercicios de §2.
4. Determinar los intervalos de convexidad para las siguientes curvas y trazar las curvas.

   (a) $y = x + \dfrac{1}{x}$ (b) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

5. Escribir por completo la prueba del teorema 2.
6. Supongamos las hipótesis del teorema 1. Sea x_0 un número tal que $a < x_0 < b$. Demostrar que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$ se encuentra debajo de la gráfica de f, excepto en $x = x_0$, en donde toca a la gráfica.
7. Enunciar y probar la afirmación análoga a la del ejercicio 6 correspondiente al teorema 2.
8. (a) Hallar la ecuación para la tangente a la hipérbola $xy = 1$ en el punto $(\frac{1}{2}, 2)$.

   (b) Probar que la recta tangente está debajo de la hipérbola para todo $x > 0$ (excepto $x = \frac{1}{2}$, en donde la toca).
9. Sean las hipótesis las del teorema 1. Demostrar que

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

   $\left[\textit{Sugerencia:}\ \text{Hacer } x = \dfrac{a + b}{2}\right]$

10. Probar que **COND. 2** implica **COND. 1** en el teorema 3, es decir, probar la afirmación recíproca de aquella cuya prueba se dio.
11. Sean f, g funciones definidas para todos los números y convexas (hacia arriba). Supongamos que f es una función creciente. Demostrar que $f \circ g$ es convexa (hacia arriba).
12. Sea f una función definida para todo $x > 0$ y convexa hacia abajo. Probar por inducción

que para todos los números $t_1, \ldots, t_n \geqq 0$ tales que $t_1 + \ldots + t_n = 1$, y todos los números $x_1, \ldots, x_n > 0$, tenemos

$$t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n) \leqq f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n).$$

[*Sugerencia:* Si $t_n \neq 0$, sea $s_i = t_i/(1 - t_n)$ para $i = 1, \ldots, n - 1$. Entonces, por inducción, $s_1 f(x_1) + \cdots + s_{n-1} f(x_{n-1}) \leqq f(s_1 x_1 + \cdots + s_{n-1} x_{n-1})$. Sumemos ahora

$$\frac{t_n}{1 - t_n} f(x_n)$$

a ambos miembros, multipliquemos por $(1 - t_n)$, y usemos la convexidad de f para concluir la prueba.]

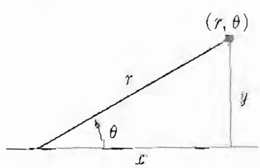
13. Sea f una función que está definida para todo $x > 0$ y es convexa hacia arriba. Probar que para todos los números $x_1, \ldots, x_n > 0$ tenemos

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{1}{n} f(x_1) + \cdots + \frac{1}{n} f(x_n).$$

¿Cuál es la desigualdad correspondiente si suponemos que f es convexa hacia abajo?

§4. Coordenadas polares

En lugar de describir un punto en el plano por sus coordenadas con respecto a dos ejes perpendiculares, podemos describirlo también como sigue. Trazamos una recta entre el punto y un origen dado. El ángulo con el que esta recta corta la horizontal y la distancia entre el punto y el origen determinan nuestro punto. Así, pues, el punto se describe por un par de números (r, θ) que constituyen sus **coordenadas polares.**



Si tenemos nuestros ejes usuales y x, y son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, entonces vemos que

$$\frac{x}{r} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta,$$

de donde

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Esto nos permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Ha de entenderse que r siempre se supone $\geqq 0$. En términos de las coordenadas ordinarias, tenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

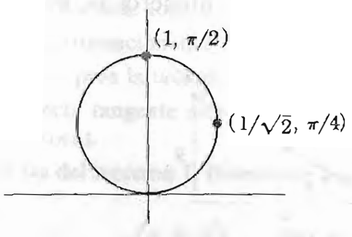
Ejemplo. Hallar las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas ordinarias son $(1, \sqrt{3})$.

Tenemos $x = 1$ e $y = \sqrt{3}$, luego $r = \sqrt{1 + 3} = 2$. Tenemos también $\cos \theta = 1/2$, $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{3}/2$, luego $\theta = \pi/3$ y las coordenadas polares son $(2, \pi/3)$.

Observemos que podemos tener varias coordenadas polares correspondientes al mismo punto. El punto cuyas coordenadas polares son $(r, \theta + 2\pi)$ es el mismo que el punto (r, θ). Así, en nuestro anterior ejemplo, $(2, \pi/6 + 2\pi)$ serían también coordenadas polares para nuestro punto. En la práctica, usamos generalmente el valor para el ángulo que se encuentra entre 0 y 2π.

Sea f una función cuyos valores son $\geqq 0$. Si hacemos $r = f(\theta)$, entonces el conjunto de puntos $(\theta, f(\theta))$ es la gráfica de la función en coordenadas polares. Podemos también considerar $r = f(\theta)$ como la ecuación de una curva.

Ejemplo. Trazar la gráfica de la función $r = \operatorname{sen} \theta$ para $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Si $\pi < \theta < 2\pi$, entonces $\operatorname{sen} \theta < 0$ y, por tanto, para tal θ no obtenemos un punto en la curva. A continuación hacemos una tabla de valores como se indica. Cuando θ varía de 0 a $\pi/2$, $\operatorname{sen} \theta$ aumenta hasta que alcanza 1. Cuando θ va de $\pi/2$ a π, el seno decrece de nuevo hasta 0. Por tanto, la gráfica tiene este aspecto:



θ	r
0	0
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/2$	1
π	0

En el siguiente ejemplo veremos que se trata de un círculo.

Ejemplo. Cambiar la ecuación $r = \operatorname{sen} \theta$ a coordenadas rectangulares. Substituimos las expresiones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\operatorname{sen} \theta = y/r = y/\sqrt{x^2 + y^2}$$

en la ecuación polar para obtener

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Desde luego, esta substitución es válida solamente cuando $r \neq 0$; es decir, $r > 0$. Podemos entonces simplificar la ecuación que acabamos de obtener multiplicando ambos miembros por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Obtenemos entonces

$$x^2 + y^2 = y,$$

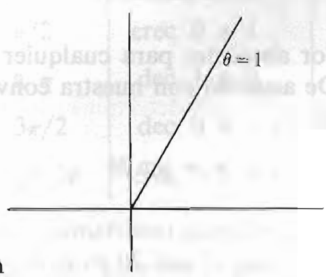
lo que después de completar el cuadrado nos da

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Así, pues, se reconoce la ecuación del ejemplo precedente como la de un círculo de centro $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$. El punto correspondiente a la coordenada polar $r = 0$ es el punto con coordenadas rectangulares $x = 0$ e $y = 0$.

Ejemplo. La ecuación del círculo de radio 3 y centro en el origen en coordenadas polares es simplemente $r = 3$.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $\theta = 1$ en coordenadas polares. Un punto cuyas coordenadas polares satisfagan esta ecuación puede describirse como $(r, 1)$ para cualquier valor de $r \geqq 0$. Así, pues, geométricamente este conjunto de puntos puede describirse como una semirrecta o un radio:



sen

La pendiente de este radio es igual a tan 1. La ecuación en coordenadas rectangulares es, pues,

$$y = (\tan 1)x$$

y

$$x \geqq 0.$$

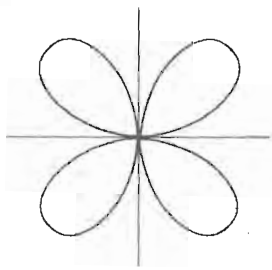
Ejemplo. Tracemos la curva dada en coordenadas polares por la ecuación

$$r = |\operatorname{sen} 2\theta|.$$

Nótese el signo de valor absoluto. Podemos formar una tabla de valores como sigue.

θ	$r = \lvert\operatorname{sen} 2\theta\rvert$
crec. 0 a $\pi/4$	crec. 0 a 1
crec. $\pi/4$ a $\pi/2$	dec. 1 a 0
crec. $\pi/2$ a $3\pi/4$	crec. 0 a 1
crec. $3\pi/4$ a π	dec. 1 a 0
y así sucesivamente	

La gráfica tiene, por tanto, este aspecto:



Debido al signo de valor absoluto, para cualquier valor de θ obtenemos un valor para r que es $\geqq 0$. De acuerdo con nuestra convención, si hubiéramos deseado obtener la gráfica de

$$r = \operatorname{sen} 2\theta$$

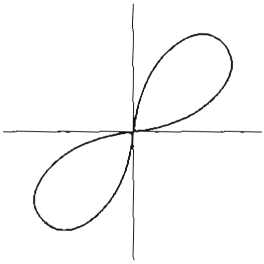
sin el signo de valor absoluto, entonces tendríamos que omitir aquellas porciones de la gráfica anterior para las que el sen 2θ es negativo; es decir, aquellas porciones de la gráfica para las que

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

y

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

Así, pues, la gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ sería análoga a la que aparece en la figura siguiente:



Observación. En mi experiencia, el adoptar la convención de tomar siempre $r \geqq 0$ en coordenadas polares ha sido bastante útil. Debemos advertir, sin embargo, que algunos autores permiten que haya r negativas e interpretan esto en el sentido de que el punto se encuentra en la dirección opuesta.

Ejemplo. Deseamos trazar la curva dada en coordenadas polares por la ecuación

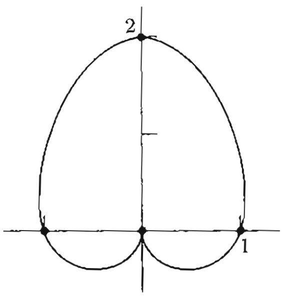
$$r = 1 + \operatorname{sen} \theta.$$

Observemos el comportamiento de r cuando θ toma los valores en los intervalos

$$[0, \pi/2], \qquad [\pi/2, \pi], \qquad [\pi, 3\pi/2], \qquad [3\pi/2, 2\pi].$$

θ	sen θ	r
crec. de 0 a $\pi/2$	crec. 0 a 1	crec. 1 a 2
crec. de $\pi/2$ a π	dec. 1 a 0	dec. 2 a 1
crec. de π a $3\pi/2$	dec. 0 a -1	dec. 1 a 0
crec. de $3\pi/2$ a 2π	crec. -1 a 0	crec. 0 a 1

Así, pues, la gráfica en sus líneas generales es parecida a esta:



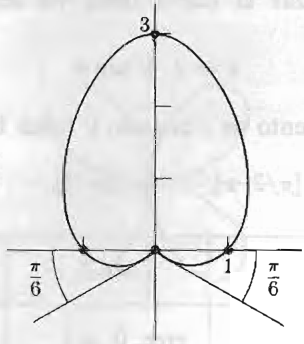
Ejemplo. Consideremos la ecuación ligeramente diferente

$$r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta.$$

Un análisis semejante nos dará buenos resultados, pero debemos tener presente que la expresión del segundo miembro puede hacerse negativa. De acuerdo con nuestra convención, entonces no obtendremos un punto, puesto que hemos convenido que $r \geqq 0$ en las coordenadas polares. Así, pues, cuando $2 \operatorname{sen} \theta < -1$, no obtenemos un punto. Esto ocurre precisamente en el intervalo

$$\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{11\pi}{6}.$$

La gráfica tendrá, por tanto, un aspecto como el siguiente.



Hemos trazado también los radios que determinan ángulos de $\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$.

Ejercicios

1. Marcar los siguientes puntos en coordenadas polares:

   (a) $(2, \pi/4)$ (b) $(3, \pi/6)$ (c) $(1, -\pi/4)$ (d) $(2, -3\pi/6)$

2. Iguales instrucciones que en el ejercicio 1.

   (a) $(1, 1)$ (b) $(4, -3)$

   (Estas son coordenadas polares. Basta mostrar aproximadamente el ángulo representado por las coordenadas dadas.)

3. Hallar coordenadas polares para los siguientes puntos dados en las coordenadas x e y usuales:

   (a) $(1, 1)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(3, 3\sqrt{3})$ (d) $(-1, 0)$

Trazar las gráficas de las siguientes curvas dadas en coordenadas polares.

4. $r = 5$
5. $r = \theta$
6. $r = \cos 2\theta$
7. $r = |\cos 2\theta|$
8. $r = \operatorname{sen} 3\theta$
9. $r = |\operatorname{sen} 3\theta|$
10. $r = \cos 3\theta$
11. $r = |\cos 3\theta|$
12. $r = 6 \cos \theta$
13. $r = a \cos \theta \quad (a > 0)$
14. $r = a \operatorname{sen} \theta \quad (a > 0)$
15. $r = 1 + \cos \theta$
16. $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (a > 0)$
17. $r = \tan \theta$
18. $r = 5 + 2 \operatorname{sen} \theta$
19. $r = 3/\cos \theta$
20. $r = \dfrac{2}{2 - \cos \theta}$
21. $r = |1 + 2 \cos \theta|$
22. $r = 4 \operatorname{sen}^2 \theta$
23. $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$
24. $r^2 = \cos \theta$
25. $r^2 = \operatorname{sen} \theta$
26. $r = 1/\theta$
27. $r = \operatorname{sen} 4\theta$
28. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$
29. $r = \dfrac{4}{1 + 2 \cos \theta}$
30. $r = \dfrac{4}{2 - \cos \theta}$
31. $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta}$

Cambiar las siguientes ecuaciones a coordenadas rectangulares:

32. $\theta = 2$
33. $r = 4$
34. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
35. $r = 3 \cos \theta$
36. $r = 1 - \cos \theta$
37. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$
38. $r = \dfrac{1}{\cos \theta}$
39. $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta}$
40. $r = \dfrac{1}{1 - \cos \theta}$
41. $r = \dfrac{2}{2 - \cos \theta}$
42. $\theta = \pi$
43. $\theta = 3$
44. $\theta = 2{,}5$
45. $\theta = \pi/2$
46. $\theta = 0{,}3$
47. $\theta = 0{,}5$

§5. Curvas paramétricas

Hay otra forma en que podemos describir una curva. Supóngase que observamos un punto que se mueve en el plano. Sus coordenadas se pueden dar como una función del tiempo t. Así, cuando damos dos funciones de t, digamos

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

podemos considerarlas como describiendo un punto que se mueve a lo largo de una curva.

Por ejemplo, si hacemos $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, entonces nuestro punto se mueve a lo largo de un círculo, en dirección contraria a la de las agujas del reloj, con velocidad uniforme.

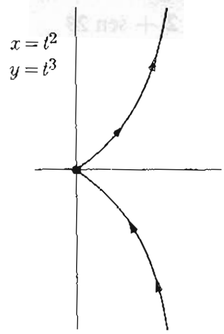
Cuando (x, y) se describe mediante dos funciones de t como hemos dicho, decimos que tenemos una **parametrización de la curva** en términos del **parámetro** t.

Ejemplo 1. Trazar la curva $x = t^2$, $y = t^3$.

Podemos formar una tabla de valores en la forma usual. Investigamos también cuando x e y son funciones crecientes o decrecientes de t. Por ejemplo, tomando la derivada, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Así, pues, x crece cuando $t > 0$ y decrece cuando $t < 0$. La ordenada (y) crece, ya que $t^2 > 0$ (salvo para $t = 0$). Por otra parte, la abscisa (x) es siempre positiva (salvo cuando $t = 0$). La gráfica tiene, pues, el siguiente aspecto:



t	x	y
0	0	0
1	1	1
2	4	8
−1	1	−1
−2	4	−8

La expresión paramétrica para las coordenadas x e y es útil a menudo para describir un movimiento de un insecto (o una partícula) cuyas coordenadas se dan como una función del tiempo t. Las flechas dibujadas en la figura sugieren tal movimiento.

Obsérvese que los puntos (t^2, t^3) satisfacen una ecuación «ordinaria»

$$y^2 = x^3 \quad \text{o} \quad y = x^{3/2}.$$

Sin embargo, también podríamos haber escrito la ecuación

$$y^4 = x^6,$$

que se satisface para todos los puntos de la curva. En este caso, sin embargo, hay soluciones de esta ecuación que no están dadas por nuestra parametrización, correspondientes a valores negativos de x; por ejemplo, $x = -2$, $y = \pm 2\sqrt{2}$. Así, pues, si deseamos describir el conjunto de todos los puntos sobre la curva parametrizada, mediante esta última relación, debemos añadir una desigualdad $x \geqq 0$. Es entonces correcto decir que el conjunto de todos los puntos sobre la curva parametrizada es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación

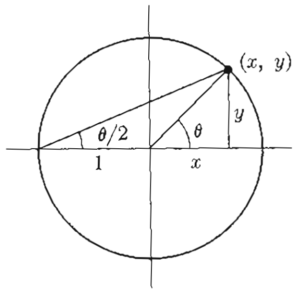
$$y^4 = x^6$$

que satisfacen la desigualdad $x \geqq 0$.

Ejemplo 2. Consideremos el círculo

$$x = \cos\theta, \qquad y = \operatorname{sen}\theta.$$

Encontraremos otra parametrización. Consideremos el círculo de radio 1 y el punto (x, y) en él:



Sea

$$t = \frac{y}{x+1} \qquad (x \neq -1).$$

La ecuación del círculo es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Podemos entonces interpretar t geométricamente como $\tan\dfrac{\theta}{2}$.

Por nuestra expresión para t obtenemos

$$y = (x+1)t \qquad \text{y} \qquad y^2 = (x+1)^2t^2.$$

Por otra parte,

$$y^2 = 1 - x^2 = (x+1)(1-x).$$

En las dos expresiones para y^2 cancelamos $(x+1)$ $(x \neq -1)$ y obtenemos

$$1 - x = (x+1)t^2.$$

Despejamos en esta expresión x y obtenemos

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

De la fórmula $y = t(x+1)$ deducimos

$$y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Así, pues, para $x \neq -1$ podemos obtener t de x e y, pero *recíprocamente* podemos recobrar x, y de los valores de t, que puede tomar valores cualesquiera.

Esto nos permite encontrar puntos sobre el círculo explícitamente, sólo dando a t valores cualesquiera que pueden elegirse entre los números racionales. A los puntos (x, y) tales que x e y son números racionales se les llama **puntos racionales.** La anterior parametrización muestra cómo obtenerlos todos (excepto cuando $x = -1$).

Por ejemplo, haciendo $t = 3$ obtenemos

$$x = \frac{1 - 9}{1 + 9} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5},$$

$$y = \frac{6}{1 + 9} = \frac{3}{5}.$$

Nótese que esto nos da una solución de la ecuación

$$a^2 + b^2 = c^2$$

en enteros, poniendo

$$a = 3, \qquad b = 4, \qquad c = 5.$$

Análogamente, si hacemos $t = 7$ obtenemos

$$x = \frac{1 - 49}{1 + 49} = \frac{-48}{50} = -\frac{24}{25},$$

$$y = \frac{14}{1 + 49} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}.$$

Como antes, esto nos da un triángulo rectángulo con lados enteros

$$(7, 24, 25).$$

Ejemplo 3. Probaremos que los puntos sobre la curva paramétrica

$$(*) \qquad x = 2t - 1, \qquad y = t + 4$$

son precisamente los puntos sobre una línea recta. Eliminando t de estas ecuaciones, es decir, multiplicando la segunda por 2 y restándola de la primera obtenemos

$$(**) \qquad x - 2y = -9.$$

Así, pues, todos los puntos que satisfacen (*) satisfacen (**), que es la ecuación de una recta. Recíprocamente, dado un punto (x, y) que satisface la ecuación (**), sea $t = y - 4$. Entonces $y = t + 4$ y

$$x = -9 + 2y = 2(t + 4) - 9 = 2t + 8 - 9 = 2t - 1.$$

De donde (x, y) satisface (*) como teníamos que probar.

Supongamos, en general, que tenemos dos puntos (x, y) y (x_1, y_1) en el plano. Definimos la suma

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1),$$

y si c es un número, el producto

$$c(x, y) = (cx, cy).$$

Así, pues, suma y producto se definen componente a componente. En el ejemplo 3, sea $P = (2, 1)$ y $Q = (-1, 4)$. Sea $X = (x, y)$. Entonces la curva paramétrica del ejemplo 3 puede escribirse con una notación más corta, como

$$X = Q + tP.$$

Cuando estudiemos vectores en el próximo curso, veremos que esto se puede interpretar como la recta que pasa por Q en la dirección de P.

Ejercicios

Trazar las siguientes curvas dadas en forma paramétrica:

1. $x = t + 1, \quad y = 3t + 4$
2. $x = 1 + t^2, \quad y = 3 - t$
3. $x = 1 - t^2, \quad y = t \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$
4. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t$
5. $x = 2(t - \operatorname{sen} t), \quad y = 2(1 - \cos t)$

Se puede también dar una parametrización de curvas en coordenadas polares. Trazar las siguientes curvas en coordenadas polares:

6. $r = t^3, \quad \theta = \pi t^2$ 7. $r = t, \quad \theta = t^2$

8. Hallar cuando menos cinco puntos racionales sobre el círculo de radio 1 distintos de los presentados en el texto. (En general, es muy difícil encontrar puntos racionales sobre curvas. Es bastante sorprendente que lo hiciésemos sobre el círculo.) Determinar triángulos rectángulos correspondientes cuyos lados tengan longitud entera.
9. Usando el método anterior, hallar una parametrización análoga del círculo

$$x^2 + y^2 = 9.$$

10. Probar que sobre cualquier curva

$$x^n + y^n = 1$$

(n = entero positivo $\geqslant 3$) hay solamente un número finito de puntos racionales. (Si el lector resuelve esto, se hará instantáneamente famoso entre los matemáticos de todo el mundo. Se cree en efecto que los únicos puntos racionales son aquellos para los que $x = 0$ ó $y = 0$. Este es el problema de Fermat y ha sido verificado para muchos valores de n. Tampoco se sabe si existen infinitos puntos racionales sobre una curva del tipo

$$y^2 = f(x),$$

donde f es un polinomio de grado $\geqslant 5$, que tiene raíces distintas; por ejemplo,

$$y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5).$$

(Este es un caso particular de una conjetura más general, hecha por Mordell hace unos cuarenta años y que hasta la fecha no se ha probado.)

11. Trazar las siguientes curvas dadas en forma paramétrica.

(a) $x = t, \quad y = t^3$ (b) $x = t, \quad y = t^4$
(c) $x = t^2, \quad y = t^4$ (d) $x = t, \quad y = \sqrt{t}$

12. Demostrar que todos los puntos sobre la curva paramétrica $x = 2t + 1$, $y = 3t - 1$, se encuentran sobre una línea recta y determinar la ecuación ordinaria de esta recta. Recíprocamente, demostrar que todo punto sobre esta recta satisface la ecuación paramétrica para algún valor de t.

13. Demostrar que los puntos sobre la curva paramétrica

$$x = 5t - 1, \quad y = -2t + 4$$

son precisamente los puntos sobre una línea recta, y determinar la ecuación de tal recta.

14. Demostrar que los puntos sobre la curva paramétrica

$$x = 2t, \quad y = 3t^2$$

son precisamente los puntos sobre una parábola y determinar la ecuación ordinaria de tal parábola.

15. Demostrar que los puntos sobre la curva paramétrica

$$x = 2t^2, \quad y = 3t - 1$$

son precisamente los puntos sobre una parábola y determinar la ecuación ordinaria de tal parábola.

16. Determinar la ecuación ordinaria para cada una de las siguientes curvas parametrizadas y trazar las gráficas.

(a) $x = t, \quad y = 1/2t$ (b) $x = 3t, \quad y = 1/t$
(c) $x = t^2, \quad y = 1/t^2$

(En este caso, el lector puede que necesite una desigualdad además de una ecuación.)

17. Demostrar que la curva paramétrica dada por $x = t^2$, $y = t^4$ es parte de una parábola. ¿Cuál es la ecuación ordinaria de esta parábola y qué parte se puede parametrizar en la forma que lo hemos hecho?

18. Trazar la curva paramétrica $x = t^2, y = 1/t^4$. Dar una ecuación ordinaria y una desigualdad que describa el conjunto de puntos sobre esta curva.

CAPITULO VII

Funciones inversas

Supongamos que tenemos una función; por ejemplo,

$$y = 3x - 5.$$

Entonces podemos resolverla para x en términos de y, a saber:

$$x = \tfrac{1}{3}(y + 5).$$

Así, pues, x se puede expresar como una función de y.

Aunque en este caso podemos resolverla mediante una fórmula explícita, hay otros casos interesantes en donde x puede expresarse como una función de y pero sin una fórmula explícita. En este capítulo investigaremos tales casos.

§1. Definición de funciones inversas

Sea $y = f(x)$ una función definida para todo x en cierto intervalo. Si para cada valor y_1 de y hay exactamente *un* valor x_1 de x en el intervalo tal que $f(x_1) = y_1$, entonces podemos definir una **función inversa.**

$$x = g(y)$$

por la regla: Dado un número y asociamos con él al número único x en el intervalo tal que $f(x) = y$.

Nuestra función inversa está definida solamente en aquellos números que son valores de f. Tenemos la relación fundamental $f[g(y)] = y$ y $g[f(x)] = x$.

Por ejemplo, supongamos la función $y = x^2$, que consideramos definida solamente para $x \geqq 0$. Todo número positivo (ó 0) puede escribirse únicamente como el cuadrado de un número positivo (ó 0). Podemos por ello definir la función inversa, que también estará definida para $y \geqq 0$ pero no para $y < 0$. No es otra cosa que la función raíz cuadrada.

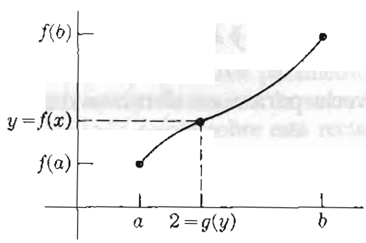
Como otro ejemplo, supongamos que $y = 5x - 7$. Entonces podemos encontrar la solución para x en términos de y, a saber:

$$x = \tfrac{1}{5}(y + 7).$$

Si $f(x) = 5x - 7$, entonces su función inversa es la función $g(y)$ tal que

$$g(y) = \tfrac{1}{5}(y + 7).$$

En estos ejemplos podíamos expresar la función inversa por fórmulas explícitas. En general, esto no es posible; pero hay criterios que nos dicen cuándo existe la función inversa; por ejemplo, cuando la gráfica de la función f tiene este aspecto:



En este caso, f es estrictamente creciente y está definida en el intervalo $[a, b]$. Para cada punto x en este intervalo hay un valor $f(x) = y$ y para cada y entre $f(a)$ y $f(b)$ hay un x único entre a y b tal que $f(x) = y$. Formalizaremos esto en el siguiente teorema:

Teorema 1. *Sea $f(x)$ una función que es estrictamente creciente. Entonces existe la función inversa.*

Demostración. Esto es prácticamente obvio: dado un número y_1 y un número x_1 tal que $f(x_1) = y_1$, no puede haber otro número x_2 tal que $f(x_2) = y_1$ a menos que $x_2 = x_1$, porque si $x_2 \neq x_1$, entonces o $x_2 > x_1$, en cuyo caso $f(x_2) > f(x_1)$, o $x_2 < x_1$, en cuyo caso

$$f(x_2) < f(x_1).$$

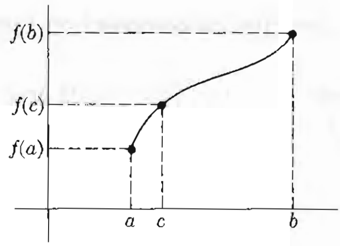
Como la positividad de la derivada nos proporciona una buena prueba de cuándo una función es estrictamente creciente, podemos definir funciones inversas siempre que la función sea derivable y su derivada sea positiva.

Como es usual, lo que acabamos de decir se aplica también a funciones que son estrictamente decrecientes y a las que tienen derivadas negativas.

El siguiente teorema es intuitivamente claro y se prueba en un apéndice.

Teorema del valor intermedio. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea v un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces hay un punto c entre a y b tal que $f(c) = v$.*

Este teorema nos dice que la función f toma cualquier valor intermedio entre los valores en los puntos extremos del intervalo y se ilustra en la siguiente figura:



Usando el teorema del valor intermedio, concluimos ahora:

Teorema 2. *Sea f una función continua sobre el intervalo cerrado*

$$a \leqq x \leqq b$$

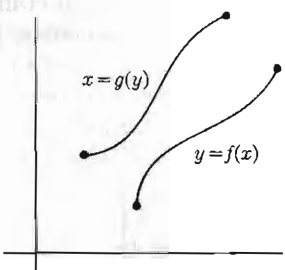
y supongamos que f es estrictamente creciente. Sea $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$. Entonces la función inversa está definida en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Dado un número γ cualquiera entre α y β, existe un número c entre a y b tal que $f(c) = \gamma$ por el teorema del valor intermedio. Nuestra afirmación se sigue ahora del teorema 1.

Sea ahora g esta función inversa. Entonces $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Además, la función inversa está caracterizada por la relación

$$f(x) = y \quad \text{si y sólo si} \quad x = g(y).$$

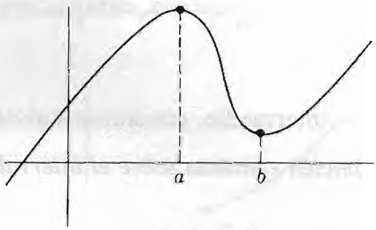
Nótese que podemos visualizar fácilmente la gráfica de una función inversa. Si deseamos x en términos de y, nada más tenemos que invertir los papeles de los ejes de las x y las y. Así, la gráfica de $y = f(x)$, al reflejarse en la línea interrumpida a 45°, nos da la gráfica de $x = g(y)$.



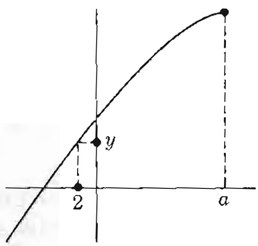
En la anterior figura, la gráfica de $y = f(x)$ corresponde a la posición usual de los dos ejes. La gráfica de $x = g(y)$, tal como aparece dibujada, corresponde a poner el eje horizontal como eje de las y y el eje vertical como eje de las x.

Daremos ahora algunos ejemplos de cómo definir funciones inversas en ciertos intervalos.

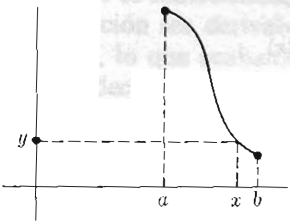
Ejemplo 1. Tomemos como $f(x)$ un polinomio de grado 3. Cuando el coeficiente de x^3 es positivo y cuando f tiene máximo y mínimo locales, su gráfica tiene este aspecto:

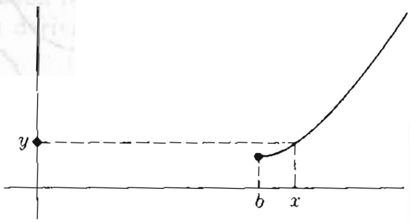


Para cualquier valor dado de y entre $f(a)$ y $f(b)$ le corresponden tres valores posibles de x y, por tanto, la función inversa no puede definirse a menos que demos otras especificaciones. Para hacer esto, supongamos primero que consideramos f como definida solamente para aquellos números $\leqq a$. Entonces, la gráfica de f toma este aspecto:



La función inversa está definida en este caso. Análogamente, podríamos considerar f como definida en el intervalo $[a, b]$ o en el intervalo $x \geqq b$. En cada uno de estos casos, ilustrados en las figuras siguientes, la función inversa sí estaría definida.





En cada caso hemos marcado un punto y y el valor correspondiente x de la función inversa; son diferentes en los tres casos.

Ejemplo 2. Tomemos un ejemplo numérico. Consideremos

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

como una función en el intervalo $x > \sqrt{2/3}$. ¿Podemos definir la función inversa? ¿Para qué números? Si g es la función inversa, ¿a qué es igual $g(0)$? ¿A qué es igual $g(5)$?

Como $f'(x) = 3x^2 - 2$, la derivada es positiva cuando $x > \sqrt{2/3}$. Luego nuestra función es estrictamente creciente y la función inversa está definida.

Sabemos (por las técnicas de los capítulos anteriores) que $x = \sqrt{2/3}$ es un mínimo de f y $f(\sqrt{2/3}) = (2/3)^{3/2} - 2(2/3)^{1/2} + 1$. La función inversa está definida, por tanto, para $y > f(\sqrt{2/3})$.

Como $f(1) = 0$, tenemos $g(0) = 1$. Como $f(2) = 5$, tenemos $g(5) = 2$.

Obsérvese, por favor, que no damos una fórmula explícita para nuestra función inversa.

Ejemplo 3. Por otra parte, tomemos f definida por la misma fórmula

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

pero considerada como una función en el intervalo

$$-\sqrt{\tfrac{2}{3}} \leqq x \leqq \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

La derivada de f está dada por $f'(x) = 3x^2 - 2$. Verificamos entonces de inmediato que $f'(x) < 0$ en el intervalo

$$-\sqrt{\tfrac{2}{3}} < x < \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Por tanto, f es estrictamente decreciente en este intervalo y la función inversa está definida, pero es completamente diferente de la del ejemplo 2.

Ejemplo 4. Sea $f(x) = x^n$ (donde n es un entero positivo). Consideramos f como definida solamente para números $x > 0$. Como $f'(x)$ es nx^{n-1}, la función es estrictamente creciente. Luego existe la función inversa. La función inversa g es en realidad lo que entendemos por raíz n-ésima. En particular, hemos probado que todo número positivo tiene una raíz n-ésima.

En todos los ejercicios del capítulo previo se determinaron intervalos en los que ciertas funciones eran crecientes o decrecientes. Se pueden ahora definir funciones inversas para tales intervalos. En la mayor parte de los casos, no se pueden expresar tales funciones inversas mediante una fórmula explícita.

Ejercicios

Determinar si hay una función inversa g para cada una de las funciones siguientes y determinar aquellos números en los que g está definida.

1. $f(x) = 3x + 2$, todo x.
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $0 \leqq x$
3. $f(x) = x^3 + 4x - 5$, todo x.
4. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $-1 < x$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $-2 < x$
6. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $1 < x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $0 < x \leqq 1$
8. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $0 \leqq x \leqq 5$
9. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$, $0 \leqq x < 2$
10. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $1 \leqq x \leqq 10$
11. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $0 < x \leqq 1$
12. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $0 < x \leqq 1$
13. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $-1 \leqq x \leqq 1$
14. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $1 \leqq x$

§2. Derivada de las funciones inversas

Enunciaremos un teorema que nos permitirá determinar la derivada de una función inversa cuando conozcamos la derivada de la función dada.

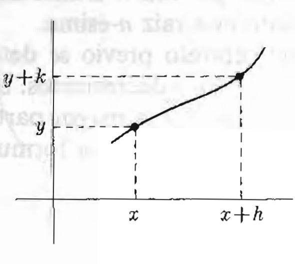
Teorema 3. *Sean a, b dos números, con $a < b$. Sea f una función que es derivable en el intervalo $a < x < b$ y tal que su derivada $f'(x)$ es > 0 para todo x en este intervalo abierto. Entonces la función inversa $x = g(y)$ existe y tenemos*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Demostración. Se supone que vamos a investigar el cociente de Newton

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k}.$$

El siguiente dibujo ilustra la situación:



Por el teorema del valor intermedio, todo número de la forma $y + k$ con valores pequeños de k puede escribirse como un valor de f. Hagamos $x = g(y)$ y sea $h = g(y + k) - g(y)$. Entonces,

$$x = g(y) \quad \text{y} \quad g(y + k) = x + h.$$

Por otra parte, $y + k = f(x + h)$ y, por tanto,

$$k = f(x + h) - f(x).$$

El cociente de Newton para g puede, por tanto, escribirse

$$\frac{h}{f(x + h) - f(x)},$$

y vemos que es el recíproco del cociente de Newton para f, a saber:

$$\frac{1}{\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}}.$$

Cuando h tiende a 0, sabemos que k tiende a 0. Recíprocamente, cuando k tiende a 0, sabemos que existe exactamente un valor de h tal que $f(x + h) = y + k$, porque la función inversa está definida. Por consiguiente, el valor correspondiente de h debe también aproximarse a 0.

Si tomamos ahora el límite del recíproco del cociente de Newton de f, cuando h (o k) tiende a 0, obtenemos

$$\frac{1}{f'(x)}.$$

Por definición, esto es la derivada $g'(y)$ y nuestro teorema está probado.

Ejemplo 1. Consideremos $f(x) = x^3 - 2x + 1$, como una función en el intervalo $x > \sqrt{2/3}$. Sea g la función inversa. ¿A qué es igual $g'(0)$? ¿A qué es igual $g'(5)$?

Sabemos que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

siempre que $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Pero

$$f(1) = 0 \quad \text{y} \quad g(0) = 1.$$

Puesto que $f'x = 3x^2 - 2$, obtenemos $f'(1) = 1$ y

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1.$$

Análogamente, $f(2) = 5$ y $g(5) = 2$. También $f'(2) = 10$. De donde

$$g'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{10},$$

porque $f'(2) = 10$.

Téngase presente que la derivada $g'(y)$ está dada en términos de $f'(x)$. No tenemos una fórmula en términos de y.

El teorema que nos da la derivada de la función inversa podría también expresarse diciendo que

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.}$$

Aquí también se comporta la derivada *como si* estuviéramos tomando un cociente. La notación es, pues, muy sugestiva y podemos usarla de ahora en adelante sin más reflexión, puesto que ya hemos probado un teorema que la justifica.

Observación. En el teorema 3 hemos probado que, en realidad, la derivada de la función inversa g existe y está dada por $g'(y) = 1/f'(x)$. Si *se da por sentado* que esta derivada existe, entonces se puede dar un argumento mucho más breve para encontrar su valor, usando la regla de la cadena. Tenemos, ciertamente,

$$f(g(y)) = y.$$

Derivando con respecto a y, encontramos por la regla de la cadena,

$$f'(g(y))g'(y) = 1.$$

De donde

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

como teníamos que demostrar.

Ejercicios

En los ejercicios del capítulo V, §3, restringir f a un intervalo, de forma que la función inversa esté definida en un intervalo que contenga el punto indicado, y hallar la derivada de la función inversa en ese punto. (Denotemos por g esta función inversa en cada caso.)

1. $g'(2)$ 2. $g'(6)$ 3. $g'(7)$ 4. $g'(-1)$ 5. $g'(\sqrt{3}/2)$

6. $g'(-1)$ 7. $g'(0)$ 8. $g'(2)$ 9. $g'(21)$ 10. $g'(11)$

11. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f es dos veces derivable

en el intervalo abierto $a < x < b$ y que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en este intervalo. Sea g la función inversa de f.
(a) Hallar una expresión para la segunda derivada de g.
(b) Demostrar que $g''(y) < 0$ en su intervalo de definición. Así, pues, g es convexa en la dirección opuesta a f.

§3. El arcsen

Es imposible definir una función inversa para la función $y = \text{sen } x$, porque a cada valor de y le corresponden infinitos valores de x, ya que sen $(x + 2\pi) =$ sen $x =$ sen $(\pi - x)$. Sin embargo, si restringimos nuestra atención a ciertos intervalos, podemos definir la función inversa.

Restrinjamos la función seno al intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Como la derivada de sen x es cos x, en el intervalo mencionado tenemos

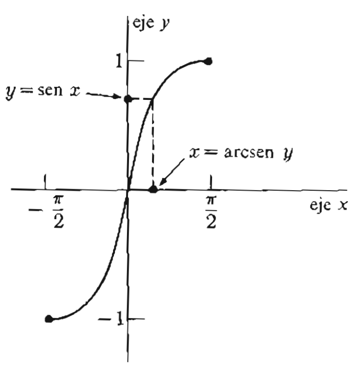
$$0 < \cos x$$

excepto en $x = \pi/2$ o $x = -\pi/2$; en estos casos el coseno es 0.

Del teorema 5 del capítulo V, § 3, se desprende que la función es estrictamente creciente en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

Podemos entonces definir la función inversa. Llamémosla **arcoseno**



Sea $f(x) =$ sen x y $x =$ arcsen y, la función inversa. Como $f(0) = 0$, sucederá que arcsen $0 = 0$. Además, como sen $(-\pi/2) = -1$ y sen $(\pi/2) = 1$, sabemos que la función inversa estará definida en el intervalo que va de -1 a $+1$, es decir, para los números y que cumplan

$$-1 \leqq y \leqq 1.$$

Podemos decir, aunque esto no sea del todo exacto, que arcsen x es el ángulo cuyo seno es x. (Decimos que esto *no es del todo exacto* porque formalmente arcsen x es un número y no un ángulo; también porque, en todo caso, deberíamos hablar del ángulo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y sea $g(y) = \operatorname{arcsen} y$. Entonces

$$\operatorname{arcsen} 1/\sqrt{2} = \pi/4$$

porque

$$\operatorname{sen} \pi/4 = 1/\sqrt{2}.$$

Análogamente

$$\operatorname{arcsen}\ 1/2 = \pi/6$$

ya que

$$\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2.$$

Obsérvese que para valores cualesquiera de x que no estén en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},$$

no tendremos que

$$\operatorname{arcsen}\ \operatorname{sen} x = x.$$

Por ejemplo, tomemos $x = -\pi$. Entonces

$$\operatorname{sen}(-\pi) = 0,$$

y

$$\operatorname{arcsen}\ 0 = 0 \neq -\pi.$$

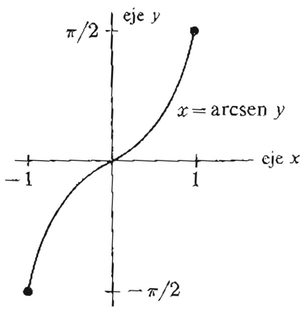
La derivada de sen x es positiva en el intervalo

$$-\pi/2 < x < \pi/2.$$

Como la derivada de la función inversa $x = g(y)$ es $1/f'(x)$, la derivada de arcsen y también será positiva en el intervalo

$$-1 < y < 1.$$

Por tanto, la función inversa es estrictamente creciente en este intervalo. A continuación aparece la gráfica de la función inversa.



Vemos que ahora no podemos llamar al eje horizontal «eje x» o «eje y» simultáneamente. Por el momento llamaremos al eje horizontal de la figura anterior eje y, y al eje vertical eje x.

Según la fórmula general para la derivada de funciones inversas, sabemos que si $y = \text{sen } x$ y $x = \text{arcsen } y$, la derivada de x respecto de y será

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x}.$$

Sabemos también que si x está muy cerca de $\pi/2$, entonces $\cos x$ está cerca de 0. Es decir, la derivada tomará valores muy grandes. Esto nos indica que la curva es casi vertical. De manera análoga, como se puede ver en la figura anterior, cuando x toma valores muy cercanos a $-\pi/2$ e y a -1, la curva es casi vertical.

Podemos ahora expresar explícitamente la derivada en función de y. En efecto, de la relación

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

obtenemos

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x.$$

En el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$ el coseno es $\geqslant 0$. Podemos entonces extraer raíz cuadrada y así

$$\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$$

en ese intervalo. Como $y = \text{sen } x$, la derivada puede escribirse en términos de y de la forma siguiente:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Ejemplo. Sea $x = \text{arcsen } y$. Encontrar dx/dy cuando $y = 1/\sqrt{2}$. Esto es muy fácil, basta hacer $g(y) = \text{arcsen } y$, entonces

$$g'(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1/\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2}.$$

Ahora que hemos obtenido toda la información sobre el arcsen, llamaremos otra vez a los ejes de la manera usual y enunciaremos las propiedades principales en un teorema.

Teorema 4. *Consideremos la función seno definida en el intervalo*

$$[-\pi/2, \pi/2].$$

Entonces la función inversa que está definida en el intervalo $[-1, 1]$ *se llamará*

$$g(x) = \text{arcsen } x.$$

g es derivable en el intervalo abierto $-1 < x < 1$ y

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ejercicios

1. Considérese el coseno definido sólo en el intervalo $[0, \pi]$. Demostrar que existe la función inversa arccos. Decir en qué intervalo está definida y trazar su gráfica.
2. ¿Cuál es la derivada del arccoseno?
3. Sea $g(x) = \text{arcsen } x$. Encontrar los valores siguientes:
   (a) $g'(1/2)$ (b) $g'(1/\sqrt{2})$ (c) $g(1/2)$
   (d) $g(1/\sqrt{2})$ (e) $g'(\sqrt{3}/2)$ (f) $g(\sqrt{3}/2)$
4. Sea $g(x) = \arccos x$. Decir qué representan los valores siguientes: $g'(\frac{1}{2})$; $g'(1/\sqrt{2})$; $g(\frac{1}{2})$; $g(1/\sqrt{2})$.
5. Sea $\sec x = 1/\cos x$. Definir la función inversa de la secante en algún intervalo adecuado y obtener una fórmula para la derivada de esta función inversa.

Hallar los siguientes números:

6. arcsen (sen $3\pi/2$) 7. arcsen (sen 2π) 8. arccos (cos $3\pi/2$)
9. arccos (cos $-\pi/2$) 10. arcsen (sen $-3\pi/4$)

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

11. arcsen $(x^2 \quad 1)$ 12. arccos $(2x + 5)$
13. $\dfrac{1}{\text{arcsen } x}$ 14. $\dfrac{2}{\arccos 2x}$
15. Determinar los intervalos en donde la función arcsen es convexa hacia arriba y en donde es convexa hacia abajo.

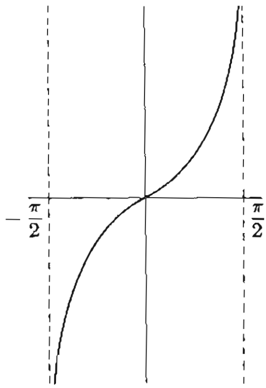
§4. El arctan

Consideremos a la función $f(x) = \tan x$ definida solamente en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Cuando x pasa de $-\pi/2$ a $\pi/2$, la tangente pasa de valores negativos grandes a valores positivos también grandes. De hecho, cuando x se aproxima a $\pi/2$, la tangente va tomando valores positivos arbitrariamente grandes. Análogamente, cuando x se aproxima a $-\pi/2$, la tangente va tomando valores negativos arbitrariamente grandes.

La gráfica de la tangente aparece en la figura siguiente.



La derivada de $\tan x$ es

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = 1 + \tan^2 x.$$

Por consiguiente, la derivada es positiva siempre; por tanto, la función es estrictamente creciente. En consecuencia, la función inversa estará definida para todo número real. Llamemos a esta función inversa el **arctan**. Su derivada también es positiva (porque es el recíproco de la derivada de la tangente); por consiguiente, el arctan es también una función estrictamente creciente.

Como en el caso del arcsen y arccos, podemos decir de modo general que arctan y es el ángulo cuya tangente es y. Esto, sin embargo, no es exacto porque como ya indicamos antes estamos en realidad hablando del número de radianes del ángulo cuya tangente es y, suponiendo además que este número está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Ejemplo. Tenemos que $\arctan\,(-1\sqrt{3}) = -\pi/6$, pero

$$\arctan\,(-1/\sqrt{3}) \neq 5\pi/6,$$

aunque $\tan 5\pi/6 = -1/\sqrt{3}$.

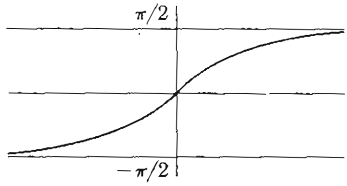
Ejemplo. Del mismo modo, encontramos que

$$\arctan\tan 5\pi/6 = \arctan\,(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6.$$

La razón por la cual $\arctan\tan x \neq x$ en este caso, se debe a nuestra escogencia del intervalo de definición para la tangente, cuando queremos tener una función inversa y al hecho de que $x = 5\pi/6$ no está en este intervalo. Por supuesto, si x está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, tendremos $\arctan\tan x = x$. Así

$$\arctan\tan\,(-\pi/6) = -\pi/6.$$

La gráfica del arctan luce así:



Sea $x = g(y) = \arctan y$. Entonces

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

o sea que

$$g'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Nuevamente podemos encontrar una fórmula explícita para la derivada de la función inversa.

Como en el caso del arcsen, cuando tratemos simultáneamente con la función y su inversa tenemos que usar las letras x e y por separado. Ahora resumiremos las propiedades del arctan en términos de la notación usual.

Teorema 5. *La función inversa de la tangente está definida para cualquier número. La llamaremos el arctan, es derivable y su derivada está dada por:*

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Cuando x crece ilimitadamente tomando valores positivos, arctan x se aproxima a $\pi/2$.
Cuando x crece ilimitadamente por los negativos, arctan x se aproxima a $-\pi/2$.
El arctan es estrictamente creciente para todo x.

Ejemplo. Sea $h(x) = \arctan 2x$. Para encontrar la derivada usaremos la regla de la cadena; sea $u = 2x$. Entonces

$$h'(x) = \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1 + 4x^2}.$$

Ejemplo. Sea g la función arctan. Entonces

$$g'(5) = \frac{1}{1 + 5^2} = \frac{1}{26}.$$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \arctan 2x$$

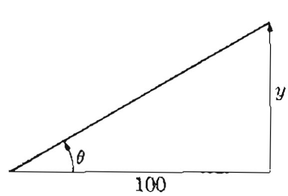
en el punto $x = 1/2\sqrt{3}$.
Sea $h(x) = \arctan 2x$. Entonces

$$h'(1/2\sqrt{3}) = \frac{2}{1 + 4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Cuando $x = 1/2\sqrt{3}$ tendremos que $y = \pi/6$. Debemos entonces encontrar la ecuación de la recta con pendiente $3/2$ y que pasa por el punto $(1/2\sqrt{3}, \pi/6)$. Como ya sabemos hacer esto, podemos decir que la ecuación es:

$$y - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Ejemplo. Un globo se eleva desde la tierra hasta una distancia de 100 m respecto de un observador, a razón de 50 m/min. ¿Con qué rapidez crece el ángulo de elevación de la línea que une al observador con el globo cuando éste está a una altura de 100 m? La gráfica tiene la siguiente forma:



Tenemos que determinar $d\theta/dt$. Sabemos que $dy/dt = 50$. Tenemos

$$\frac{y}{100} = \tan\theta,$$

de donde

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{100}\right)\cdot$$

Por consiguiente,

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{100}\right)^2}\cdot\frac{1}{100} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Se sigue entonces que

$$\frac{d\theta}{dt} \quad \text{cuando } y = 100 \text{ es igual a} \quad \frac{1}{1+1^2}\cdot\frac{1}{100}\cdot 50$$

y, por tanto, la respuesta es $1/4$ rad/min (donde rad significa radianes).

Ejercicios

1. Sea g la función arctan. Decir qué representan los siguientes valores: $g(1)$; $g(1/\sqrt{3})$; $g(-1)$; $g(\sqrt{3})$.
2. Sea g la función arctan. Decir qué representan los valores: $g'(1)$; $g'(1/\sqrt{3})$; $g'(-1)$; $g'(\sqrt{3})$.
3. Supongamos que se quiere definir una función inversa de la tangente en el intervalo $\pi/2 < x < 3\pi/2$. ¿Cuál sería la derivada de esta función inversa?
4. Decir qué representan los valores:
   (a) $\arctan(\tan 3\pi/4)$?
   (b) $\arctan(\tan 2\pi)$?
   (c) $\arctan(\tan 5\pi/6)$?
   (d) $\arctan(\tan -5\pi/6)$?

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

5. $\arctan 3x$
6. $\arctan\sqrt{x}$
7. $\operatorname{arcsen} x + \arccos x$
8. $x \operatorname{arcsen} x$
9. $\arctan(\sin 2x)$
10. $x^2 \arctan 2x$
11. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} x}$
12. $\operatorname{arcsen}(\cos x - x^2)$
13. $\arctan\dfrac{1}{x}$
14. $\arctan\dfrac{1}{2x}$
15. $(1 + \operatorname{arcsen} 3x)^3$
16. $(\operatorname{arcsen} 2x + \arctan x^2)^{3/2}$

Hallar la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto indicado:

17. $y = \operatorname{arcsen} x, \quad x = 1/\sqrt{2}$
18. $y = \arccos x, \quad x = 1/\sqrt{2}$
19. $y = \arctan 2x, \quad x = \sqrt{3}/2$
20. $y = \arctan x, \quad x = -1$

21. $y = \operatorname{arcsen} x, \quad x = -\frac{1}{2}$
22. Un globo se eleva desde la tierra hasta una distancia de 500 m respecto de un observador, a razón de 200 m/min. ¿Con qué rapidez crece el ángulo de elevación de la línea que une al observador con el globo cuando éste está a una altura de 1 000 m?
23. Un avión vuela horizontalmente a una altura de 4 400 m alejándose respecto de un observador. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/4$. el ángulo decrece a razón de 0,05 rad/seg. ¿Cuál es la rapidez del avión en ese instante?
24. Una persona camina por una acera a razón de 5 pies/seg. A 30 pies de la acera hay un faro buscador apuntándole. ¿Con qué velocidad gira el faro cuando la persona está a 20 pies respecto del punto de la acera más próximo al faro?
25. Una torre está al final de una calle. Un hombre va en un automóvil hacia la torre a razón de 50 m/seg. La torre tiene 500 m de altura. ¿Con qué rapidez crece el ángulo subtendido por la torre y el ojo del hombre cuando éste se encuentra a 1 000 m de la torre?
26. Un carro de la policía se aproxima a una intersección a 80 pies/seg. Cuando está a 200 pies de este punto, un carro cruza la intersección, viajando en ángulo recto con respecto a la dirección en que viaja el carro de la policía, a la velocidad de 60 pies/seg. Si el policía dirige el rayo de luz de su faro hacia el segundo carro, ¿con qué velocidad girará el rayo de luz 2 segundos después, suponiendo que ambos carros mantengan sus velocidades originales?
27. Un peso es jalado a lo largo de un piso horizontal mediante una cuerda que pasa por un gancho situado a 6 pies sobre el piso. Si la cuerda es jalada sobre el gancho a la velocidad de 1 pie/seg, encontrar una expresión para la razón de cambio del ángulo θ, formado por la cuerda y el piso, como una función del ángulo θ.
28. Un hombre parado en un punto fijo de un muelle, jala un pequeño bote. El muelle está a 20 pies sobre el nivel del agua. Si el hombre jala la cuerda a 2 pies/seg, ¿con qué velocidad crecerá el ángulo que la cuerda forma con el agua, cuando la distancia desde el hombre hasta el bote sea de 50 pies?
29. Un helicóptero despega a 1 000 pies de un observador y se eleva verticalmente a 20 pies/seg. ¿A qué velocidad cambiará el ángulo de elevación del helicóptero respecto al observador cuando el helicóptero esté a 800 pies sobre el suelo?
30. Determinar los intervalos en los que arctan es cóncavo hacia arriba y aquellos en que es cóncavo hacia abajo.
31. Un helicóptero deja una base, elevándose verticalmente a una velocidad de 15 pies/seg. Al mismo tiempo que despega el helicóptero, un observador parte desde un punto situado a 100 pies de la base y se mueve en línea recta, alejándose de la base a la velocidad de 80 pies/seg. ¿Con qué velocidad crece el ángulo de elevación del helicóptero respecto al observador cuando este último esté: (a) a 400 pies de la base?, ¿(b) a 600 pies de la base?
32. Un tren se mueve sobre una línea recta, alejándose de la estación a la velocidad de 20 pies/seg. Un operador cinematográfico parte desde un punto situado a 50 pies de la estación, al mismo tiempo que sale el tren, y, dirigiendo la cámara hacia el tren, se aleja de ella perpendicularmente a los rieles, a la velocidad de 10 pies/seg. ¿A qué velocidad gira el ángulo de la cámara después de que el tren haya recorrido: (a) 80 pies?, ¿(b) 100 pies?

CAPITULO VIII

Exponentes y logaritmos

Recordemos que en un principio tuvimos dificultades con la función 2^x (ó 3^x, ó 10^x). Intuitivamente parecía muy plausible la existencia de funciones que cumplieran con la ecuación fundamental

$$2^{x+y} = 2^x 2^y$$

para todos los números x, y y con la propiedad $2^0 = 1$, pero no podíamos entender el significado de expresiones como $2^{\sqrt{2}}$ (ó 2^π).

En este capítulo estudiaremos sistemáticamente esta función y otras similares.

Veremos también que su función inversa está definida para los números positivos. La llamaremos log (o, mejor aún, log de base 2). Así, $y = 2^x$ si y sólo si $x = \log_2 y$. Por ejemplo,

$$3 = \log_2 8 \qquad \text{y} \qquad 8 = 2^3$$

son dos maneras de decir lo mismo.

Supongamos por un momento que tuviera sentido hablar de la función ^{x} y tratemos de calcular su derivada.

Formemos el cociente de Newton. Esto es:

$$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h}.$$

Utilizando la ecuación fundamental, vemos que el cociente es igual a

$$\frac{2^x 2^h - 2^x}{h} = 2^x \frac{2^h - 1}{h}.$$

Aquí 2^x permanece fijo cuando h tiende a 0; la dificultad estriba en ver qué sucede con

$$\frac{2^h - 1}{h}.$$

No está del todo claro que este cociente tenga un límite. Nos encontramos aquí con una dificultad similar a la que enfrentamos cuando tratábamos de calcular la derivada de sen x. Sin embargo, en la situación actual, el tratamiento directo nos conduciría a dificultades mayores que las halladas cuando estudiamos el

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

De hecho, es cierto que existe el

$$\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

Vemos además que este límite no depende de x. Depende exclusivamente de 2.

Si tratáramos de encontrar la derivada de 10^x, hallaríamos el problema de determinar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{10^h - 1}{h},$$

que también es independiente de x.

Parece ser que no hay razón alguna para utilizar 2 ó 10 ó cualquier otro número a al investigar la función a^x. Pero resulta que hay un número, llamado e, tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

es igual a 1. Esto es realmente maravilloso, pues si formamos el cociente de Newton para e^x, obtendremos

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}.$$

Y cuando h tiende a 0 su límite es e^x, así que

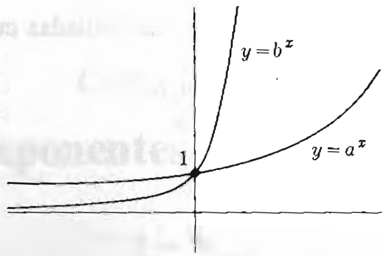
$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Ya veremos cómo calcular e. Su valor es 2,718... . En el capítulo XIV aparece la técnica para calcular e con el grado de aproximación que se desee.

Podemos motivar la existencia del número e, con la propiedad antes mencionada, de la siguiente manera: Sean a, b números > 1 y supongamos que $a < b$. Entonces, para cada número x tendremos

$$a^x < b^x.$$

Si b es muy grande, entonces la curva $y = b^x$ tendrá una pendiente muy empinada en $x = 0$. Si a es > 1, pero cercano a 1, entonces la curva $y = a^x$ tendrá una pendiente pequeña en $x = 0$. Hemos dibujado estas curvas en la siguiente figura:



El lector debe tratar de localizar algunos puntos en las curvas 2^x, 3^x, 10^x, para ver qué pasa en estos casos concretos. Podemos imaginar que si a crece desde números cercanos a 1 (pero > 1) hasta números muy grandes, la pendiente de a^x en $x = 0$ crece continuamente desde valores cercanos a 0 hasta valores grandes y, por tanto, para algún valor a, al que llamaremos e, esta pendiente es precisamente igual a 1. Así, en esta exposición intuitiva, e es el número tal que la pendiente de e^x en $x = 0$ es igual a 1, es decir que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = 1.$$

Este número e se denomina base natural para logaritmos y al log de base e se le llama simplemente log, sin ningún subíndice. Así $u = \log x$ significa que $e^u = x$.

Podemos entonces manejar las otras funciones exponenciales a^x con un número cualquiera $a > 0$ utilizando una regla común para los logaritmos y exponentes, la cual dice que para cualesquier números b, c tenemos

$$(e^b)^c = e^{bc}.$$

Entonces,

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{(\log a)x}.$$

Para evitar los paréntesis también se escribe

$$a^x = e^{x \log a}.$$

Podemos calcular la derivada mediante la regla de la cadena, haciendo $u = x \log a$, de modo que

$$\frac{du}{dx} = \log a.$$

Encontramos entonces que

$$\frac{da^x}{dx} = e^{x \log a} (\log a),$$

o más sencillamente,

$$\boxed{\frac{da^x}{dx} = a^x \log a.}$$

Por otro lado, usando directamente la definición de derivada, tal como lo hicimos para 2^x y 10^x, encontramos que

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

de lo cual,

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Combinando este resultado con la fórmula anterior, se aclara el problema del límite misterioso y vemos que

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a,}$$

donde $\log a = \log_e a$.

Como la función log y la exponencial son inversas una de la otra, podemos obtener la derivada de la función $y = \log x$ mediante la teoría de las funciones inversas. Tenemos que $x = e^y$; por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

De esta manera

$$\boxed{\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}.}$$

Ejercicio. Utilizando el enfoque anterior, encontrar la fórmula para la derivada

$$\frac{d \log_a x}{dx}.$$

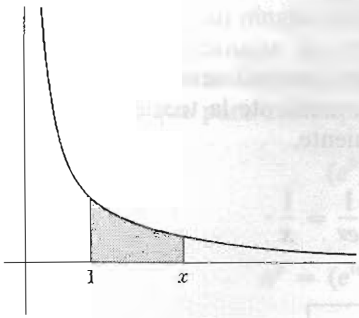
No hay nada «erróneo» con el enfoque anterior del proceso de derivación de las funciones exponenciales y logarítmicas. En realidad sirve como una buena introducción para lo que sigue. Debemos observar, sin embargo, que no hemos podido probar la existencia de los límites deseados, ni siquiera la del número e; en lugar de ello, hemos recurrido a una motivación intuitiva. Además, hay otra propiedad muy importante del log, y es que se puede interpretar como el área bajo la curva $1/x$; de esto pueden obtenerse conclusiones muy útiles.

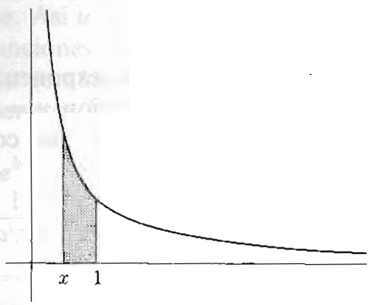
Desde un punto de vista lógico, debemos olvidarnos de la explicación anterior. Ahora, en lugar de una visión superficial, desarrollaremos la teoría siguiendo el camino más fácil; así, comenzaremos con la función log (que reconoceremos más tarde como el log de base e), y no con la exponencial. De esta manera no tendremos problemas para calcular los límites que surjan. Por otro lado, al considerar ejemplos fáciles del área como una «integral» y utilizar una técnica que veremos de nuevo en el siguiente capítulo, obtendremos una buena introducción a la teoría de la integración.

§1. El logaritmo

La función $\log x$ se define como el área bajo la curva $1/x$ entre 1 y x si $x \geqq 1$, y como el negativo del área bajo la curva $1/x$ entre 1 y x si $0 < x < 1$. En particular, $\log 1 = 0$.

La región sombreada de la siguiente figura representa el área bajo la curva entre 1 y x; y a la izquierda aparece un ejemplo cuando $x > 1$.





Si $x < 1$ y $x > 0$, tendríamos la figura de la derecha. Si $0 < x < 1$, diremos que el $\log x$ es igual al negativo del área. Así, $\log x < 0$ si $0 < x < 1$ y $\log x > 0$ si $x > 1$.

(Al definir el log hemos recurrido a nuestra idea geométrica de área, de la misma manera que cuando definimos el seno y el coseno. En el capítulo siguiente veremos que es posible dar una definición puramente analítica sin tener que recurrir a la geometría.)

El hecho fundamental relativo al logaritmo es el siguiente.

Teorema 1. *La función* $\log x$ *es derivable y*

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Demostración. Formemos el cociente de Newton

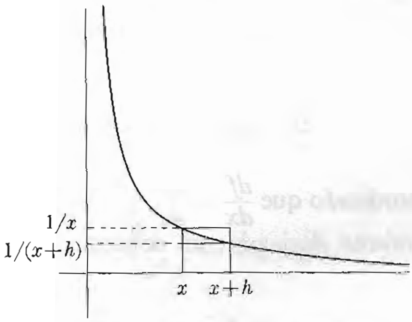
$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

tenemos que probar que este cociente tiende a $1/x$ cuando h tiende a 0.

Por el momento, tomemos $h > 0$. Entonces, $\log(x + h) - \log x$ es el área bajo la curva entre x y $x + h$. Como la curva $1/x$ es decreciente, esta área satisface las desigualdades siguientes:

$$h\frac{1}{x+h} < \log(x+h) - \log x < h\frac{1}{x}\cdot$$

En efecto, $1/x$ es la altura del rectángulo grande dibujado en la figura siguiente y $1/(x + h)$ es la altura del rectángulo pequeño. Como h es la base del rectángulo, y como el área bajo la curva $1/x$ entre x y $x + h$ está entre los dos rectángulos, tenemos que dicha área satisface nuestras desigualdades.



Dividamos ambos miembros de nuestras desigualdades por el número positivo h. Esto no cambia el sentido de las desigualdades y obtenemos entonces

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\log(x+h)-\log x}{h} < \frac{1}{x}\cdot$$

Nuestro cociente de Newton está atrapado entre $1/(x + h)$ y $1/x$; por tanto, cuando h tiende a cero, éste tiende a $1/x$. Esto prueba el teorema en el caso $h > 0$.

Para $h < 0$ la demostración es análoga. Queda como ejercicio. (Hay que fijarse en el signo del log. Al dividir una desigualdad por h y $h < 0$, la desigualdad cambia de sentido. Sin embargo, se verá que el cociente de Newton vuelve a quedar atrapado por $1/x$ y $1/(x + h)$.)

Desde ahora ya no necesitaremos nuestra intuición geométrica. Usamos la noción de área sólo para detectar la existencia de una función cuya derivada es $1/x$ y cuyo valor en 1 es 0. Los argumentos que siguen dependen sólo de la existencia de dicha función.

Sea, pues, la función $\log x$ definida para $x > 0$, tal que $\log 1 = 0$ y que

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Si $g(x)$ es otra función con las mismas propiedades, diferirá de $\log x$ en una constante C; es decir,

$$g(x) = \log x + C$$

para todo $x > 0$. (Usar el teorema 5 del capítulo V, §3.) Haciendo $x = 1$ tenemos que $g(1) = C$. Como suponemos que $g(1) = 0$, vemos que $g(x) = \log x$. Es decir, sólo hay una función que cumple con las propiedades mencionadas.

Teorema 2. *Si a, b son dos números > 0, entonces*

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Demostración. Consideremos la función $f(x) = \log (ax)$, definida para todo $x > 0$. Si utilizamos la regla de la cadena para calcular su derivada, obtendremos

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}.$$

$\left(\text{Haciendo } u = ax \text{ y recordando que } \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.\right)$ Por tanto, nuestras funciones $f(x)$ y $\log x$ tienen la misma derivada; en consecuencia, difieren sólo por una constante:

$$\log (ax) = \log x + C.$$

Esto es válido para *todo* $x > 0$. En particular, para $x = 1$. Tenemos entonces

$$\log a = C$$

determinando que la constante C es igual a $\log a$.

Pero al ser válida la relación anterior para *todo* $x > 0$, es también válida para $x = b$. En este caso, obtenemos

$$\log (ab) = \log b + \log a,$$

lo cual prueba el teorema.

Aprecie el lector la elegancia y la eficacia de los argumentos.

Teorema 3. *La función* $\log x$ *es estrictamente creciente para* $x > 0$. *Además, toma valores arbitrariamente grandes, tanto positivos como negativos.*

Demostración. Como su derivada $1/x$ es positiva para todo $x > 0$, nuestra función es estrictamente creciente. Como $\log 1 = 0$, podemos concluir, por ejemplo, que $\log 2 > 0$.

Usando el teorema 2 vemos que

$$\begin{aligned} \log 4 &= \log (2 \cdot 2) = 2 \log 2, \\ \log 8 &= \log (4 \cdot 2) = \log 4 + \log 2 = 3 \log 2, \\ \log 16 &= \log (8 \cdot 2) = \log 8 + \log 2 = 4 \log 2, \end{aligned}$$

etcétera. En general, por inducción, supongamos que $\log 2^{n-1} = (n-1) \log 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \log 2^n &= \log 2 \cdot 2^{n-1} = \log 2 + \log 2^{n-1} \\ &= \log 2 + (n-1) \log 2 = n \log 2 \end{aligned}$$

para cualquier entero positivo n. Cuando n es muy grande, $n \log 2$ también es muy grande.

Respecto a los valores negativos, obsérvese que

$$0 = \log 1 = \log (2 \cdot \tfrac{1}{2}) = \log 2 + \log (\tfrac{1}{2}).$$

Por tanto,

$$\log (\tfrac{1}{2}) = -\log 2,$$

y análogamente,

$$\log \left(\frac{1}{2^n}\right) = -n \log 2.$$

Entonces, para enteros positivos n grandes, $-n \log 2$ es un número negativo grande.

Se pueden aplicar los mismos argumentos para probar el siguiente teorema:

Teorema 4. *Si n es un entero, positivo o negativo, y a es un número > 0, entonces*

$$\log (a^n) = n \log a.$$

Demostración. Vamos por pasos. Supongamos primero que n es positivo. Entonces,

$$\log (a^2) = \log a + \log a = 2 \log a.$$

Por inducción, suponiendo que $\log (a^{n-1}) = (n-1) \log a$, tenemos

$$\begin{aligned} \log (a^n) &= \log (a \cdot a^{n-1}) = \log a + \log (a^{n-1}) \\ &= \log a + (n-1) \log a = n \log a. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que n es negativo, digamos que $n = -m$ con m positivo. Entonces,

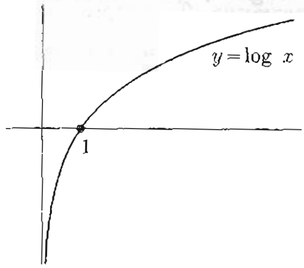
$$0 = \log 1 = \log (a^m \cdot a^{-m}) = \log (a^m) + \log (a^{-m}).$$

De ahí,

$$\log (a^n) = \log (a^{-m}) = -m \log (a) = n \log a,$$

lo cual prueba el teorema.

La función log toma *todos* los valores. Esto se deduce por el teorema del valor intermedio. Su gráfica es convexa hacia abajo porque la segunda derivada de $\log x$ es $-1/x^2$, que es < 0 para todo $x > 0$.



Nota. Algunas veces trabajaremos con funciones compuestas del tipo $\log (f(x))$. Como el log está definido sólo para números > 0, la expresión anterior tendrá sentido sólo para números x tales que $f(x) > 0$. Esto deberá tenerse en mente cada vez que escribamos dicha expresión.

Así, cuando escribimos $\log (x - 2)$, esto está definido sólo cuando $x - 2 > 0$; en otras palabras, cuando $x > 2$. La expresión $\log (\operatorname{sen} x)$ tiene sentido sólo cuando $\operatorname{sen} x > 0$. Lo anterior no está definido para $\operatorname{sen} x \leqq 0$.

Ejemplo. Encontrar la recta tangente a la curva $y = \log (x - 2)$ en el punto $x = 5$.

Sea $f(x) = \log (x - 2)$. Entonces, $f'(x) = 1/(x - 2)$ y

$$f'(5) = 1/3.$$

Cuando $x = 5$, $\log (x - 2) = \log 3$. Debemos encontrar la ecuación de la recta con pendiente $1/3$, que pase por $(5, \log 3)$. Esto es fácil:

$$y - \log 3 = \tfrac{1}{3}(x - 5).$$

Ejemplo. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x^2 + \log x$, para $x > 0$.

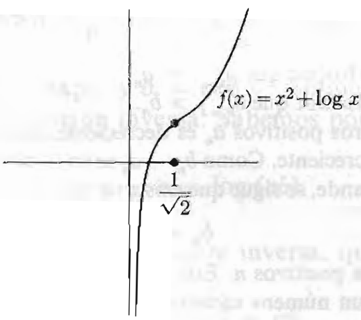
Empezaremos tomando la derivada:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

La función f tiene un punto crítico precisamente cuando $2x = -1/x$; esto es, cuando $2x^2 = -1$. Esto nunca puede pasar. Por tanto, no hay puntos críticos. Cuando $x > 0$, la derivada es positiva. Por tanto, en este intervalo la función es estrictamente creciente. Cuando x toma valores positivos grandes, x^2 y $\log x$ también toman valores positivos grandes. Conforme x se aproxima a 0 por la derecha x^2 se hace pequeño, pero $\log x$ se hace muy grande y negativo. Por consiguiente, $x^2 + \log x$ se hace negativo y muy grande. Finalmente, para determinar la convexidad, calcularemos la segunda derivada,

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2}.$$

Lo anterior es < 0 cuando $0 < x < 1/\sqrt{2}$, así que, en este intervalo, la función se dobla hacia abajo. Por otro lado, cuando $x > 1/\sqrt{2}$, la segunda derivada es > 0, de modo que la función se dobla hacia arriba. Por fin podemos dibujar la gráfica como sigue.



Ejercicios

1. ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = \log x$ en el punto cuya abscisa es (a) 2, (b) 5, (c) $\frac{1}{2}$?
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(x^2 + 1)$ en los puntos cuya abscisa es (a) -1, (b) 2, (c) -3?
3. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $\log(\operatorname{sen} x)$ (b) $\operatorname{sen}(\log(2x + 3))$ (c) $\log(x^2 + 5)$ (d) $\dfrac{\log 2x}{\operatorname{sen} x}$

4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(x + 1)$ en el punto de abscisa 3?

5. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(2x - 5)$ en el punto de abscisa 4?
6. (a) Probar que $\log x < x$ para todo $x > 1$. [*Sugerencia*: Hacer $f(x) = x - \log x$, hallar $f(1)$ y demostrar que f es estrictamente creciente.]
   (b) Probar que $\log(1 + x) < x$ para todo $x > 0$.
7. Sea h un número positivo. Comparar el área bajo la curva $1/x$ entre 1 y $1 + h$ con el área de rectángulos adecuados para mostrar que

$$\frac{h}{1+h} < \log(1 + h) < h.$$

8. Probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log(1 + h) = 1.$$

¿Cuál es la relación entre este límite y la derivada de $\log x$ en $x = 1$?

9. Probar que para cada entero positivo n se cumple que

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

10. (a) Sea

$$a_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

para cada entero $n \geqq 2$. Mostrar que $a_{n+1} < a_n$.

(b) Sea $b_n = a_n - 1/n$. Mostrar que $b_{n+1} > b_n$.

(c) La sucesión de números positivos a_n es decreciente, mientras que la sucesión de números positivos b_n es creciente. Como $b_n - a_n$ se va haciendo arbitrariamente pequeño conforme n se hace grande, se sigue que existe un número único C tal que

$$b_n < C < a_n$$

para todos los enteros positivos n. Este número es la **constante de Euler.** Probar que esta constante no es un número racional. (Fama inmortal aguarda al lector si logra resolver este ejercicio.)

Derivar las siguientes funciones:

11. $\log(2x + 5)$ 12. $\log(x^2 + 3)$ 13. $\log(\operatorname{arcsen} x)$ 14. $\log(\arccos 2x)$

15. $\dfrac{1}{\log x}$ 16. $\dfrac{x}{\log x}$ 17. $x(\log x)^{1/3}$ 18. $\log\sqrt{1 - x^2}$

Dibujar las siguientes curvas:

19. $y = \log(-x)$, $x < 0$ 20. $y = \log 2x$, $x > 0$
21. $y = \log(x + 1)$, $x > -1$ 22. $y = \log(1 - x)$, $x < 1$
23. $y = x + \log x$, $x > 0$.
24. Sea $a > 0$ y $b = a^{1/n}$. Mostrar que

$$\log b = \frac{1}{n} \log a.$$

25. Sean $a_1, \dots, a_n$ números > 0. Mostrar que

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leqq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

[*Sugerencia:* Tomar el log y usar la convexidad refiriéndose a los e 12 y 13 del capítulo VI, §3.]

§2. La función exponencial

Aplicaremos ahora la teoría de las funciones inversas. Como la función log es estrictamente creciente, podemos definir su función inversa y llamarla exp. Como log toma *todos* los valores, la función inversa está definida para *todos* los números positivos o negativos.

Como $0 = \log 1$, tendremos, por definición,

$$1 = \exp(0).$$

Teorema 5. Si *z, w son dos números, entonces*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Demostración. Sea $a = \exp z$ y $b = \exp w$. Entonces $z = \log a$ y $w = \log b$ debido a la definición de función inversa. Sabemos por el teorema 2 que

$$z + w = \log(ab).$$

Esto significa, por la definición de función inversa, que

$$\exp(z + w) = ab.$$

Pero $ab = \exp(z) \cdot \exp(w)$. El teorema está probado.

Definimos el número e como $\exp(1)$. Esto es lo mismo que decir que $\log e = 1$ o que $\exp(1) = e$.

(De acuerdo con la interpretación geométrica del log como el área bajo la curva $1/x$, lo anterior quiere decir que e es el número tal que el área entre 1 y e es igual a 1.)

Usando el teorema 5 podemos concluir que

$$\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1)\exp(1) = e^2.$$

De manera análoga,

$$\exp(3) = \exp(2 + 1) = \exp(2)\exp(1) = e^2 \cdot e = e^3.$$

Procediendo por inducción, concluimos que

$$\exp(n) = e^n$$

para cada entero positivo n.

Si n es un entero negativo pondremos $n = -m$ donde m es positivo. Entonces,

$$1 = \exp(0) = \exp(m - m) = \exp(m)\exp(-m).$$

Dividiendo por $\exp(m)$, o sea por e^m, tenemos

$$\exp(-m) = \frac{1}{e^m}.$$

Vemos entonces que nuestra función exp nos da la función potencia para números enteros m negativos y positivos.

Teorema 6. *La función* exp *es derivable* y

$$\frac{d(\exp x)}{dx} = \exp x.$$

Demostración. Por la teoría de las derivadas de las funciones inversas, sabemos que es derivable. Si hacemos $y = \exp x$ y $x = \log y$, la teoría de las derivadas de las funciones inversas nos da que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}.$$

Pero $dx/dy = 1/y$. Por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1/y} = y = \exp x,$$

lo cual prueba el teorema.

De ahora en adelante definiremos e^x como $\exp(x)$. Y tenemos, en vista del teorema 5, la regla

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

para todos los números z y w y $e^0 = 1$.

De esta manera, el teorema anterior queda

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Por definición, la derivada de e^x es el límite del cociente de Newton

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

cuando h tiende a cero. Así, al final de nuestra teoría obtenemos de manera natural el hecho de que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Como dijimos en la introducción, hubiera sido muy problemático obtener este resultado directamente.

Ejemplo. Sea $f(x) = e^{\cos 2x}$. Encontramos la derivada de f por medio de la regla de la cadena:

$$f'(x) = e^{\cos 2x}(-\operatorname{sen} 2x)2.$$

No hay objeto en simplificar esta expresión.

Ejemplo. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ en $x = 2$. Sea $f(x) = e^x$. Entonces, $f'(x) = e^x$ y $f'(2) = e^2$. Cuando $x = 2$, $y = e^2$. Tenemos entonces que encontrar la ecuación de la recta con pendiente e^2 que pasa por el punto $(2, e^2)$. Esta ecuación es

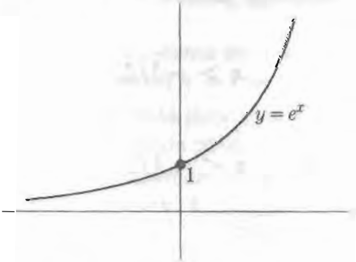
$$y - e^2 = e^2(x - 2).$$

La función e^x es estrictamente creciente y, como $e > 1$, e^n se hace grande conforme n se hace grande. Lo mismo pasa con e^x para cualquier x.

De hecho, e^x crece muy rápidamente. Veremos esto con más detenimiento en §4.

Finalmente, tenemos que la segunda derivada de e^x es e^x que es > 0 para todo x. Es decir, e^x es convexa hacia arriba.

Podemos ya dibujar la gráfica de e^x:

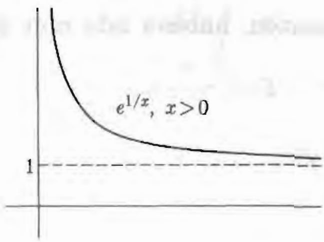


Ejemplo. Queremos dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = e^{1/x}, \qquad x \neq 0.$$

Notemos primero que $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$. Por consiguiente, la derivada nunca es cero y siempre es negativa. Por tanto, la función es estrictamente decreciente en cada uno de los intervalos $x < 0$ y $x > 0$.

Cuando x está cerca de 0 y $x > 0$, $1/x$ es grande y positivo y, por tanto, $e^{1/x}$ es grande y positivo. Conforme x crece, $1/x$ decrece y, por tanto, $e^{1/x}$ también decrece. Conforme x crece, $1/x$ tiende a 0 y entonces $e^{1/x}$ tiende a 1. Si calculamos la segunda derivada para cualquier valor de x, veremos que todos los términos en ella son positivos, tendremos entonces que la función es convexa hacia arriba. La gráfica de la función para $x > 0$ tiene este aspecto:



Veamos ahora qué sucede cuando $x < 0$. Conforme x se aproxima a 0 por la izquierda, $1/x$ es negativo y va tomando valores cada vez más grandes. Entonces $e^{1/x}$ es positivo y muy pequeño. Por otro lado, cuando x toma un valor negativo muy grande, $1/x$ es negativo y muy cercano a 0. Por consiguiente, $e^{1/x}$ tiende a 1. Finalmente, la segunda derivada es igual a

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot e^{1/x} + e^{1/x}\cdot\frac{2}{x^3}, \\ &= \frac{1}{x^3}e^{1/x}\left(\frac{1}{x}+2\right). \end{aligned}$$

Si $x < 0$, entonces $x^3 < 0$. Además, $e^{1/x}$ es siempre > 0. Y, por último, el término $\frac{1}{x} + 2$ es negativo cuando

$$x > -1/2,$$

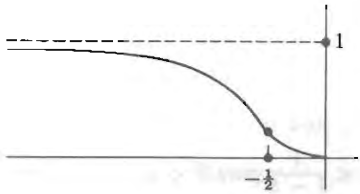
y es positivo cuando

$$x < -1/2.$$

Entonces, para $x < 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \quad \text{siempre y cuando} \quad x > -1/2, \\ f''(x) &< 0 \quad \text{siempre y cuando} \quad x < -1/2. \end{aligned}$$

De aquí podemos obtener la convexidad, a saber: la curva se dobla hacia abajo cuando $x < -1/2$, y se dobla hacia arriba cuando $x > -1/2$. Dibujamos ahora la gráfica para $x < 0$ de la siguiente manera:



Ejercicios

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{2x}$ en el punto de abscisa (a) 1, (b) -2, (c) 0?
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{x/2}$ en el punto de abscisa (a) -4, (b) 1, (c) 0?
3. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = xe^x$ en el punto de abscisa 2?
4. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:
   (a) $e^{\operatorname{sen} 3x}$ (b) $\log(e^x + \operatorname{sen} x)$
   (c) $\operatorname{sen}(e^{x+2})$ (d) $\operatorname{sen}(e^{4x-5})$
5. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:
   (a) $\arctan \log x$ (b) $\log \cos(3x + 5)$
   (c) $e^{\operatorname{sen} 2x}$ (d) $e^{\arccos x}$
   (e) $\log e^x$ (f) x/e^x
   (g) e^{e^x} (h) $e^{-\operatorname{arcsen} x}$
   (i) $\tan(e^x)$ (j) $\arctan e^{2x}$
   (k) $1/(\operatorname{sen} e^x)$ (l) $\operatorname{arcsen}(e^x + x)$
   (m) $e^{\tan x}$ (n) $\tan e^x$
6. (a) Demostrar por inducción que la n-ésima derivada de xe^x es $(x + n)e^x$ para todos los enteros $n \geqq 1$.
   (b) Demostrar por inducción que la n-ésima derivada de xe^{-x} es $(-1)^n(x - n)e^{-x}$.
   (c) Demostrar que la derivada de orden $n + 1$ de $x^n \log x$ es $n!/x$.
7. (a) Dibujar la curva $y = e^{-1/x}$ (definida para $x \neq 0$).
   (b) Dibujar la curva $y = e^{-1/x^2}$ (definida para $x \neq 0$).
8. (a) Sea $f(x)$ una función derivable definida en algún intervalo y que satisface la relación $f'(x) = Kf(x)$ para alguna constante K. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{Kx}$.
   (b) Sea f una función derivable tal que $f'(x) = -2xf(x)$. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{-x^2}$
   (c) Generalizando, supóngase que hay una función h tal que $f'(x) = h'(x)f(x)$. Mostrar que $f(x) = Ce^{h(x)}$.

Encontrar la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

9. $y = \log x, \quad x = e$
10. $y = x \log x, \quad x = e$
11. $y = x \log x, \quad x = 2$
12. $y = \log (x^3), \quad x = e$
13. $y = \dfrac{1}{\log x}, \quad x = e$
14. $y = \dfrac{1}{\log x}, \quad x = 2$
15. $y = e^{2x}, \quad x = 1$
16. $y = xe^x, \quad x = 2$
17. $y = xe^x, \quad x = 5$
18. $y = xe^{-x}, \quad x = 0$
19. $y = e^{-x}, \quad x = 0$
20. $y = x^2e^{-x}, \quad x = 1$
21. Mostrar que $1 + x < e^x < \dfrac{1}{1 - x}$ para $0 < x < 1$ y para $-1 < x < 0$.
22. Probar que existe un número único x tal que $e^x + x = 0$.
23. Probar que existe un número único x tal que $\log x + x = 0$.
24. Dibujar la gráfica de la función $\log \dfrac{1 + x}{1 - x}$ para $-1 < x - 1$.
25. Dibujar la gráfica de la función $\log \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$, $-1 < x < 1$.
26. ¿Existe una función inversa para la función del ejercicio 24? En caso de respuesta afirmativa, ¿para qué valores está definida esta función inversa?
27. Encontrar un intervalo en el que exista la función inversa del ejercicio 25 y determinar para qué valores está definida dicha inversa.
28. Dibujar la gráfica de la función
$$f(x) = e^{x/2} + e^{-x/2}.$$
29. Dibujar la gráfica de la función
$$f(x) = e^{x/2} - e^{-x/2}.$$
30. Sea f una función derivable en el intervalo abierto $-1 < x < 1$. Supongamos que
$$f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$
en este intervalo. Determinar si f es creciente o decreciente en este intervalo. Supóngase que $f(0) = 0$. Trazar la gráfica de f.
31. Sea f una función derivable en el intervalo abierto $-1 < x < 1$. Supóngase que
$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^2}.$$
Determinar si f es creciente o decreciente en este intervalo. ¿Qué sucede a $f(x)$ a medida que x se aproxima a 1 y a medida que x se aproxima a -1? [*Sugerencia:* Comparar la derivada de f con la función del ejercicio precedente.]
32. **Funciones hiperbólicas**

(a) Definir las funciones
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Mostrar que sus derivadas están dadas por:

$$\cosh' = \operatorname{senh} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}' = \cosh.$$

(b) Mostrar que para todo t tenemos

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.$$

(c) Dibujar la gráfica de la curva $x^2 - y^2 = 1$.
(d) ¿Qué parte de la curva en (c) está parametrizada por las funciones $x = \cos h\ t$ e $y = \operatorname{sen} h\ t$?
(e) Determinar las funciones inversas de $\cosh t$ y $\operatorname{senh} t$, así como sus derivadas, para intervalo adecuado de valores de t.

§3. La función exponencial general

Sea a un número positivo y x un número cualquiera. **Definimos**

$$a^x = \exp(x \log a) = e^{x \log a}.$$

Así,

$$a^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log a}.$$

Es fácil probar, usando las propiedades de log y exp, que para todos los números x e y,

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

y que $a^0 = 1$. Además, $(a^x)^y = a^{xy}$.

Dejamos las demostraciones como ejercicio. Sin embargo, debemos observar que si x es un entero positivo n, entonces a^x es n veces el producto de a por sí misma. Tomemos por ejemplo, $x = 2$. Entonces

$$e^{2 \log a}$$

es igual a

$$e^{\log a + \log a} = (e^{\log a})^2 = a \cdot a,$$

y análogamente,

$$e^{3 \log a}$$

es igual a

$$e^{(\log a)+(\log a)+(\log a)}$$

que a su vez es igual a $(e^{\log a})^3$. El caso general se demuestra por inducción. Así vemos que nuestra definición de a^x como $e^{x \log a}$ es consecuente con nuestra notación original de a^n cuando x es un entero positivo n. Esta es la justificación para la definición en el caso general.

La moraleja del cuento es que bordeando las dificultades y evitando el ataque directo de la función a^x, al final la hemos recuperado, junto con todas las propiedades deseadas. Tenemos, por ejemplo, su derivada:

Teorema 7. *La derivada* de a^x *es* $a^x(\log a)$.

Demostración. Usamos la regla de la cadena. Sea $u = (\log a)x$. Entonces $du/dx = \log a$ y $a^x = e^u$. Por consiguiente

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x(\log a)$$

como se deseaba.

En particular,

$$\frac{d(2^x)}{dx} = 2^x \log 2.$$

Este resultado aclara el problema del límite misterioso,

$$\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

que habíamos hallado en la introducción. Podemos ahora comprender que este límite es log 2, y que resulta de manera muy natural. También comprendemos que cuando tomamos $a = e$ obtenemos la única función exponencial que es igual a su propia derivada. Para cualquier otra selección de a, obtendríamos una constante extraña en la derivada.

Como una aplicación de nuestra teoría de la función exponencial, podemos también ocuparnos de la función potencia general (que tratamos de manera provisional en el capítulo III).

Teorema 8. *Sea c cualquier número y sea*

$$f(x) = x^c$$

definido para $x > 0$. *Entonces* $f'(x)$ *existe y es igual a*

$$f'(x) = cx^{c-1}.$$

Demostración. Por definición,

$$f(x) = e^{c \log x} = e^u$$

si hacemos $u = c \log x$. Entonces,

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{x}.$$

Usando la regla de la cadena vemos que

$$f'(x) = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{c\log x} \cdot \frac{c}{x} = x^c \cdot \frac{c}{x} = cx^{c-1}.$$

Lo cual prueba nuestro teorema.

Si x, y son dos números tales que $y = 2^x$, decimos que x es el log de y en la base 2. De manera análoga, si a es un número > 0 e $y = a^x = e^{x\log a}$, decimos que x es el log de y en la base a. Si $y = e^x$, diremos simplemente que $x = \log y$.

El log de base a se denota generalmente como $\log_a$.

Concluimos esta sección analizando dos límites que ahora podemos manejar con facilidad.

Primero tenemos

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log (1 + h) = 1.}$$

En efecto, el límite del lado izquierdo no es más que el límite del cociente de Newton

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log (1 + h) - \log 1}{h} = \log' (1).$$

Como $\log'(x) = 1/x$, se sigue que $\log'(1) = 1$, tal como deseábamos.

Observemos ahora que

$$\log (1 + h)^{1/h} = \frac{1}{h} \log (1 + h),$$

pues si en general a, b son números y $a > 0$, tenemos (por el ejercicio 5) que

$$\log a^b = b \log a.$$

Tomando la función exponencial y utilizando el hecho de que la exponencial es continua en 1, encontramos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \exp \log (1 + h)^{1/h} &= \lim_{h\to 0} \exp \frac{1}{h} \log (1 + h) \\
&= \exp \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log (1 + h) \\
&= \exp (1) = e.
\end{aligned}$$

Pero, por definición, $\exp \log(x) = x$ para todo $x > 0$, así que para

$$x = (1 + h)^{1/h}$$

encontramos

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e.}$$

Si hacemos $h = 1/n$ con n entero, entonces el límite anterior implica que

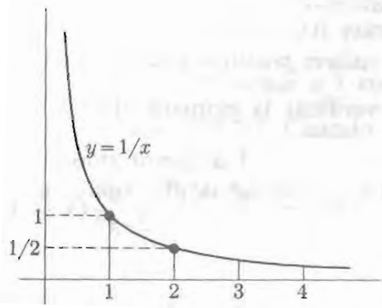
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

Ejercicios

1. ¿Cuál es la derivada de 10^x? ¿Y la de 7^x?
2. ¿Cuál es la derivada de 3^x? ¿Y la de π^x?
3. (a) ¿Cuál es la derivada de la función x^x (definida para $x > 0$)? [*Sugerencia*: $x^x = e^{x \log x}$.]
   (b) ¿Cuál es la derivada de la función $x^{(x^x)}$?
4. ¿Cuál es la derivada de: (a) $x^{\sqrt{x}}$ y (b) $x^{\sqrt[3]{x}}$?
5. Si a, b son números tales que $a > 0$, mostrar que $\log a^b = b \log a$.
6. Dibujar las curvas $y = 3x$ e $y = 3^{-x}$.
7. Dibujar las curvas $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.
8. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^x$ en el punto $x = 1$.
9. Encontrar la ecuación de la recta tangente a cada curva del ejercicio 1 en $x = 0$.
10. Encontrar la ecuación de la recta tangente a cada curva del ejercicio 2 en $x = 2$.
11. Si a es un número > 1 y $x > 0$, mostrar que
$$x^a - 1 \geqq a(x - 1).$$
12. Sean p, q números $\geqq 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $x \geqq 1$, mostrar que
$$x^{1/p} \leqq \frac{x}{p} + \frac{1}{q}.$$
13. Sean α, β números positivos tales que $\alpha/\beta \geqq 1$, y p, q como en el ejercicio 12. Mostrar que
$$\alpha^{1/p}\beta^{1/q} \leqq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$
14. Sea a un número > 0. Encontrar el mínimo y máximo de la función $f(x) = x^2/a^x$.
15. Sean a, b dos números > 0 y $0 < t < 1$. Mostrar que
$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1 - t)b.$$
[*Sugerencia*: Tomar log y utilizar convexidad.]

§4. Orden de magnitud

El área bajo la curva $1/x$ entre 1 y 2 es por lo menos igual a $1/2$. (Fijarse en un rectángulo como el de la figura siguiente.)



Como $\log e = 1$ y $\log 4 = 2 \log 2 \geqq 1$, tenemos entonces que $e < 4$. Por otro lado, tenemos que el área bajo la curva en cuestión entre 1 y 2 es menor que 1, ya que $1/x$ es, cuando más, igual a 1 en ese intervalo. De este modo, tenemos

$$2 < e < 4.$$

Aprenderemos en un capítulo posterior cómo calcular e con cualquier grado de aproximación.

Para probar el teorema 10, necesitamos un enunciado auxiliar.

Teorema 9. *Sea a un número > 0. Entonces la expresión*

$$\frac{(1+a)^n}{n}$$

se hace muy grande conforme n toma valores muy grandes.

Demostración. Podemos escribir

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + b,$$

donde b es algún número $\geqq 0$. Esto se ve fácilmente desarrollando el producto de $(1 + a)$ consigo mismo n veces. En consecuencia, si dividimos lo anterior por n, obtendremos

$$\frac{(1+a)^n}{n} = \frac{1}{n} + a + \frac{n-1}{2}a^2 + \frac{b}{n},$$

donde b/n es $\geqq 0$. Vemos que conforme n crece, el término $\frac{n-1}{2}a^2$ también crece. Como todos los otros términos son $\geqq 0$, el teorema queda demostrado.

Apliquemos esto al caso e^n/n. Sabemos que podemos escribir e en la forma $1 + a$ con $a > 0$. Por consiguiente e^n/n toma valores arbitrariamente grandes conforme n crece indefinidamente.

Teorema 10. *La función $f(x) = e^x/x$ es estrictamente creciente para $x > 1$. Asimismo, $f(x)$ toma valores positivos grandes a medida que x lo hace.*

Demostración. Para verificar la primera afirmación, tomaremos la derivada de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1).$$

Sabemos que tanto e^x como x^2 son > 0 para todo $x > 0$. Por consiguiente, la derivada $f'(x)$ es positiva para $x > 1$, y la función es estrictamente creciente.

Sabemos que si x es un entero n, $f(n)$ crece arbitrariamente cuando n toma valores cada vez más grandes. De aquí se sigue que sucede lo mismo para todo x, cuando x crece arbitrariamente. Esto prueba el teorema.

Podemos concluir entonces que

$$\frac{x}{e^x} \quad \text{y} \quad \frac{n}{e^n}$$

tienden a 0 cuando x y n crecen. De hecho, podemos decir que para cualquier número $a > 0$, se tiene que

$$\frac{n}{(1+a)^n}$$

tiende a 0 a medida que n crece.

Corolario 1. *A medida que x toma valores arbitrariamente grandes, la función x-log x también toma valores arbitrariamente grandes.*

Demostración. El log de e^x/x es $x - \log x$. Nuestra afirmación se sigue de las propiedades del log demostradas anteriormente, a saber: log y toma valores grandes a medida que y lo hace.

Corolario 2. *El cociente*

$$\frac{x}{\log x}$$

se hace grande a medida que x lo hace.

Demostración. Sea $y = \log x$. Tenemos entonces que $x = e^y$ y que nuestro cociente es de la forma

$$\frac{e^y}{y}.$$

Sabemos que log x crece a medida que x crece. Nuestra afirmación se sigue del teorema.

Corolario 3. *A medida que x crece, $x^{1/x}$ tiende a 1 como límite.*

Demostración. Tenemos que $x^{1/x} = e^{(\log x)/x}$. Cuando x crece, $(\log x)/x$ tiende a cero y, por tanto, su exponente tiende a 1.

Este corolario se usa a menudo utilizando enteros n en lugar de números arbitrarios x. Así,

$$n^{1/n}$$

tiende a 1 a medida que x se hace muy grande.

El teorema siguiente es un refinamiento de algunos anteriores.

Teorema 11. *Sea m un entero positivo. Entonces la función*

$$\frac{e^x}{x^m}$$

es estrictamente creciente para $x > m$ y toma valores muy grandes cuando x toma valores muy grandes.

Demostración. Sea $f(x) = e^x/x^m$. Como

$$x = e^{\log x},$$

tenemos

$$x^m = e^{m \log x}.$$

Y entonces,

$$f(x) = e^{x - m \log x}.$$

De aquí que

$$f'(x) = e^{x-m\log x}\left(1 - \frac{m}{x}\right).$$

Esta expresión es > 0 cuando $x > m$. Nuestra primera afirmación está probada.

En cuanto a la segunda, probar que e^x/x^m se hace muy grande cuando x lo hace es suficiente demostrar que eso sucede con su log. Tomando el log vemos que

$$\log f(x) = x - m(\log x),$$

lo cual se puede escribir también como

$$(\log x)\left(\frac{x}{\log x} - m\right).$$

A medida que x crece, $\log x$ y $x/\log x$ también crecen en razón del corolario 2. Como m es fija, nuestra expresión se hace muy grande, como se quería.

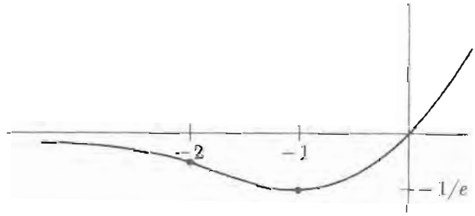
Ejemplo. Dibujemos la curva $y = xe^x$. Sea $f(x) = xe^x$. Entonces $f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x + 1)$. El único punto crítico de f está en $x = -1$. Cuando $x < -1$, e^x es > 0 y $x + 1 < 0$. Entonces, cuando $x < -1$, vemos que $f'(x) < 0$ y f es decreciente. Cuando $x > -1$, vemos que $f'(x) > 0$ y f es creciente.

A medida que x toma valores positivos muy grandes, xe^x también se hace muy grande. Cuando x es un valor negativo muy grande, por ejemplo, $x = -y$ con y positivo muy grande, entonces

$$xe^x = -ye^{-y} = -y/e^y$$

tiende a 0.

Tenemos que $f(-1) = -1/e$ y que $f(0) = 0$. De esta manera, la gráfica tiene la siguiente forma:



La convexidad se comporta como hemos dibujado. Podemos probar esto tomando la segunda derivada, o sea: $f''(x) = e^x(x + 2)$. Así, la segunda derivada es positiva cuando $x > -2$ y negativa cuando $x < -2$. Por consiguiente, la función es convexa hacia abajo cuando $x < -2$ y convexa hacia arriba cuando $x > -2$.

Algunas veces podemos determinar un límite cambiando la variable.

Ejemplo. Determinar el comportamiento de $xe^{1/x}$ cuando $x \to 0$ y $x > 0$. Para hacer esto, sea $y = 1/x$. Entonces,

$$xe^{1/x} = \frac{e^y}{y}.$$

A medida que x se acerca a 0, y crece. Entonces, por el teorema 10 ó el 11, podemos concluir que nuestra expresión también crece.

Ejemplo. El límite que acabamos de calcular nos ayuda a dibujar la gráfica de la función $f(x) = xe^{1/x}$. Procedemos como sigue.

Sea de nuevo $y = 1/x$. Entonces,

$$xe^{1/x} = \frac{e^y}{y}.$$

A medida que x toma valores positivos muy grandes, $1/x$ tiende a 0 y $e^{1/x}$ tiende a 1. Por otro lado, x crece y, por tanto, el producto $xe^{1/x}$ también crece.

Supongamos ahora que x es negativo y cercano a 0. Entonces $1/x$ es negativo y muy grande; por tanto, $e^{1/x}$ tiende a 0 cuando x tiende a 0, pero $x < 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xe^{1/x} = 0.$$

Por último, para ver qué ocurre cuando x crece por los valores negativos, observamos que $1/x$ tiende a 0 y que entonces $e^{1/x}$ tiende a 1. Sin embargo, como x crece por los valores negativos, se sigue que el producto $xe^{1/x}$ crece por los valores negativos.

Encontremos ahora los puntos críticos. Tenemos

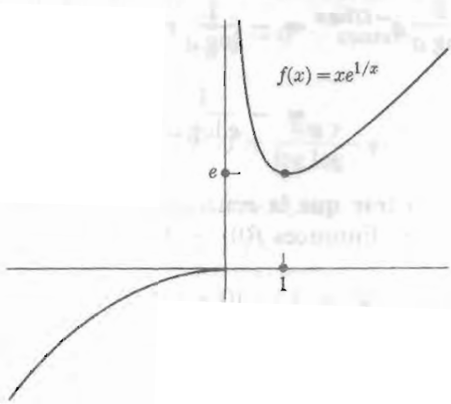
$$f'(x) = x \cdot \frac{-1}{x^2} e^{1/x} + e^{1/x} = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Sólo hay un punto crítico, cuando $x = 1$, y en este punto el valor de f es

$$f(1) = e.$$

Por la fórmula de la derivada vemos también que $f'(x)$ es positiva cuando $x > 1$ y que es negativa cuando $x < 1$, $x \neq 0$. Esto nos da las regiones donde la función crece y decrece.

Como ejercicio, calcular la segunda derivada y determinar la convexidad. Podemos ver que la gráfica de $xe^{1/x}$ tiene la siguiente forma:



Ejemplo. Sea $0 < a < 1$. Queremos encontrar el valor máximo de la función

$$f(x) = xa^x.$$

Primero obtengamos la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot a^x \log a + a^x \\ &= a^x(x \log a + 1). \end{aligned}$$

La derivada es igual a 0, precisamente cuando

$$x = -\frac{1}{\log a}.$$

Por tanto, la función tiene exactamente un punto crítico. Además, $x \log a + 1$ es positiva cuando

$$x < -\frac{1}{\log a}$$

y es negativa cuando

$$x > -\frac{1}{\log a}.$$

(Recuérdese que $0 < a < 1$; de modo que $\log a$ es negativo.) En consecuencia, la función es creciente en el intervalo a la izquierda del punto crítico y decreciente en el intervalo a la derecha del punto crítico, que es entonces el máximo deseado. El valor de f en este punto crítico es igual a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\log a} a^{-1/\log a} &= -\frac{1}{\log a} e^{-\log a/\log a} \\ &= -\frac{1}{e \log a}. \end{aligned}$$

Ejemplo. Queremos demostrar que la ecuación $3^x = 5x$ tiene al menos una solución. Sea $f(x) = 3^x - 5x$. Entonces $f(0) = 1$ y

$$f(2) = 9 - 10 < 0.$$

Por el teorema del valor intermedio, existe algún número x entre 2 y 0 tal que $f(x) = 0$. Este número satisface nuestra hipótesis.

Ejercicios

1. Dibujar la gráfica de la curva $y = xe^{2x}$. En este ejercicio y los siguientes el lector puede tratar si lo quiere, las propiedades de la convexidad.

Dibujar las gráficas de las siguientes funciones. (En los ejercicios del 6 a [illegible] $\neq 0$.)

2. xe^{-x}	3. xe^{-x^2}	4. $x^2e^{-x^2}$
5. x^2e^{-x}	6. e^x/x	7. e^x/x^2
8. e^x/x^3	9. $e^{1/x}$	10. $x^2e^{1/x}$

11. Demostrar que la ecuación $e^x = ax$ tiene al menos una solución para cualquier número a, excepto cuando $0 \leq a < e$.
12. (a) Sea $f(x)$ la función e^{-1/x^2} cuando $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demostrar que f tiene una derivada en cero y que $f'(0) = 0$.
    (b) ¿Tiene f' derivada? En caso afirmativo, ¿cuál es la derivada?
    (c) ¿Tiene f derivadas de orden mayor en 0?
13. ¿Tiende $x \log x$ a un límite a medida que $x \to 0$? ¿Qué sucede respecto a $x^2 \log x$? [*Sugerencia:* Supóngase que $x = 1/t$ y que t se hace muy grande.]
14. Sea n un entero positivo. Demostrar que $x(\log x)^n \to 0$ a medida que $x \to 0$.
15. Demostrar que $(\log x)^n/x \to 0$ a medida que $x \to \infty$.
16. Trazar la curva $f(x) = x^x$.
17. Demostrar que la curva

$$y = \frac{\log_a x}{x}$$

tiene su valor máximo en $x = e$ para todos los números $a > 0$.

18. Dibujar las siguientes curvas:
    (a) $y = x \log x$ (b) $y = x^2 \log x$
    (c) $y = x(\log x)^2$ (d) $y = x/\log x$
19. Demostrar que la función $f(x) = x^x$ es estrictamente creciente para $x > 1/e$. Sea g su función inversa.
    (a) Demostrar que si $y = f(x)$, entonces

$$\frac{\log \log x}{\log \log y} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty.$$

    (b) Demostrar que

$$g(y) = \frac{\log y}{\log \log y} \psi(y)$$

en donde $\psi(y)$ tiende a 1 cuando $y \to \infty$. [*Sugerencia:* Tomar dos veces el log en la expresión $y = e^{x \log x}$.]

20. Sea $f(x) = 2^x x^x$. Demostrar que f es estrictamente creciente para $x > 1/2e$. Sea g su función inversa. Demostrar que

$$g(y) = \frac{\log y}{\log \log y} \varphi(y)$$

donde $\varphi(y)$ tiende a 1 cuando $y \to \infty$.

21. Dibujar las curvas: (a) $y = x - e^x$ y (b) $y = x + e^x$.

22. Encontrar los límites siguientes a medida que $n \to \infty$.

(a) $(\log n)^{1/n}$ (b) $[(\log n)/n]^{1/n}$

(c) $(n/e^n)^{1/n}$ (d) $(n \log n)^{1/n}$

§5. Algunas aplicaciones

Vale la pena mencionar, aunque sea brevemente, algunas aplicaciones de la función exponencial en la física y en la química.

Por datos experimentales sabemos que cuando una partícula de radio se deja desintegrar, la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de radio que queda.

Supóngase que en el tiempo $t = 0$ tenemos 10 gramos de radio y sea $f(t)$ la cantidad de radio que queda en el tiempo t. Entonces

$$\frac{df}{dt} = kf(t)$$

para alguna constante k. Tomamos k negativa, ya que la interpretación física es que la cantidad de substancia disminuye.

Si tomamos la derivada del cociente

$$\frac{f(t)}{e^{kt}}$$

y usamos la regla para la derivada de un cociente, encontramos que

$$\frac{e^{kt}f'(t) - f(t)ke^{kt}}{e^{2kt}},$$

esto es igual a cero [utilizando nuestra hipótesis referente a $f'(t)$]. Por tanto, existe una constante C tal que

$$f(t) = Ce^{kt}.$$

Sea $t = 0$. Entonces $f(0) = C$. En consecuencia, $C = 10$, pues suponemos que comenzamos el proceso con 10 gramos. En general, interpretamos C como la cantidad de substancia inicial cuando $t = 0$.

De la misma manera, considérese una reacción química. Es frecuente el caso de que la rapidez de la reacción sea proporcional a la cantidad de substancia reaccionante. Si $f(t)$ denota la substancia que queda después del tiempo t, entonces

$$\frac{df}{dt} = Kf(t)$$

para alguna constante K (determinada experimentalmente en cada caso). Estamos, por tanto, en una situación similar a la anterior y

$$f(t) = Ce^{Kt}$$

donde C es la cantidad de substancia en $t = 0$.

Ejemplo. Supóngase que $f(t) = 10\, e^{Kt}$, donde K es constante. Supongamos que $f(3) = 5$. Encontrar K.

Tenemos

$$5 = 10e^{K3}.$$

Tomando el log, se obtiene

$$\log 5 = \log 10 + 3K$$

de donde

$$K = \frac{\log 5 - \log 10}{3}.$$

Ejemplo. El azúcar se diluye en el agua con una rapidez proporcional a la cantidad todavía sin diluir. Si 50 libras de azúcar se reducen a 15 libras en 3 horas, ¿en cuánto tiempo se habrá diluido el 20% del azúcar?

Sea $S(t)$ la cantidad de azúcar sin diluir en el tiempo t. Entonces, por hipótesis,

$$S(t) = Ce^{-kt},$$

para unas constantes apropiadas C y k. Además, como $S(0) = C$, tenemos que $C = 50$. Por tanto,

$$S(t) = 50e^{-kt}.$$

También tenemos

$$S(3) = 50e^{-3k} = 15.$$

Por tanto, podemos resolver para k; es decir,

$$\log 50 - 3k = \log 15,$$

de donde

$$k = \tfrac{1}{3} \log \tfrac{10}{3}.$$

Cuando se haya diluido el 20%, queda el 80%. Obsérvese que el 80% de 50 es 40. Queremos encontrar t tal que

$$40 = 50e^{-kt},$$

en otras palabras,

$$\log 40 = \log 50 - kt.$$

Obtenemos

$$kt = \log \tfrac{5}{4},$$

de donde

$$t = 3\,\frac{\log \frac{5}{4}}{\log \frac{10}{3}}.$$

Esta es nuestra solución.

Ejercicios

1. Sea $f(t) = 10e^{Kt}$ para alguna constante K. Supóngase que $f(1/2) = 2$. Encontrar K.
2. Sea $f(t) = Ce^{2t}$. Supóngase que $f(2) = 5$. Determínese la constante C.
3. Un gramo de radio se deja desintegrar. Después de un millón de años, ha quedado 0,1 gramos. ¿Cuál es la fórmula que proporciona la rapidez de desintegración?
4. Una substancia química reacciona de tal manera que la rapidez de la reacción es igual a la cantidad de substancia utilizada. Después de una hora, han quedado 20 gramos de substancia. ¿Qué cantidad de substancia había al principio?
5. Una substancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de substancia considerada en un tiempo dado, digamos

$$f(t) = Ce^{Kt}.$$

¿En cuánto tiempo quedará exactamente la mitad de la cantidad original?
6. Supóngase que $K = -4$ en el ejercicio anterior. ¿En cuánto tiempo quedará un tercio de la substancia?
7. Si el número de bacterias aumenta con una rapidez proporcional al número inicial, ¿cuánto tiempo necesitarán ciertas bacterias para aumentar de 1.000.000 a 10.000.000, si necesitan 12 minutos para aumentar a 2.000.000?
8. Una substancia se descompone con una rapidez proporcional a la cantidad considerada. Después de 3 minutos, un 10 por ciento de la substancia original se ha descompuesto. ¿En cuánto tiempo se habrá descompuesto la mitad de la cantidad original?
9. Sea f una función de una variable t que crece a la tasa $df/dt = kf$, donde k es una constante. Sea $a_n = f(nt_1)$, donde t_1 es un valor fijo de t, $t_1 > 0$. Demostrar que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una progresión geométrica.
10. En 1900 la población de una ciudad era de 50.000. En 1950 era de 100.000. Si la tasa de crecimiento demográfico es proporcional a la población, ¿cuál será la población en 1984? ¿En qué año será de 200.000?
11. Supóngase que la rapidez de cambio de la presión atmosférica con respecto a cualquier altitud es proporcional a la presión en ese lugar. Si el barómetro indica 30 al nivel del mar y 24 a 6.000 pies sobre el nivel del mar, encontrar la lectura del barómetro a 10.000 pies sobre el nivel del mar.
12. El azúcar se diluye en el agua con una rapidez proporcional a la cantidad que queda sin diluir. Si 30 libras de azúcar se reducen a 10 libras en 4 horas, ¿en cuánto tiempo se habrá diluido el 95% del azúcar?
13. Una partícula se mueve con una velocidad $s(t)$ según la relación $ds/dt = -ks$, donde k es

alguna constante. Si la velocidad inicial es de 16 unidades/min y si la velocidad se reduce a la mitad en 2 minutos, encontrar el valor de t cuando la velocidad es de 10 unidades/min.

14. Supóngase que la diferencia x entre la temperatura de un cuerpo y la del aire que lo rodea decrece con una rapidez proporcional a esta diferencia. Si $x = 100°$ cuando $t = 0$, y $x = 40°$ cuando $t = 40$ minutos, encontrar t, (a) cuando $x = 70°$, (b) cuando $x = 16°$, (c) el valor de x cuando $t = 20$.

15. Un jugador inexperto pierde dinero al apostar en una razón igual a la cantidad que posee en un tiempo dado. ¿En cuánto tiempo t habrá perdido la mitad de su capital inicial?

TERCERA PARTE
INTEGRACION

CAPITULO IX

Integración

En este capítulo resolveremos, más o menos simultáneamente, los siguientes problemas:

(1) Dada una función $f(x)$, encontrar una función $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x).$$

Este es el proceso inverso de la derivación y se denomina integración.

(2) Dada una función $f(x)$ que sea $\geqq 0$, dar una definición del área bajo la curva $y = f(x)$ sin acudir a la intuición geométrica.

Realmente, en este capítulo daremos las ideas subyacentes en la solución de nuestros dos problemas. Dejaremos para el siguiente capítulo el estudio de las técnicas que nos permiten trabajar de manera efectiva con datos específicos.

Enfocaremos (2) siguiendo una idea de Arquímedes, a saber: aproximar la función f por medio de funciones horizontales y el área bajo f por medio de la suma de las áreas de pequeños rectángulos.

Las secciones 5 y 6 son algo teóricas y pueden omitirse si la clase se muestra particularmente alérgica a la teoría pura. Para justificar la integral definida, bastará el argumento geométrico que comprende el área; y un tratamiento informal acerca de la integral como límite de una suma de pequeños rectángulos será suficiente para las aplicaciones a la física.

El grado de detalle con que se estudien estas secciones dependerá del desarrollo del curso; esta gran flexibilidad es posible debido al tratamiento axiomático que damos al teorema fundamental.

§1. La integral indefinida

Sea $f(x)$ una función definida en algún intervalo. Si $F(x)$ es una función definida en el mismo intervalo, tal que

$$F'(x) = f(x),$$

entonces decimos que F es una **integral indefinida** de f. Si $G(x)$ es otra integral indefinida de f, tendremos también que $G'(x) = f(x)$. Por tanto, la derivada de la diferencia $F - G$ es 0:

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

En consecuencia, por el teorema 5 del capítulo V, §3, existe una constante C tal que

$$F(x) = G(x) + C$$

para todo x en el intervalo.

Ejemplo 1. Una integral indefinida de $\cos x$ sería $\operatorname{sen} x$. Pero $\operatorname{sen} x + 5$ es también una integral indefinida de $\cos x$.

Ejemplo 2. $\log x$ es una integral indefinida de $1/x$. Pero también lo es $\log x + 10$ ó $\log x - \pi$.

En el siguiente capítulo desarrollaremos los procedimientos para encontrar integrales indefinidas. Aquí solamente anotamos que cada vez que probemos una fórmula para alguna derivada, existe el análogo para la integral.

Se acostumbra a denotar una integral indefinida de una función f como

$$\int f \qquad \text{o} \qquad \int f(x)\,dx.$$

En esta segunda notación, dx carece de sentido por sí mismo; sólo la expresión completa $\int f(x)\,dx$ tiene sentido. En el siguiente capítulo, cuando estudiemos el método de substitución, confirmaremos lo práctico de nuestra notación.

Hagamos ahora una tabla con algunas integrales indefinidas, utilizando la información que hemos obtenido acerca de las derivadas.

Sea n un entero, $n \neq -1$. Tenemos entonces

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

Si $n = -1$, entonces,

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \log x.}$$

(Esto es verdad solamente en el intervalo $x > 0$.)

En el intervalo $x > 0$ también tenemos

$$\boxed{\int x^c\,dx = \frac{x^{c+1}}{c+1}}$$

para cualquier número $c \neq -1$.

Las siguientes integrales indefinidas son válidas para todo x.

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int e^x\,dx = e^x \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

Finalmente, para $-1 < x < 1$, tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x.$$

Frecuentemente se omite mencionar en la práctica el intervalo de definición para las funciones con las cuales se trabaja. Pero en un problema específico esto hay que tenerlo siempre en mente. Por ejemplo, si escribimos

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2}\cdot x^{2/3},$$

Esto es válido para $x > 0$ y también es válido para $x < 0$. Pero 0 no puede estar en el intervalo da definición de nuestras funciones. Entonces podríamos tener

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2}\cdot x^{2/3} + 5$$

Cuando $x < 0$ y

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2}\cdot x^{2/3} - 2$$

Cuando $x > 0$.

Estamos de acuerdo en que las integrales indefinidas están definidas sólo en intervalos. Así, al considerar la función $1/x$ tenemos que considerar separadamente los casos $x > 0$ y $x < 0$. Para $x > 0$ ya hemos dicho que $\log x$ es una integral indefinida. Evidentemente, para el intervalo $x < 0$ también podemos encontrar una integral indefinida; de hecho, tenemos que para $x < 0$,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x).$$

Obsérvese que cuando $x < 0$, entonces $-x$ es positivo y, por tanto, la expresión $\log(-x)$ tiene sentido. El hecho de que la derivada de $\log(-x)$ sea igual a $1/x$ se demuestra por la regla de la cadena.

Para $x < 0$, cualquier otra integral indefinida está dada por

$$\log(-x) + C,$$

donde C es una constante.

A veces se dice que para todos los casos,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C.$$

Pero esto no tiene sentido, de acuerdo con nuestras convenciones, ya que nuestras funciones no están definidas en intervalos (falta el punto 0). De todas maneras, la fórmula sería **falsa.** En efecto, para $x < 0$ tenemos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C_1,$$

y para $x > 0$:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C_2.$$

Sin embargo, las dos constantes no son necesariamente iguales y, por tanto, no podemos escribir

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

para todos los casos.

Preferimos permanecer de acuerdo con nuestra convención de que las integrales están definidas exclusivamente en intervalos. Cuando trabajemos con el log, debemos tener en cuenta que estamos considerando sólo el caso $x > 0$.

Ejercicios

Encontrar integrales indefinidas para las funciones siguientes:

1. sen $2x$
2. cos $3x$
3. $\dfrac{1}{x+1}$
4. $\dfrac{1}{x+2}$

(Especificar en los últimos dos problemas los intervalos en los que se encuentre la integral indefinida.)

§2. Funciones continuas

Sea $f(x)$ una función. Diremos que f es **continua** si

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

para todo x donde la función esté definida.

Se entiende que al tomar el límite sólo se consideran valores de h tales que

$f(x + h)$ esté definido. Por ejemplo, si f está definida en un intervalo

$$a \leqq x \leqq b$$

(suponiendo $a < b$), entonces diremos que f es continua en a si

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a + h) = f(a).$$

No podemos tomar $h < 0$ porque la función no estaría definida en $a + h$ si $h < 0$.

Geométricamente hablando, una función es continua si su gráfica no presenta interrupciones. Todas las funciones derivables son continuas. Ya hemos hecho mención de esto; si un cociente de la forma

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

tiene límite, entonces el numerador $f(x + h) - f(x)$ debe tender a 0, porque

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(x + h) - f(x) &= \lim_{h \to 0} h \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0. \end{aligned}$$

A continuación aparecen unas gráficas de funciones que no son continuas.

En la fig. 1, tenemos la gráfica de una función como

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 \quad \text{si} \quad x \leqq 0 \\ f(x) &= 1 \quad \text{si} \quad x > 0. \end{aligned}$$

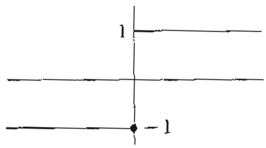


Figura 1

Vemos que

$$f(a + h) = f(h) = 1$$

para todo $h > 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a + h) = 1,$$

que es diferente de $f(0)$.

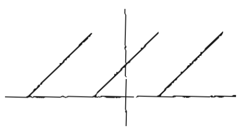


Figura 2

Un fenómeno análogo ocurre en la fig. 2 en cada sitio donde hay una interrupción (véase ejemplo 5 del capítulo III, §2.)

§3. Area

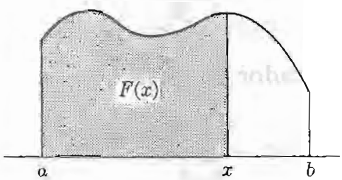
Sean $a < b$ dos números y sea $f(x)$ una función continua definida en el intervalo $a \leqq x \leqq b$.

Deseamos encontrar una función $F(x)$ que sea derivable en este intervalo y tal que

$$F'(x) = f(x).$$

En esta sección acudiremos a nuestra intuición geométrica en lo referente al área. Supongamos que $f(x) \geqq 0$ para todo x en el intervalo y definamos geométricamente la función $F(x)$ como la medida numérica del área bajo la curva entre a y x.

La figura siguiente ilustra esto:



Tenemos entonces que $F(a) = 0$. El área entre a y a es 0.

Teorema 1. *La función $F(x)$ es derivable y su derivada es $f(x)$.*

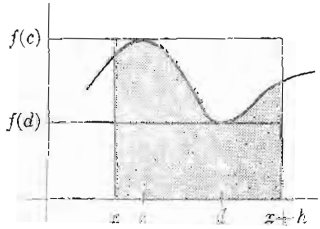
Demostración. Como definimos F geométricamente, debemos argumentar geométricamente.

Tenemos que considerar el cociente de Newton

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Primero supongamos que x es diferente del punto final b y supongamos también que consideramos sólo valores de $h > 0$.

Entonces $F(x + h) - F(x)$ es el área entre x y $x + h$. Una ampliación de la figura puede tener este aspecto.



El área sombreada representa $F(x + h) - F(x)$.

En el intervalo cerrado $[x, x + h]$ escogemos el punto c donde la función f alcanza su máximo *en ese pequeño intervalo.* Escogemos en ese mismo intervalo el punto d donde la función alcanza su mínimo en ese intervalo. Así,

$$f(d) \leqq f(t) \leqq f(c)$$

para todo t que satisfaga

$$x \leqq t \leqq x + h.$$

(Tenemos que utilizar aquí otra letra, t, pues ya hemos usado x.)

El área bajo la curva entre x y $x + h$ es mayor que el área del rectángulo pequeño de la figura anterior; es decir, el rectángulo con base h y altura $f(d)$.

El área bajo la curva entre x y $x + h$ es menor que el área del rectángulo grande; es decir, el rectángulo con base h y altura $f(c)$.

Esto nos da

$$h \cdot f(d) \leqq F(x + h) - F(x) \leqq h \cdot f(c).$$

Dividiendo por el número positivo h se obtiene

$$f(d) \leqq \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \leqq f(c).$$

Como c, d están entre x y $x + h$, a medida que h tiende a cero, $f(c)$ y $f(d)$ tienden a $f(x)$. Por tanto, el cociente de Newton para F está comprendido entre dos números que tienden a $f(x)$; entonces debe tender a $f(x)$, y así hemos probado el teorema 1 para el caso $h > 0$.

La demostración es esencialmente la misma que cuando encontramos la derivada de $\log x$. La única diferencia en este caso es que escogimos un máximo y un mínimo sin poder dar explícitamente su valor, como hicimos con la función $1/x$. Fuera de esto, no hay diferencia en los argumentos.

Si $x = b$, tomamos valores negativos para h. El razonamiento en este caso es completamente análogo al que hemos descrito en detalle, y encontramos de nuevo que el cociente de Newton para F está comprendido entre $f(c)$ y $f(d)$. Dejamos esto como ejercicio.

Supóngase que podemos encontrar una función $G(x)$ cuya derivada es $f(x)$. Sabemos que existe una constante C tal que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Sea $x = a$. Tenemos

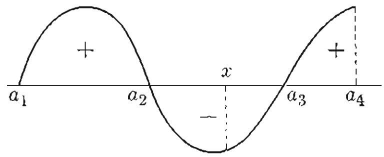
$$0 = F(a) = G(a) + C.$$

Esto muestra que $C = -G(a)$. Haciendo $x = b$ obtenemos

$$F(b) = G(b) - G(a).$$

Entonces, el área bajo la curva entre a y b es $G(b) - G(a)$. Saber esto es muy útil en la práctica, pues casi siempre se puede hallar la función G.

Cuando trabajemos con una función continua f que puede ser negativa en el intervalo $[a, b]$, podremos usar todavía el concepto de área para encontrar la función $F(x)$. Sin embargo, en aquellas partes donde la función sea negativa, debemos tomar F como **menos** el área bajo la curva. Ilustramos esto con la siguiente figura. En este caso, $F(x)$ sería el área entre a_1 y a_2, menos el área entre a_2 y x (para el punto x indicado en la figura). El razonamiento para ver que $F'(x) = f(x)$ es análogo al anterior.



Así, usando nuestra intuición geométrica, hemos encontrado una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$.

Ejemplo 1. Encontrar el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Sea $f(x) = x^2$. Si $G(x) = x^3/3$, entonces $G'(x) = f(x)$. Por consiguiente, el área bajo la curva entre 1 y 2 es

$$G(2) - G(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ejemplo 2. Encontrar el área bajo un arco para la función sen x.

Debemos encontrar el área bajo la curva entre 0 y π. Sea

$$G(x) = -\cos x.$$

Entonces $G'(x) = \operatorname{sen} x$. Por consiguiente, el área es

$$\begin{aligned} G(\pi) - G(0) &= -\cos\pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Nótese que esto es muy interesante. El arco de la curva sen desde 0 hasta π parece ser una curva muy irracional; sin embargo, el área resulta ser el entero 2.

Ejercicios

Encontrar el área bajo las curvas dadas entre los puntos señalados.

1. $y = x^3$ entre $x = 1$ y $x = 5$.
2. $y = x$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
3. $y = \cos x$, un arco.
4. $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
5. $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 3$.
6. $y = x^4$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
7. $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

§4. Teorema fundamental

El argumento que dimos en la sección anterior para demostrar que la derivada del área es igual a la función f, puede generalizarse. De hecho, si lo hacemos podremos aplicar ese argumento a muchos casos, tanto en cuestiones teóricas (por ejemplo en §6), como en aplicaciones, al tratar de longitud de curvas, o de trabajo, en el capítulo XIII. Por esto debemos ahora describir el marco general de referencia en que podemos deducir los argumentos del teorema 1.

Teorema 2. *Sean a, d dos números con $a < d$. Sea f una función continua en el intervalo $[a, d]$. Supóngase que para cada par de números $b \leqq c$ del intervalo podemos asociar un número denotado por $I_b^c(f)$ que cumple las propiedades siguientes:*

Propiedad 1. *Si M, m son dos números tales que*

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

para todo x del intervalo $[b, c]$, entonces

$$m(c - b) \leqq I_b^c(f) \leqq M(c - b).$$

Propiedad 2. *Tenemos*

$$I_a^b(f) + I_b^c(f) = I_a^c(f).$$

Entonces la función $x \mapsto I_a^x(f)$ es derivable en el intervalo $[a, d]$ y su derivada en x es $f(x)$. Una asociación del tipo anterior está determinada unívocamente.

Demostración. Debemos formar el cociente de Newton

$$\frac{I_a^{x+h}(f) - I_a^x(f)}{h}$$

y ver si tiende a un límite cuando $h \to 0$. (Si $x = a$, entonces tomamos $h > 0$, y si $x = b$, tomamos $h < 0$. Como de costumbre, probamos que la función $I_a^x(f)$ es derivable por la derecha en a y derivable por la izquierda en b.)

Supongamos por el momento que $h > 0$. Aplicando la propiedad 2 a los números $a, x, x + h$, tenemos que nuestro cociente de Newton es igual a

$$\frac{I_a^x(f) + I_x^{x+h}(f) - I_a^x(f)}{h} = \frac{I_x^{x+h}(f)}{h}.$$

Esto reduce nuestra investigación del cociente de Newton al intervalo entre x y $x + h$.

Sea s un punto entre x y $x + h$ tal que f alcanza un máximo en s en ese pequeño intervalo $[x, x + h]$, y sea t un punto de ese intervalo tal que f alcanza un mínimo en t.

Hacemos

$$m = f(t) \quad \text{y} \quad M = f(s)$$

y aplicamos la propiedad 1 al intervalo $[x, x + h]$. Obtenemos

$$f(t)(x + h - x) \leqq I_x^{x+h}(f) \leqq f(s)(x + h - x),$$

lo cual se puede escribir ahora como

$$f(t) \cdot h \leqq I_x^{x+h}(f) \leqq f(s) \cdot h.$$

Si dividimos por el número positivo h, no cambia el sentido de la desigualdad y tenemos

$$f(t) \leqq \frac{I_x^{x+h}(f)}{h} \leqq f(s).$$

Como s, t están entre x y $x + h$, debemos tener (por la continuidad) que

$$\lim_{h \to 0} f(s) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} f(t) = f(x).$$

De modo que nuestro cociente de Newton está comprendido entre dos números que tienden a $f(x)$. Entonces el cociente mismo tiende a $f(x)$ y esto demuestra el teorema cuando $h > 0$.

El razonamiento cuando $h < 0$ es análogo; lo omitimos, con excepción del siguiente comentario relacionado con la propiedad 2.

Supóngase que tenemos dos números b, c con $c < b$. Definimos

$$I_b^c(f) = -I_c^b(f),$$

siempre que f sea una función continua en el intervalo $[c, b]$. Entonces es fácil verificar que la propiedad 2 se cumple independientemente de cuáles sean los números b, c. Por ejemplo, supóngase que $c < b$. Vamos a indicar cómo demostrar la afirmación de la propiedad 2 en ese caso.

Por definición,

$$I_b^c(f) = -I_c^b(f).$$

Sabemos que

$$I_a^c(f) + I_c^b(f) = I_a^b(f)$$

siempre que usemos el caso ordinario de la propiedad 2 cuando los números sean crecientes.
Substituyendo el valor de $I_b^c(f)$, encontramos

$$I_a^c(f) - I_b^c(f) = I_a^b(f),$$

de donde

$$I_a^c(f) = I_a^b(f) + I_b^c(f).$$

En las secciones siguientes probaremos que existe un método para asignar un número $I_a^b(f)$ que cumpla las propiedades enunciadas en el teorema 2. Probaremos ahora que cualquier asignación de éstas está **determinada unívocamente.** En efecto, si $J_a^b(f)$ también cumple las propiedades del teorema 2, entonces las funciones de x dadas por

$$I_a^x(f) \qquad \text{y} \qquad J_a^x(f)$$

tienen la misma derivada y, en consecuencia, hay alguna constante C tal que

$$I_a^x(f) = J_a^x(f) + C$$

para todo x del intervalo $[a, b]$. Pero si hacemos $x = a$, por la propiedad 1 podemos ver que $I_a^a(f) = J_a^a(f) = 0$. Por consiguiente, $C = 0$, de donde

$$I_a^x(f) = J_a^x(f)$$

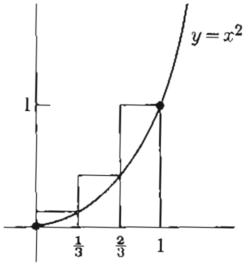
para todo x del intervalo. En vista de esto, definimos la **integral definida de** f entre a y b como $I_a^b(f)$, siempre que exista. Generalmente se denota por

$$\int_a^b f.$$

§5. Sumas superiores e inferiores

Para demostrar la existencia de la integral usaremos la idea de aproximar nuestras curvas por medio de funciones constantes.

Ejemplo. Considérese la función $f(x) = x^2$. Supóngase que queremos encontrar el área entre su gráfica y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Dividamos el intervalo $[0, 1]$ en intervalos más pequeños, y aproximemos la función por medio de funciones constantes, como se muestra en la siguiente figura.



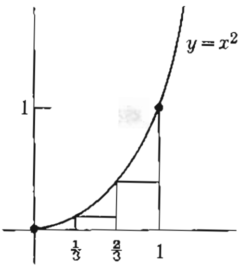
Hemos usado tres intervalos de longitud $1/3$; en cada uno de esos intervalos tomamos la función constante cuyo valor es el cuadrado del extremo derecho del intervalo. Estos valores son, respectivamente,

$$f(1/3) = 1/9, \qquad f(2/3) = 4/9, \qquad f(1) = 1.$$

Así obtenemos tres rectángulos que están sobre la curva $y = x^2$. Cada uno de esos rectángulos tiene base de longitud $1/3$. La suma de las áreas de estos rectángulos es igual a

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + 1) = \tfrac{14}{27}.$$

También se hubieran podido tomar los rectángulos que están por debajo de la curva utilizando los valores de f en los extremos izquierdos de los intervalos. La figura es como sigue:



La altura de los tres rectángulos así obtenidos es, respectivamente,

$$f(0) = 0, \qquad f(1/3) = 1/9, \qquad f(2/3) = 4/9.$$

La suma de sus áreas es igual a

$$\tfrac{1}{3}(0 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}) = \tfrac{5}{27}.$$

Así sabemos que el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ está entre 5/27 y 14/27. Esta aproximación del área no es muy buena, aunque podemos lograr una mejor si utilizamos intervalos más pequeños; por ejemplo, de longitud 1/4, o 1/5, o 1/6, o en general $1/n$. Escribamos la aproximación con intervalos de longitud $1/n$. Los extremos de los intervalos serán entonces

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1.$$

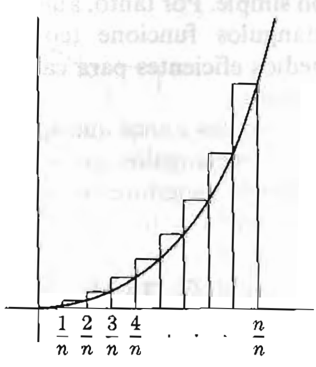
Si aproximamos la curva por arriba, obtendremos rectángulos de alturas dadas por:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2^2}{n^2}, \quad \ldots, \quad f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2}.$$

El término general para la altura de dichos rectángulos es

$$f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

En la siguiente figura hemos trazado estos rectángulos.



Gráficamente vemos que la aproximación a la curva es ahora mucho mejor. El área de cada rectángulo es igual a

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

en razón de que es igual a la base por la altura. La suma de estas áreas es igual a

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

En el apéndice sobre inducción, así como en los ejercicios, se encontrará una expresión sencilla para la suma del miembro derecho, a saber:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

En consecuencia, la suma de las áreas de los rectángulos es igual a

$$\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}1\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Tomamos ahora el límite a medida que n se hace más grande. El límite existe y, utilizando el teorema sobre límite de productos, vemos que el límite es igual a

$$\tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

Por consiguiente, con nuestro método de aproximación, usando rectángulos, podemos calcular el área bajo la curva $y = x^2$.

Sin embargo, vemos que este cálculo tiene que ver con el límite de una suma, el cual sería mucho más difícil si trabajásemos con curvas más complicadas; después de todo, fue casi un accidente que la suma de los cuadrados de los enteros de 1 a n tuviera una expresión simple. Por tanto, aunque nuestra idea de aproximar la curva por medio de rectángulos funcione teóricamente, tendremos todavía el problema de encontrar medios eficientes para calcular los límites de las sumas que surjan en esta aproximación.

Escribiremos ahora, en general, las sumas que aproximan el área bajo la curva. Nótese que podemos tomar los rectángulos que están sobre la curva o bajo la curva, obteniendo entonces sumas superiores o sumas inferiores.

Sean a, b dos números tales que $a \leqq b$, y sea f una función continua en el intervalo $a \leqq x \leqq b$.

Una **participación del intervalo** $[a, b]$ es una sucesión de números

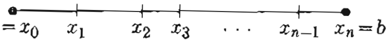
$$a = x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n = b$$

entre a y b, tal que $x_i \leqq x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Por ejemplo, podríamos tomar sólo dos números

$$x_0 = a \qquad \text{y} \qquad x_1 = b.$$

Esta se llamará **partición trivial.**

Una partición divide nuestro intervalo en varios intervalos más pequeños $[x_i, x_{i+1}]$.



Dado cualquier número entre a y b, además de $x_0, \ldots, x_n$, podemos añadirlo a la partición para obtener una nueva partición con un intervalo pequeño adicional. Si añadimos suficientes números intermedios a la partición, entonces los intervalos se pueden hacer tan pequeños como se quiera.

Sea f una función continua definida en el intervalo

$$a \leqq x \leqq b.$$

Si c_i es un punto entre x_i y x_{i+1}, entonces formamos la suma

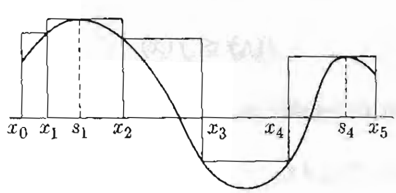
$$f(c_0)(x_1 - x_0) + f(c_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Esta suma se denomina **suma de Riemann.** Cada valor $f(c_i)$ se puede visualizar como la altura de un rectángulo y cada $(x_{i+1} - x_i)$ como la longitud de la base.

Sea s_i un punto entre x_i y x_{i+1} tal que f alcanza un máximo para este intervalo pequeño $[x_i, x_{i+1}]$, en s_i. En otras palabras,

$$f(x) \leqq f(s_i)$$

para todo x entre x_i y x_{i+1}. Los rectángulos se ven entonces como los de la figura siguiente. En este dibujo, s_0 resulta ser igual a x_1, $s_2 = x_2$, $s_3 = x_4$.



La idea principal desarrollada a continuación es que, a medida que los intervalos de nuestras particiones sean más y más pequeños, la suma de las áreas de los rectángulos se aproximará a un límite y este límite se puede usar para definir el área bajo la curva.

Observemos, sin embargo, que cuando $f(x)$ se vuelve negativa, el valor $f(s_i)$ puede ser negativo. Por tanto, el rectángulo correspondiente aporta una contribución negativa

$$f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$$

a la suma.

Si P es la partición dada por los números

$$x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n,$$

entonces la suma

$$f(s_0)(x_1 - x_0) + f(s_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(s_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

se llamará **suma superior** asociada con la función f y la partición P del intervalo $[a, b]$. La denotaremos por los símbolos

$$U_a^b(P, f).$$

Asimismo, como resulta muy tedioso escribir la suma repitiendo cada término, usaremos la abreviación

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$$

para denotar la suma desde 0 hasta $n - 1$ de los términos $f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$. Entonces, por definición,

$$U_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1} - x_i).$$

En vez de tomar el máximo s_i en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, podríamos haber tomado el mínimo. Sea t_i un punto en este intervalo, tal que

$$f(t_i) \leqq f(x)$$

para cada x del intervalo pequeño $[x_i, x_{i+1}]$. La suma

$$f(t_0)(x_1 - x_0) + f(t_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

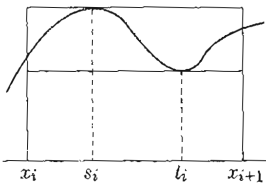
se denomina **suma inferior** asociada con la función f y la partición P del intervalo $[a, b]$. La suma inferior se denotará por

$$L_a^b(P, f).$$

Con nuestra convención referente a las sumas podemos, por tanto, escribir

$$L_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Hemos dibujado en la siguiente figura un término típico de la suma.



Para todos los números x del intervalo $[x_i, \quad x_{i+1}]$ tenemos

$$f(t_i) \leqq f(x) \leqq f(s_i).$$

Puesto que $x_{i+1} - x_i$ es $\geqq 0$, se sigue que cada término de la suma inferior es menor o igual que cada término de la suma superior. Por tanto,

$$L_a^b(P, f) \leqq U_a^b(P, f).$$

Además, cualquier suma de Riemann tomada con puntos c_i (que no son necesariamente máximos o mínimos) está entre las sumas superior e inferior.

¿Qué pasa con nuestras sumas cuando añadimos un punto nuevo a la partición?

Veremos que la suma inferior crece y la suma superior decrece.

Teorema 3. *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Sea $P = (x_0, \ldots, x_n)$ una partición de $[a, b]$. Sea $\bar{x}$ cualquier número del intervalo y sea Q una partición obtenida a partir de P añadiendo $\bar{x}$ a $(x_0, \ldots, x_n)$. Entonces,*

$$L_a^b(P, f) \leqq L_a^b(Q, f) \leqq U_a^b(Q, f) \leqq U_a^b(P, f).$$

Demostración. Veamos, por ejemplo, las sumas inferiores. Supóngase que nuestro número $\bar{x}$ está entre x_j y x_{j+1}:

$$x_j \leqq \bar{x} \leqq x_{j+1}.$$

Cuando formemos la suma inferior de P, será la misma que la suma inferior correspondiente a Q, excepto que el término

$$f(t_j)(x_{j+1} - x_j)$$

será reemplazado ahora por dos términos. Si u es un mínimo para f en el intervalo entre x_j y $\bar{x}$, y v es un mínimo para f en el intervalo entre $\bar{x}$ y x_{j+1}, entonces estos dos términos son

$$f(u)(\bar{x} - x_j) + f(v)(x_{j+1} - \bar{x}).$$

Podemos escribir $f(t_j)(x_{j+1} - x_j)$ en la forma

$$f(t_j)(x_{j+1} - x_j) = f(t_j)(\bar{x} - x_j) + f(t_j)(x_{j+1} - \bar{x}).$$

Puesto que $f(t_j)$ es menor o igual a $f(u)$ o $f(v)$ (porque t_j era un mínimo en todo el intervalo entre x_j y x_{j+1}), se sigue que

$$f(t_j)(x_{j+1} - x_j) \leqq f(u)(\bar{x} - x_j) + f(v)(x_{j+1} - \bar{x}).$$

Entonces, cuando reemplazamos en la suma el término para P por los dos términos para Q, el valor de la contribución de estos dos términos crece. Como todos los demás términos son iguales, nuestra proposición ya está probada.

La proposición concerniente al hecho de que la suma superior decrece se deja como ejercicio. La demostración es análoga.

Como consecuencia de nuestro teorema, obtenemos el siguiente:

Corolario. *Cada suma inferior es menor que, o igual a, cada suma superior.*

Demostración. Sean P y Q dos particiones. Si a P le añadimos todos los puntos de Q y a Q le añadimos todos los puntos de P, obtenemos una partición R tal que cada punto de P es un punto de R y cada punto de Q es un punto de R. Por tanto, R se obtiene añadiendo puntos a P y a Q. Consecuentemente, tenemos las desigualdades.

$$L_a^b(P, f) \leqq L_a^b(R, f) \leqq U_a^b(R, f) \leqq U_a^b(Q, f).$$

Esto prueba nuestra afirmación.

Resulta ahora muy natural preguntarse si hay un número **único** entre las sumas inferiores y las sumas superiores. En las siguientes secciones probaremos el

Teorema 4. *Sea f una función continua en $[a, b]$. Existe un número único que es mayor que, o igual a, cada suma inferior y menor que, o igual a, cada suma superior.*

Este número se llama **integral definida** de f entre a y b, y se denota por

$$\int_a^b f.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2$, y sea el intervalo $[0, 1]$. Escribir las sumas superiores e inferiores correspondientes a la partición $(0, 1/2, 1)$.

El mínimo de la función en el intervalo $[0, 1/2]$ se alcanza en el punto 0 y $f(0) = 0$. El mínimo de la función en el intervalo $[1/2, 1]$ se alcanza en $1/2$ y $f(1/2) = 1/4$. Por consiguiente, la suma inferior es

$$f(0)(\tfrac{1}{2} - 0) + f(\tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}.$$

El máximo de la función en el intervalo $[0, 1/2]$ se alcanza en el punto $1/2$ y el máximo correspondiente al intervalo $[1/2, 1]$ está en 1. Así, la suma superior es

$$f(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2} - 0) + f(1)(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8}.$$

Ejercicios

Escribir las sumas superior e inferior de las siguientes funciones e intervalos. Utilizar una partición tal que la longitud de cada subintervalo sea: (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{4}$, (d) $1/n$.

1. $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$.
2. $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$.
3. $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$.
4. $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.
5. Sea $f(x) = 1/x$ definida en el intervalo $[1, 2]$ y sea n un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior correspondientes a la partición cuyos subintervalos sean la longitud $1/n$.
6. Probar que
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leqq \log 2 \leqq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$
7. Sea $f(x) = \log x$. Sea n un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior correspondientes a la partición del intervalo entre 1 y n formado por los enteros desde 1 hasta n; es decir, la partición $(1, 2, \ldots, n)$.
8. Calcular, por medio de trapezoides, una aproximación del área bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Tomar las bases de los trapezoides como: (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{4}$. Comparar el valor obtenido con el valor exacto dado por la integral. Comparar también con los valores obtenidos mediante las sumas superiores e inferiores.
9. Hacer lo mismo que en el ejercicio 8, pero para la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$. Trazar figuras en cada caso.

§6. Las propiedades básicas

En esta sección se expone la demostración del teorema 4. Pero antes se requiere analizar una propiedad especial de los números.

Sea S un conjunto de números con al menos un elemento. (También podemos decir que S es no vacío.) Una **cota superior** de S es un número B tal que

$$x \leqq B$$

para todo x en el conjunto S. La **mínima cota superior** de S es una cota superior con la propiedad de que es la más pequeña de las cotas superiores.

Por ejemplo, sea S el conjunto de los números cuyo cuadrado es $\leqq 4$. Entonces 5 es una cota superior para S, de la misma manera que 3. Sin embargo, 2 es la mínima cota superior.

Otro ejemplo: Sea S el conjunto de números cuyo cuadrado es < 2. Entonces $\sqrt{2}$ es la mínima cota superior. (En este ejemplo, la mínima cota superior no pertenece a nuestro conjunto S.)

Aceptaremos sin demostración la siguiente propiedad de los números: *Todo conjunto no vacío de números que tenga alguna cota superior también tendrá una mínima cota superior.*

Diremos, análogamente, que un número A es una **cota inferior** de S si

$$A \leqq x$$

para todo x en el conjunto S. La **máxima cota inferior** de S es aquella cota inferior que es la más grande de todas las cotas inferiores.

También aceptaremos sin demostración que todo conjunto no vacío de números que tenga una cota inferior tendrá una máxima cota inferior.

Por ejemplo, el conjunto de números $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ tiene una máxima cota inferior que es el número 0. Nótese otra vez que esta máxima cota inferior no está en el conjunto.

Regresemos a nuestras sumas superiores e inferiores.

Sea f como en §5. Consideremos el conjunto de números cuyos elementos son todas las sumas inferiores

$$L_a^b(P, f)$$

correspondientes a todas las particiones P. Esta colección tiene alguna cota superior (cualquier suma superior será una cota superior). Denotaremos por

$$L_a^b(f)$$

su mínima cota superior y la llamaremos **integral inferior** de f en el intervalo $[a, b]$.

Cada suma superior es una cota superior del conjunto de sumas inferiores. Por tanto,

$$L_a^b(f) \leqq U_a^b(P, f)$$

para cada partición P. Luego $L_a^b(f)$ es una cota inferior del conjunto de las sumas superiores. Denotaremos por

$$U_a^b(f)$$

la máxima cota inferior del conjunto de las sumas superiores y la llamaremos integral superior de f en el intervalo $[a, b]$. Entonces

$$L_a^b(f) \leqq U_a^b(f).$$

Si x es cualquier punto del intervalo, entonces tenemos los números

$$L_a^x(f) \qquad \text{y} \qquad U_a^x(f).$$

Así, $L_a^x(f)$ es el valor en x de una función definida en el intervalo. Análogamente, $U_a^x(f)$ es el valor en x de otra función definida en el intervalo.

Nuestro propósito es demostrar que esas funciones son iguales para todo x. Para esto probaremos que $L_a^b(f)$ y $U_a^b(f)$ satisfacen las propiedades establecidas en el teorema 2. Esto nos dará la existencia de la integral y, en razón de lo dicho al final del §4, se tendrá que $L_a^b(f) = U_a^b(f)$.

Demostración de la propiedad 1. Supóngase que tenemos dos números m, M, tales que

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

para todo x entre b y c. Sea P la partición del intervalo $[b, c]$ formado sólo por los extremos. Entonces

$$m(c - b) \leqq L_b^c(P, f) \leqq L_b^c(f).$$

Por otro lado,

$$L_b^c(f) \leqq U_b^c(f) \leqq M(c - b).$$

Esto prueba nuestra propiedad.

Demostración de la propiedad 2. Sean a, b, c tres números tales que $a \leqq b \leqq c$. Sea f una función continua en el intervalo $[a, c]$. Probaremos que

$$L_a^b(f) + L_b^c(f) = L_a^c(f).$$

Una afirmación análoga es válida para las integrales superiores, a saber:

$$U_a^b(f) + U_b^c(f) = U_a^c(f).$$

Probaremos primero que

$$L_a^b(f) + L_b^c(f) \leqq L_a^c(f).$$

Como $L_a^b(f)$ es la **mínima** cota superior de las sumas inferiores correspondientes a particiones, podemos encontrar una de dichas sumas que se le aproxime tanto como se quiera. Esto es, que dado cualquier número pequeño $\epsilon < 0$, podemos encontrar alguna partición P del intervalo $[a, b]$ tal que

$$L_a^b(f) - \epsilon \leqq L_a^b(P, f).$$

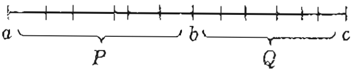
Análogamente, podemos encontrar alguna partición Q del intervalo $[b, c]$ tal que

$$L_b^c(f) - \epsilon \leqq L_b^c(Q, f).$$

Sumando, tenemos

$$L_a^b(f) + L_b^c(f) - 2\epsilon \leqq L_a^b(P, f) + L_b^c(Q, f).$$

Podemos considerar P y Q en conjunto como una partición de todo el intervalo [a



Denotaremos esta partición simplemente por (P, Q). La suma de las dos sumas del miembro derecho de nuestra igualdad es entonces igual a la suma inferior correspondiente a la partición (P, Q) en todo el intervalo $[a, c]$. Por esto, podemos escribir

$$L_a^b(f) + L_b^c(f) - 2\epsilon \leqq L_a^c((P, Q), f).$$

Pero cualquier suma inferior construida a partir de una partición es más pequeña que la integral inferior, que es una cota superior (aún más, la mínima cota superior) de dichas sumas inferiores. Entonces nuestra expresión del miembro derecho satisface la desigualdad

$$L_a^c((P, Q), f) \leqq L_a^c(f).$$

Obtenemos finalmente

$$L_a^b(f) + L_b^c(f) - 2\epsilon \leqq L_a^c(f).$$

Esto es verdadero para todo $\epsilon > 0$. Supóngase que ϵ tiende a 0. Entonces el miembro izquierdo tiende a

$$L_a^b(f) + L_b^c(f)$$

de lo cual se sigue nuestra desigualdad.

Debemos ahora probar la desigualdad inversa.

Sea R cualquier partición de $[a, c]$. Si sumamos b a R, entonces obtenemos una partición de $[a, c]$ que se descompone en una partición de $[a, b]$ y una partición de $[b, c]$. Llamemos P y Q a estas particiones. Entonces

$$L_a^c(R, f) \leqq L_a^c((P, Q), f) = L_a^b(P, f) + L_b^c(Q, f).$$

Como la integral inferior es una cota superior de estas sumas inferiores, sabemos que la expresión de la derecha es menor que, o igual a

$$L_a^b(f) + L_b^c(f),$$

que es una cota superior de $L_a^c(R, f)$. La mínima cota superior $L_a^c(f)$ es entonces menor que, o igual a nuestra suma de la derecha. La propiedad está probada.

La demostración de que la integral superior satisface las dos propiedades es análoga y se deja como ejercicio.

Entonces, por el teorema 2 concluimos que

$$L_a^b(f) = U_a^b(f).$$

lo cual prueba el teorema 4.

§7. Funciones integrables

Omítase esta sección, a menos que se esté especialmente interesado en la teoría.

Generalizando, sea f una función acotada en $[a, b]$. Esto significa que existe algún número C tal que $|f(x)| \leqq C$ para todo x en $[a, b]$. En este caso, f puede no tener un mínimo en el intervalo cerrado; aun así, podemos formar sumas inferiores reemplazando el mínimo por la máxima cota inferior. Entonces, si P es una partición de $[a, b]$, por ejemplo,

$$a = x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_n = b,$$

definimos

$$\begin{aligned} m_i &= \text{máxima cota inferior de los valores } f(x) \\ &\ \text{para } x \text{ en el intervalo } [x_i, x_{i+1}], \\ M_i &= \text{mínima cota inferior de los valores } f(x) \\ &\ \text{para } x \text{ en el intervalo } [x_i, x_{i+1}]. \end{aligned}$$

Formamos entonces la suma

$$L_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

y análogamente la suma superior,

$$U_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

El teorema 3 es válido para cualquier función acotada f, y por ello podemos definir la **integral inferior**

$L_a^b(f) =$ mínima cota superior de todas las $L_a^b(P, f)$ para todas las particiones P.

La integral superior se define de manera similar. Se dice que la función f es **integrable** si

$$L_a^b(f) = U_a^b(f),$$

es decir, si su integral inferior es igual a su integral superior; en este caso se le llama simplemente **integral** de f. En la sección anterior probamos que toda función continua es integrable. Se puede demostrar que una función acotada que sea continua excepto en un número finito de puntos es integrable, pero dejaremos esto como ejercicio. Sin embargo, probaremos el

Teorema 5. *Sea f una función integrable en $[a, b]$. Supongamos que para cada par de números c, d, tales que $a \leqq c \leqq d \leqq b$, hemos asociado un número denotado por $I_c^d(f)$ que satisface las propiedades siguientes:*

Propiedad 1. *Si M, m son dos números tales que*

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

para todo x en $[c, d]$, entonces

$$m(d - c) \leqq I_c^d(f) \leqq M(d - c).$$

Propiedad 2. *Tenemos que*

$$I_a^c(f) + I_c^d(f) = I_a^d(f).$$

Entonces $I_a^b(f)$ es la integral de f en $[a, b]$.

Demostración. Sea P una partición. Entonces,

$$L_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leqq \sum_{i=0}^{n-1} I_{x_i}^{x_{i+1}}(f) = I_a^b(f).$$

Análogamente,

$$L_a^b(P, f) \leqq I_a^b(f) \leqq U_a^b(P, f).$$

Como f es integrable, $L_a^b(P, f)$ y $U_a^b(P, f)$ están arbitrariamente próximas entre sí para alguna partición P. De aquí se sigue el teorema.

Ejercicios

Probar que si f está acotada en $[a, b]$ y es continua, excepto en un número finito de puntos, entonces f es integrable. [*Sugerencia:* Sean $c_1, \ldots, c_r$ los puntos donde f no es continua. Considérese un intervalo de radio δ alrededor de cada c_i. Considérese particiones de $[a, b]$ que incluyen a los puntos $c_i - \delta$, c_i, $c_i + \delta$. Las sumas superiores e inferiores están muy próximas fuera de esos pequeños intervalos, pues la función es continua; dentro de estos intervalos las sumas superiores e inferiores están acotadas por una expresión del tipo $2\delta Cr$, donde C es una cota de f.]

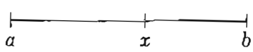
CAPITULO X
Propiedades de la integral

Este es un capítulo corto. En él se muestra la forma en que la integral se combina con la adición y con las desigualdades. No existe una buena fórmula para la integral de un producto. Lo más aproximado es la integración por partes, que se pospone hasta el siguiente capítulo.

La conexión de la integral con la derivada es lo que nos permite calcular las integrales. Se utilizará al máximo el hecho de que dos funciones que tienen la misma derivada difieren en una constante.

§1. Otra conexión con la derivada

Sea f una función continua sobre algún intervalo. Sean a, b dos puntos del intervalo tales que $a < b$, y sea F una función derivable sobre el intervalo y cuya derivada es f.



Entonces, sabemos que existe una constante C tal que

$$\int_a^x f = F(x) + C$$

para todo x del intervalo. Si hacemos $x = a$, obtenemos

$$0 = \int_a^a f = F(a) + C,$$

de donde $C = -F(a)$. También tenemos que

$$\int_a^b f = F(b) + C.$$

Por lo anterior, vemos que

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Esta expresión es extremadamente útil en la práctica porque generalmente es posible determinar F y, habiéndolo hecho, se puede calcular la integral por medio de esta relación.

Además, es también práctico usar la notación

$$F(x)\Big|_a^b$$

en vez de $F(b) - F(a)$. Así, la integral

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$$

es igual a

$$-\cos x\Big|_0^{\pi},$$

que es $-\cos \pi - (-\cos 0) = 2$.

Como otro ejemplo, supóngase que deseamos encontrar

$$\int_1^3 x^2\, dx.$$

Sea $F(x) = x^3/3$. Entonces $F'(x) = x^2$. Por tanto, nuestra integral es igual a

$$\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Finalmente, con frecuencia a la **integral indefinida** la llamaremos simplemente **integral,** puesto que el contexto aclara el significado. Al tratar con una integral definida $\int_a^b$, a los números a y b los llamaremos a veces **límite inferior** y **límite superior,** respectivamente.

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int_1^2 x^5\, dx$ 2. $\int_{-1}^{1} x^{1/3}\, dx$ 3. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ 4. $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$

5. Demostrar las siguientes desigualdades:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqq \log n \leqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$

(b) $\frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{n^{1/2}} \leqq 2(\sqrt{n} - 1)$

(c) $2(\sqrt{n} - 1) \leqq 1 + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{1/2}}$

6. Demostrar las siguientes desigualdades:

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 \leqq \frac{n^3}{3} \leqq 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 \leqq \frac{n^4}{4} \leqq 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

(c) $1^{1/4} + 2^{1/4} + \cdots + (n-1)^{1/4} \leqq \frac{4}{5}n^{5/4} \leqq 1^{1/4} + 2^{1/4} + \cdots + n^{1/4}$

(d) Dar desigualdades similares para las sumas

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^4,\ \sum_{k=1}^{n-1} k^{1/3},\ \sum_{k=1}^{n} k^5,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$$

7. (a) Sea f una función continua y creciente, definida para todo $x \geqslant 1$, tal que $f(x) \geqslant 0$. Demostrar que

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leqq \int_1^n f(x)\,dx \leqq f(2) + \cdots + f(n).$$

(b) Sea $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Supóngase que $F(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{F(n)} = 0.$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{F(n)} = 1.$$

8. Evaluar los siguientes límites para $n \to \infty$.

(a) $\dfrac{1^{1/3} + 2^{1/3} + \cdots + n^{1/3}}{n^{4/3}}$ (c) $n\left(\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}\right)$

(b) $\dfrac{1^{1/4} + 2^{1/4} + \cdots + n^{1/4}}{n^{5/4}}$ (d) $\dfrac{1 + 2^4 + \cdots + n^4}{n^5}$

(e) Para un entero fijo $k \geqslant 1$,

$$\frac{1 + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

9. Sea f una función continua y decreciente, definida para $x \geqslant 1$ y tal que $f(x) \geqslant 0$. Demostrar que

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \geqq \int_1^n f(x)\,dx \geqq f(2) + \cdots + f(n).$$

§2. Sumas

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas sobre algún intervalo, y sean $F(x)$ y $G(x)$ las integrales (indefinidas) de f y g, respectivamente. Puesto que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas, vemos que $F + G$ es una integral para $f + g$; en otras palabras,

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

De manera similar, sea c un número. La derivada de $cF(x)$ es $cf(x)$. Por tanto

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

Una constante se puede introducir y sacar de una integral.

Ejemplo 1. Encontrar la integral de sen $x + 3x^4$.

Tenemos

$$\int (\operatorname{sen} x + 3x^4)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx + \int 3x^4\,dx$$
$$= -\cos x + 3x^5/5.$$

A cualquier fórmula relativa a la integral indefinida le corresponde una fórmula para la integral definida. Usemos la notación anterior y supongamos que tenemos que encontrar

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx.$$

Sabemos que es

$$[F(x) + G(x)]\Big|_a^b,$$

que es igual a

$$F(b) + G(b) - F(a) - G(a).$$

Así, tenemos la fórmula

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Análogamente, para cualquier constante c,

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int_0^{\pi} [\operatorname{sen} x + 3x^4]\,dx.$$

Esta integral (definida) es igual a

$$-\cos x + 3x^5/5\Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + 3\pi^5/5 - (-\cos 0 + 0)$$
$$= 1 + 3\pi^5/5 + 1$$
$$= 2 + 3\pi^5/5.$$

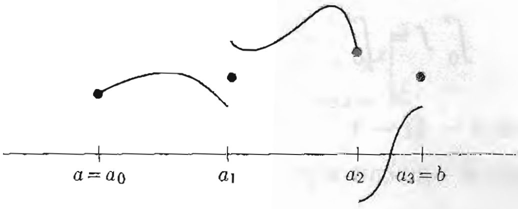
En algunas aplicaciones se puede encontrar una clase de funciones ligeramente más amplia que la de las funciones continuas. Sea f una función definida sobre un intervalo $[a, b]$. Diremos que f es **continua a trozos** sobre $[a, b]$, si existen números

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

de manera que sobre cada intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ exista una función continua f_i tal que $f(x) = f_i(x)$ para $a_{i-1} < x < a_i$. Si éste es el caso, entonces definimos la integral de f desde a hasta b como la suma

$$\int_a^b f = \int_{a_0}^{a_1} f_1 + \int_{a_1}^{a_2} f_2 + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f_n.$$

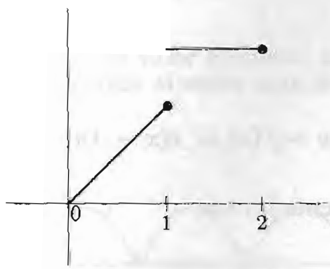
Una función continua a trozos puede tener un aspecto como el siguiente:



Ejemplo 3. Sea f la función definida sobre el intervalo [0, 2] por las condiciones

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad \text{si} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ f(x) &= 2 \quad \text{si} \quad 1 < x \leqq 2. \end{aligned}$$

La gráfica de f es como se muestra a continuación:



Para encontrar la integral de f entre 0 y 2, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^2 f = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 2\,dx &= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + 2x\bigg|_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2} + (4 - 2) = \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

También podemos obtener $\int_0^x f(t)dt$ para $0 \leqq x \leqq 2$. Si $0 \leqq x \leqq 1$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

Si $1 \leqq x \leqq 2$:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2} + \int_1^x 2\,dt = \tfrac{1}{2} + 2x - 2. \end{aligned}$$

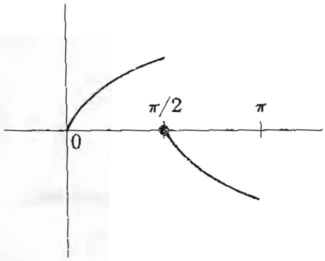
Ejemplo 4. Sea $f(x)$ definida para $0 \leqq x \leqq \pi$ mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \quad \text{si} \quad 0 \leqq x < \pi/2 \\ f(x) &= \cos x \quad \text{si} \quad \pi/2 \leqq x \leqq \pi. \end{aligned}$$

Entonces la integral de f desde 0 hasta π está dada por:

$$\int_0^\pi f = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$$
$$= -\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen} x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 0.$$

La gráfica de f tiene el siguiente aspecto:

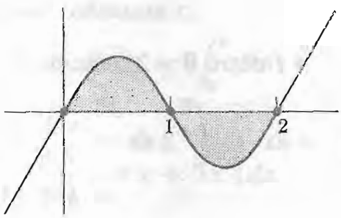


Ejemplo 5. Encontrar el área entre la curva

$$y = f(x) = x(x-1)(x-2)$$

y el eje x.

La curva es de la siguiente forma:



Hay dos porciones entre la curva y el eje x, correspondientes a los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$. Sin embargo, la función es negativa entre $x = 1$ y $x = 2$, de modo que para encontrar la suma de las áreas de las dos regiones debemos tomar el valor absoluto de la integral correspondiente al segundo intervalo. Entonces calcularemos estas áreas separadamente.

Primero desarrollamos el producto que nos da $f(x)$ y obtenemos

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

La primera integral es igual a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$
$$= \tfrac{1}{4} - 1 + 1 = \tfrac{1}{4}.$$

La segunda integral es igual a

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big|_1^2\\ &= \tfrac{16}{4} - 8 + 4 - (\tfrac{1}{4} - 1 + 1)\\ &= -\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

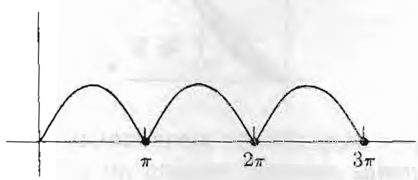
Por tanto, el área de las dos regiones es igual a

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Ejemplo 6. Calcular la integral

$$\int_0^{3\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx.$$

Nótese que, debido al símbolo de valor absoluto, la gráfica de la función $|\operatorname{sen} x|$ tiene el siguiente aspecto:



Para obtener la integral deseada, todo lo que debemos hacer es encontrar

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx,$$

y multiplicar este valor por 3, lo que es muy fácil. Tenemos

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2.$$

Por tanto, obtenemos

$$\int_0^{3\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = 6.$$

Ejercicios

Obtener las siguientes integrales:

1. $\int 4x^3\,dx$

2. $\int (3x^4 - x^5)\,dx$

3. $\int (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x)\, dx$

4. $\int (3x^{2/3} + 5 \cos x)\, dx$

5. $\int \left(5e^x + \frac{1}{x}\right) dx$

6. $\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$

7. $\int_{-1}^{1} 2x^5\, dx$

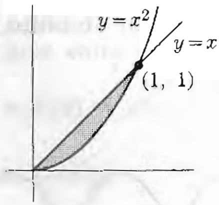
8. $\int_{-1}^{2} e^x\, dx$

9. $\int_{-1}^{3} 4x^2\, dx$

10. Encontrar el área entre las curvas $y = x$ e $y = x^2$. [Graficar las curvas. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas tales que $f(x) \geqq g(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el área entre las dos curvas, desde a hasta b, es

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

En este problema las curvas se intersectan en $x = 0$ y en $x = 1$.]



Por tanto, el área es

$$\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

11. Encontrar el área entre las curvas $y = x$ e $y = x^3$.
12. Encontrar el área entre las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.
13. Encontrar el área entre la curva $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ y el eje x. (Graficar la curva.)
14. Encontrar el área entre la curva $y = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$ y el eje x.
15. Encontrar el área entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, el eje y, y el primer punto donde se intersectan estas curvas para $x > 0$.

En cada uno de los siguientes casos, encontrar la integral de la función sobre el intervalo indicado y graficar la función.

16. Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = x$ si $-1 \leqq x < 0$ y $f(x) = 5$ si $0 \leqq x \leqq 1$.
17. Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = x^2$ si $-1 \leqq x \leqq 0$ y $f(x) = -x$ si $0 < x \leqq 1$.
18. Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = x - 1$ si $-1 \leqq x < 0$ y $f(x) = x + 1$ si $0 \leqq x \leqq 1$.
19. Sobre $[-\pi, \pi]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ si $-\pi \leqq x \leqq 0$ y $f(x) = x$ si $0 < x \leqq \pi$.
20. Sobre $[-\pi, \pi]$, $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.
21. Sobre $[-\pi, \pi]$, $f(x) = |\cos x|$.
22. Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = |x|$.
23. Sobre $[-\pi, \pi]$, $f(x) = \operatorname{sen} x + |\cos x|$.
24. Sobre $[-\pi, \pi]$, $f(x) = x - |x|$.
25. Sobre $[-\pi, \pi]$, $f(x) = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$.

§3. Desigualdades

Teorema 1. *Sean a, b dos números, con $a \leqq b$. Sean f, g dos funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y supongamos que $f(x) \leqq g(x)$ para todo x del intervalo. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración. Puesto que $g(x) - f(x) \geqq 0$, podemos usar la propiedad 1 del capítulo IX, § 4 (con $m = 0$), para llegar a la conclusión de que

$$\int_a^b (g - f) \geqq 0.$$

Pero

$$\int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f.$$

Transponiendo en nuestra desigualdad la segunda integral de la derecha, obtenemos

$$\int_a^b g \geqq \int_a^b f,$$

tal como se deseaba.

El teorema 1 será usado principalmente cuando $g(x) = |f(x)|$. Como un número negativo es siempre $\leqq$ que un número positivo, sabemos que

$$f(x) \leqq |f(x)|$$

y

$$-f(x) \leqq |f(x)|.$$

Teorema 2. *Sean a, b dos números, con $a \leqq b$. Sea f una función continua sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demostración. Simplemente hacemos $g(x) = |f(x)|$ en el teorema anterior. El valor absoluto de la integral de la izquierda es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podemos aplicar el teorema 1 bien sea a $f(x)$ o a $-f(x)$ para obtener el teorema 2.

Haremos otra aplicación del teorema 2.

Teorema 3. *Sean a, b dos números y f una función continua sobre el intervalo* *cerrado entre a y b. (No suponemos necesariamente que $a < b$.) Sea M un número tal que $|f(x)| \leqq M$ para todo x del intervalo. Entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq M|b-a|.$$

Demostración. Si $a \leqq b$, podemos usar el teorema 2 para obtener

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx = M(b-a).$$

Si $b < a$, entonces

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Tomando el valor absoluto obtenemos el estimador $M(a-b)$. Puesto que $a - b = |b - a|$ en el caso $b < a$, hemos demostrado nuestro teorema.

Teorema 4. *Sea f una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ con $a < b$. Supongamos que $f(x) \geqq 0$ para todo x del intervalo y que $f(x) > 0$ para algún x de este intervalo. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Demostración. Sea c un número del intervalo tal que $f(c) > 0$ y supongamos por simplicidad que $c \neq b$. Puesto que f es continua, existe algún número d cercano a c en el intervalo, con $c < d \leqq b$, tal que $f(x)$ está próximo a $f(c)$ para todos los x que satisfacen $c \leqq x \leqq d$. En particular, tenemos

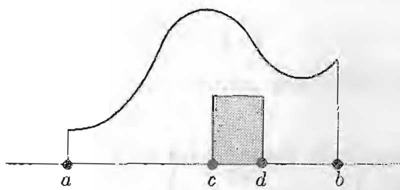
$$f(x) \geqq \frac{f(c)}{2}, \qquad c \leqq x \leqq d.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \\ &\geqq \int_c^d f(x)\,dx \geqq \int_c^d \frac{f(c)}{2}\,dx \\ &= \frac{f(c)}{2}(d-c) > 0.\end{aligned}$$

Esto demuestra nuestro teorema si $c \neq b$. Si $c = b$, tomaremos $d < c$ y argumentaremos en forma análoga.

El teorema 4 no será usado en el resto del libro, excepto en un par de ejercicios, pero es importante en las aplicaciones subsiguientes. La idea geométrica en que se basa la demostración es muy simple, en términos de área. Como hemos supuesto que la función f es $\geqq 0$ en todos los puntos del intervalo y > 0 en el punto c, entonces ella es mayor que algún número positivo fijo [podemos tomar, por ejemplo, $f(c)/2$] en algún intervalo próximo a c. Esto significa que podemos insertar un pequeño rectángulo de altura > 0 entre la curva $y = f(x)$ y el eje x. Entonces el área bajo la curva es por lo menos igual al área de este rectángulo, que es > 0.



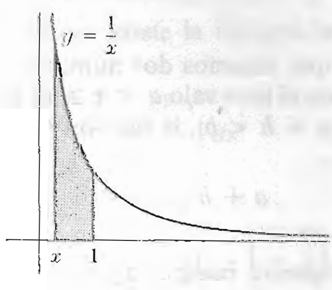
§4. Integrales impropias

Sabemos que el área bajo la curva $1/x$ entre 1 y x es $\log x$. En vez de tomar $x > 1$, tomemos $0 < x < 1$. Cuando x tiende a 0, $\log x$ toma valores negativos muy grandes. La integral

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \log t\Big|_x^1 = -\log x$$

es, por tanto, positiva y muy grande. Podemos interpretar este hecho diciendo que el área se hace muy grande.

La gráfica de la función $1/x$ tiene el siguiente aspecto:



Hemos sombreado la parte del área bajo la gráfica que está entre x y 1. Vemos que cuando x tiende a 0 el área se hace arbitrariamente grande.

Sin embargo, debe notarse que ocurrirá una situación completamente diferente cuando consideremos el área bajo la curva $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$. Tomamos $x > 0$, por supuesto, y calculamos la integral

$$\int_x^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt = \frac{t^{1/2}}{1/2}\Big|_x^1 = 2 - 2x^{1/2}.$$

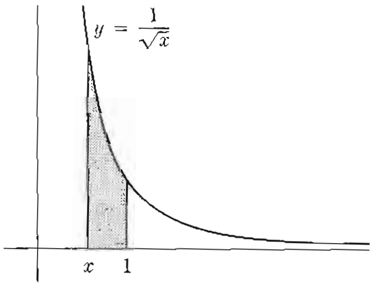
Cuando x tiende a 0, esto tiende a 2, a pesar del hecho de que nuestra curva $y = x^{-1/2}$ asciende como una chimenea en las proximidades del eje y y ni siquiera está definida para $x = 0$.

Cuando esto ocurra, diremos que la integral

$$\int_0^1 t^{-1/2}\, dt$$

existe o **converge** aun cuando la función no está definida en 0 y no es continua en el intervalo **cerrado** [0, 1].

Podemos ilustrar la gráfica de $1/\sqrt{x}$ en el siguiente dibujo. Nótese que a primera vista no difiere mucho del correspondiente al ejemplo anterior, pero el cálculo del área muestra la existencia de una diferencia fundamental.



En general, supóngase que tenemos dos números a, b con, digamos, $a < b$. Sea f una función continua en el intervalo $a < x \leqq b$. Esto significa que para todo número positivo h (tal que $a + h < b$), la función f es continua sobre el intervalo

$$a + h \leqq x \leqq b.$$

Podemos entonces formar nuestra integral usual

$$\int_{a+h}^{b} f(x)\, dx.$$

Si F es una integral indefinida para f sobre nuestro intervalo, entonces la integral es igual a

$$F(b) - F(a + h).$$

Si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} F(a + h)$$

entonces decimos que la **integral impropia**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

existe y es igual a $F(b) - \lim_{h\to 0} F(a+h)$.

Con referencia a los ejemplos anteriores, podemos decir que la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

no existe, pero que sí existe la integral impropia

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$$

Esta segunda integral es igual a 2.

Formulamos definiciones análogas cuando tratamos con un intervalo $a \leqslant x < b$ y una función f que es continua sobre este intervalo. Si existe el límite

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \int_a^{b-h} f(x)\,dx$$

entonces decimos que la integral impropia existe y que es igual a este límite.

Ejemplo 1. Demostrar que no existe la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Consideremos

$$\int_h^1 x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_h^1 = -1 - \left(-\frac{1}{h}\right) = -1 + \frac{1}{h}.$$

Esto no tiende a un límite a medida que h se acerca a 0 y, por tanto, la integral impropia no existe.

Hay otro tipo de integral impropia, en relación con valores grandes.

Sea a un número y f una función continua definida para $x \geqq a$. Considérese la integral

$$\int_a^B f(x)\,dx$$

para algún número $B > a$. Si $F(x)$ es cualquier integral indefinida de f, entonces nuestra integral es igual a $F(B) - F(a)$. Si este valor tiende a un límite a medida que B crece, entonces **definimos**

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^\infty f$$

como este límite, y decimos que la **integral impropia converge.**

Por esto $\int_a^\infty f$ converge si existe

$$\lim_{B\to\infty} \int_a^B f$$

y es igual al límite. De otra manera, decimos que la integral impropia **no converge.**

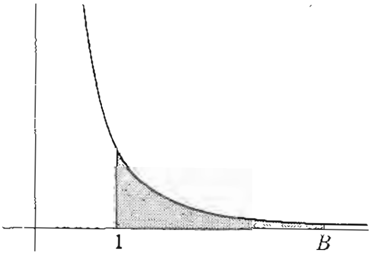
Ejemplo 2. Determinar si la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ converge y, si es así, encontrar su valor.

Tenemos que para un número grande B,

$$\int_1^B \frac{1}{x}\,dx = \log B - \log 1 = \log B.$$

A medida que B crece también lo hace $\log B$ y, por tanto, la integral impropia no converge.

Veamos la función $1/x^2$. Su gráfica es como la de la siguiente figura. A primera vista parece que no hay diferencia entre esta función y $1/x$, excepto que $1/x^2 < 1/x$ cuando $x > 1$. Sin embargo, intuitivamente hablando, encontramos que $1/x^2$ tiende a 0 suficientemente más rápido que $1/x$ para garantizar que el área bajo la curva entre 1 y B tiende a un límite a medida que B se hace más grande.



Ejemplo 3. Determinar si la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

converge y, si es así, encontrar su valor.

Para un número grande B, tenemos que

$$\int_1^B \frac{1}{x^2}\,dx = \left.\frac{-1}{x}\right|_1^B = -\frac{1}{B} + 1.$$

A medida que B crece, $1/B$ tiende a 0. Por consiguiente, a medida que B se va haciendo más grande, el límite existe y es igual a 1, que es el valor de nuestra integral. Tenemos entonces, por definición, que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Es posible decir a menudo si una integral impropia converge, sin necesidad de calcularla, comparándola con otra que sepamos que converge. Damos este criterio en el siguiente teorema:

Teorema 5. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas definidas para $x \geqq a$ y tales que $f(x) \geqq 0$ y $g(x) \geqq 0$ para todo $x \geqq a$. Supóngase que $f(x) \leqq g(x)$ y que la integral impropia*

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

converge. Entonces también converge la integral impropia

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

(Intuitivamente hablando, el teorema dice que si el área bajo la gráfica de g es finita, entonces el área bajo la gráfica de f también es finita porque es más pequeña.)

Demostración. Sea B un número grande. Entonces, de acuerdo con las desigualdades que cumple la integral definida, tenemos

$$\int_a^B f \leqq \int_a^B g.$$

A medida que B se hace grande, y crece, la integral a la derecha crece. Pero sabemos que tiende a un límite que llamaremos L. Este límite es un número que constituye una cota para la integral de f entre a y B; es decir,

$$\int_a^B f \leqq L.$$

A medida que B crece, esta integral de f también crece (el área bajo la gráfica crece porque f es $\geqq 0$) pero permanece bajo L para todo B. Debe haber una mínima cota superior para tales integrales de f, y esta mínima cota superior es el límite deseado.

Ejemplo 4. Determinar si la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$$

converge.

No trataremos de calcular esto; pero observemos que

$$x^3 \leqq x^3 + 1$$

para $x \geqq 1$, de donde

$$\frac{x}{x^3+1} \leqq \frac{x}{x^3} \leqq \frac{1}{x^2}.$$

Todas las funciones relacionadas son $\geqq 0$ cuando $x \geqq 1$. Usando el ejemplo 3, concluimos que nuestra integral impropia converge.

Ejemplo 5. Nótese que el teorema 5 también se puede aplicar a un intervalo finito. Por ejemplo, deseamos probar que la integral

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

converge. Usaremos el ejercicio 8. Existe algún número $C > 0$ tal que $e^x \leqq C$ si $0 \leqq x \leqq 1$ y, por tanto, para $0 < x \leqq 1$ tenemos $e^x/\sqrt{x} \leqq C/\sqrt{x}$. Por el ejercicio 8, la integral

$$\int_0^1 \frac{C}{\sqrt{x}}\,dx$$

converge. Por tanto, por el teorema 5, la integral dada

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

converge.

Ejercicios

Determinar si las siguientes integrales impropias existen o no y si convergen o no:

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{5-x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$
7. Sea B un número >2. Encontrar el área bajo la curva $y = e^{-2x}$ entre 2 y B. ¿Tiende esta área hacia algún límite cuando B se hace muy grande? Si es así, ¿cuál es el límite?
8. Sea $0 < a < 1$. ¿Tiende la integral

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

hacia un límite a medida que $a \to 0$? Si es así, ¿cuál es el límite?

9. Demostrar que la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$$

existe. [*Sugerencia:* Obténgase alguna cota inferior para sen x en términos de cx para alguna constante c.]

10. Demostrar que la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx$$

existe.

11. Sea s un número < 1. Demostrar que la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$

existe.

12. (a) Demostrar que $(\log x)x^{1/4}$ está acotado entre 0 y 1.

(b) Demostrar que

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^{1/2}}\,dx$$

existe.

(c) Demostrar que para cualquier entero positivo n,

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$$

existe.

CAPITULO XI

Técnicas de integración

En este capítulo se enseñan algunos artificios básicos para encontrar integrales indefinidas. Desde luego, es más fácil consultar tablas de integrales, pero el lector debe tener al menos un mínimo de entrenamiento en las técnicas más usuales.

§1. Substitución

Formularemos el análogo de la regla de la cadena, ahora para la integración.

Supóngase que tenemos una función $g(x)$ y otra función f tales que $f(g(x))$ está definida. (Suponemos que todas estas funciones están definidas en intervalos adecuados.) Queremos encontrar una integral

$$\int f(g(x)) \frac{dg(x)}{dx} \, dx.$$

Sea $F(u)$ una integral indefinida de $f(u)$, de modo que

$$\int f(u) \, du = F(u), \qquad \text{o} \qquad \frac{dF(u)}{du} = f(u).$$

Entonces aseguramos que $F(g(x))$ es una integral para $f(g(x)) dg/dx$ o, simbólicamente, que

$$\boxed{\int f(g(x)) \frac{dg}{dx} \, dx = \int f(u) \, du.}$$

Esto se deduce inmediatamente por la regla de la cadena porque

$$\frac{d(F \circ g)}{dx} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx} = f(u) \frac{du}{dx} = f(g(x)) \frac{dg(x)}{dx}.$$

Ejemplo 1. Encontrar $\int (x^2 + 1)^3 (2x) \, dx$.

Hagamos $u = x^2 + 1$. Entonces, $du/dx = 2x$ y nuestra integral toma la forma

$$\int f(u) \frac{du}{dx} \, dx,$$

donde la función f es $f(u) = u^3$.

Por tanto, nuestra integral es igual a

$$\int f(u)\,du = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{4}.$$

Podemos comprobar esto derivando la expresión de la derecha mediante la regla de la cadena. Tal como se deseaba, obtenemos $(x^2 + 1)^3 (2x)$.

Ejemplo 2. Entontrar $\int$ sen $(2x)(2)\,dx$.

Hagamos $u = 2x$. Entonces, $du/dx = 2$. Por tanto, nuestra integral es de la forma

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u = -\cos(2x).$$

Nótese que

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,dx \neq -\cos(2x).$$

Si derivamos $-\cos(2x)$, obtenemos sen $(2x)\cdot 2$.

La integral del ejemplo 2 se podría también escribir así:

$$\int 2\operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

Desde luego, no importa dónde coloquemos el 2.

Ejemplo 3. Entontrar $\int \cos(3x)\,dx$.

Sea $u = 3x$. Entonces, $du/dx = 3$. No hay ningún 3 de más en nuestra integral. Sin embargo, podemos tomar una constante dentro y fuera de una integral. Nuestra integral es igual a

$$\frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx,$$

y esta integral está en la forma

$$\frac{1}{3}\int \cos u\,du.$$

Por consiguiente, nuestra integral es igual a $1/3$ sen $u = 1/3$ sen $(3x)$.

Es conveniente utilizar una notación puramente formal que nos permita hacer una substitución $u = g(x)$, como en los ejemplos anteriores. Por esto, en vez de escribir

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

en el ejemplo 1, podríamos escribir $du = 2xdx$. Análogamente, en el ejemplo 2, podríamos escribir $du = 2dx$ y en el ejemplo 3 podríamos escribir $du = 3dx$. No le atribuimos ningún significado a esto. Es meramente un artificio del tipo usado en la programación de una máquina computadora. Una máquina no piensa. El programador simplemente ajusta ciertos circuitos para que la máquina realice cierta operación y obtenga el resultado correcto. El hecho de que la expresión

$$du = \frac{du}{dx}\,dx$$

nos permite obtener la respuesta correcta, se **probó** definitivamente cuando establecimos la relación

$$\int f(g(x))\,\frac{dg}{dx}\,dx = \int f(u)\,du.$$

La prueba consistió en derivar el resultado y comprobar que así obteníamos la función deseada.

Ejemplo 4. Encontrar

$$\int (x^3 + x)^9(3x^2 + 1)\,dx.$$

Sea

$$u = x^3 + x.$$

Entonces

$$du = (3x^2 + 1)\,dx.$$

Por tanto, nuestra integral es del tipo $\int f(u)\,du$ y es igual a

$$\int u^9\,du = \frac{u^{10}}{10} = \frac{(x^3 + x)^{10}}{10}.$$

Observemos que la fórmula de integración por substitución también se aplica a la integral definida. Podemos establecer esto formalmente como sigue.

Sea g una función derivable en el intervalo $[a, b]$, tal que su derivada es continua. Sea f una función continua en un intervalo que contenga los valores de g. Entonces

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,\frac{dg}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.}$$

La demostración es inmediata. Si F es una integral indefinida de f, entonces, por la regla de la cadena, $F\circ g$ es una integral indefinida de

$$f(g(x))\,\frac{dg}{dx}.$$

Por tanto, el miembro izquierdo de nuestra fórmula es igual a

$$F(g(b)) - F(g(a)),$$

que es también el valor del miembro derecho.

Supóngase que en el ejemplo 4 consideremos la integral

$$\int_0^1 (x^3 + x)^9(3x^2 + 1)\, dx,$$

con $u = x^3 + x$. Cuando $x = 0$, $u = 0$, y cuando $x = 1$, $u = 2$. De este modo, nuestra integral definida es igual a

$$\int_0^2 u^9\, du = \frac{2^{10}}{10}.$$

Ejemplo 5. Calcular

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\, dx.$$

Hagamos $u = x^2$, $du = 2xdx$. Cuando $x = 0$, $u = 0$. Cuando $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. Así, nuestra integral es igual a

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\, du = \tfrac{1}{2}(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}(-\cos \pi + \cos 0) = 1.$$

Ejercicios

Encontrar las siguientes integrales:

1. $\int xe^{x^2}\, dx$
2. $\int x^3 e^{-x^4}\, dx$
3. $\int x^2(1 + x^3)\, dx$
4. $\int \frac{\log x}{x}\, dx$
5. $\int \frac{1}{x(\log x)^n}\, dx$ (n = entero)
6. $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx$
7. $\int \frac{x}{x + 1}\, dx$
8. $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$
10. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 x \cos x\, dx$
11. $\int_0^{\pi} \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$
12. $\int \frac{x}{1 + \cos^2 x}\, dx$
13. $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx$
14. $\int_0^1 x^3\sqrt{1 - x^2}\, dx$
15. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(2x^2)\, dx$
16. Encontrar el área bajo la curva $y = xe^{-x^2}$ entre 0 y un número $B > 0$. ¿Tiende esta área hacia un límite a medida que B se hace más grande? Si es así, ¿cuál es este límite?

17. Encontrar el área bajo la curva $y = x^2e^{-x^3}$ entre 0 y un número $B > 0$. ¿Tiende esta área hacia un límite a medida que B se hace más grande? Si es así, ¿cuál es este límite?

En algunas integrales que comprendan e^x, la integral se puede encontrar, a veces, substituyendo $u = e^x$, $x = \log u$ y $dx = (1/u)du$. Se puede combinar esto con la técnica de §4 siguiente para tratar con las integrales:

18. $\displaystyle\int \sqrt{1 + e^x}\, dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx$

§2. Integración por partes

Si f, g son dos funciones derivables de x, entonces

$$\frac{d(fg)}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}.$$

Por tanto,

$$f(x)\frac{dg}{dx} = \frac{d(fg)}{dx} - g(x)\frac{df}{dx}.$$

Usando la fórmula para la integral de la suma, que es la suma de las integrales, obtenemos

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{df}{dx}\, dx,$$

que se denomina fórmula de integración por partes.

Si hacemos $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces la fórmula puede abreviarse en nuestra notación como sigue:

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du.}$$

Ejemplo 1. Encontrar la integral $\int \log x\, dx$.

Sea $u = \log x$ y $v = x$. Entonces, $du = (1/x)\, dx$ y $dv = dx$. Por consiguiente, nuestra integral está en la forma $\int u\, dv$ y es igual a

$$uv - \int v\, du = x \log x - \int 1\, dx = x \log x - x.$$

Ejemplo 2. Encontrar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.
Sea $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces,

$$du = e^x\, dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

Si llamamos I a nuestra integral, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= -e^x \cos x - \int -e^x \cos x \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Parece como si fuésemos andando en círculos. Pero esto no debe ser motivo de desánimo. Mejor, hagamos $t = e^x$ y $dz = \cos x \, dx$. Así,

$$dt = e^x \, dx \qquad \text{y} \qquad z = \operatorname{sen} x.$$

La segunda integral se transforma en

$$\int t \, dz = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Hemos regresado a la integral I, pero con signo negativo.
Así,

$$I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I.$$

Por consiguiente,

$$2I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x,$$

y dividiendo por 2, obtenemos el valor de I.

Ejercicios

Encontrar las integrales siguientes:

1. $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$
2. $\int \arctan x \, dx$
3. $\int e^{2x} \quad 3x \, dx$
4. $\int e^{-4x} \cos 2x \, dx$
5. $\int (\log x)^2 \, dx$
6. $\int (\log x)^3 \, dx$
7. $\int x^2 e^x \, dx$
8. $\int x^2 e^{-x} \, dx$
9. $\int x \operatorname{sen} x \, dx$
10. $\int x \cos x \, dx$
11. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$
12. $\int x^2 \cos x \, dx$
13. $\int x^3 \cos x^2 \, dx$
14. $\int x^5 \sqrt{1 - x^2} \, dx$
15. $\int x^2 \log x \, dx$
16. $\int x^3 \log x \, dx$
17. $\int x^2 (\log x)^2 \, dx$
18. $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx$

21. Sea B un número > 0. Encontrar el área bajo la curva $y = xe^{-x}$ entre 0 y B. ¿Tiende esta área hacia algún límite cuando B crece?

22. ¿Converge la integral impropia $\int_1^\infty x^2 e^{-x}\,dx$?

23. ¿Converge la integral impropia $\int_1^\infty x^3 e^{-x}\,dx$?

24. Sea B un número > 2. Encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{x(\log x)^2}$$

entre 2 y B. ¿Tiende esta área hacia algún límite a medida que B crece? Si es así, ¿cuál es el límite?

25. ¿Converge la integral impropia

$$\int_3^\infty \frac{1}{x(\log x)^4}\,dx$$

En caso afirmativo, ¿hacia qué converge?

§3. Integrales trigonométricas

Investigaremos integrales que comprenden al seno y al coseno. Será útil tener presentes las fórmulas:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}} \qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.}$$

Estas se pueden probar fácilmente usando

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Podemos integrar $\operatorname{sen}^2 x$, a saber:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.$$

Podemos también usar un truco especial para integrar

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx.$$

Reemplazamos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, de modo que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x\,dx &= \int (\operatorname{sen} x)(1-\cos^2 x)\,dx\\ &= \int \operatorname{sen} x\,dx - \int (\cos^2 x)(\operatorname{sen} x)\,dx.\end{aligned}$$

La segunda de estas últimas integrales se puede calcular mediante la substitución

$$u = \cos x \qquad du = -\operatorname{sen} x\, dx.$$

Así, pues, encontramos que

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}.$$

Este procedimiento es fácil de usar para potencias pequeñas del seno y del coseno. Sin embargo, no sirve como fórmula general para integrar cualquier potencia.

Hay un método general para integrar $\operatorname{sen}^n x$ para cualquier entero positivo n: integrar por partes. Consideremos primero un ejemplo:

Ejemplo 1. Encontrar la integral $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$.
Escribamos la integral en la forma

$$\int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Sea $u = \operatorname{sen}^2 x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces,

$$du = 2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

Así, nuestra integral es igual a

$$-(\operatorname{sen}^2 x)(\cos x) - \int -\cos x(2 \operatorname{sen} x \cos x)\, dx$$
$$= -\operatorname{sen}^2 x \cos x + 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Podemos calcular esta última integral substituyendo, por ejemplo, $t = \cos x$ y $dt = -\operatorname{sen} x\, dx$. La integral se transforma en $-2\int t^2\, dt$ y, por consiguiente,

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\operatorname{sen}^2 x \cos x - \tfrac{2}{3}\cos^3 x.$$

Trabajemos ahora con cualquier entero positivo n. Mostraremos cómo reducir la integral $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ a la integral $\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$. El método para calcular la integral $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ será proceder por etapas, reduciendo cada vez más la potencia del integrando.

Teorema 1. *Para cualquier entero positivo n, tenemos*

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.}$$

Demostración. Escribamos la integral como

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces,

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} I_n &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x - \int -(n-1)\cos x \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx \\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx. \end{aligned}$$

Reemplazamos $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ y obtenemos

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

de donde

$$nI_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}.$$

La fórmula deseada se obtiene dividiendo por n.

Dejamos como ejercicio la demostración de la fórmula análoga para el coseno.

$$\boxed{\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.}$$

Mediante una técnica similar podemos calcular integrales que comprendan tangentes, ya que

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x.$$

Estas funciones se usan menos que el seno y el coseno; por consiguiente, no escribimos las fórmulas. Así aligeraremos esta página que, de otra manera, sería realmente opresiva.

Es útil también recordar el truco siguiente:

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \sec x\, dx = \log(\sec x + \tan x).$$

Esto se hace por substitución. Tenemos

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x = \frac{(\sec x)(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}.$$

Hagamos $u = \sec x + \tan x$. Entonces la integral es de la forma

$$\int \frac{1}{u}\, du.$$

(Esta es una buena oportunidad para recalcar que la fórmula obtenida es válida para cualquier intervalo donde $\cos x \neq 0$ y $\sec x + \tan x > 0$. De otra manera, los símbolos no tienen sentido. Como ejercicio, determinar dicho intervalo.)

Es posible integrar potencias mixtas de seno y coseno reemplazando $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, por ejemplo.

Ejemplo 2. Encontrar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$.

Reemplazando $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$, vemos que nuestra integral es igual a

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx - \int \operatorname{sen}^4 x\, dx,$$

que sabemos cómo integrar. También podríamos usar las substituciones del comienzo de la sección como un truco especial. Hagamos

$$(\operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x) = \frac{1 - \cos^2 2x}{4},$$

lo cual reduce las potencias dentro de la integral. Otra aplicación de este tipo, a saber:

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

reduce aún más nuestro problema. El lector deberá escoger su método y, como ejercicio, calcular la integral.

Cuando encontremos una integral que implique una raíz cuadrada, frecuentemente podremos deshacernos de la raíz mediante una substitución trigonométrica.

Ejemplo 3. Encontrar el área de una circunferencia de radio 3. La ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 = 9,$$

y la parte de la circunferencia incluida en el primer cuadrante está descrita por la función

$$y = \sqrt{3^2 - x^2}.$$

Entonces, un cuarto del área está dada por la integral

$$\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}\, dx.$$

Hagamos $x = 3 \operatorname{sen} t$. Entonces, $dx = 3 \cos t\, dt$ y nuestra integral se transforma en

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{3^2 - 3^2 \operatorname{sen}^2 t}\, 3 \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} 9 \cos^2 t\, dt = \frac{9\pi}{4}.$$

(Vemos que $1 - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$ y $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \cos t$ en el intervalo entre 0 y $\pi/2$.) El área total de la circunferencia es entonces 9π.

Ejercicios

Encontrar las integrales siguientes:

1. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ 2. $\int \cos^3 x\,dx$ 3. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$

Encontrar el área encerrada por las curvas siguientes:

4. $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1.$ 5. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$ 6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

7. Encontrar el área de una circunferencia de radio $r > 0$.
8. Probar las fórmulas:

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos (m-n)x - \cos (m+n)x]$$
$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} (m+n)x + \operatorname{sen} (m-n)x]$$
$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos (m+n)x + \cos (m-n)x].$$

para dos enteros cualesquiera m, n.

9. Mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \cos 2x\,dx = 0.$$

10. Mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \cos 2x\,dx = 0.$$

11. Mostrar que, en general, para dos enteros positivos m, n tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = 0.$$

12. Mostrar que, en general, para dos enteros positivos m, n tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n, \\ \pi & \text{si} \quad m = n. \end{cases}$$

13. Encontrar $\int \tan x\,dx$.

Encontrar las integrales siguientes:

14. $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx$ 15. $\int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}\,dx$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{2 - 4x^2}}\,dx$ 17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}\,dx$

18. Sea f una función continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Definimos sus **coeficientes de Fourier** como:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx.$$

para n igual a un entero $\geqq 1$. Calcular los coeficientes de Fourier para las funciones siguientes. (Será más fácil si se resuelve primero el 19.)

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = |x|$
(d) $f(x) = \cos x$ (e) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (f) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$
(g) $f(x) = \cos^2 x$ (h) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ (i) $f(x) = |\cos x|$
(j) $f(x) = 1$

19. (a) Sea f una función par [esto es, $f(x) = f(-x)$]. Mostrar que sus coeficientes de Fourier b_n son todos iguales a 0.
(b) Sea f una función impar [esto es, $f(x) = -f(-x)$]. ¿Qué se puede decir acerca de sus coeficientes de Fourier?

20. Encontrar las integrales

$$\text{a)} \int \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta \qquad \text{b)} \int \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta$$

[*Sugerencia:* Escribir $\theta = 2u$.]

§4. Fracciones parciales

Queremos investigar la integral

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son dos polinomios.
Mediante la división larga podemos reducir el problema al caso en que el grado de f sea menor que el grado de g. Ilustraremos esta reducción con el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1. Considérense los polinomios $f(x) = x^3 - x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dividiendo f por g (según lo aprendido desde secundaria) obtenemos el cociente x con el residuo $-2x + 1$. De este modo,

$$x^3 - x + 1 = (x^2 + 1)x + (-2x + 1).$$

De donde

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + \frac{-2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Para encontrar la integral de $f(x)/g(x)$ integramos x y el cociente de la derecha que tiene la propiedad de que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Desde ahora, *supondremos que cuando consideremos un cociente* $f(x)/g(x)$, *el grado de* f *es menor que el grado de* g. Sacando como factor una constante si es necesario, supondremos también que $g(x)$ puede escribirse como

$$g(x) = x^d + \text{términos menores}.$$

Empezaremos analizando casos especiales y después veremos cómo puede reducirse el caso general para éstos.

Caso 1. Si a es un número, encontrar

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$$

siendo n un entero $\geqq 1$.

Esta es una vieja historia. Ya sabemos cómo hacerlo. De hecho, tenemos

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \qquad \text{si} \quad n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{(x-a)}\,dx = \log(x-a).$$

Caso 2. Si b es un número, encontrar

$$\int \frac{1}{(x^2+b^2)^n}\,dx.$$

Esto es nuevo. Substituyendo $x = bz$ y $dx = bdz$, reducimos la integral a

$$\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz.$$

Discutiremos ahora cómo encontrar esta integral. Si $n > 1$, usaremos integración por partes. (Si $n = 1$, el resultado es el arco tangente.) Llamemos I_n a la integral anterior. Empezaremos con I_{n-1}, ya que la integración por partes eleva n en vez de reducirla. Tenemos

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.$$

Sea $u = \dfrac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$ y $dv = dx$. Entonces

$$du = -(n-1)\frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx \qquad \text{y} \qquad v = x.$$

De este modo,

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Escribamos $x^2 = x^2 + 1 - 1$. Obtenemos

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx$$

$$- 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

o, en otras palabras:

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n.$$

Entonces,

$$2(n-1)I_n = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1},$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = {} & \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ & + \frac{(2n-3)}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.\end{aligned}}$$

Esto nos da una fórmula recursiva que reduce el exponente n en el denominador hasta $n = 1$. En este caso, ya sabemos que

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x.}$$

Caso 3. Encontrar la integral

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx.$$

Esta es otra vieja historia. Hagamos la substitución

$$u = x^2 + b^2 \qquad \text{y} \qquad du = 2x\,dx.$$

Entonces la integral es igual a

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}\,du,$$

que ya sabemos cómo evaluar; así encontramos que

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+b^2) & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{1}{2(-n+1)}\,\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

Veamos ahora el caso general. Investiguemos un cociente del tipo $f(x)/g(x)$. Si alguno de los polinomios es del tipo $x^2 + bx + c$, entonces completamos el cuadrado. Así, el polinomio puede escribirse en la forma

$$(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \text{o} \qquad (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

para ciertos números α, β. Por ejemplo,

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$
$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 2^2.$$

Puede demostrarse que un polinomio $g(x)$ siempre se puede escribir como un producto de términos del tipo

$$(x - \alpha)^n \qquad \text{y} \qquad [(x - \beta)^2 + \gamma^2]^m,$$

donde n, m son enteros $\geqq 0$. También puede mostrarse que un cociente $f(x)/g(x)$ puede escribirse como una suma de términos del tipo siguiente:

$$\frac{c_1}{x - \alpha} + \frac{c_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(x - \alpha)^n} + \frac{d_1 + e_1 x}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} + \cdots + \frac{d_m + e_m x}{[(x - \beta)^2 + \gamma^2]^m}$$

para ciertas constantes $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots, e_1, e_2, \ldots$ La manera de determinar estas constantes es obtener el común denominador $g(x)$ del miembro derecho de la ecuación, igualar el numerador $f(x)$ con lo que se obtiene a la derecha y resolver para las constantes. Ilustraremos esto con ejemplos, pero no demostraremos las afirmaciones anteriores, pues es bastante difícil.

Una vez expresado el cociente $f(x)/g(x)$ en la forma indicada, los casos 1, 2 y 3 nos permitirán integrar cada término. Encontraremos entonces que la integral comprende funciones del tipo siguiente:

Una función racional.

Términos en log.

Términos en arco tangente.

Ejemplo 2. Expresar el cociente

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)}$$

como una suma de términos del tipo mencionado y determinar la integral.

Esto será

$$\frac{c_1}{x - 2} + \frac{c_2}{x - 3}.$$

Al obtener el común denominador, tendremos como numerador

$$c_1(x - 3) + c_2(x - 2) = (c_1 + c_2)x - 3c_1 - 2c_2,$$

que debe ser igual a 1. Por tanto, debemos tener que

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$-3c_1 - 2c_2 = 1.$$

Resolviendo para c_1 y c_2, tendremos que $c_2 = 1$ y $c_1 = -1$. Por tanto,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-2)}\,dx + \int \frac{1}{(x-3)}\,dx$$
$$= -\log(x-2) + \log(x-3).$$

Ejemplo 3. Expresar el cociente

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$$

como una suma del tipo anterior y encontrar la integral.

Queremos hallar números c_1, c_2, c_3 tales que

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x-2}.$$

Sacando el común denominador del miembro derecho

$$(x-1)^2(x-2),$$

obtenemos un numerador igual a

$$c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-2) + c_3(x-1)^2.$$

Este se puede escribir también como

$$(c_1 + c_3)x^2 + (-3c_1 + c_2 - 2c_3)x + 2c_1 - 2c_2 + c_3,$$

y debe ser igual a $x + 1$. Igualamos los coeficientes de x^2, x y los términos constantes. Obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\quad + c_3 &= 0 \\ -3c_1 + c_2 - 2c_3 &= 1 \\ 2c_1 - 2c_2 + c_3 &= 1. \end{aligned}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que se puede resolver para determinar c_1, c_2, c_3. Encontramos $c_1 = -3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 3$. Por tanto,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx = \int \frac{-3}{x-1}\,dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)}\,dx$$
$$= -3\log(x-1) + \frac{2}{x-1} + 3\log(x-2).$$

Ejemplo 4. Expresar el cociente

$$\frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}$$

como una suma del tipo antes descrito y encontrar la integral.

Podemos encontrar números $c_1, c_2, \ldots$ tales que el cociente sea igual a

$$\frac{c_1 + c_2x}{x^2 + 1} + \frac{c_3 + c_4x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{c_5}{x - 3}.$$

Obtenemos el común denominador $(x^2 + 1)^2\,(x - 3)$. El numerador es igual a

$$(c_1 + c_2x)(x^2 + 1)(x - 3) + (c_3 + c_4x)(x - 3) + c_5(x^2 + 1)^2$$

y debe ser igual a $2x + 5$. Si igualamos los coeficientes de x^4, x^3, x^2, x y las constantes respectivas, obtendremos un sistema de cinco ecuaciones lineales con cinco incógnitas que podemos resolver. Es tedioso hacerlo aquí y lo dejamos como ejercicio. Para la integral obtenemos entonces:

$$\int \frac{2x + 5}{(x^2 + 1)^2(x - 3)}\,dx = c_1 \arctan x + \tfrac{1}{2}c_2 \log(x^2 + 1)$$
$$+ c_3 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\,dx - \tfrac{1}{2}c_4 \frac{1}{x^2 + 1} + c_5 \log(x - 3).$$

Esta integral es precisamente la del caso 2. Como ejercicio, encontrarla explícitamente.

Ejercicios

1. Encontrar las constantes en el ejemplo 4.
2. Escribir explícitamente la integral

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\,dx.$$

Encontrar las siguientes integrales:

3. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x - 3)(x + 2)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x + 2)(x + 1)}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 + x}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x}{(x + 1)^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{(x^2 + 9)^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{4}{(x^2 + 16)^2}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x}{(x + 1)(x + 2)^2}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{(x - 1)(x + 7)}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2 + x + 1)}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 - 1}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - 1}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 - 3)^2}\,dx$

20. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números distintos. Sea

$$\frac{1}{(x - a_1)\cdots(x - a_n)} = \frac{c_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{c_n}{x - a_n}.$$

Sea $f(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_n)$. Demostrar que $c_1 = 1/f'(a_1)$.

21. Si f es una función, definimos $L(f) = f'/f$. Si f, g son funciones, demostrar que

$$L(fg) = L(f) + L(g) \quad \text{y} \quad L(cf) = L(f)$$

si c es un número. Calcular $L(f)$ para las siguientes funciones:

(a) $(x - 1)(x - 2)$
(b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
(c) $(x^2 + 5)(x^3 - 1)$
(d) $(x^2 - 1)/(x^2 + 1)$

Demostrar que $L(1/f) = -L(f)$.

Ejercicios suplementarios

SUBSTITUCION

Encontrar las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4 + 2}\,dx$

2. $\displaystyle\int \sqrt{3x + 1}\,dx$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

6. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4 + 1}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{(3x^2 + 5)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int (x^2 + 3)^4 x^3\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

10. $\displaystyle\int e^x\sqrt{e^x + 1}\,dx$

11. $\displaystyle\int (x^3 + 1)^{7/5} x^5\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 - 4)^{3/2}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x\,dx$

14. $\displaystyle\int \cos 4x\,dx$

15. $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx$

16. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$

17. $\int \frac{1}{x \log x}\, dx$

18. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

19. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$

20. $\int \frac{(\log x)^4}{x}\, dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

22. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$

23. $\int_0^1 \sqrt{2 - x}\, dx$

24. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$

25. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

26. $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

27. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

28. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx$

29. $\int_0^1 \frac{1 + e^{2x}}{e^x}\, dx$

30. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x^2\, dx$

31. $\int x e^{-\sqrt{x}}\, dx$

32. $\int \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

POR PARTES

Encontrar las siguientes integrales:

1. $\int x \arctan x\, dx$

2. $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx$

3. $\int x \arccos x\, dx$

4. $\int x^3 e^{2x}\, dx$

5. $\int_{-1}^{0} \operatorname{arcsen} x\, dx$

6. $\int_1^2 x^3 \log x\, dx$

7. $\int_0^{1/2} x \operatorname{arcsen} 2x\, dx$

8. $\int_1^2 \sqrt{x} \log x\, dx$

9. $\int_{-1}^{1} x e^x\, dx$

10. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

Encontrar las siguientes integrales:

1. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

2. $\int \tan^2 x\, dx$

3. $\int e^x \operatorname{sen} e^x\, dx$

4. $\int \frac{1}{1 - \cos x}\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^6 x\, dx$

7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 2x\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x\, dx$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}}\, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}$

16. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{a^2-x^2}}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx$

22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\, dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\, dx$

25. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(16+x^2)^2}\, dx$

26. $\displaystyle\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\, dx \quad (a > 0)$

VARIOS

1. Demostrar que para enteros positivos m, n tenemos

$$\int x^m(\log x)^n\, dx = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\log x)^{n-1}\, dx.$$

2. Demostrar por inducción que

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx.$$

3. Demostrar que la integral impropia

$$\int_0^1 \log x\, dx$$

existe; encontrar su valor.

4. Encontrar por inducción el valor de

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx.$$

5. Calcular

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\, dx.$$

6. Demostrar por inducción que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

7. Demostrar que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx \geqq \frac{1}{n+1}.$$

[*Sugerencia:* Nótese que $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x) \geqslant 1 - x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$.]

8. Sea f continua en $[0, 1]$. Sean

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

$$f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\, dt$$

y, en general,

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt.$$

Demostrar que

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)(x - t)^{n-1}\, dt.$$

Nota: Hay dos posibilidades para escoger $u\ dv$, y una de ellas no conducirá a ninguna parte.]

9. Una función f definida para todos los números se llama **periódica** de período s si $f(x + s) = f(x)$ para todo x. Supóngase que f es continua y periódica. Demostrar que

$$\int_a^b f = \int_{a+s}^{b+s} f$$

y

$$\int_a^{a+s} f = \int_0^s f.$$

10. Supóngase que $f(-x) = -f(x)$. Demostrar que

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0.$$

11. Encontrar el valor de las integrales (a) $\int_0^{7\pi} |\text{sen } x|\, dx$. (b) $\int_0^{7\pi} |\cos x|\, dx$. (c) Para cualquier entero positivo n, $\int_0^{n\pi} |\text{sen } x|\, dx$.

CAPITULO XII

Algunos ejercicios importantes

No usaremos el contenido de esta sección hasta el capítulo referente a series; aun entonces usaremos solamente el estimador de $(n!)^{1/n}$. Así, este capítulo puede ser omitido completamente. Le incluimos principalmente como referencia y para proporcionar algunos buenos ejercicios a quienes estén interesados.

§1. Un estimador para $(n!)^{1/n}$

Sea n un entero positivo. Definimos $n!$ (que se leerá factorial de n) como el producto de los n primeros enteros, o sea $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Esto es ciertamente menor que n^n (el producto de n consigo misma n veces). Investigaremos en qué medida difiere de n^n. (No difiere demasiado.)

De hecho, lo que demostraremos primero es que

$$n! = n^n e^{-n} d_n,$$

donde d_n es un número tal que $d_n^{1/n}$ tiende hacia 1 cuando n se hace grande. Esta es una proposición más débil que el resultado establecido en el siguiente teorema, cuya demostración es muy simple y muy fácil de recordar. Es una bella aplicación de las técnicas de la suma superior e inferior.

Teorema 1. *Sea n un entero positivo. Entonces*

$$(n-1)! \leqq n^n e^{-n} e \leqq n!$$

Demostración. Ejercicio. Evaluar y comparar la integral

$$\int_1^n \log x \, dx$$

con la suma superior e inferior asociadas con la partición $(1, 2, \ldots, n)$ del intervalo $[1, n]$. Usar entonces la exponenciación.

Corolario. *Cuando n se hace muy grande,*

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} = \left[\frac{n!}{n^n}\right]^{1/n}$$

tiende hacia $1/e$.

Demostración. Tomemos la raíz n-ésima en la desigualdad de la derecha en nuestro teorema. Obtenemos

$$ne^{-1}e^{1/n} \leqq (n!)^{1/n}.$$

Dividiendo por n se halla

$$\frac{1}{e}e^{1/n} \leqq \frac{(n!)^{1/n}}{n}.$$

De otra parte, multiplicando ambos lados de la desigualdad

$$(n-1)! \leqq n^n e^{-n} e$$

por n, obtenemos $n! \leqq n^n e^{-n} en$. Tomando la raíz n-ésima:

$$(n!)^{1/n} \leqq ne^{-1}e^{1/n}n^{1/n}.$$

Dividiendo por n se obtiene

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} \leqq \frac{1}{e}e^{1/n}n^{1/n}.$$

Pero sabemos que tanto $n^{1/n}$ como $e^{1/n}$ tienden a 1 cuando n se hace muy grande. Así, nuestro cociente está comprendido entre dos números que tienden a $1/e$ y, por tanto, dicho cociente también tiende hacia $1/e$.

Ejercicios

1. Usar la abreviación $\lim\limits_{n\to\infty}$ para indicar: límite cuando n se hace muy grande. Demostrar que

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(3n)!}{n^{3n}}\right]^{1/n} = \frac{27}{e^3}$ (b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(3n)!}{n!n^{2n}}\right]^{1/n} = \frac{27}{e^2}$

2. Encontrar los límites:

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n^{2n}}\right]^{1/n}$ (b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!(5n)!}{n^{4n}(3n)!}\right]^{1/n}$

§2. La fórmula de Stirling

Usando los varios refinamientos del método anterior, se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea n un entero positivo. Entonces existe un número θ entre 0 y 1 tal que*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta/12n}.$$

Presentaremos otra demostración indicando los pasos principales y dejando los detalles como ejercicio.

1. Sea $\varphi(x) = \frac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x} - x$. Demostrar que

$$\varphi'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

2. Sea $\psi(x) = \varphi(x) - \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$. Demostrar que

$$\psi'(x) = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2}.$$

3. Para $0 < x < 1$, concluir que $\varphi(x) > 0$ y que $\psi(x) < 0$.
4. Deducir que para $0 \leqq x < 1$, se tiene

$$0 \leqq \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - x \leqq \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

5. Sea $x = \dfrac{1}{2n+1}$. Entonces $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{n+1}{n}$ y

$$\frac{x^3}{3(1-x^2)} = \frac{1}{12(2n+1)(n^2+n)}.$$

6. Concluir que

$$0 \leqq \tfrac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} - \frac{1}{2n+1} \leqq \frac{1}{12(2n+1)(n^2+n)}$$

$$0 \leqq (n+\tfrac{1}{2})\log\frac{n+1}{n} - 1 \leqq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

7. Sean

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \quad \text{y} \quad b_n = a_n e^{1/12n}.$$

Entonces $a_n \leqq b_n$. Demostrar que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1 \quad \text{y} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqq 1.$$

Así, las a_n crecen y las b_n decrecen. Por tanto, existe un único número c tal que

$$a_n \leqq c \leqq b_n$$

para todo n.

8. Concluir que

$$n! = c^{-1}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\theta/12n}$$

para algún número θ entre 0 y 1.

Para obtener el valor de la constante c, se debe usar otro argumento que será descrito en la sección siguiente.

§3. El producto de Wallis

Nuestro primer propósito es la obtención del siguiente límite, conocido como producto de Wallis.

Teorema 3. *Tenemos*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}.$$

Demostración. La demostración será presentada nuevamente como un ejercicio.

1. Usando las fórmulas de recurrencia para las integrales de las potencias de seno, demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}.$$

2. Usando el hecho de que las potencias de seno son decrecientes cuando $n =$ $= 1, 2, 3, \ldots$ y empleando la segunda de las anteriores fórmulas de integración, concluir que

$$1 \leqq \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx} \leqq 1 + \frac{1}{2n}.$$

3. Tomando la razón de las integrales de $\operatorname{sen}^{2n} x$ y de $\operatorname{sen}^{2n+1} x$ entre 0 y $\pi/2$, deducir el producto de Wallis.

Corolario. *Tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\,n^{1/2}} = \pi^{1/2}.$$

Demostración. Escribir el producto de Wallis en la forma

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 4^2 \cdots (2n-2)^2}{3^2 5^2 \cdots (2n-1)^2}\,2n.$$

Tomar la raíz cuadrada y encontrar el límite establecido en el corolario.

Finalmente, demostrar que la constante c en la fórmula de Stirling es $1/\sqrt{2\pi}$, argumentando de la manera siguiente. (Justificar todos los pasos.)

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(2n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!\,n^{1/2}}\left[\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\right]^2 \\ &= \sqrt{2\pi}\cdot c^2. \end{aligned}$$

Así, $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

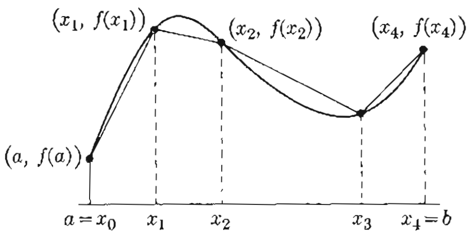
CAPITULO XIII

Aplicaciones de la integración

Muchas de las aplicaciones se refieren a conceptos físicos. El lector debería revisar el apéndice referente a física y matemáticas para comprender el punto de vista de que aquello que nosotros tratamos de encontrar es un modelo matemático para una situación empírica dada. Haremos esto en varios casos en que se puede tomar la integral como modelo. Usaremos la relación de la integral con las sumas de Riemann y también su caracterización axiomática en el teorema 2 del capítulo IX, §4, para justificar la interpretación de la integral en varios contextos físicos.

§1. Longitud de curvas

Sea $y = f(x)$ una función derivable sobre algún intervalo $[a, b]$ (con $a < b$) y supongamos que su derivada f' es continua. Deseamos encontrar una forma para determinar la longitud de la curva descrita por la gráfica. La idea principal es aproximar la curva mediante pequeños segmentos de recta cuyas longitudes podremos sumar.



En consecuencia, consideremos una partición del intervalo:

$$a = x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_n = b.$$

Para cada x_i tenemos el punto $(x_i, f(x_i))$ sobre la curva $y = f(x)$. Trazamos los segmentos de recta entre dos puntos sucesivos. La longitud de uno de tales segmentos es la longitud de la recta entre

$$(x_i, f(x_i)) \qquad \text{y} \qquad (x_{i+1}, f(x_{i+1})),$$

y es igual a

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}\,.$$

Mediante el teorema del valor medio concluimos que

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i)f'(c_i)$$

para algún número c_i entre x_i y x_{i+1}. Usando este resultado vemos que la longitud de nuestro segmento de recta es

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2 f'(c_i)^2}.$$

Podemos sacar como factor $(x_{i+1} - x_i)^2$ y así vemos que la suma de las longitudes de estos segmentos de recta es

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\,(x_{i+1} - x_i).$$

Sea $G(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Entonces $G(x)$ es continua y vemos que la suma que acabamos de escribir es

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(c_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Esta es precisamente una suma de Riemann usada para encontrar la integral. Entonces es muy razonable **definir** la longitud de nuestra curva entre a y b como

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

Ejemplo. Deseamos establecer la integral para la longitud de la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$. Por la definición anterior, vemos que la integral es

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Esta integral se puede calcular, pero el procedimiento es un poco tedioso y por ello lo omitimos.

Ejemplo. Deseamos encontrar la longitud de la curva $y = e^x$ entre $x = 1$ y $x = 2$. Esta longitud está dada por la integral

$$\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx.$$

Esta integral se puede calcular más rápidamente; efectuaremos los cálculos. Hagamos la substitución

$$1 + e^{2x} = u^2.$$

Entonces

$$2e^{2x}\, dx = 2u\, du.$$

Puesto que $e^{2x} = u^2 - 1$, obtenemos

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = \int u \frac{u\, du}{u^2 - 1} = \int \frac{u^2}{u^2 - 1}\, du.$$

$$= \int 1\, du + \int \frac{1}{u^2 - 1}\, du.$$

Pero

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right).$$

Por tanto, nuestra integral indefinida es igual a

$$u + \tfrac{1}{2}\left[\log \frac{u - 1}{u + 1}\right].$$

Cuando $x = 1$, $u = \sqrt{1 + e^2}$. Cuando $x = 2$, $u = \sqrt{1 + e^4}$. Luego la longitud de la curva sobre el intervalo dado es igual a

$$\sqrt{1 + e^4} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 + e^4} - 1}{\sqrt{1 + e^4} + 1} - \sqrt{1 + e^2} - \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{\sqrt{1 + e^2} - 1}.$$

Respuesta que es explícita, aunque un poco complicada.

La forma paramétrica

Ahora veremos qué ocurre cuando la curva está dada en la forma paramétrica. Supongamos que nuestra curva está dada por

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

con $a \leqq t \leqq b$ y supongamos que tanto f como g tienen derivadas continuas.

Como antes, haremos una partición del intervalo, digamos

$$a = t_0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_n = b.$$

Así obtenemos los puntos $(f(t_i), g(t_i))$ sobre la curva; la distancia entre dos puntos sucesivos es

$$\sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}.$$

Usemos el teorema del valor medio para f y g. Existen números c_i y d_i entre t_i y t_{i+1} tales que

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(c_i)(t_{i+1} - t_i)$$
$$g(t_{i+1}) - g(t_i) = g'(d_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Substituyendo estos valores y sacando como factor $(t_{i+1} - t_i)$, vemos que la suma de las longitudes de los segmentos de recta es igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}\,(t_{i+1} - t_i).$$

Sea

$$G(t) = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}.$$

Entonces la suma es casi igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(c_i)(t_{i+1} - t_i),$$

que podría ser una suma de Riemann para G. Pero no lo es ya que no es necesariamente verdadero que $c_i = d_i$. No obstante, los desarrollos anteriores hacen que sea muy razonable **definir** la longitud de nuestra curva (dada en la forma paramétrica) como

$$\boxed{\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt.}$$

(Una justificación completa de que esta integral es el límite de nuestras sumas en un sentido adecuado, requeriría algo más de teoría. Pero esto de todas maneras no tiene importancia, pues lo único que nos proponemos es mostrar que es razonable representar con esta integral el concepto físico de longitud.)

Obsérvese que cuando $y = f(x)$, podemos hacer $t = x = g(t)$ e $y = f(t)$. En este caso $g'(t) = 1$ y la fórmula para la longitud en la forma paramétrica resulta ser la misma fórmula que se obtuvo anteriormente para una curva $y = f(x)$.

Ejemplo. Encontrar la longitud de la curva

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t$$

entre $t = 0$ y $t = \pi$.

La longitud es la integral

$$\int_0^\pi \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\,dt.$$

En vista de que $(-\operatorname{sen} t)^2 = (\operatorname{sen} t)^2$ y tomando en cuenta la fórmula básica que relaciona el seno y el coseno, tenemos

$$\int_0^\pi dt = \pi.$$

Si integramos entre 0 y 2π obtendremos 2π que es la longitud de la circunferencia de radio 1.

Observación. También podemos obtener la longitud de una curva mediante los axiomas de la integral. Si $f(t)$ y $g(t)$ son las funciones coordenadas de una curva dada paramétricamente, o sea

$$C(t) = \big(f(t), g(t)\big),$$

podemos considerar a $C(t)$ como un punto del plano. Definimos la derivada

$$C'(t) = \big(f'(t), g'(t)\big),$$

donde se ha derivado cada una de las componentes. Entonces $C'(t)$ se interpreta como la velocidad de la curva y

$$v(t) = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

se interpreta como la rapidez de la curva. La longitud de una curva depende de su rapidez; de hecho, si la rapidez es constante, digamos M, sobre un intervalo de tiempo $[a, b]$, entonces la longitud deberá ser $M(b - a)$. Además, si una curva tiene mayor rapidez que otra, entonces su longitud deberá ser mayor. En particular, si

$$m \leqq v(t) \leqq M$$

para dos constantes $M, m \geqq$; si representamos la longitud de la curva entre a y b por $L_a^b(v)$, entonces

$$m(b - a) \leqq L_a^b(v) \leqq M(b - a).$$

Finalmente, la longitud de la curva deberá satisfacer la relación

$$L_a^c(v) = L_a^b(v) + L_b^c(v).$$

Así, a partir de los axiomas de la integral dados en el capítulo IX, §4, existe una única forma de definir la longitud de modo que sea compatible con estas propiedades; esta forma es

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

como habíamos hecho anteriormente.

Coordenadas polares

Encontremos ahora una fórmula para la longitud de curvas que estén dadas en coordenadas polares. Digamos que la curva es

$$r = f(\theta),$$

con $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$. Sabemos que

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Así la curva queda representada en la forma paramétrica, que es el caso anterior.

En consecuencia, podemos aplicar la definición precedente y vemos que la longitud es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Para calcular $dx/d\theta$ y $dy/d\theta$ se puede usar la regla de la derivada de un producto. Procediendo así se encontrará que muchos términos se cancelan y que la integral es igual a

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta.}$$

(El cálculo es muy fácil y es una buena práctica acerca de las identidades simples referentes a seno y coseno. Se deja como ejercicio. Además, haciendo el trabajo se recordará la fórmula con mayor facilidad.)

Ejemplo. Encontrar la longitud de la curva dada en coordenadas polares por $r = \operatorname{sen}\theta$, entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Usamos la fórmula que acabamos de obtener y vemos que la longitud está dada por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2.$$

Ejercicios

1. Efectuar los cálculos necesarios para obtener la última fórmula, expresando la longitud en coordenadas polares.
2. Encontrar la longitud de una circunferencia de radio r.
3. Encontrar la longitud de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$ entre $t = 1$ y $t = 2$.
4. Encontrar la longitud de la curva $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ (a) entre $t = 0$ y $t = \pi/4$, (b) entre $t = 0$ y $t = \pi$.

Encontrar la longitud de las siguientes curvas:

5. $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.
6. $y = x^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 3$.
7. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
8. Encontrar la longitud de un lazo de la curva $r = 1 + \cos\theta$ (coordenadas polares).
9. Lo mismo, con $r = \cos\theta$, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.
10. Encontrar la longitud de la curva $r = 2/\cos\theta$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/3$.
11. Encontrar la longitud de la curva $r = |\operatorname{sen}\theta|$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.
12. Graficar la curva $r = e^\theta$ (en coordenadas polares) y también la curva $r = e^{-\theta}$.
13. Encontrar la longitud de la curva $r = e^\theta$ entre $\theta = 1$ y $\theta = 2$.
14. En general, dar la longitud de la curva $r = e^\theta$ entre dos valores θ_1 y θ_2.

§2. El área en coordenadas polares

Supóngase que tenemos una función continua

$$r = f(\theta)$$

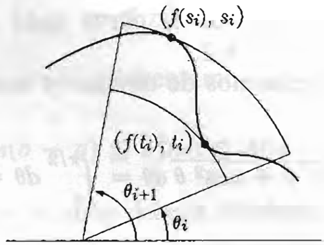
que está definida en algún intervalo $a \leqq \theta \leqq b$. Suponemos que $f(\theta) \geqq 0$ y que $b \leqq a + 2\pi$.

Deseamos encontrar una integral para expresar el área limitada por la curva $r = f(\theta)$ entre los valores extremos a y b.

Tomemos una partición de $[a, b]$, por ejemplo

$$a = \theta_0 \leqq \theta_1 \leqq \cdots \leqq \theta_n = b.$$

La gráfica entre θ_i y θ_{i+1} podría tener el siguiente aspecto:



Sea s_i un número entre θ_i y θ_{i+1} tal que $f(s_i)$ sea un máximo en el intervalo, y sea t_i un número tal que $f(t_i)$ sea un mínimo en el intervalo. En el dibujo hemos trazado los círculos (o más bien los sectores) de radios $f(s_i)$ y $f(t_i)$, respectivamente.

Entonces el área entre θ_i, θ_{i+1} y la curva está comprendida entre los dos sectores. Representemos esta área por A_i. El área de un sector que tiene un ángulo $\theta_{i+1} - \theta_i$ y radio R es igual a la fracción

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi}$$

del área total del círculo de radio R, o sea πR^2. Por tanto, obtenemos la desigualdad

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi} \pi f(t_i)^2 \leqq A_i \leqq \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi} \pi f(s_i)^2.$$

Sea $G(\theta) = \frac{1}{2} f(\theta)^2$. Vemos que la suma de todas las áreas pequeñas A_i satisface las desigualdades

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(t_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) \leqq \sum_{i=0}^{n-1} A_i \leqq \sum_{i=0}^{n-1} G(s_i)(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Así, el área deseada está comprendida entre la suma superior y la suma inferior asociadas con la partición. Por tanto, es razonable que el área en coordenadas polares esté dada por

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{1}{2} f(\theta)^2 \, d\theta.}$$

Ejemplo. Encontrar el área encerrada por un lazo de la curva

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \qquad (a > 0).$$

Si $-\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4$, entonces $\cos 2\theta \geqq 0$. Así, podemos escribir

$$r = \sqrt{2}\, a \sqrt{\cos 2\theta}.$$

El área es entonces

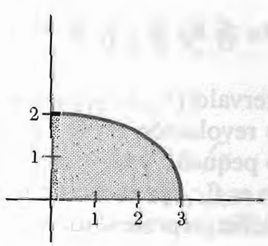
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} 2a^2 \cos 2\theta \, d\theta = a^2.$$

Ejemplo. Encontrar el área limitada por la curva

$$r = 2 + \cos \theta,$$

en el primer cuadrante.

Primero graficamos el área en el primer cuadrante, o sea para θ entre 0 y $\pi/2$. La gráfica es así:



El área está dada por la integral

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 + \cos \theta)^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta.$$

Cada uno de los términos se puede integrar fácilmente. La respuesta final es

$$\frac{1}{2} \left(2\pi + 4 + \frac{\pi}{4} \right).$$

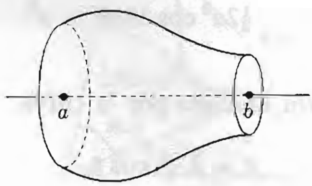
Ejercicios

Encontrar el área encerrada por las siguientes curvas:

1. $r = 2(1 + \cos\theta)$
2. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta \quad (a > 0)$
3. $r = 2a\cos\theta$
4. $r = \cos 3\theta,\ -\pi/6 \leqq \theta \leqq \pi/6$
5. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$
6. $r = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$
7. $r = 2 + \cos\theta$
8. $r = 2\cos 3\theta,\ -\pi/6 \leqq \theta \leqq \pi/6$

§3. Volúmenes de revolución

Sea $y = f(x)$ una función continua de x sobre algún intervalo $a \leqq x \leqq b$. Supongamos que $f(x) \geqq 0$ en este intervalo. Si hacemos rotar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x, obtendremos un sólido cuyo volumen deseamos calcular.



Tomemos una partición de $[a, b]$, por ejemplo

$$a = x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_n = b.$$

Sea c_i un mínimo de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y sea d_i un máximo de f en ese intervalo. Entonces el sólido de revolución en ese pequeño intervalo se encuentra comprendido entre un cilindro pequeño y un cilindro grande. La anchura de estos cilindros es $x_{i+1} - x_i$ y el radio es $f(c_i)$ para el cilindro menor y $f(d_i)$ para el mayor. Por tanto, el volumen de revolución, representado por V, satisface las desigualdades

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi f(c_i)^2(x_{i+1} - x_i) \leqq V \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(d_i)^2(x_{i+1} - x_i).$$

Así, es entonces razonable definir este volumen como

$$\int_a^b \pi f(x)^2\, dx.$$

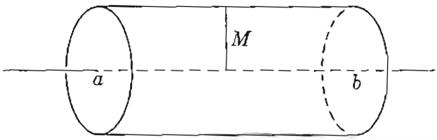
Ejemplo. Calcular el volumen de la esfera de radio 1.

Consideremos la función $y = \sqrt{1 - x^2}$ entre 0 y 1. Si hacemos rotar esta curva alrededor del eje x, obtendremos la mitad de la esfera. Su volumen es entonces

$$\int_0^1 \pi(1 - x^2)\, dx = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Por tanto, el volumen de la esfera completa es $\frac{4}{3}\pi$.

También se puede motivar la definición del volumen de revolución mediante los axiomas de la integral dados en el capítulo IX, §4. Para esto debemos considerar la revolución de un rectángulo, o sea que debemos considerar el caso en que f es constante, digamos M. Así se obtiene el volumen de un cilindro:



y este volumen deberá ser igual a $\pi M^2(b - a)$. Usando las dos propiedades que caracterizan a la integral, encontramos nuevamente que el volumen estará dado por la integral

$$\int_a^b \pi f(x)^2\, dx$$

que es la misma expresión hallada anteriormente.

Veremos ahora el caso de la integral impropia referida a un volumen. Consideremos la función

$$f(x) = 1/\sqrt{x}.$$

Sea

$$0 < a < 1.$$

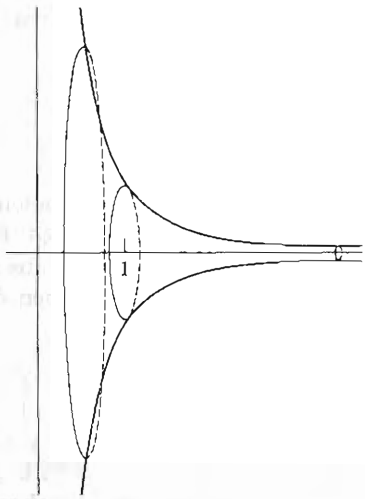
El volumen de revolución de la curva

$$y = 1/\sqrt{x}$$

entre $x = a$ y $x = 1$ está dado por la integral

$$\begin{aligned}\int_a^1 \pi \frac{1}{x}\, dx &= \pi \log x \Big|_a^1 \\ &= \pi(-\log a).\end{aligned}$$

Cuando a tiende a 0, $\log a$ toma valores negativos muy grandes, de modo que $-\log a$ toma valores positivos muy grandes y el volumen se hace arbitrariamente grande. Ilustramos el caso en el siguiente dibujo.



Sin embargo, si se calcula el volumen de revolución de la curva

$$y = \frac{1}{x^{1/4}}$$

entre a y 1, se encontrará que tiende a un límite cuando $a \to 0$. Resolver el ejercicio 12.

En el cálculo anterior hemos determinado el volumen del sólido en las cercanías del eje y. También podemos encontrar el volumen yendo hacia la derecha, por ejemplo, entre 1 y un número $B > 1$. Este volumen está dado por la integral

$$\int_1^B \pi \frac{1}{x} dx = \pi \log B.$$

Cuando $B \to \infty$, vemos que el volumen se hace arbitrariamente grande. Sin embargo, usando otra función, como por ejemplo la del ejercicio 13, ¡se obtendrá un volumen finito para el sólido infinito!

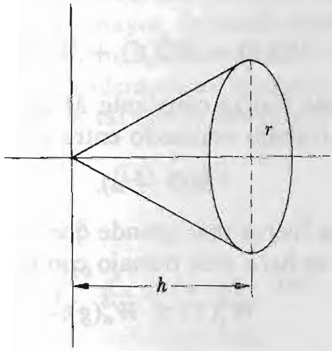
Ejercicios

1. Encontrar el volumen de una esfera de radio r.

Encontrar el volumen de revolución en los casos siguientes:

2. $y = 1/\cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.
3. $y = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.
4. $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

5. La región entre $y = x^2$ e $y = 5x$.
6. $y = xe^{x/2}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.
7. $y = x^{1/2}e^{x/2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
8. $y = \log x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
9. $y = \sqrt{1 + x}$ entre $x = 1$ y $x = 5$.
10. (a) Sea B un número > 1. ¿Cuál es el volumen de revolución de la curva $y = e^{-x}$ entre 1 y B? ¿Tiende este volumen hacia algún límite cuando B crece indefinidamente? Si es así, ¿cuál es el límite?
    (b) La misma pregunta para la curva $y = e^{-2x}$.
    (c) La misma pregunta para la curva $y = \sqrt{x}\, e^{-x^2}$.
11. Encontrar el volumen de un cono cuya base tiene radio r y cuya altura es h, mediante la rotación de una recta que pasa por el origen alrededor del eje x.



12. Calcular el volumen de revolución de la curva

$$y = \frac{1}{x^{1/4}}$$

entre a y 1. Determinar el límite cuando $a \to 0$.

13. Calcular el volumen de revolución de la curva

$$y = 1/x^2$$

entre $x = 2$ y $x = B$, para cualquier número $B > 2$. ¿Tiende este volumen hacia algún límite cuando $B \to \infty$? Si es así, ¿cuál es el límite?

14. Determinar para qué valores de $c > 0$, el volumen de revolución de la curva

$$y = 1/x^c$$

entre 1 y B tiende a un límite cuando $B \to \infty$. Encontrar este límite en términos de c.

15. Determinar para qué valores de $c > 0$, el volumen de revolución de la curva

$$y = 1/x^c$$

entre a y 1 tiende a un límite cuando $a \to 0$. Encontrar este límite en términos de c.

§4. Trabajo

Supongamos que una partícula se mueve sobre una curva y que la longitud de la curva está descrita por una variable u.

Sea $f(u)$ una función. Interpretamos a f como una fuerza que actúa sobre la partícula en la dirección de la curva. Deseamos encontrar una integral para expresar el trabajo efectuado por la fuerza entre dos puntos de la curva.

Cualquiera que sea la expresión resultante es razonable que el trabajo efectuado deberá satisfacer las siguientes propiedades:

Si a, b, c son tres números, con $a \leqq b \leqq c$, entonces el trabajo realizado entre a y c es igual al trabajo efectuado entre a y b más el trabajo efectuado entre b y c. Si representamos el trabajo efectuado entre a y b por $W_a^b(f)$, entonces debemos tener

$$W_a^c(f) = W_a^b(f) + W_b^c(f).$$

Además, si tenemos una fuerza constante M que actúa sobre la partícula, es razonable esperar que el trabajo realizado entre a y b sea

$$M(b - a).$$

Finalmente, si g es una fuerza más grande que f, es decir $f(u) \leqq g(u)$, sobre el intervalo $[a, b]$, entonces se hará más trabajo con g que con f, o sea

$$W_a^b(f) \leqq W_a^b(g).$$

En particular, si consideramos dos fuerzas constantes m y M tales que

$$m \leqq f(u) \leqq M$$

a lo largo del intervalo $[a, b]$, entonces

$$m(b - a) \leqq W_a^b(f) \leqq M(b - a).$$

Pero esta condición, conjuntamente con la primera de las expresadas anteriormente, ¡determinan unívocamente la integral! Por tanto, existe solamente una forma razonable de asociar una fórmula matemática con el trabajo, que sea compatible con los requerimientos físicos; esta forma es la siguiente: El trabajo efectuado por la fuerza f entre una distancia a y una distancia b es

$$\int_a^b f(u)\,du.$$

Si ocurre que la partícula u objeto se mueve a lo largo de una recta, por ejemplo a lo largo del eje x, entonces f está dada como una función de x y nuestra integral es simplemente

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Además, si la longitud de la curva u está dada como una función del tiempo t (como ocurre en la práctica, ver §1), observamos que la fuerza resulta ser una función de t por la regla de la cadena, es decir $f(u(t))$. Así, entre los tiempos t_1 y t_2 el trabajo efectuado es igual a

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} f(u(t))\,\frac{du}{dt}\,dt.}$$

Esta es la expresión más práctica para el trabajo, pues las curvas y las fuerzas se expresan con mayor frecuencia como funciones del tiempo.

Ejemplo. Encontrar el trabajo efectuado al estirar un resorte desde su posición normal hasta una longitud 10 cm mayor. Se puede suponer que la fuerza necesaria para estirar el resorte es proporcional al incremento de longitud.

Visualicemos el resorte considerándolo colocado horizontalmente sobre el eje x. Así, existe una constante K tal que la fuerza está dada por

$$f(x) = Kx.$$

El trabajo efectuado es entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{10} Kx\,dx &= \tfrac{1}{2}K\cdot 100\\ &= 50K.\end{aligned}$$

Ejemplo. Supongamos que la gravedad es una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra. ¿Qué trabajo se realizará al levantar un peso de 2 toneladas desde la superficie de la tierra hasta una altura de 100 millas sobre la tierra? Supongamos que el radio de la tierra es de 4000 millas.

De acuerdo con lo supuesto, existe una constante C tal que la fuerza de gravedad está dada por $f(x) = C/(x + 4000)^2$, donde x representa la altura sobre la tierra. Cuando $x = 0$, nuestra suposición es que

$$f(0) = 2\text{ tons} = \frac{C}{(4000)^2}.$$

Por tanto, $C = 32 \times 10^6$ tons. El trabajo efectuado es igual a la integral

$$\begin{aligned}\int_0^{100} f(x)\,dx &= 32\times 10^6\left(-\frac{1}{(x+4000)}\right)\Bigg|_0^{100}\\ &= 32\times 10^6\left[\frac{1}{4000}-\frac{1}{4100}\right]\text{ ton-millas.}\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Un resorte tiene 18 pulgadas de longitud y se necesita una fuerza de 10 libras para comprimirlo hasta una longitud de 16 pulgadas. Si la fuerza está dada por $f(x) = kx$, donde k es una constante y x es el cambio de longitud, ¿cuál es la constante k? ¿Qué trabajo se realiza al comprimir el resorte desde 16 pulgadas hasta 12 pulgadas?
2. Suponiendo que en el problema de la compresión del resorte la fuerza está dada por $k \operatorname{sen}(\pi x/18)$, responder las dos preguntas del problema anterior para esta fuerza.
3. Una partícula situada en el origen atrae a otra partícula con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Sea C la constante de proporcionalidad. ¿Qué trabajo se realiza al mover la segunda partícula a lo largo de una recta, alejándose del origen, desde una distancia r_1 hasta una distancia $r > r_1$ respecto al origen?
4. En el ejemplo anterior, determinar si el trabajo tiende hacia un límite cuando r crece indefinidamente. Encontrar este límite si existe.
5. Dos partículas se repelen entre sí con una fuerza inversamente proporcional al cubo de su distancia. Si una partícula está fija en el origen, ¿qué trabajo se efectuará al mover la otra a lo largo del eje x, desde una distancia de 10 cm hasta una distancia de 1 cm hacia el origen?
6. Suponiendo, como es usual, que la gravedad es una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra, ¿qué trabajo se realiza al levantar un peso de 1 000 libras desde la superficie de la tierra hasta una altura de 4 000 millas sobre la superficie? (Considerar que el radio de la tierra es de 4 000 millas.)
7. Un saco de arena que originalmente pesa 144 libras, es levantado a una velocidad constante de 3 pies/min. El saco pierde arena uniformemente a una velocidad tal que cuando ha sido levantado hasta una altura de 18 pies ha perdido la mitad de su contenido. Determinar el trabajo efectuado al levantar el saco hasta esta altura.
8. Una barra de metal tiene una longitud L y una sección transversal S. Si se la estira x unidades, entonces la fuerza requerida $f(x)$ está dada por

$$f(x) = \frac{ES}{L}x$$

donde E es una constante. Encontrar el trabajo efectuado (en términos de E) si se estira una barra de 12 pulgadas de longitud con sección transversal uniforme de 4 pulg^2 hasta aumentar su longitud en 1 pulg.

§5. Densidad y masa

Consideremos un intervalo $[a, b]$ con $0 \leqq a < b$. Pensemos primero que este intervalo es una barra y sea f una función continua y positiva definida sobre este intervalo. Interpretemos f como la densidad de la barra, de modo que $f(x)$ sea la densidad en x. Tomando $a \leqq c \leqq d \leqq b$, representemos por $M_c^d(f)$ la masa de la barra entre c y d, correspondiente a la densidad dada f. Deseamos determinar una noción matemática para representar $M_c^d(f)$. Si f es una densidad constante con valor $K \geqq 0$ sobre $[c, d]$, entonces la masa $M_c^d(f)$ debería ser $K(d - c)$. Además, si g es otra densidad tal que

$$f(x) \leqq g(x),$$

entonces ciertamente deberíamos tener que $M_c^d(f) \leqq M_c^d(g)$. En particular, si k, K son constantes $\geqq 0$ tales que

$$k \leqq f(x) \leqq K$$

para x en el intervalo $[c, d]$, entonces la masa debería satisfacer la relación

$$k(d-c) \leqq M_c^d(f) \leqq K(d-c).$$

Finalmente, la masa debería ser aditiva, o sea que la masa de dos piezas disjuntas debería ser igual a la suma de las masas de las piezas. En particular,

$$M_a^c(f) + M_c^d(f) = M_a^d(f).$$

Por las propiedades básicas de la integral, sabemos que existe una y solamente una forma de asociar un número $M_c^d(f)$ a la densidad f que sea compatible con los requerimientos precedentes, y que es la integral, de modo que la masa está dada por la integral

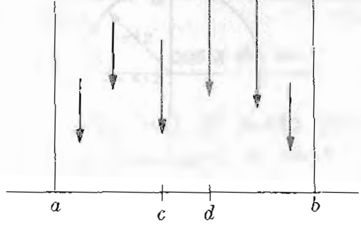
$$M_a^b(f) = \int_a^b f.$$

§6. Probabilidad

Con las densidades de probabilidad tenemos una situación muy similar. Nos dan un intervalo $[a, b]$ y una función continua f, que interpretamos como una densidad de probabilidad en este intervalo. Consideremos una función f tal que $f(x) \geqq 0$ para todos los x del intervalo y además supongamos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1.$$

A una función tal se le llama **densidad de probabilidad** sobre el intervalo. Tenemos cierta noción intuitiva $P_c^d(f)$, que imaginamos como la probabilidad de que ciertos objetos caigan dentro del intervalo $[c, d]$, dada la densidad de probabilidad f. Por ejemplo, si lanzamos algunas partículas a lo largo de una rendija sobre el intervalo y deseamos obtener una noción matemática correspondiente a la probabilidad de que una partícula caiga en este intervalo $[c, d]$.



Si tenemos una densidad de probabilidad constante sobre $[c, d]$, digamos K, entonces deseamos que $P_c^d(K)$ sea un múltiplo constante de $K(d - c)$. En el caso especial en que $K = 1/(b - a)$, interpretamos esta densidad como una densidad uniforme promedio sobre el intervalo, y deseamos que su probabilidad sobre $[c, d]$ sea igual a la razón $(d - c)/(b - a)$. A partir de esto vemos que es razonable requerir que, de hecho, $P_c^d(K) = K(d - c)$. Además, si g es otra densidad de probabilidad menor que f, o sea $g(x) \leqq f(x)$ para todo x, entonces debemos tener que $P_c^d(g) \leqq P_c^d(f)$. En particular, si k y K son dos constantes tales que $k \leqq f(x) \leqq K$ para todo x en $[c, d]$, entonces

$$k(d - c) \leqq P_c^d(f) \leqq K(d - c).$$

Finalmente, la probabilidad deberá ser aditiva sobre intervalos disjuntos, de modo que en particular

$$P_a^d(f) = P_a^c(f) + P_c^d(f).$$

Vemos que P_c^d satisface las propiedades básicas de la integral y existe solamente una forma de definir la probabilidad que es compatible con estas propiedades. Esta forma es

$$P_c^d(f) = \int_c^d f.$$

En particular,

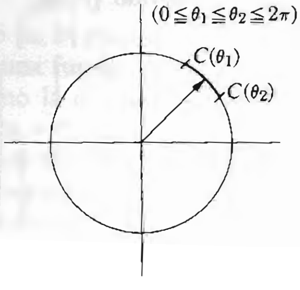
$$P_a^b(f) = \int_a^b f.$$

Además, bajo la presente normalización, para tener una interpretación probabilística de $P_a^b(f)$, se deben considerar solamente aquellas funciones f tales que

$$\int_a^b f = 1.$$

Como asunto de terminología, decimos también que $P_c^d(f)$ es la **probabilidad de que x caiga dentro del intervalo** $[c, d]$.

Ejemplo. Consideremos una circunferencia de radio 1 centrada en el origen y una aguja a la que se le da un impulso inicial y gira sujeta a la fricción hasta que se detiene señalando hacia algún punto de la circunferencia, como en el siguiente diagrama.



Deseamos conocer la probabilidad de que la punta de la aguja se encuentre en un intervalo circular dado, como se muestra en el dibujo. Parametrizamos nuestra circunferencia en la forma usual, llamando $C(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ a un punto de la circunferencia, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. La probabilidad dependerá, por supuesto, de la densidad de probabilidad, que puede ser considerada como una función de θ. Suponiendo que esta función es constante (lo cual significa que la aguja es detenida por la fricción de manera uniforme y que ninguna otra fuerza actúa sobre ella), la llamaremos σ. Entonces **debemos** tener

$$1 = \int_0^{2\pi} \sigma\, d\theta = \sigma \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma \cdot 2\pi.$$

Por tanto, $\sigma = 1/2\pi$ es la densidad de probabilidad constante que podemos tomar como representante de la situación física considerada. La probabilidad de que la aguja se detenga entre $C(\theta_1)$ y $C(\theta_2)$ es entonces igual a $(\theta_2 - \theta_1)/2\pi$. Diciéndolo de otra manera, ésta es la probabilidad de que θ caiga dentro del intervalo $[\theta_1, \theta_2]$.

Regresemos al caso general sobre el intervalo $[a, b]$. Si F es una integral indefinida para f sobre el intervalo, entonces

$$\int_c^d f(x)\, dx = F(d) - F(c) \qquad \text{y} \qquad f(x) = F'(x).$$

El caso en que f no es constante puede corresponder empíricamente a un magneto situado en el intervalo, el cual varía en intensidad, y que así atrae más partículas sobre ciertas regiones que sobre otras. Los datos experimentales deben entonces ser usados para determinar la función de densidad f, o su **función de probabilidad** asociada, que se define como la integral indefinida

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Ejemplo. Una densidad de probabilidad sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ está dada por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{si } -\pi \leqq x \leqq -\pi/2 \\ f(x) &= a \cdot \cos x && \text{si } -\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2 \\ f(x) &= 0 && \text{si } \pi/2 \leqq x \leqq \pi. \end{aligned}$$

donde a es una constante. Como deseamos que la probabilidad asociada con f sobre la totalidad del intervalo sea igual a 1, debemos tener

$$a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 1.$$

La integración nos muestra que $2a = 1$, de modo que $a = 1/2$. Si llamamos F a la función de probabilidad asociada con f, de modo que

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^{x} f(t)\, dt,$$

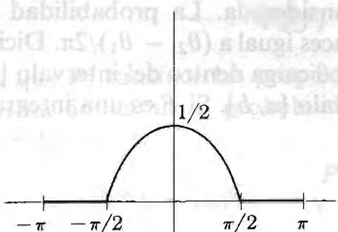
tendremos por integración directa que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqq x \leqq -\pi/2 \\ \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{2} & \text{si} \quad -\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2 \\ 1 & \text{si} \quad \pi/2 \leqq x \leqq \pi. \end{cases}$$

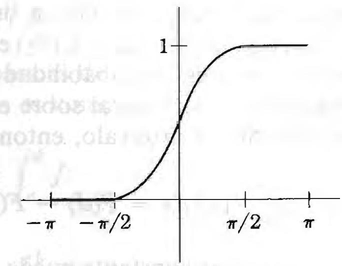
Lo. ..tre $-\pi/2$ y $\pi/2$ están dados por la integral

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{x} \cos t\, dt = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t\Big|_{-\pi/2}^{x} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x + 1).$$

Las gráficas de f y de F tienen el siguiente aspecto:



Gráfica de f



Gráfica de F

En términos de la aguja giratoria, esta densidad de probabilidad significa que la aguja está sujeta a una creciente y vigorosa atracción hacia el 0 y que nunca se detendrá en el lado izquierdo de la circunferencia.

Por definición, la probabilidad de que $0 \leqq x \leqq \pi/2$ es simplemente igual a

$$F(\pi/2) - F(0) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Ejercicios

Cada una de las siguientes funciones f representa una densidad de probabilidad sobre el intervalo $[0, 1]$. Determinar la constante c, encontrar la función de probabilidad F asociada con f y calcular la probabilidad de que $0 \leqq x \leqq 1/2$.

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = cx$
3. $f(x) = cx^4$
4. $f(x) = c \cdot \operatorname{sen} \pi x$
5. $f(x) = c \cdot \operatorname{sen}^2 \pi x$
6. $f(x) = c(3 - 2x)$
7. $f(x) = e - e^x$

Cada una de las siguientes funciones f representa una densidad de probabilidad sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. En cada caso, determinar la constante c, encontrar la función de probabilidad F asociada con f y calcular la probabilidad de que $0 \leqq x \leqq \pi/2$.

8. $f(x) = c|\cos x|$.
9. $f(x) = c|\operatorname{sen} x|$.

10. $f(x) = c \cdot \cos^2 x$ 11. $f(x) = c \cdot \operatorname{sen}^2 x$

12. $f(x) = 0$ si $-\pi \leqq x \leqq 0$ y $f(x) = c(1 - \cos x)$ si $0 \leqq x \leqq \pi$.

§7. Momentos

Deseamos describir la noción de «momento» (respecto al origen), que se presenta en la física. El «momento» deberá tener las siguientes propiedades:

Supóngase que tenemos una masa K concentrada en un punto b del eje x. Entonces su momento es Kb.

Supóngase que tenemos un intervalo $[a, b]$, con $a < b$ (que puede ser interpretado como una barra), y una distribución de densidad constante C sobre el intervalo. Entonces la masa total es $C(b - a)$. El momento de nuestra distribución constante, el cual representaremos por M, deberá entonces satisfacer las desigualdades

$$Ca(b - a) \leqq M \leqq Cb(b - a).$$

Si nos imaginamos que la masa total $K = C(b - a)$ está concentrada en el punto b, entonces la desigualdad de la derecha establece que el momento de nuestra distribución constante es menor o igual que el momento de una masa total K colocada en el punto b. La desigualdad de la izquierda establece que el momento de nuestra distribución constante es mayor o igual que el de una masa total K colocada en el punto a. Si suponemos que $0 \leqq a < b$, entonces estas dos desigualdades establecen que el momento deberá ser mayor mientras más alejada esté la masa respecto al origen. A lo largo de nuestra discusión supondremos que $0 \leqq a < b$.

Supóngase que tenemos una distribución de densidad variable sobre nuestro intervalo $[a, b]$. Esto significa que la distribución está representada por una función $f(x)$ sobre el intervalo. Representemos su «momento» por $M_a^b(f)$. Entonces deberán ser satisfechas las dos propiedades siguientes:

Propiedad 1. Si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y si existen dos constantes C_1, C_2, ambas $\geqq 0$, tales que

$$C_1 \leqq f(x) \leqq C_2$$

para todo x perteneciente al intervalo, entonces el momento de f satisface las desigualdades

$$C_1 a(b - a) \leqq M_a^b(f) \leqq C_2 b(b - a).$$

(En otras palabras, el momento de f deberá estar comprendido entre los momentos determinados por las distribuciones constantes C_1 y C_2.)

Propiedad 2. Si f es continua sobre el intervalo $[a, c]$, con $a \leqq c$, y si b es un punto tal que $a \leqq b \leqq c$, entonces

$$M_a^c(f) = M_a^b(f) + M_b^c(f).$$

(En otras palabras, el momento sobre el intervalo mayor es igual a la suma de los momentos sobre el primero y sobre el segundo intervalo.)

Ahora demostraremos que existe una y solamente una forma de obtener un momento $M_a^b(f)$ que satisfaga las dos propiedades anteriores, y que esta forma es la integral

$$\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Para comenzar, nótese que la integral satisface la propiedad 2. Este es un resultado ya muy conocido.

En cuanto a la propiedad 1, supongamos que f está entre dos constantes C_1 y C_2, como anteriormente. Para el intervalo $a \leqq x \leqq b$, tenemos

$$C_1 a \leqq xf(x) \leqq C_2 b,$$

y, entonces, por el teorema 1 del capítulo XI, §3, concluimos que

$$C_1 a(b - a) \leqq \int_a^b xf(x)\,dx \leqq C_2 b(b - a).$$

Así, es cierto que la integral satisface las dos propiedades.

Ahora demostraremos lo recíproco, o sea que cualquier $M_a^b(f)$ que satisfaga las dos propiedades debe ser igual a la integral escrita anteriormente. Lo haremos mediante nuestra técnica usual. Demostraremos que la función $M_a^x(f)$ tiene una derivada y que esta derivada es $xf(x)$. Así, esa función debe ser la integral.

El cociente de Newton es

$$\frac{M_a^{x+h}(f) - M_a^x(f)}{h}.$$

Usando la propiedad 2 vemos que el cociente de Newton es igual a

$$\frac{M_x^{x+h}(f)}{h}.$$

Sea s un máximo para f en el intervalo pequeño entre x y $x + h$, y sea t un mínimo para f en ese intervalo pequeño. Si h es positiva, entonces por la propiedad 1 concluimos que

$$f(t)x(x + h - x) \leqq M_x^{x+h}(f) \leqq f(s)(x + h)(x + h - x),$$

o, lo que es lo mismo,

$$f(t)xh \leqq M_x^{x+h}(f) \leqq f(s)(x + h)h.$$

Dividiendo por h se obtiene

$$xf(t) \leqq \frac{M_x^{x+h}(f)}{h} \leqq (x + h)f(s).$$

Cuando h tiende a 0, tanto $f(t)$ como $f(s)$ tienden a $f(x)$ porque s y t están entre x y $x + h$. El argumento usual de la función comprendida entre otras dos, nos muestra que el cociente de Newton tiende a $xf(x)$, tal como se quería demostrar. Si h es negativa se puede usar un argumento similar, como es usual.

Consideremos ahora una distribución de densidad sobre el intervalo $[a, b]$ representada por una función continua f. Definimos la **masa total** (o simplemente la **masa**) de esta distribución sobre el intervalo, como la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Supongamos que $f(x) \geqslant 0$ para todos los x del intervalo y que $f(x) \neq 0$ para algún punto del intervalo. Entonces la masa total es positiva. Definimos el **centro de gravedad** de nuestra distribución sobre el intervalo como el punto c tal que el momento de la masa total concentrada en dicho punto c sea igual al momento de f sobre el intervalo. Esto se puede expresar por medio de la relación

$$c \cdot \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b xf(x)\, dx.$$

En otras palabras,

$$c = \frac{\int_a^b xf(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}.$$

Si el lector estudia física, sin duda reconocerá que ésta es la fórmula usual empleada para obtener el centro de gravedad.

Ejercicios suplementarios

LONGITUD DE CURVAS

Encontrar la longitud de las siguientes curvas en el intervalo indicado.

1. $y = x^{3/2}, \quad 0 \leqq x \leqq 4$
2. $y = \log x, \quad \frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$
3. $y = \log x, \quad 1 \leqq x \leqq e^2$
4. $y = 4 - x^2, \quad -2 \leqq x \leqq 2$
5. $x = 2t + 1, \quad y = t^2, \quad 0 \leqq t \leqq 2$
6. $x = 4 + 2t, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + 3, \quad -2 \leqq t \leqq 2$
7. $x = 9t^2, \quad y = 9t^3 - 3t, \quad 0 \leqq t \leqq 1/\sqrt{3}$
8. $x = 3t, \quad y = t^3, \quad 0 \leqq t \leqq 1$
9. $y = \log (1 - x^2), \quad 0 \leqq x \leqq \frac{3}{4}$

10. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad -1 \leqq x \leqq 0$
11. $y = \log \cos x, \quad 0 \leqq x \leqq \pi/3$
12. $x = 1 - \cos t, \quad y = t - \text{sen}\, t, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$
13. $x = a(1 - \cos t), y = a(t - \text{sen}\, t)$, $\cos a > 0$ y $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Encontrar la longitud de las siguientes curvas, dadas en coordenadas polares.

14. $r = 3\theta^2$ desde $\theta = 1$ hasta $\theta = 2$
15. $r = e^{-4\theta}$, desde $\theta = 1$ hasta $\theta = 2$
16. $r = 3\cos\theta$, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/4$
17. $r = 2/\theta$ desde $\theta = \frac{1}{2}$ hasta $\theta = 4$
18. $r = 1 + \cos\theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/4$
19. $r = 1 - \cos\theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$
20. $r = \text{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$

AREA

Encontrar las áreas de las siguientes regiones limitadas por la curva, dada en coordenadas polares.

1. $r = 10\cos\theta$
2. $r = 1 - \cos\theta$
3. $r = \sqrt{1 - \cos\theta}$
4. $r = 2 + \text{sen}\, 2\theta$
5. $r = \text{sen}^2\theta$
6. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$
7. $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$
8. $r = 1 + \text{sen}\, 2\theta$
9. $r = \cos 3\theta$
10. $r = 2 + \cos\theta$

Encontrar el área comprendida entre las siguientes curvas, dadas en coordenadas rectangulares.

11. $y = 4 - x^2, y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 2$
12. $y = 4 - x^2, y = 8 - 2x^2$, entre $x = -2$ y $x = 2$
13. $y = x^3 + x^2, y = x^3 + 1$, entre $x = -1$ y $x = 1$
14. $y = x - x^2, y = -x$, entre $x = 0$ y $x = 2$
15. $y = x^2, y = x + 1$, entre los dos puntos en los cuales se intersectan las dos curvas.
16. $y = x^3, y = x + 6$, entre $x = 0$ y el valor de $x > 0$ donde se intersectan las dos curvas.

VOLUMENES DE REVOLUCION

1. Determinar el volumen de un cono de altura h y radio de la base r, rotando una recta que pase por el origen alrededor del eje x.

Encontrar el volumen de los sólidos obtenidos al rotar alrededor del eje x cada una de las regiones indicadas.

2. $y = x^2$, entre $y = 0$ y $x = 2$.
3. $y = \dfrac{4}{x + 1}, x = -5, x = -2, y = 0$

4. $y = \sqrt{x}$, el eje x y $x = 2$.
5. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 3$ y el eje x
6. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.
7. La región limitada por la recta $x + y = 1$ y los ejes coordenados.
8. La elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$
9. $y = e^{-x}$, entre $x = 1$ y $x = 5$
10. $y = \log x$, entre $x = 1$ y $x = 2$
11. $y = \tan x$, $x = \pi/3$ y el eje x

En los siguientes problemas, encontrar el volumen de revolución de una región entre ciertos extremos, y determinar si este volumen tiende hacia algún límite cuando el extremo B se hace muy grande. En caso afirmativo, determinar este límite.

12. La región limitada por $1/x$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$, con $B > 1$.
13. La región limitada por $1/x^2$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$, con $B > 1$.
14. La región limitada por $y = 1/\sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$, con $B > 1$.

En los siguientes problemas, encontrar el volumen de revolución determinado por extremos que incluyen un número $a > 0$; determinar si este volumen tiende hacia algún límite cuando a tiende hacia 0. En caso afirmativo, determinar este límite.

15. La región limitada por $y = 1/\sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = 1$, con $0 < a < 1$.
16. La región limitada por $y = 1/x$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = 1$, con $0 < a < 1$.
17. La región limitada por $(\cos x)/\sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = \pi/4$, con $0 < a < \pi/4$.

CUARTA PARTE

SERIES

En esta parte se estudia la aproximación de funciones por medio de ciertas sumas llamadas series. El capítulo referente a la fórmula de Taylor muestra la forma de aproximar funciones mediante polinomios; se estima el término de error para determinar cuán buena aproximación podemos obtener.

Nótese que la deducción de la fórmula de Taylor es una aplicación de la integración por partes.

CAPITULO XIV

La fórmula de Taylor

Finalmente llegamos al punto donde desarrollamos un método que nos permite calcular los valores de las funciones elementales como seno, exp y log. El método consiste en aproximar estas funciones por medio de polinomios, con un término de error que se estima fácilmente. Este término de error estará dado por una integral; nuestra primera labor es estimar las integrales. En seguida estudiaremos sistemáticamente las funciones elementales y obtendremos los polinomios que les sirven como aproximación.

Convendría repasar los estimadores del capítulo X, §3, que serán usados para estimar los términos de error.

§1. La fórmula de Taylor

Sea f una función derivable sobre algún intervalo. Podemos entonces tomar su derivada f' sobre ese intervalo. Supongamos que esta derivada es también derivable. Necesitamos una notación para su derivada. La representaremos por $f^{(2)}$. Análogamente, si existe la derivada de la función $f^{(2)}$, la representaremos por $f^{(3)}$, y así sucesivamente. En este sistema, la primera derivada se representa por $f^{(1)}$. (Por supuesto, también podemos escribir $f^{(2)} = f''$.)

En la notación d/dx también podemos escribir:

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{dx^3},$$

y así sucesivamente.

La fórmula de Taylor nos proporciona un polinomio que aproxima la función en términos de las derivadas de la función. Puesto que estas derivadas son generalmente fáciles de calcular, no hay dificultad para obtener los polinomios.

Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$ y $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$. A partir de aquí se vuelve a repetir el proceso.

En el caso de e^x el cálculo es aún más fácil, pues $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo entero positivo n.

También se acostumbra representar a la propia función f por $f^{(0)}$. Así, $f(x) = f^{(0)}(x)$.

Necesitamos alguna notación adicional antes de establecer la fórmula de Taylor.

Cuando tomamos derivadas sucesivas de las funciones, se presentan con frecuencia los siguientes números:

$$1, \quad 2\cdot 1, \quad 3\cdot 2\cdot 1, \quad 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \quad 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \quad \text{etc.}$$

Estos números se representan por

$$1! \quad 2! \quad 3! \quad 4! \quad 5! \quad \text{etc.}$$

Así

$$1! = 1 \qquad 4! = 24$$
$$2! = 2 \qquad 5! = 120$$
$$3! = 6 \qquad 6! = 720.$$

Cuando n es un entero positivo, el símbolo $n!$ se lee **factorial** de n. Así, en general,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

es el producto de los primeros n enteros desde 1 hasta n.

Es también conveniente acordar que $0! = 1$. Esta convención hace que ciertas fórmulas sean más fáciles de escribir.

Ahora estamos en condiciones de establecer la fórmula de Taylor.

Teorema 1. *Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado entre dos números a y b. Supongamos que la función tiene n derivadas en este intervalo, y que todas ellas son funciones continuas. Entonces*

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n,$$

donde R_n (llamado término residual) es la integral

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

La expresión del residuo parece un poco complicada. En el teorema 2 demostraremos que R_n se puede expresar en forma muy similar a la de los otros términos, esto es

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

para algún número c entre a y b. La fórmula de Taylor con esta forma del residuo es entonces muy fácil de memorizar.

El caso más importante del teorema 1 ocurre cuando $a = 0$. En ese caso la fórmula se convierte en

$$f(b) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}b + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1} + R_n.$$

Además, si x es cualquier número entre a y b, la fórmula es válida para este número x en vez de b, considerando simplemente el intervalo entre a y x en vez del intervalo entre a y b. Así, la fórmula se convierte en

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

donde R_n es la integral

$$R_n = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Cada una de las derivadas $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ es un número y vemos que los términos que preceden a R_n constituyen un polinomio en x. Esta es la aproximación polinomial.

Por supuesto, para que la fórmula pueda servir de algo tenemos que estimar el residuo R_n y demostrar que se hace pequeño cuando n crece, de modo que el polinomio verdaderamente aproxima la función. Haremos esto en las siguientes secciones para funciones especiales. Convendría mirar estas secciones antes de leer la demostración, para familiarizarse con los símbolos y con la naturaleza del teorema.

Ahora demostraremos el teorema para quienes estén interesados en ver primero la demostración. Es una aplicación de la integración por partes.

Procederemos por pasos. Sabemos que una función es la integral de su derivada. Así, cuando $n = 1$ tenemos

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Sea $u = f'(t)$ y $dv = dt$. Entonces $du = f''(t)dt$. Estamos tentados de poner $v = t$. Este es un caso en que escogemos otra integral indefinida, o sea $v = -(b-t)$, que difiere de t en una constante. Todavía tenemos $dv = dt$ (¡con el signo menos cancelado!) Integrando por partes, hallamos

$$\begin{aligned}\int_a^b u\,dv &= uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \\ &= -f'(t)(b-t)\Big|_a^b - \int_a^b -(b-t)f^{(2)}(t)\,dt \\ &= f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)f^{(2)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Esta es precisamente la fórmula de Taylor cuando $n = 2$.

Avanzaremos un paso más, desde 2 hasta 3. Escribimos la integral que acabamos de obtener en la forma

$$\int_a^b f^{(2)}(t)(b - t)\, dt.$$

Sea $u = f^{(2)}(t)$ y $dv = (b - t)dt$. Entonces

$$du = f^{(3)}(t)\, dt \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-(b - t)^2}{2}.$$

Así, integrando por partes encontramos que nuestra integral, que es de la forma $\int_a^b u\,dv$, es igual a

$$uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du = -f^{(2)}(t)\frac{(b - t)^2}{2}\Big|_a^b - \int_a^b -\frac{(b - t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt$$
$$= f^{(2)}(a)\frac{(b - a)^2}{2} + R_3.$$

Aquí, R_3 es el residuo deseado y el término que lo precede es precisamente el término apropiado en la fórmula de Taylor.

Si el lector lo considera necesario puede efectuar el tercer paso, desde 3 hasta 4. Ahora mostraremos cómo se efectúa el paso general, desde n hasta $n + 1$.

Supóngase que ya hemos obtenido los primeros $n - 1$ términos de la fórmula de Taylor, con un término residual

$$R_n = \int_a^b \frac{(b - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(t)\, dt,$$

que escribimos ahora en la forma

$$R_n = \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b - t)^{n-1}}{(n - 1)!}\, dt.$$

Sea $u = f^{(n)}(t)$ y $dv = \dfrac{(b - t)^{n-1}}{(n - 1)!}\, dt$. Entonces

$$du = f^{(n+1)}(t)\, dt \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-(b - t)^n}{n!}.$$

(Obsérvese cómo, cuando integramos dv, obtenemos n en el denominador para ascender de $(n - 1)!$ a $n!$)

Integrando por partes vemos que R_n es igual a

$$uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du = -f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\Big|_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Así hemos obtenido un término más de la fórmula de Taylor y el nuevo residuo es el deseado R_{n+1}. Con esto concluye la demostración.

§2. Estimación del residuo

Teorema 2. *En la fórmula de Taylor del teorema* 1, *existe un número c entre a y b tal que el residuo R_n está dado por*

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!}.$$

Si M_n es un número tal que $|f^{(n)}(x)| \leqq M_n$ para todo x del intervalo, entonces

$$|R_n| \leqq \frac{M_n|b-a|^n}{n!}.$$

Demostración. La segunda afirmación se deduce inmediatamente de la primera, tomando el valor absoluto del producto de la n-ésima derivada y de la longitud del intervalo a la n-ésima potencia.

Demostraremos la primera afirmación. Puesto que $f^{(n)}$ es continua sobre el intervalo, existe un punto u en el intervalo tal que $f^{(n)}(u)$ es un máximo y un punto v tal que $f^{(n)}(v)$ es un mínimo, para todos los valores de $f^{(n)}$ en el intervalo.

Supongamos que $a < b$. Entonces para cualquier t del intervalo, $b - t$ es $\geqq 0$; por tanto

$$\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(v) \leqq \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \leqq \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u).$$

Usando el teorema 1 del capítulo X, §3, concluimos que las desigualdades similares son válidas cuando tomamos la integral. Sin embargo, $f^{(n)}(v)$ y $f^{(n)}(u)$ son ahora números fijos que se pueden sacar de la integral. En consecuencia, obtenemos

$$f^{(n)}(v)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \leqq R_n \leqq f^{(n)}(u)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Ahora efectuamos la integración, que es muy facil, y obtenemos

$$f^{(n)}(v)\frac{(b-a)^n}{n!} \leqq R_n \leqq f^{(n)}(u)\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Por el teorema del valor intermedio, la n-ésima derivada $f^{(n)}(t)$ toma todos los valores entre su mínimo y su máximo en el intervalo. Por tanto,

$$f^{(n)}(t)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

toma todos los valores entre *su* mínimo y *su* máximo en el intervalo.

Por consiguiente, existe un punto c en el intervalo tal que

$$R_n = f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!},$$

que es lo que deseábamos demostrar.

La demostración para el caso $b < a$ es similar, excepto que ciertas desigualdades invierten su sentido. La dejamos como ejercicio. [*Sugerencia:* Intercambiar los límites de integración tomando la integral desde b hasta a.]

El estimador del residuo es particularmente útil cuando b está cerca de a. En ese caso volvemos a escribir la fórmula de Taylor haciendo $b - a = h$. Obtenemos:

Teorema 3. *Con las suposiciones del teorema* 1, *tenemos*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

con el estimador

$$|R_n| \leqq M_n \frac{|h|^n}{n!},$$

donde M_n es una cota para el valor absoluto de la n-ésima derivada de f entre a y $a + h$.

En las siguientes secciones se dan varios ejemplos. Con la excepción de algunos ejercicios, tomaremos siempre $a = 0$, de modo que tendremos

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n}$$

con el estimador

$$|R_n| \leqq M_n \frac{|x|^n}{n!}$$

si M_n es una cota para la n-ésima derivada de f entre 0 y x.

Esto significa que hemos expresado $f(x)$ en términos de un polinomio y un término residual. El polinomio

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

donde

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

se llama **polinomio de Taylor de grado** n de $f(x)$. Llamamos a c_k el k-ésimo **coeficiente de Taylor** para f.

Un polinomio es esencialmente la función más fácil que se nos puede presentar. Así, sería muy útil poder demostrar que los polinomios de Taylor constituyen aproximaciones para la función dada. Siendo este el caso tenemos que estimar el residuo; en el caso de todas las funciones elementales es cierto que el residuo R_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Esto significa que el polinomio de Taylor, $P_n(x)$, se aproxima a $f(x)$ cuando $n \to \infty$, y obtenemos entonces la deseada aproximación polinomial.

§3. Funciones trigonométricas

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y tomemos $a = 0$ en la fórmula de Taylor. Ya hemos mencionado cómo son las derivadas de sen x y de cos x. Así

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f^{(2)}(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1, & f^{(3)}(0) &= -1. \end{aligned}$$

La fórmula de Taylor para sen x es entonces la siguiente:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}.$$

Vemos que todos los términos pares son iguales a 0, porque sen $0 = 0$.

Podemos estimar sen x y cos x en forma muy simple, porque para todo x. Así, tomamos la cota

$$M_n = 1$$

para todo n y

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Así, si observamos todos los valores de x tales que $|x| \leqq 1$, vemos que R_n tiende a 0 cuando n se hace muy grande.

Ejemplo 1. Calcular sen (0, 1) con tres decimales.

Estimemos R_3. En la fórmula de Taylor hagamos $a = 0$, $b = a + 0{,}1$. Así obtenemos el estimador

$$|R_3| \leqq \frac{(0{,}1)^3}{3!} = \frac{10^{-3}}{6}.$$

Tal término de error nos pondría dentro del rango de aproximación requerida. Por tanto, podemos usar precisamente el primer término de la fórmula de Taylor,

$$\operatorname{sen}(0{,}1 = 0{,}100,$$

con un error que no excede a $\pm \frac{1}{6}\, 10^{-3}$.

Vemos cuán eficiente es esto para calcular el seno de valores pequeños de x.

Ejemplo 2. Calcular sen $\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}2\right)$ con una aproximación de 10^{-4}.

En este caso tomemos $a = \pi/6$. Por ensayo y error y por conjetura, ensayaremos el residuo R_4. Así

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a + h) &= \operatorname{sen} a + \cos(a)\frac{h}{1} - \operatorname{sen}(a)\frac{h^2}{2!} - \cos(a)\frac{h^3}{3!} + R_4 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(0{,}2) - \frac{1}{2}\,\frac{(0{,}2)^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{(0{,}2)^3}{6} + R_4.\end{aligned}$$

Para R_4 tenemos el estimador

$$|R_4| \leqq \frac{(0{,}2)^4}{4!} = \frac{16 \cdot 10^{-4}}{24} \leqq 10^{-4},$$

que está dentro de los límites requeridos de exactitud. No es necesario efectuar realmente el desarrollo decimal de los cuatro primeros términos, los cuales han sido dados como ilustración.

Ejemplo 3. Encontrar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}.$$

Para $|x| \leqq 1$, tenemos:

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!} = R_5(x) \qquad \text{y} \qquad |R_5(x)| \leqq \frac{|x|^5}{5!}.$$

Por tanto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}\right| \leqq \frac{|R_5(x)|}{|x^4|} \leqq \frac{|x|}{5!}.$$

El límite deseado es entonces igual a 0.

También es verdad que el término residual de la fórmula de Taylor para sen x tiende a 0 cuando n se hace muy grande, aun cuando x sea > 1. Para ver esto necesitamos:

Teorema 4. *Sea c cualquier número. Entonces $c^n/n!$ tiende a 0 cuando n se hace muy grande.*

Demostración. Sea n_0 un entero tal que $n_0 > 2c$. Así $c < n_0/2$ y $c/n_0 < \frac{1}{2}$. Escribimos

$$\begin{aligned}\frac{c^n}{n!} &= \frac{c \cdot c \cdots c}{1 \cdot 2 \cdots n_0} \frac{c}{(n_0+1)} \frac{c}{(n_0+2)} \cdots \frac{c}{n} \\ &\leqq \frac{c^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{c^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.\end{aligned}$$

Cuando n se hace muy grande, $(1/2)^{n-n_0}$ se hace pequeño y nuestra fracción tiende hacia 0. Tomemos por ejemplo $c = 10$. Escribimos

$$\frac{10^n}{n!} = \frac{10 \cdots 10}{1 \cdot 2 \cdots 20} \frac{(10) \cdots (10)}{(21) \cdots (n)} < \frac{10^{20}}{20!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-20}$$

y $(1/2)^{n-20}$ tiende a 0 cuando n se hace muy grande.

Por esto vemos que dado un número $b > 0$, el residuo en la fórmula de Taylor para sen x se aproxima a 0 si $|x| \leqq b$.

A veces no se puede calcular una integral definida usando la integral indefinida, pero podemos obtener aproximaciones simples para aquella usando el desarrollo de Taylor.

Ejemplo. Calcular con dos decimales la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$$

Tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x) \qquad \text{y} \qquad |R_5(x)| \leqq \frac{|x|^5}{5!}$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{R_5(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{R_5(x)}{x}\right| \leqq \frac{|x|^4}{5!}.$$

Por tanto

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{R_5(x)}{x}\, dx$$

y

$$\int_0^1 \left|\frac{R_5(x)}{x}\right| dx \leqq \int_0^1 \frac{x^4}{5!}\, dx = \frac{x^5}{5 \cdot 5!}\Big|_0^1 = \frac{1}{620}.$$

Por consiguiente, con aproximación de dos decimales, nuestra integral tiene el valor

$$x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Ejercicios

Salvo indicación contraria, tomar la fórmula de Taylor con $a = 0$ y $b = x$.

1. Escribir el polinomio de Taylor de grado 4 para $\cos x$.
2. Dar un estimador para el residuo en la fórmula de Taylor para $\cos x$, similar al que se obtuvo para $\operatorname{sen} x$.
3. Calcular $\cos (0{,}1)$ con tres decimales.
4. Estimar el residuo R_3 en la fórmula de Taylor para $\cos x$, para el valor $x = 0{,}1$.
5. Estimar el residuo R_4 en la fórmula de Taylor para $\operatorname{sen} x$, para el valor $x = 0{,}2$.
6. Escribir el polimonio de Taylor de grado 4 para $\tan x$.
7. Estimar el residuo R_4 en la fórmula de Taylor para $\tan x$, para $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.
8. Calcular los siguientes valores con tres decimales:
   (a) sen 31° (b) cos 31° (c) sen 47°
   (d) cos 47° (e) sen 32° (f) cos 32°
9. Calcular el coseno de 31 grados con tres decimales.

10. Calcular el seno de 61 grados con tres decimales.
11. Calcular el coseno de 61 grados con tres decimales.
12. Estimar las siguientes integrales con tres decimales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\,dx$

[*Sugerencia:* En una integral que incluya, por ejemplo, x^2, hacer $u = x^2$. Entonces sen $x^2 =$ = sen u; se puede usar la fórmula de Taylor para sen u, sin tener que deducir la fórmula para sen x^2. Comparar la respuesta para 12(c).]

§4. La función exponencial

Todas las derivadas de e^x son iguales a e^x y $e^0 = 1$. Por tanto, la fórmula de Taylor para e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

Caso 1. Consideremos los valores de x tales que $x < 0$. Entonces $e^x < 1$ y, por supuesto, $e^x > 0$ para todo x. Entonces, por el teorema 2, tenemos

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^n}{n!},$$

que es el mismo estimador que obtuvimos para sen x.

Caso 2. Consideremos los valores de $x > 0$ y digamos que $x \leqq b$ para algún número b. Puesto que e^x es estrictamente creciente, sabemos que

$$e^x \leqq e^b$$

para cualquier valor de $x \leqq b$. Entonces, por el teorema 2, tenemos

$$|R_n| \leqq e^b \frac{b^n}{n!},$$

y vemos nuevamente que esta expresión tiende a 0 cuando n se hace muy grande.

Ejemplo 1. Calcular e con tres decimales.

Tenemos que $e = e^1$. Por lo visto en el capítulo VIII, §4, sabemos que $e < 4$. Estimaremos R_7:

$$|R_7| \leqq e\frac{1}{7!} \leqq 4\frac{1}{5040} \leqq 10^{-3}.$$

Así

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6!} + R_7 \\ &= 2718\ldots. \end{aligned}$$

Por supuesto, mientras más pequeño es x, menos términos se necesitan para aproximar e^x.

Ejemplo 2. ¿Cuántos términos de la serie de Taylor se necesitan para calcular $e^{1/10}$ con una precisión de 10^{-3}?

Por cierto, tenemos que $e^{1/10} < 2$. Así

$$|R_3| \leqq 2\frac{(1/10)^3}{3!} < \frac{1}{2}10^{-3}.$$

Por tanto, necesitamos 3 términos (incluyendo el término de orden 0).

Ejercicios

1. Escribir el polinomio de Taylor de grado 4 para e^{-x^2}.
2. Estimar el residuo R_3 en la serie de Taylor para e^x para $x = 1/2$.
3. Estimar el residuo R_4 para $x = 10^{-2}$.
4. Estimar el residuo R_3 para $x = 10^{-2}$.
5. Escribir el polinomio de Taylor de grado 5 para e^{-x}.
6. Calcular $1/e$ con tres decimales e indicar qué residuo daría una aproximación de 10^{-3}.
7. Estimar el residuo R_4 en la fórmula de Taylor para e^x cuando
   (a) $x = 2$ (b) $x = 3$
8. Estimar el residuo R_5 en la fórmula de Taylor para e^x cuando
   (a) $x = 2$ (b) $x = 3$
9. ¿Cuántos términos de la fórmula de Taylor para e^x se necesitan para calcular e^2 con
   (a) 4 decimales? (b) 6 decimales?
10. Escribir el polinomio de Taylor de grado 3 para la función f tal que
   $$f(x) = e^{-1/x^2}$$
   cuando $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. ¿Podría el lector decir algo acerca de los polinomios de Taylor de grado superior?

11. Calcular las siguientes integrales con tres o cuatro decimales, según el interés del lector en ejercitarse.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{0,1} e^{x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{0,1} e^{-x^2}\,dx$

5. El logaritmo

Le dejamos al lector la tarea de obtener la fórmula de Taylor para el logaritmo. Tomar $a = 1$. Aquí obtendremos un resultado análogo por otro método. Se puede demostrar fácilmente, usando el teorema de unicidad del §8, que este resultado es igual al de la fórmula de Taylor.

Sea t cualquier número y sea n un entero > 1. Entonces

$$(1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1})(1 + t) = 1 + (-1)^{n-1}t^n.$$

Esto se demuestra en forma trivial. Multiplicamos la larga suma de la izquierda primero por 1 y luego por t, obteniendo

$$\begin{aligned} &1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} \\ &\quad + t - t^2 + \cdots - (-1)^{n-2}t^{n-1} + (-1)^{n-1}t^n. \end{aligned}$$

Sumando obtendremos lo que deseábamos.

Supóngase que $t \neq -1$. Entonces podemos dividir por $1 + t$. Así

$$\frac{1 + (-1)^{n-1}t^n}{1 + t} = \frac{1}{1 + t} + \frac{(-1)^{n-1}t^n}{1 + t}.$$

Esto nos da

$$\boxed{\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1 + t}.}$$

Consideremos el intervalo $-1 < x \leqq 1$ y tomemos la integral desde 0 hasta x (en este intervalo). Las integrales de las potencias de t son bien conocidas. La integral

$$\int_0^x \frac{1}{1 + t}\,dt = \log(1 + x)$$

se calcula mediante la substitución $u = 1 + t$, $du = dt$. Así, tenemos:

Teorema 5. *Para* $-1 < x \leqq 1$, *se tiene*

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1},$$

donde el residuo R_{n+1} *es la integral*

$$(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Ahora estimaremos el término residual.

Caso 1. Sea a un número con $0 < a \leqq 1$ y consideremos el intervalo $0 \leqq x \leqq a$. En este caso, $1 + t \geqq 1$. Así

$$\frac{t^n}{1+t} \leqq t^n,$$

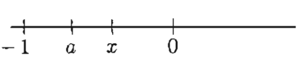
y nuestra integral está acotada por $\int_0^x t^n\,dt$. Así, en este caso,

$$|R_{n+1}| \leqq \int_0^x t^n\,dt \leqq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

(Efectuamos la integración y usamos el hecho de que $x \leqq a$.) En particular, el residuo tiende a 0 cuando n se hace muy grande.

Caso 2. Sea a un número con $-1 < a < 0$ y consideremos el intervalo $a \leqq x \leqq 0$.

En este caso vemos que $0 < 1 + a \leqq 1 + t$, si t está entre x y 0.



Así

$$\left|\frac{t^n}{1+t}\right| = \frac{|t|^n}{1+t} \leqq \frac{(-t)^n}{1+a}.$$

Para estimar el valor absoluto de la integral podemos invertir los límites (hacemos esto porque $x \leqq 0$) y así

$$\begin{aligned}|R_{n+1}| &\leqq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+a}\,dt \\ &= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+a)} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+a)} \leqq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)(1+a)}.\end{aligned}$$

Por tanto, el residuo también tiende a 0 en este caso.

Ejemplo. Calcular log 1,1 con tres decimales.

Para hacer esto, o sea para calcular log (1 + 0,1), tomamos $n = 2$ y $a = 0{,}1$ en el caso 1. Encontramos que

$$|R_3| \leqq \tfrac{1}{3} \times 10^{-3}$$

Por tanto

$$\log(1{,}1) = 0{,}1 - 0{,}005,$$

con un error que no excede a $\frac{1}{3} \times 10^{-3}$.

Ejercicios

1. Calcular los siguientes valores con una aproximación de 10^{-3}, estimando el residuo en cada caso.

(a) log 1,2 (b) log 0,9 (c) log 1,05
(d) $\log \frac{9}{10}$ (e) $\log \frac{24}{25}$ (f) $\log \frac{26}{25}$

2. (a) Verificar las siguientes fórmulas:

$$\log 2 = -7 \log \tfrac{9}{10} + 2 \log \tfrac{24}{25} + 3 \log \tfrac{81}{80}$$
$$\log 3 = -11 \log \tfrac{9}{10} + 3 \log \tfrac{24}{25} + 5 \log \tfrac{81}{80}$$

(b) Calcular log 2 y log 3 con cinco decimales.

§6. El arco tangente

Procedemos como con el logaritmo, excepto que consideramos

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Después de la integración desde 0 hasta cualquier número x, obtenemos:

Teorema 6. *El arctan tiene el siguiente desarrollo*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n},$$

donde

$$R_{2n} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt.$$

Si b es un número positivo tal que $|x| \leqq b$, *entonces*

$$|R_{2n}| \leqq \int_0^b t^{2n}\,dt \leqq \frac{b^{2n+1}}{2n+1}.$$

Cuando $-1 \leqq x \leqq 1$, *el residuo tiende a* 0 *cuando n se hace muy grande.*

Mediante nuestro teorema obtenemos una expresión para $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

usando la fórmula de Taylor para arctan 1. Sin embargo, se requieren muchos términos para obtener una buena aproximación de $\pi/4$ mediante esta expresión. En los ejercicios, el lector encontrará una aproximación mejor.

Ejercicios

1. Demostrar la fórmula de la adición para la tangente:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

2. Demostrar que $\pi/4 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.
3. Verificar que $\pi = 3{,}14159\ldots$
4. Se necesitarán aún menos términos si se demuestra que

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Encontrar los siguientes límites cuando x tiende a 0:

5. $\dfrac{e^x - 1}{x}$
6. $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$
7. $\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$
8. $\dfrac{\arctan x}{x}$
9. $\dfrac{\log(1+x)}{x}$
10. $\dfrac{\log(1+2x)}{x}$
11. $\dfrac{e^x - (1+x)}{x^2}$
12. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$
13. $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
14. $\dfrac{\log(1+x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)}$
15. $\dfrac{\tan(x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$
16. $\dfrac{\log(1+x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$

§7. El desarrollo binomial

Consideremos primero un caso especial.

Sea n un entero positivo y consideremos la función

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

No tenemos dificultad para calcular las derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(1 + x)^{n-1} \\ f''(x) &= n(n - 1)(1 + x)^{n-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n! \\ f^{(n+1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula de Taylor no tiene residuo después del n-ésimo término; así obtenemos:

Teorema 7. *Sea n un entero positivo. Para cualquier número x, tenemos*

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n.$$

El coeficiente de x^k se representa a veces por C_k^n o por $\binom{n}{k}$ y se le llama **coeficiente binomial.** Así:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si deseamos una expresión para $(a + b)^n$ con números a, b, entonces hacemos $x = b/a$. Así

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}(a + b)^n,$$

y de aquí se concluye inmediatamente que

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ahora consideraremos la función $(1 + x)^s$ cuando s no es un entero. Definimos el **coeficiente binomial**

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

Teorema 8. *Sea s cualquier número y sea x un número en el intervalo* $-1 < x < 1$. *Entonces tenemos*

$$(1+x)^s = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{s}{k}x^k + R_{k+1},$$

donde el término residual es igual a la integral usual. El residuo R_k *tiende a* 0 *cuando* k *se hace muy grande.*

Demostración. La demostración de que el residuo tiende a 0 es ligeramente más complicada que nuestras demostraciones previas y la omitiremos. Por supuesto, no existe dificultad para verificar que cuando $f(x) = (1+x)^s$ entonces

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{s}{k}$$

y convendría que el lector lo resolviera como ejercicio.

Lo que haremos, sin embargo, será analizar el residuo R_2. Sea

$$f(x) = (1+x)^s,$$

donde s no es un entero. Tenemos

$$f^{(2)}(x) = s(s-1)(1+x)^{s-2}.$$

La fórmula de Taylor da

$$(1+x)^s = 1 + sx + R_2.$$

Para valores pequeños de x, esto significa que $1 + sx$ debería ser una buena aproximación para la potencia s de $1 + x$, si se puede demostrar que R_2 es pequeño. Esto se puede hacer fácilmente. Sabemos que

$$|R_2| = \frac{|s(s-1)|}{2}(1+c)^{s-2}|x|^2,$$

donde c está entre 0 y x. Mediante una fácil estimación se ve, por ejemplo, que $(1+x)^{1/2}$ es aproximadamente igual a $1 + \frac{1}{2}x$ y que $(1+x)^{1/3}$ es aproximadamente igual a $1 + \frac{1}{3}x$, para valores pequeños de x.

Ejemplo. Calcular $\sqrt{1{,}2}$ con dos decimales. Estimamos R_2 con $s = \frac{1}{2}$, $x = 0{,}2$. Entonces, $c \geqq 0$ y $s - 2 = 3/2$. Por tanto

$$(1+c)^{s-2} \leqq 1.$$

En consecuencia

$$|R_2| \leqq \tfrac{1}{8}(0{,}04) = 0{,}5 \times 10^{-2}.$$

Así

$$\sqrt{1{,}2} = (1 + 0{,}2)^{1/2} = 1{,}10 \pm 0{,}5 \times 10^{-2},$$

que está dentro de la aproximación deseada.

Ejercicios

1. Calcular la raíz cúbica de 126 con 4 decimales.
2. Calcular $\sqrt{97}$ con 4 decimales.
3. Estimar R_2 en el residuo de $(1 + x)^{1/3}$, cuando x está en el intervalo

$$-0{,}1 \leqq x \leqq 0{,}1.$$

4. Estimar el residuo R_2 en la serie de Taylor de $(1 + x)^{1/2}$ (a) cuando $x = -0{,}2$, (b) cuando $x = 0{,}1$.
5. Estimar el residuo R_2 en la serie de Taylor para $(1 + x)^{1/4}$ (a) cuando $x = 0{,}01$, (b) cuando $x = 0{,}2$, (c) cuando $x = 0{,}1$.
6. Estimar el residuo R_3 en la serie de Taylor para $(1 + x)^{1/2}$ (a) cuando $x = 0{,}2$, (b) cuando $x = -0{,}2$, (c) cuando $x = 0{,}1$.

§8. El teorema de la unicidad

Hemos encontrado dos maneras de obtener aproximaciones polinómicas para log y para arctan. Una de ellas es el procedimiento estándar que se aplica a las otras funciones como seno, coseno y exponencial; la otra es aquella en que se usa un artificio especial de integración. Por supuesto, podemos preguntar si ambos procedimientos nos dan la misma aproximación polinómica. Este es en realidad el caso; demostraremos una proposición de unicidad que se aplica a situaciones similares en que existen formas alternas para obtener tales polinomios.

Teorema de la unicidad. *Sea b un número > 0. Sea f una función que tiene $n + 1$ derivadas continuas en el intervalo $-b < x < b$. Supongamos que existen números $a_0, \ldots, a_n$ tales que podemos escribir*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + g(x),$$

donde $g(x)$ es una función que satisface

$$|g(x)| \leqq |C|x|^{n+1}$$

para algún número $C > 0$ y para todos los x del intervalo. Entonces

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

es el k-ésimo coeficiente de Taylor de f.

Demostración. Si c_k es el k-ésimo coeficiente de Taylor de f, como se indicó anteriormente, entonces tenemos que

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + R_{n+1}(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + g(x).$$

Haciendo $b_k = c_k - a_k$ y restando el polinomio de la derecha del de la izquierda, obtenemos

$$b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n = g(x) - R_{n+1}(x).$$

Haciendo $x = 0$ se encuentra que $b_0 = 0$. Supóngase por inducción que hemos demostrado que $b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0$ para $0 \leqq m \leqq n$. Entonces

$$b_mx^m + \cdots + b_nx^n = g(x) - R_{n+1}(x).$$

Dividiendo por x^m, para $x \neq 0$, obtenemos

$$b_m + b_{m+1}x + \cdots + b_nx^{n-m} = \frac{g(x)}{x^m} - \frac{R_{n+1}(x)}{x^m}.$$

Ahora hagamos que x tienda a 0. Los términos de la derecha tienden a 0 y todos los términos de la izquierda (exceptuando posiblemente a b_m) tienden a 0. Por tanto, $b_m = 0$, con lo cual se demuestra el teorema de la unicidad

En algunas aplicaciones podemos construir una aproximación para f mediante un polinomio, usando algún otro método diferente al cálculo de los coeficientes de Taylor mediante las derivadas. Si podemos escribir f en la forma dada en el teorema de la unicidad, entonces sabemos que de hecho hemos encontrado la aproximación polinómica de Taylor de grado n para f.

Siendo el estimador del residuo $\leqq C|x|^{n+1}$, es útil dar un nombre explícito para tal estimador. Así, sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene a 0. Diremos que $f(x)$ es $O(x^n)$ para $x \to 0$, si existe una constante C tal que para todos los x suficientemente pequeños se tenga

$$|f(x)| \leqslant C|x|^n.$$

Ejemplo 1. La función f tal que $f(x) = x^3$ es $O(x^2)$ para $x \longrightarrow 0$. Ciertamente, para $|x| \leqq 1$ sabemos que

$$|x^3| = |x|\,|x|^2 \leqq |x|^2.$$

Este hecho se puede generalizar (ver el ejercicio 4b).

Ejemplo 2. Tenemos sen $x = O(x)$ para $x \to 0$. Ciertamente,

$$\operatorname{sen} x \leqq x \qquad \text{para } 0 \leqq x \leqq 1.$$

Puesto que

$$|\operatorname{sen}(-x)| = |-\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x| \leqq |x|,$$

vemos que sen $x = O(x)$ para $x \to 0$.

Podemos calcular el desarrollo de Taylor para ciertas funciones por un método más rápido, usando el teorema de la unicidad y el ejercicio 4 de esta sección. Mostraremos esto mediante un ejemplo

Ejemplo. Calcular el polinomio de Taylor de tercer grado para la función $\operatorname{sen}^2 x$.

Para hacer esto, sabemos que para $x \to 0$, tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Entonces para obtener el desarrollo de $\operatorname{sen}^2 x$, tenemos solamente que elevar al cuadrado el polinomio

$$x - \frac{x^3}{6},$$

y omitir los términos de grado >3, con lo cual hallamos

$$\operatorname{sen}^2 x = x^2 + O(x^4).$$

Esto es mucho más simple que calcular las derivadas.

Ejemplo. Análogamente podemos obtener los primeros términos del desarrollo para (sen x)(cos x). Tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

Por tanto,

$$(\operatorname{sen} x)(\cos x) = x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4).$$

Aquí, nuevamente, multiplicamos los dos polinomios,

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right),$$

y omitimos todos los términos de grado > 3. El teorema de la unicidad garantiza que el polinomio de Taylor de grado 3 para (sen x)(cos x) es

$$x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Ejercicios

(Los tres primeros ejercicios son para mostrarle al lector la manera de recuperar algunas formas clásicas del residuo.)

1. Sea $g(t)$ una función continua sobre un intervalo entre dos números a y b. Demostrar que

$$\int_a^b g(t)\,dt$$

se encuentra entre $m(b - a)$ y $M(b - a)$, si m y M son el valor mínimo y el máximo de g sobre el intervalo.

2. Usar el teorema del valor intermedio para obtener la conclusión de que existe un número c en el intervalo, tal que

$$\int_a^b g(t)\,dt = g(c)(b - a).$$

3. Aplicar este resultado al término residual

$$R_n = \int_a^b \frac{(b - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

para obtener la conclusión de que existe un número c entre a y b, tal que

$$R_n = \frac{(b - c)^{n-1}(b - a)}{(n - 1)!} f^{(n)}(c).$$

4. (a) Si f y g son funciones, ambas del tipo $O(x^n)$ para $x \to 0$, demostrar que $f + g$ es $O(x^n)$ para $x \to 0$. Si K es una constante, demostrar que Kf es $O(x^n)$ para $x \to 0$.
   (b) Si $n \geqq m$, demostrar que $x^n = O(x^m)$ para $x \to 0$.
   (c) Si $f(x) = O(x^n)$ y $g(x) = O(x^m)$ para $x \to 0$, demostrar que

$$f(x)g(x) = O(x^{n+m}) \qquad \text{para } x \to 0.$$

(d) Sean P, Q dos polinomios de grado $\leqq n$ y supongamos que

$$f(x) = P(x) + O(x^{n+1}), \quad \text{para } x \to 0,$$
$$g(x) = Q(x) + O(x^{n+1}), \quad \text{para } x \to 0.$$

Demostrar que $f(x)g(x) = P(x)Q(x) + O(x^{n+1})$, para $x \to 0$.

5. Demostrar que para $x \to 0$,

$$1 + 2x - 5x^2 = 1 + 2x + O(x^2).$$

6. Demostrar que para $x \to 0$,

$$1 + 2x - 5x^2 + 2x^3 = 1 + 2x + O(x^2).$$

7. En general, sean $a_0, \ldots, a_n$ números y sea $k < n$. Demostrar que

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k + O(x^{k+1}).$$

Ejemplo. Supóngase que dos funciones f y g tienen fórmulas de Taylor que dan

$$f(x) = x - 2x^3 + x^4 + O(x^5),$$
$$g(x) = 1 + x \qquad\qquad + O(x^5),$$

para $x \to 0$. Entonces

$$(x - 2x^3 + x^4)(1 + x) = x - x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5$$

y, por tanto,

$$f(x)g(x) = x + x^2 - 2x^3 - x^4 + O(x^5).$$

Así, $x + x^2 - 2x^3 - x^4$ es el polinomio de Taylor de fg, de grado $\leqq 4$.

Escribir los polinomios de Taylor de grado 4 para las siguientes funciones:

8. $\cos^2 x$
9. $\operatorname{sen}^2 x$
10. $\cos^3 x$
11. $\dfrac{1}{\cos x}$
12. $\operatorname{sen}^3 x$
13. Demostrar que las aproximaciones polinómicas obtenidas para log y arctan son los polinomios de Taylor, demostrando que el término residual satisface las condiciones del teorema de la unicidad.

Ejercicios suplementarios

Dar los polinomios de Taylor de grado 3 para las siguientes funciones:

1. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$
2. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$
3. $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

4. $\operatorname{sen} x \cos x$
5. $\tan x$
6. $\tan^2 x$
7. $\operatorname{sen} x - \cos x$
8. $\operatorname{sen} x + \cos x$
9. $(\operatorname{sen} x)e^x$
10. $(\cos x)e^x$
11. $e^x + e^{-x}$
12. $e^x - e^{-x}$
13. $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$
14. $1 + \pi x + 3x^2 + 2x^3$

15. Usando el ejercicio 4(d) del §8, dar los polinomios de Taylor de grado 4 para las siguientes funciones:

(a) $(\operatorname{sen} x) \cos x$
(b) $(\operatorname{sen} x)e^x$
(c) $(\cos x)e^x$
(d) $(\arctan x) \operatorname{sen} x$
(e) $(\arctan x) \cos x$
(f) $(1 - x) \cos x$
(g) $(1 + x + x^2) \operatorname{sen} x$

16. Calcular e con 10 decimales. Obtener primero este valor como una suma de números racionales. En seguida usar una máquina de calcular para obtener los decimales.
17. Calcular $1/e^2$ con 4 decimales.
18. ¿Cuál es el polinomio de Taylor de grado 3 para

$$\log \frac{1 + x}{1 - x} ?$$

Hacer una estimación del residuo R_5.

Usando los primeros términos de la fórmula de Taylor y el estimador para el residuo, determinar los siguientes límites cuando x tiende a 0.

19. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$
20. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$
21. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$
22. $\dfrac{\tan x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$
23. $\dfrac{\log (1 - x)}{\operatorname{sen} x}$
24. $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$
25. $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x \operatorname{sen} x}$
26. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$
27. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$
28. $\dfrac{e^x - 1 - x}{x}$
29. $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
30. $\dfrac{\log (1 + x^2)}{x^2}$
31. $\dfrac{(1 + x)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$
32. $\dfrac{(1 - x)^{1/3} - 1 - \frac{1}{3}x}{x^2}$

33. Sea $f(x)$ una función que tiene $n + 1$ derivadas continuas en un intervalo abierto que contiene al origen y supóngase que la derivada $(n + 1)$-ésima está acotada por una constante M sobre este intervalo. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n para $f(x)$. ¿Cuáles son los siguientes límites?

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^2}$ (suponiendo $n \geqq 3$)

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n}$
(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n-1}}$ (suponiendo $n \geqq 2$)

Determinar los siguientes límites cuando x tiende a 0.

34. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{x}$

35. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1 - x}{x^2}$

36. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}$

37. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^5}$

38. $\dfrac{\cos x - 1 - x^2/2!}{x}$

39. $\dfrac{\cos x - 1 - x^2/2!}{x^2}$

40. $\dfrac{\cos x - 1 + x^2/2!}{x^3}$

41. $\dfrac{\cos x - 1 + x^2/2!}{x^4}$

42. $\dfrac{\operatorname{sen} x + e^x - 1}{x}$

43. $\dfrac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x}$

44. $\dfrac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x^2}$

45. $\dfrac{\cos 0 - e^x}{x}$

CAPITULO XV

Series

Las series constituyen una continuación natural de nuestro estudio de las funciones. En el capítulo anterior vimos la forma de aproximar las funciones elementales mediante polinomios, con cierto término de error. Recíprocamente, se pueden definir funciones arbitrarias mediante las series. La manera de hacerlo se verá en la sección siguiente.

En la práctica se utilizan muy pocos criterios para determinar la convergencia de las series. Esencialmente, el criterio de comparación es el más frecuente. Además, las series más importantes son aquellas que convergen absolutamente. Por eso haremos hincapié en ellas.

§1. Series convergentes

Supóngase que nos dan una sucesión de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

o sea que nos dan un número a_n para cada entero $n \geqq 1$. (Hemos hecho corresponder el primer lugar a 1, pero podríamos haber comenzado con cualquier entero.) Formamos las sumas

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Carecería de sentido formar una suma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

porque no sabemos la forma de sumar infinitos números. Sin embargo, si nuestras sumas s_n tienden hacia un límite cuando n se hace muy grande, entonces decimos que la suma de la sucesión **converge** y definimos su **suma** como ese límite.

El símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se denomina **serie.** Diremos que la **serie converge** si las sumas s_n tienden a un límite cuando n se hace muy grande. En caso contrario, diremos que no converge, o bien que **diverge.** Si la serie converge, diremos que el valor de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n).$$

El símbolo $\lim_{n\to\infty}$ lo leeremos como: «El límite cuando n se hace muy grande».

Ejemplo. Consideremos la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$$

y formemos las sumas

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

(?)

Probablemente el lector ya sabe que estas sumas tienden a un límite y que este límite es 2. Para demostrarlo, sea $r = \frac{1}{2}$. Entonces

$$(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Cuando n se hace muy grande r^{n+1} tiende a 0, por lo cual la suma tiende a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Realmente, el mismo argumento es válido si r es cualquier número tal que

$$-1 < r < 1.$$

En ese caso, r^{n+1} tiende a 0 cuando n toma valores muy grandes, y, en consecuencia, podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Por supuesto, si $|r| > 1$, entonces la serie $\sum r^n$ no converge. Por ejemplo, las sumas parciales de la serie con $r = -3$ son

$$1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots + (-1)^n 3^n.$$

Obsérvese que el n-ésimo término $(-1)^n 3^n$ no tiende ni siquiera a 0 cuando n se hace muy grande.

En vista del hecho de que el límite de una suma es igual a la suma de los límites, y de otras propiedades de los límites, tenemos:

Teorema 1. *Sean* $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *dos sucesiones y supongamos que las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

convergen. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *también converge y es igual a la suma de las dos series. Si c es un número, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Finalmente, si

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

y

$$t_n = b_1 + \cdots + b_n$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n \to \infty} s_n t_n.$$

En particular, las series pueden ser sumadas término a término. Por supuesto, ¡no se las puede multiplicar término a término!

Observemos también que un teorema similar es válido para la diferencia de dos series.

Si una serie $\sum a_n$ converge, entonces los números a_n deben tender a 0 cuando n toma valores muy grandes. Sin embargo, hay ejemplos de sucesiones $\{a_n\}$ para las cuales la serie no converge y a pesar de ello

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Consideremos, por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Afirmamos que las sumas parciales s_n se hacen muy grandes cuando n toma valores muy grandes. Para ver esto, agrupemos en sumas parciales en la siguiente forma:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots .$$

En cada una de las sumas parciales indicadas, reemplazamos cada término por el que está más hacia la derecha. Esto hace que nuestra suma sea más pequeña. Así, nuestra expresión es

$$\geqq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots$$

$$\geqq 1 + \frac{1}{2} + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \cdots$$

y, por tanto, se hace arbitrariamente grande cuando n se hace grande.

§2. Series con términos positivos

En esta sección supondremos que los números a_n son $\geqq 0$. Entonces las sumas parciales

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

son crecientes, o sea

$$s_1 \leqq s_2 \leqq s_3 \leqq \cdots \leqq s_n \leqq s_{n+1} \leqq \cdots .$$

Si ellas tienden a algún límite, no pueden hacerse arbitrariamente grandes. Luego, en ese caso, existe un número B tal que

$$s_n \leqq B$$

para todo n. El conjunto de números $\{s_n\}$ tiene entonces una mínima cota superior, o sea que existe un número S mínimo tal que

$$s_n \leqq S$$

para todo n. En ese caso, las sumas parciales s_n tienden a S como límite. En otras palabras, dado cualquier número positivo $\epsilon > 0$, tenemos

$$S - \epsilon \leqq s_n \leqq S$$

para todo n suficientemente grande.

Esto expresa simplemente el hecho de que S es la mínima de todas las cotas superiores para el conjunto de números s_n. Expresamos esta propiedad en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea* $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ *una sucesión de números* $\geqq 0$ y sea

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión de números $\{s_n\}$ *es acotada, entonces tiende a un límite* S *que es la mínima cota superior.*

Ejemplo 1. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge.

Observemos la serie:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{16^2} + \cdots + \cdots .$$

Veamos los grupos de términos que están indicados. En cada uno de esos grupos, si disminuimos el denominador de cada término, se incrementa el valor de la fracción. Reemplazamos 3 por 2, luego 4, 5, 6, 7 por 4, luego reemplazamos los números desde 8 hasta 15 por 8, y así sucesivamente. Nuestras sumas parciales son entonces menores o iguales que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} + \cdots ,$$

y observamos que 2 aparece dos veces, 4 aparece cuatro veces, 8 aparece ocho veces y así sucesivamente. Por tanto, las sumas parciales son menores o iguales que

$$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Así, las sumas parciales son menores o iguales que las correspondientes a la serie geométrica y, además, son acotadas. Entonces la serie converge.

El teorema 2 nos proporciona un criterio muy útil para determinar si una serie con términos positivos converge.

Teorema 3. *Sean*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

dos series con $a_n \geqq 0$ para todo n y $b_n \geqq 0$ para todo n. Supongamos que existe un número $C > 0$ tal que

$$a_n \leqq Cb_n$$

para todo n, y que $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Tenemos

$$a_1 + \cdots + a_n \leqq Cb_1 + \cdots + Cb_n = C(b_1 + \cdots + b_n) \leqq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Esto significa que $C \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una cota para las sumas parciales

$$a_1 + \cdots + a_n$$

La mínima cota superior de estas sumas es entonces $\leqq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, con lo cual queda demostrado nuestro teorema

El teorema 3 tiene un análogo para demostrar que una serie no converge.

Teorema 3′. *Sean*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

dos series con a_n y $b_n \geqq 0$ para todo n. Supongamos que existe un número $C > 0$ tal que

$$a_n \geqq Cb_n$$

para todo n suficientemente grande y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Supongamos que $a_n \geqq Cb_n$ para $n \geqq n_0$.
Puesto que $\sum b_n$ diverge, podemos formar las sumas parciales

$$\sum_{n=n_0}^{N} b_n = b_{n_0} + \cdots + b_N$$

que son arbitrariamente grandes cuando N se hace arbitrariamente grande. Pero

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \geqq \sum_{n=n_0}^{N} Cb_n = C \sum_{n=n_0}^{N} b_n.$$

Por tanto, las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N$$

son arbitrariamente grandes cuando N se hace muy grande y, por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, tal como se quería demostrar.

Ejemplo 2. Determinar si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

Escribimos

$$\frac{n^2}{n^3+1} = \frac{1}{n+1/n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n^3}\right).$$

Entonces, para n suficientemente grande, vemos que

$$\frac{n^2}{n^3+1} \geqq \frac{1}{2n}.$$

Como $\sum 1/n$ no converge, se deduce que la serie del ejemplo 2 tampoco converge.

Ejemplo 3. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{2n^4-n+3}$$

converge. Ciertamente, podemos escribir

$$\frac{n^2+7}{2n^4-n+3} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1+7/n^2}{2-(1/n)^3+3/n^4}\right).$$

Para valores grandes de n, el factor de $1/n^2$ es por cierto acotado y, de hecho, tiene un valor próximo a $1/2$. Por tanto, podemos comparar nuestra serie con $1/n^2$ para ver que ella converge.

Ejercicios

1. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

2. (a) Demostrar que la serie $\sum \frac{\log n}{n^3}$ converge. [*Sugerencia:* Estimar $(\log n)/n$.]

   (b) Demostrar que la serie $\sum \frac{(\log n)^2}{n^3}$ converge.

Investigar si las siguientes series son convergentes:

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + 1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + 5}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + n + 2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2 + 1}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + n}$

§3. El criterio de la razón

Continuamos considerando solamente las series con términos $\geqq 0$. Para comparar tales series con una serie geométrica, lo más simple es úsar el criterio de la razón.

El criterio de la razón. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie con* $a_n > 0$ *para todo n. Supongamos que existe un número c, con* $0 < c < 1$, *tal que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq c$$

para todo n suficientemente grande. Entonces la serie converge.

Demostración. Supóngase que existe algún entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq c$$

si $n \geqq N$. Entonces

$$a_{N+1} \leqq ca_N$$
$$a_{N+2} \leqq ca_{N+1} \leqq c^2 a_N$$

y, en general, por inducción,

$$a_{N+k} \leqq c^k a_N.$$

Así

$$\sum_{n=N}^{N+k} a_n \leqq a_N + ca_N + c^2a_N + \cdots + c^ka_N$$
$$\leqq a_N(1 + c + \cdots + c^k) \leqq a_N \frac{1}{1-c}\cdot$$

De esta manera hemos comparado nuestra serie con una serie geométrica y sabemos que las sumas parciales son acotadas. Esto implica que la serie converge.

El criterio de la razón se usa generalmente en el caso de las series con términos positivos a_n tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1.$$

Ejemplo. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

converge

Hagamos $a_n = n/3^n$. Entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{3}\cdot$$

Esta razón tiende a $\frac{1}{3}$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, el criterio de la razón es aplicable: la serie converge.

Ejercicios

Determinar si las siguientes series convergen:

1. $\sum n2^{-n}$
2. $\sum n^2 2^{-n}$
3. $\sum \frac{1}{\log n}$
4. $\sum \frac{\log n}{2^n}$
5. $\sum \frac{\log n}{n}$
6. $\sum \frac{n^{10}}{3^n}$
7. $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
8. $\sum \frac{\sqrt{n^3+1}}{e^n}$
9. $\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}$
10. $\sum \frac{n+1}{2^n}$
11. $\sum \frac{n}{(4n-1)(n+15)}$
12. $\sum \frac{1+\cos(\pi n/2)}{e^n}$
13. $\sum \frac{1}{(\log n)^{10}}$
14. $\sum n^2 e^{-n^2}$
15. $\sum n^2 e^{-n^3}$

16. $\sum n^5 e^{-n^2}$ 17. $\sum n^4 e^{-n}$ 18. $\sum \frac{n^n}{n!3^n}$

19. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos y supongamos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1 - \frac{1}{n}$$

para todo n. Demostrar que la serie $\sum a_n$ diverge.

20. Hay un criterio de la razón que se puede aplicar en la dirección opuesta para determinar si una serie diverge. Demostrar la siguiente proposición: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos y sea $c \geqq 1$. Si $a_{n+1}/a_n \geqq c$ para todo n suficientemente grande, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

§4. El criterio de la integral

Seguramente el lector ya intuye que existe una analogía entre la convergencia de una integral impropia y la convergencia de una serie. Precisaremos esta noción.

Teorema . *Sea f una función definida y positiva para todo $x \geqq 1$ y, además, decreciente. La serie*

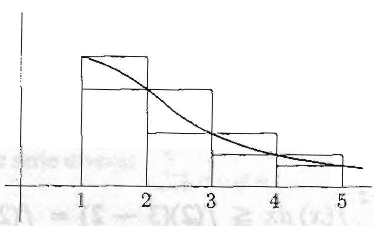
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge si y sólo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

converge.

El siguiente diagrama muestra la situación:



Consideremos las sumas parciales

$$f(2) + \cdots + f(n)$$

y supongamos que la integral impropia converge. El área bajo la curva entre 1 y 2 es mayor o igual que el área del rectángulo cuya altura es $f(2)$ y cuya base es el intervalo entre 1 y 2. Esta base tiene longitud 1. Así

$$f(2) \leqq \int_1^2 f(x)\,dx.$$

Nuevamente, puesto que la función es decreciente, tenemos una estimación similar entre 2 y 3:

$$f(3) \leqq \int_2^3 f(x)\,dx.$$

Podemos continuar hasta n y obtener

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leqq \int_1^n f(x)\,dx.$$

Hemos supuesto que la integral tiende a un límite cuando n se hace muy grande. Esto significa que

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leqq \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Por tanto, las sumas parciales son acotadas y entonces, por el teorema 2, tienden hacia un límite. Así, la serie converge.

Recíprocamente, supongamos que las sumas parciales

$$f(1) + \cdots + f(n)$$

tienden a un límite cuando n se hace muy grande.

El área bajo la gráfica de f entre 1 y n es menor o igual que la suma de las áreas de los rectángulos mayores. Así

$$\int_1^2 f(x)\,dx \leqq f(1)(2-1) = f(1)$$

y

$$\int_2^3 f(x)\,dx \leqq f(2)(3-2) = f(2).$$

Procediendo por pasos y tomando la suma, vemos que

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqq f(1) + \cdots + f(n-1).$$

Las sumas parciales de la derecha son menores o iguales que su límite. Llamemos L a este límite. Entonces para todos los enteros positivos n, tenemos

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqq L.$$

Dado cualquier número B, podemos encontrar un entero n tal que $B \leqslant n$. Entonces

$$\int_1^B f(x)\,dx \leqq \int_1^n f(x)\,dx \leqq L.$$

Por tanto, la integral desde 1 hasta B tiende hacia un límite cuando B se hace muy grande, y este límite es menor o igual que L. Esto demuestra nuestro teorema.

Ejemplo. Demostrar que la serie

$$\sum \frac{1}{n^2 + 1}$$

converge.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}\cdot$$

Entonces f es decreciente y

$$\int_1^B f(x)\,dx = \arctan B - \arctan 1 = \arctan B - \frac{\pi}{4}\cdot$$

Cuando B toma valores grandes, $\arctan B$ tiende a $\pi/2$ y, por tanto, tiene un límite. Así, la integral converge. Lo mismo ocurrirá con la serie, por el teorema.

Ejercicios

1. Demostrar que la siguiente serie diverge: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

2. Demostrar que la siguiente serie converge: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!}$

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^3}$

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-n+5}$

11. Sea ϵ un número > 0. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge.

12. Demostrar que las siguientes series convergen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{3/2}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\epsilon}}$ si $\epsilon > 0$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{n^{3/2}}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n^2}$

13. Si $\epsilon > 0$, demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\epsilon}}$ converge.

§5. Convergencia absoluta y alternada

Consideremos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para la cual no suponemos que los términos a_n sean $\geqq 0$. Diremos que esta serie **converge absolutamente,** si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

formada con los valores absolutos de los términos a_n, converge. Esta es una serie con términos $\geqq 0$, a la cual se le pueden aplicar los criterios de convergencia dados en las dos secciones anteriores. Esto es importante porque se tiene:

Teorema 5. *Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión y supongamos que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

converge. Entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración. Sea a_n^+ igual a 0 si $a_n < 0$ y sea igual a la misma a_n si $a_n \geqq 0$. Sea a_n^- igual a 0 si $a_n > 0$ y sea igual a $-a_n$ si $a_n \leqq 0$. Entonces tanto a_n^+ como a_n^- son $\geqq 0$. Por lo supuesto y por comparación con $\Sigma|a_n|$, vemos que cada una de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

converge. Lo mismo ocurre con su diferencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

que es igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-),$$

y que no es otra cosa sino $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto demuestra nuestro teorema.

Usaremos otro criterio de convergencia de una serie que puede tener términos positivos y negativos.

Teorema 6. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

cuyos términos a_n *son alternadamente positivos y negativos, y tal que* $|a_{n+1}| \leqq |a_n|$ *para* $n \geqq 1$. *En este caso la serie es convergente*

Demostración. Escribamos la serie en la forma

$$b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + b_3 - c_3 + \cdots$$

con b_n, $c_n \geqq 0$. Hagamos

$$s_n = b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \cdots + b_n$$
$$t_n = b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \cdots + b_n - c_n.$$

Puesto que el valor absoluto de los términos decrece, se deduce que

$$s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \cdots \quad \text{y} \quad t_1 \leqq t_2 \leqq t_3 \leqq \cdots$$

o sea que las s_n son decrecientes y las t_n son crecientes. Es indudable que

$$s_{n+1} = s_n - c_n + b_{n+1} \quad \text{y} \quad 0 \leqq b_{n+1} \leqq c_n.$$

Así, la cantidad c_n que restamos de s_n es mayor que la cantidad b_{n+1} que sumamos después. Por tanto, $s_n \geqq s_{n+1}$. Además, $s_n \geqq t_n$. Por tanto, podemos visualizar nuestras sucesiones de la manera siguiente:

$$s_n \geqq s_{n+1} \geqq \cdots \geqq t_{n+1} \geqq t_n.$$

Nótese que $s_n - t_n = c_n$ y que c_n tiende a 0 cuando n se hace muy grande. Si llamamos L a la máxima cota inferior de la sucesión $\{s_n\}$, y M a la mínima cota superior de la sucesión $\{t_n\}$, entonces

$$s_n \geqq L \geqq M \geqq t_n$$

para todo n. Puesto que la diferencia $s_n - t_n$ se hace arbitrariamente pequeña, se deduce que $L - M$ es arbitrariamente pequeña y que, por tanto, es igual a 0. Así $L = M$, lo cual demuestra que s_n y t_n tienden a L como límite; en consecuencia, la serie $\sum a_n$ converge a L.

Ejemplo. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

es convergente, pero no es absolutamente convergente.

Ejercicios

Determinar si las siguientes series son absolutamente convergentes:

1. $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}$

2. $\sum \frac{1 + \cos \pi n}{n!}$

3. $\sum \frac{\operatorname{sen} \pi n + \cos 2\pi n}{n^{3/2}}$

4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

5. $\sum \frac{(-1)^n \operatorname{sen} n + \cos 3n}{n^2 + n}$

¿Cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles no lo son?

6. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

7. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$

8. $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$

9. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\log (n+2)}$

10. Demostrar que la serie Σ (sen $n^2x)/n^2$ converge absolutamente para todo número x. Sea f la función cuyo valor en x es la serie anterior. Demostrar que f es continua. Determinar si f es derivable o si no lo es. (Es muy notable que esto no fue conocido durante mucho tiempo. Ver: J. P. Kahane, *Bulletin of the American Mathematical Society*, marzo de 1964, página 199. J. Gerver, estudiante de Columbia College, ha demostrado que la serie es derivable en todos los puntos $m\pi/n$, donde m, n son enteros impares, que la derivada es igual a $-1/2$ y que éstos son los únicos puntos donde la función es derivable. Ver su artículo en *Am. J. Math.*, 1970 y 1971.)

Determinar si las siguientes series son convergentes y si son absolutamente convergentes.

11. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

12. $\sum \frac{(-1)^{n+2}}{\log n}$

13. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

14. $\sum (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$

15. $\sum (-1)^n \frac{n^2}{n^3+2}$

16. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{n^3+n-1}$

17. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$

18. $\sum \frac{(-1)^n}{n^{5/2}+n}$

19. $\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

20. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$

§6. Series de potencias

Quizás las series más importantes son las series de potencias. Sea x cualquier número y sea $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ una sucesión de números. Entonces podemos formar la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Las sumas parciales son

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Ya nos hemos encontrado anteriormente con estas sumas cuando discutimos la fórmula de Taylor.

Ejemplo. La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge absolutamente para todo x. Ciertamente, dado un número $R > 0$, será suficiente demostrar que la serie anterior converge para $0 < x \leqq R$. Usaremos el criterio de la razón. Sea

$$b_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Entonces

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \leqq \frac{R}{n+1}\,.$$

Cuando n es suficientemente grande se deduce que $R/(n + 1) < 1/2$, y podemos aplicar el criterio de la razón para demostrar nuestra afirmación.

Análogamente, podríamos demostrar que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

son absolutamente convergentes para todo x. Para la primera, podemos hacer, por ejemplo

$$b_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Entonces, $b_{n+1}/b_n = x^2/(2n + 3)$ y podemos argumentar como antes.

Teorema 7. *Supongamos que existe un número $r \geqq 0$ tal que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

converge. Entonces para todo x tal que $|x| \leqq r$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge absolutamente.

Demostración. El valor absoluto de cada término es

$$|a_n|\,|x|^n \leqq |a_n| r^n.$$

Así, nuestra afirmación resulta válida por el criterio de comparación del teorema 3. La mínima cota superior de todos los números r para los cuales ha quedado establecida la convergencia en el teorema, se llama **radio de convergencia** de la serie. Si no existe una cota superior para los números r tales que la serie de potencias anterior converge, entonces decimos que el radio de convergencia es **infinito.** En este caso la serie es absolutamente convergente para todo x.

Supóngase que existe una cota superior para los anteriores números r y sea s el radio de convergencia de la serie. Entonces, si $x > s$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$$

no converge. Así, el radio de convergencia s es el número tal que la serie es absolutamente convergente si $0 < x < s$, pero no es absolutamente convergente si $x > s$.

El teorema 7 nos permite definir una función f. En efecto, para todos los números x tales que $|x| < r$, definimos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n).$$

Nuestras demostraciones de que el término residual en la fórmula de Taylor tiende a 0 para varias funciones, nos permiten ahora decir que estas funciones están dadas por sus series de Taylor. Así

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

para todo x. Además,

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

es válida para $-1 < x < 1$.

(Aquí vimos que la serie converge para $x = 1$, pero no es absolutamente convergente; ver §1.)

Sin embargo, ahora podemos definir funciones a voluntad mediante series de potencias, siempre que sepamos que la serie de potencias converge absolutamente, para $|x| < r$.

El criterio de la razón generalmente proporciona una forma fácil de determinar cuándo una serie de potencias converge o cuándo diverge.

Ejemplo. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} x^n$$

converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$.

Sea $0 < c < 1$ y consideremos un x tal que $0 < x \leqq c$. Sea

$$b_n = \frac{\log n}{n^2} x^n.$$

Entonces

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log(n + 1)}{(n + 1)^2} x^{n+1} \frac{n^2}{\log n} \frac{1}{x^n} = \frac{\log(n + 1)}{\log n} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^2 x.$$

no converge. Así, el radio de convergencia s es el número tal que la serie es absolutamente convergente si $0 < x < s$, pero no es absolutamente convergente si $x > s$.

El teorema 7 nos permite definir una función f. En efecto, para todos los números x tales que $|x| < r$, definimos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n).$$

Nuestras demostraciones de que el término residual en la fórmula de Taylor tiende a 0 para varias funciones, nos permiten ahora decir que estas funciones están dadas por sus series de Taylor. Así

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

para todo x. Además,

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

es válida para $-1 < x < 1$.

(Aquí vimos que la serie converge para $x = 1$, pero no es absolutamente convergente; ver §1.)

Sin embargo, ahora podemos definir funciones a voluntad mediante series de potencias, siempre que sepamos que la serie de potencias converge absolutamente, para $|x| < r$.

El criterio de la razón generalmente proporciona una forma fácil de determinar cuándo una serie de potencias converge o cuándo diverge.

Ejemplo. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} x^n$$

converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$.

Sea $0 < c < 1$ y consideremos un x tal que $0 < x \leqq c$. Sea

$$b_n = \frac{\log n}{n^2} x^n.$$

Entonces

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log(n + 1)}{(n + 1)^2} x^{n+1} \frac{n^2}{\log n} \frac{1}{x^n} = \frac{\log(n + 1)}{\log n} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^2 x.$$

Puesto que $\log(n+1)/\log n$ y $(n/(n+1))^2$ tienden a 1 cuando n se hace muy grande, se deduce que si $c < c_1 < 1$, entonces para todo n suficientemente grande

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqq c_1$$

y, por tanto, nuestra serie converge. Esto es verdad para todo c tal que $0 < c < 1$, y así la serie converge absolutamente para $|x| < 1$.

Sea $c > 1$. Si $x \geqq c$, entonces para todo n suficientemente grande se deduce que $b_{n+1}/b_n \geqq 1$, por lo cual la serie no converge. Esto es así para todo $c > 1$ y, por tanto, la serie no converge si $x > 1$. Así, el radio de convergencia es 1.

Si una serie de potencias converge absolutamente sólo para $x = 0$, convendremos en decir que su radio de convergencia es 0. Por ejemplo, el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$$

es igual a 0, como se puede ver usando el criterio de la razón en el caso de divergencia.

El criterio de la raíz. *Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias y supongamos que*

$$\text{lím } |a_n|^{1/n} = s,$$

donde s es un número. Si $s \neq 0$, entonces el radio de convergencia de la serie es igual a $1/s$. Si $s = 0$, entonces el radio de convergencia es infinito. Si $|a_n|^{1/n}$ crece arbitrariamente cuando n toma valores muy grandes, entonces el radio de convergencia es 0.

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $a_n \geqq 0$ para todo n. Supongamos primero que s es un número $\neq 0$, y sea $0 \leqq r < 1/s$. Para un ϵ pequeño, los números $a_n^{1/n}r$ tienden a sr y son, por consiguiente, $< 1 - \epsilon$ para todo n suficientemente grande. Por tanto, podemos decir que la serie $\sum a_n r^n$ converge, por comparación con la serie geométrica. De otro lado, si $r > 1/s$, entonces $a_n^{1/n}r$ tiende a $sr > 1$; por tanto, tenemos

$$a_n^{1/n}r \geqq 1 + \epsilon$$

para todo n suficientemente grande. Por comparación se obtiene que la serie $\sum a_n r^n$ diverge. Dejamos al lector los casos $s = 0$ ó $s = \infty$.

Ejemplo. La serie $\sum x^n/n^2$ tiene un radio de convergencia igual a 1, porque

$$\text{lím} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = \text{lím } \frac{1}{n^{2/n}} = 1,$$

por el corolario 3 del teorema 10, capítulo VIII, §4.

Ejercicios

Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series:

1. $\sum n^n x^n$
2. $\sum \frac{x^n}{n^n}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1} x^n$
4. $\sum \frac{n}{n+5} x^n$
5. $\sum (\log n) x^n$
6. $\sum \frac{1}{\log n} x^n$
7. $\sum (\log n)^2 x^n$
8. $\sum 2^n x^n$
9. $\sum 2^{-n} x^n$
10. $\sum (1+n)^n x^n$
11. $\sum \frac{x^n}{n}$
12. $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
13. $\sum (1+(-2)^n) x^n$
14. $\sum (1+(-1)^n) x^n$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5n}}{(2n)! n^{3n}} x^n$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2} x^n$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi/2}{2^n} x^n$
21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} x^n$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos 2\pi n}{3^n} x^n$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} n x^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi n}{n!} x^n$
25. $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^n} x^n$
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n} x^n$
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!-1} x^n$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n!} x^n$

Nota: Para obtener algunos de los anteriores radios de convergencia, recuérdese que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = e.$$

§7. Derivación e integración de series de potencias

Si tenemos un polinomio

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

con números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ como coeficientes, entonces sabemos cómo obtener su derivada. Esta es $a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$. Nos gustaría decir que la derivada de una serie se puede tomar en la misma forma y que la derivada converge cuando la serie es convergente.

Teorema 8. *Sea r un número > 0 y sea $\sum a_nx^n$ una serie absolutamente convergente para $|x| < r$. Entonces la serie $\sum na_nx^{n-1}$ también es absolutamente convergente para $|x| < r$.*

Demostración. Puesto que estamos interesados en la convergencia absoluta, podemos suponer que $a_n \geqq 0$ para todo n. Sea $0 < x < r$ y sea c un número tal que $x < c < r$. Recordemos que

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Podemos escribir

$$na_nx^n = a_n(n^{1/n}x)^n.$$

Entonces para todo n suficientemente grande concluimos que

$$n^{1/n}x < c$$

porque $n^{1/n}x$ se hace arbitrariamente cercano a x. Por consiguiente, para todo n suficientemente grande, tenemos

$$na_nx^n < a_nc^n.$$

Podemos comparar la serie $\sum na_nx^n$ con $\sum a_nc^n$ para concluir que la serie $\sum na_nx^n$ converge. Puesto que

$$\sum na_nx^{n-1} = \frac{1}{x}\sum a_nx^n$$

queda demostrado el teorema 8.

Se obtiene un resultado similar para la integración, pero en forma trivial. En efecto, si tenemos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ absolutamente convergente para $|x| < r$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^n$$

tiene términos cuyo valor absoluto es menor que los de la serie original.

Los resultados anteriores se pueden expresar diciendo que una serie de potencias absolutamente convergente se puede integrar y derivar término a término, y la serie resultante es todavía una serie de potencias absolutamente convergente.

Es natural esperar que si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

entonces f es derivable y que su derivada se obtiene derivando la serie término a término. El siguiente teorema demuestra este hecho.

Teorema 9. *Sea*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

una serie de potencias que converge absolutamente para $|x| < r$. Entonces f es derivable para $|x| < r$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Demostración. Sea $0 < b < r$. Sea $\delta > 0$ tal que $b + \delta < r$. Consideremos los valores de x tales que $|x| < b$ y los valores de h tales que $|h| < \delta$. Tenemos el numerador del cociente de Newton:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(x+h)^n - x^n].$$

Por el teorema del valor medio, existe un número x_n entre x y $x + h$ tal que

$$(x+h)^n - x^n = n x_n^{n-1} h$$

y, en consecuencia,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_n^{n-1} h.$$

Por tanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_n^{n-1}.$$

Debemos demostrar que el cociente de Newton anterior tiende hacia el valor de la serie obtenida tomando las derivadas término a término. Tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_n^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n [x_n^{n-1} - x^{n-1}].$$

Usando nuevamente el teorema del valor medio, podemos decir que existe y_n entre x_n y x tal que la expresión anterior es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n y_n^{n-2}(x_n - x).$$

Tenemos $|y_n| \leqq b + \delta < r$ y $|x_n - x| \leqq |h|$. En consecuencia

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n|a_n|\,|y_n|^{n-2}|h|$$

$$\leqq |h| \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n|a_n|(b+\delta)^{n-2}.$$

Por el teorema 8, aplicado dos veces, sabemos que la serie de la derecha converge. Es igual a una constante fija. Cuando h tiende a 0, se obtiene que la expresión de la izquierda también tiende a 0. Esto demuestra que f es derivable en x, y que su derivada es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, para todo x tal que $|x| < b$. Esto es verdad para todo b tal que $0 < b < r$. Así concluye la demostración del teorema.

Teorema 10. *Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias que converge absolutamente para $|x| < r$. Entonces la relación*

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

es válida en el intervalo $|x| < r$.

Demostración. Sabemos que la serie correspondiente a f integrada término a término, converge absolutamente en el intervalo. Por el teorema precedente, su derivada término a término es la serie correspondiente a la derivada de la función, con lo cual queda demostrada nuestra afirmación.

Ejemplo. Si nunca hubiéramos escuchado hablar de la función exponencial, podríamos definir una función

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Tomando la derivada término a término, vemos que

$$f'(x) = f(x).$$

Así, por lo que sabemos del capítulo VIII, §2, ejercicio 8, llegamos a la conclusión de que

$$f(x) = Ke^x$$

para alguna constante K. Tomando $x = 0$, se obtiene que

$$1 = f(0) = K.$$

Así, $K = 1$ y $f(x) = e^x$.

Análogamente, si nunca hubiéramos escuchado hablar de seno y de coseno, podríamos **definir** las funciones

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Derivando término a término obtenemos que

$$S'(x) = C(x), \qquad C'(x) = -S(x).$$

Además, $S(0) = 0$ y $C(0) = 1$. Entonces se puede demostrar fácilmente que cualquier par de funciones $S(x)$ y $C(x)$ que satisfacen estas propiedades deben ser el seno y el coseno. Esto es lo que efectivamente se hace en el apéndice.

Ejercicios

1. Verificar en detalle que derivando término a término las series correspondientes al seno y al coseno, dadas al final de la sección, se obtiene

$$S'(x) = C(x) \qquad \text{y} \qquad C'(x) = -S(x).$$

2. Sea

$$f(x) = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Demostrar que $f''(x) = f(x)$.

3. Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Demostrar que

$$x^2 f''(x) + xf'(x) = 4x^2 f(x).$$

4. Sea

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Demostrar que $f'(x) = 1/(1 + x^2)$.

5. Sea

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Demostrar que

$$x^2 J''(x) + xJ'(x) + x^2 J(x) = 0.$$

6. Para cualquier entero positivo k, sea

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}.$$

Demostrar que

$$x^2 J_k''(x) + xJ_k'(x) + (x^2 - k^2) J_k(x) = 0.$$

QUINTA PARTE
MISCELANEA

CAPITULO XVI

Números complejos

Una de las ventajas de tratar con los números reales en vez de hacerlo con los números racionales, es que ciertas ecuaciones que no tienen solución en los números racionales si la tienen en los números reales. Por ejemplo, $x^2 = 2$ es una de tales ecuaciones. Sin embargo, también conocemos algunas ecuaciones que no tienen solución en los números reales, por ejemplo $x^2 = -1$, o $x^2 = -2$. En este capítulo definimos una nueva clase de números en la cual estas ecuaciones tienen solución. A los que en capítulos anteriores llamamos simplemente números, ahora los llamaremos números **reales.** Los números de la nueva clase se llamarán números **complejos.**

§1. Definición

Los **números complejos** son un conjunto de objetos que se pueden sumar y multiplicar; la suma y el producto de dos números complejos es también un número complejo que satisface las siguientes condiciones:

1. Todo número real es un número complejo y si α, β son números reales, entonces su suma y su producto como números complejos son iguales a su suma y su producto como números reales.
2. Existe un número complejo representado por i tal que $i^2 = -1$.
3. Todo número complejo se puede escribir unívocamente en la forma $a + bi$, donde a, b son números reales.
4. Se satisfacen las leyes ordinarias de la aritmética referentes a la suma y a la multiplicación. Estas leyes son:

Si α, β, γ son números complejos, entonces $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ y

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Tenemos $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ y $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$.
Tenemos $\alpha\beta = \beta\alpha$ y $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
Si 1 es el número real uno, entonces $1\alpha = \alpha$.
Si 0 es el número real cero, entonces $0\alpha = 0$.
Tenemos $\alpha + (-1)\alpha = 0$.

Ahora extraeremos consecuencias de estas propiedades. Con cada número complejo $a + bi$, asociamos el punto (a, b) en el plano.

Sean $\alpha = a_1 + a_2 i$ y $\beta = b_1 + b_2 i$ dos números complejos. Entonces

$$\alpha + \beta = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)i.$$

Así, la adición de los números complejos se efectúa «componente a componente». Por ejemplo, $(2 + 3i) + (-1 + 5i) = 1 + 8i$.

Al multiplicar números complejos, usamos la regla $i^2 = -1$ para simplificar el producto y ponerlo en la forma $a + bi$. Por ejemplo, sean $\alpha = 2 + 3i$ y $\beta = 1 - i$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha\beta = (2 + 3i)(1 - i) &= 2(1 - i) + 3i(1 - i) \\ &= 2 - 2i + 3i - 3i^2 \\ &= 2 + i - 3(-1) \\ &= 2 + 3 + i \\ &= 5 + i. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = a + bi$ un número complejo. Definimos $\bar{\alpha}$ como $a - bi$. Así, si $\alpha = 2 + 3i$, entonces $\bar{\alpha} = 2 - 3i$. El número complejo $\bar{\alpha}$ se llama **conjugado** de α. Vemos al instante que

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2.$$

Con la interpretación vectorial de los números complejos, vemos que $\alpha\bar{\alpha}$ es el cuadrado de la distancia del punto (a, b) al origen.
Ahora tenemos otra propiedad importante de los números complejos, que nos permitirá dividir por números complejos diferentes de 0.

Si $\alpha = a + bi$ es un número complejo $\neq 0$ y si hacemos

$$\lambda = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$$

entonces $\alpha\lambda = \lambda\alpha = 1$.

La demostración de esta propiedad es una consecuencia inmediata de la ley de la multiplicación de los números complejos, porque

$$\alpha \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{a^2 + b^2} = 1.$$

El número λ indicado anteriormente se llama **inverso** de α, y se representa por α^{-1} ó $1/\alpha$. Si α, β son números complejos, escribimos a menudo β/α en vez de $\alpha^{-1}\beta$ (ó $\beta\alpha^{-1}$), tal como hicimos con los números reales. Vemos que podemos dividir por números complejos $\neq 0$.

Ejemplo. Para encontrar el inverso de $(1 + i)$, notamos que el conjugado de $1 + i$ es $1 - i$ y que $(1 + i)(1 - i) = 2$. Por tanto

$$(1 + i)^{-1} = \frac{1 - i}{2}.$$

Teorema 1. *Sean α, β números complejos. Entonces*

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \qquad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \qquad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha.$$

Demostración. Las demostraciones se obtienen inmediatamente de las definiciones de suma, multiplicación y de complejo conjugado. Las dejamos como ejercicios (ejercicios 3 y 4).

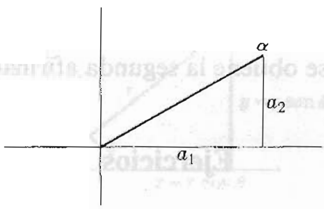
Sea $\alpha = a + bi$ un número complejo, donde a, b son reales. Llamaremos a a **parte real** de α y la representaremos por $\mathrm{Re}(\alpha)$. Así

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(\alpha).$$

Definimos el **valor absoluto** o **módulo** de un número complejo $\alpha = a_1 + ia_2$ (donde a_1, a_2 son reales) como

$$|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Si pensamos en α como un punto (a_1, a_2) del plano, entonces $|\alpha|$ es la longitud del segmento de recta desde el origen hasta α.



En términos del valor absoluto, podemos escribir

$$\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}$$

siempre que $\alpha \neq 0$. Por cierto, observamos que $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$.

Si $\alpha = a_1 + ia_2$, notamos que

$$|\alpha| = |\bar{\alpha}|$$

porque $(-a_2)^2 = a_2^2$, de modo que $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a_1^2 + (-a_2)^2}$.

Teorema 2. *El valor absoluto de un número complejo satisface las siguientes propiedades. Si α, β son números complejos, entonces*

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$$
$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

Demostración. Tenemos:

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\overline{\alpha\beta} = \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2.$$

Tomando la raíz cuadrada concluimos que $|\alpha|\,|\beta| = |\alpha\beta|$, lo que demuestra nuestra primera afirmación. Por lo que respecta a la segunda, tenemos

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} \\ &= |\alpha|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\beta\bar{\alpha}) + |\beta|^2 \end{aligned}$$

porque $\alpha\bar{\beta} = \overline{\beta\bar{\alpha}}$. Sin embargo, tenemos

$$2\,\mathrm{Re}(\beta\bar{\alpha}) \leqq 2|\beta\bar{\alpha}|$$

porque la parte real de un número complejo es $\leqq$ que su valor absoluto. Por tanto

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &\leqq |\alpha|^2 + 2|\beta\bar{\alpha}| + |\beta|^2 \\ &\leqq |\alpha|^2 + 2|\beta|\,|\alpha| + |\beta|^2 \\ &= (|\alpha| + |\beta|)^2. \end{aligned}$$

Tomando la raíz cuadrada se obtiene la segunda afirmación del teorema.

Ejercicios

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$, donde x, y son números reales.

   (a) $(-1 + 3i)^{-1}$ (b) $(1 + i)(1 - i)$
   (c) $(1 + i)i(2 - i)$ (d) $(i - 1)(2 - i)$
   (e) $(7 + \pi i)(\pi + i)$ (f) $(2i + 1)\pi i$
   (g) $(\sqrt{2}\,i)(\pi + 3i)$ (h) $(i + 1)(i - 2)(i + 3)$

2. Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$, donde x, y son números reales.

   (a) $(1 + i)^{-1}$ (b) $\dfrac{1}{3 + i}$ (c) $\dfrac{2 + i}{2 - i}$ (d) $\dfrac{1}{2 - i}$
   (e) $\dfrac{1 + i}{i}$ (f) $\dfrac{i}{1 + i}$ (g) $\dfrac{2i}{3 - i}$ (h) $\dfrac{1}{-1 + i}$

3. Sea α un número complejo $\neq 0$. ¿Cuál es el valor absoluto de $\alpha/\bar{\alpha}$? ¿Qué representa $\bar{\bar{\alpha}}$?
4. Sean α, β dos números complejos. Demostrar que $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ y que
$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}.$$
5. Justificar la afirmación que se hizo en la demostración del teorema 2, en el sentido de que la parte real de un número complejo es $\leqq$ que su valor absoluto.

6. Si $\alpha = a + ib$, con a, b reales, entonces b se llama parte **imaginaria** de α y escribimos $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Demostrar que $\alpha - \overline{\alpha} = 2\,\mathrm{Im}(\alpha)$. Demostrar que

$$\mathrm{Im}(\alpha) \leqq |\mathrm{Im}(\alpha)| \leqq |\alpha|.$$

§2. La forma polar

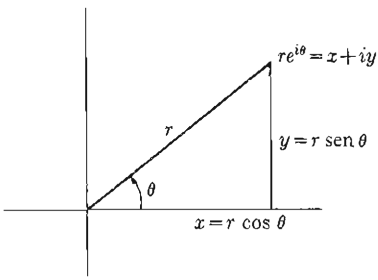
Sea $(x, y) = x + iy$ un número complejo. Sabemos que cualquier punto del plano puede ser representado mediante las coordenadas polares (r, θ). Ahora veremos la forma de escribir los números complejos en términos de esas coordenadas polares.

Sea θ un número real. Definimos la expresión $e^{i\theta}$ como

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Así $e^{i\theta}$ es un número complejo.

Por ejemplo, si $\theta = \pi$, entonces $e^{i\pi} = -1$. También $e^{2\pi i} = 1$ y $e^{i\pi/2} = i$. Además, $e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$ para cualquier θ real.



Sean x, y números reales y sea $x + iy$ un número complejo. Sea

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si (r, θ) son las coordenadas polares del punto (x, y) en el plano, entonces

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Por tanto,

$$x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = re^{i\theta}.$$

La expresión $re^{i\theta}$ se llama **forma polar** del número complejo $x + iy$.

La propiedad más importante de esta forma polar está dada en el teorema 3. Ella nos permitirá tener una interpretación geométrica muy buena para el producto de dos números complejos.

Teorema 3. *Sean θ, φ dos números reales. Entonces*

$$e^{i\theta+i\varphi} = e^{i\theta}e^{i\varphi}.$$

Demostración. Por definición, tenemos

$$e^{i\theta+i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi).$$

Usando la fórmula de la adición para seno y coseno, vemos que la expresión anterior es igual a

$$\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + i(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta).$$

Esta es exactamente la misma expresión que se obtiene multiplicando

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Nuestro teorema está demostrado.

El teorema 3 justifica nuestra notación, al mostrar que la exponencial de números complejos satisface la misma regla formal que la exponencial de números reales.

Sea $\alpha = a_1 + ia_2$ un número complejo. Definimos e^α como

$$e^{a_1}e^{ia_2}.$$

Por ejemplo, sea $\alpha = 2 + 3i$. Entonces, $e^\alpha = e^2e^{3i}$.

Teorema 4. *Sean α, β números complejos. Entonces*

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

Demostración. Sean $\alpha = a^1 + ia_2$ y $\beta = b_1 + ib_2$. Entonces

$$e^{\alpha+\beta} = e^{(a_1+b_1)+i(a_2+b_2)} = e^{a_1+b_1}e^{i(a_2+b_2)}$$
$$= e^{a_1}e^{b_1}e^{ia_2+ib_2}.$$

Usando el teorema 3, vemos que esta última expresión es igual a

$$e^{a_1}e^{b_1}e^{ia_2}e^{ib_2} = e^{a_1}e^{ia_2}e^{b_1}e^{ib_2}.$$

Por definición esto es igual a $e^\alpha e^\beta$, con lo cual queda demostrado el teorema.

El teorema 4 es muy útil cuando se trabaja con números complejos. Ahora veremos algunos ejemplos como ilustración.

Ejemplo 1. Encontrar un número complejo cuyo cuadrado sea $4e^{i\pi/2}$.
Sea $z = 2e^{i\pi/4}$. Usando la regla de la exponencial vemos que $z^2 = 4e^{i\pi/2}$.

Ejemplo 2. Sea n un entero positivo. Encontrar un número complejo w tal que $w^n = e^{i\pi/2}$.

Es claro que el número complejo $w = e^{i\pi/2n}$ satisface nuestro requerimiento.

En otras palabras, podemos expresar el teorema 4 de la manera siguiente: Sean $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ dos números complejos. Para encontrar el producto z_1z_2, multiplicamos los valores absolutos y sumamos los ángulos. Así

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

En muchos casos esta forma de visualizar el producto de números complejos es más útil que la proveniente de la definición.

Ejercicios

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma polar:
   (a) $1 + i$ (b) $1 + i\sqrt{2}$ (c) -3 (d) $4i$
   (e) $1 - i\sqrt{2}$ (f) $-5i$ (g) -7 (h) $-1 - i$
2. Expresar los siguientes números complejos en la forma ordinaria $x + iy$.
   (a) $e^{3i\pi}$ (b) $e^{2i\pi/3}$ (c) $3e^{i\pi/4}$ (d) $\pi e^{-i\pi/3}$
   (e) $e^{2\pi i/6}$ (f) $e^{-i\pi/2}$ (g) $e^{-i\pi}$ (h) $e^{-5i\pi/4}$
3. Sea α un número complejo $\neq 0$. Demostrar que existen dos números complejos distintos cuyo cuadrado es α.
4. Sea α un número complejo $\neq 0$. Sea n un entero positivo. Demostrar que existen n números complejos distintos z, tales que $z^n = \alpha$. Escribir estos números complejos en la forma polar.
5. Sea $\alpha = 1$ en el ejercicio 4. Graficar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$, para $n = 2, 3, 4$ y 5.
6. Sea $a + bi$ un número complejo. Encontrar dos números reales x, y tales que $(x + iy)^2 = a + bi$, expresando x, y en términos de a y b.
7. Sea w un número complejo y supongamos que z es un número complejo tal que $e^z = w$. Describir todos los números complejos u tales que $e^u = w$.
8. ¿Cuáles son los números complejos z tales que $e^z = 1$?
9. Si θ es real, demostrar que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

§3. Funciones complejas

Sea S un conjunto de números reales. Una asociación tal que a cada elemento de S le hace corresponder un número complejo se llama **función compleja.** Por ejemplo, la asociación

$$\theta \mapsto e^{i\theta}$$

es una función compleja, definida para todos los números reales θ.

Sea F una función compleja definida sobre algún intervalo abierto. Podemos escribir F en la forma

$$F(t) = f(t) + ig(t),$$

donde f y g son funciones reales. Si $F(\theta) = e^{i\theta}$, entonces $f(\theta) = \cos\theta$ y $g(\theta) = \operatorname{sen}\theta$. Llamamos a f **parte real** de F y a g su **parte imaginaria.**

Por ejemplo, la parte real de la función compleja

$$t \mapsto t^2 + 1 + i(\cos t + e^t)$$

es la función $t \mapsto t^2 + 1$.

Si tanto la parte real como la parte imaginaria de F son derivables, entonces decimos que F es derivable y definimos

$$F'(t) = f'(t) + ig'(t),$$

que se obtiene derivando cada una de las componentes. Por ejemplo, si

$$F(t) = t^2 + 1 + i(\cos t + e^t)$$

entonces

$$F'(t) = 2t + i(-\operatorname{sen} t + e^t).$$

También escribiremos

$$\frac{dF(t)}{dt}$$

para indicar la derivada, en vez de $F'(t)$.

Las siguientes reglas para la derivación de funciones complejas se pueden verificar fácilmente:

(a) Sean F, G funciones complejas definidas sobre el mismo intervalo y ambas derivables. Entonces $F + G$ es derivable y $(F + G)' = F' + G'$. En otras palabras,

$$\frac{d(F + G)}{dt} = \frac{dF}{dt} + \frac{dG}{dt}.$$

Si α es un número complejo, entonces $(\alpha F)' = \alpha F'$, o sea

$$\frac{d(\alpha F)}{dt} = \alpha\frac{dF}{dt}.$$

(b) Sean F, G como antes. Entonces FG es derivable y

$$(FG)' = FG' + F'G,$$

o, en otras palabras,

$$\frac{d(FG)}{dt} = F\frac{dG}{dt} + \frac{dF}{dt}G.$$

Dejaremos la primera afirmación como ejercicio. Para demostrar la segunda, sea $F(t) = f_1(t) + if_2(t)$ y sea $G(t) = g_1(t) + ig_2(t)$. Entonces

$$FG = f_1g_1 - f_2g_2 + i(f_1g_2 + f_2g_1),$$

de donde

$$\begin{aligned}(FG)' = {} & f_1g_1' + f_1'g_1 - f_2g_2' - f_2'g_2 \\ & + i(f_1g_2' + f_1'g_2 + f_2g_1' + f_2'g_1).\end{aligned}$$

Si desarrollamos $F'G + FG'$ de acuerdo con la regla de la multiplicación de números complejos, encontraremos precisamente la misma expresión que acabamos de obtener para $(FG)'$, tal como se quería demostrar.

La integral también la definimos respecto a cada una de las componentes. Decimos que una función compleja

$$F(t) = f(t) + ig(t)$$

es continua si tanto f como g son continuas. En este caso definimos la integral indefinida

$$\int F(t)\,dt = \int f(t)\,dt + i\int g(t)\,dt,$$

y, análogamente, si f, g son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ definimos

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + i\int_a^b g(t)\,dt.$$

Tal como en el caso de las funciones reales, si F, G son funciones complejas definidas sobre un intervalo y tales que $F' = G'$, entonces existe un número complejo C tal que $F = G + C$. Así queda nuevamente determinada una integral indefinida que se diferencia en una constante (compleja, por supuesto). Esto se ve inmediatamente aplicando el resultado conocido a las partes real e imaginaria de F y G.

Ejercicios

1. Sea F una función compleja derivable. Demostrar que

$$\frac{d(e^{F(t)})}{dt} = F'(t)e^{F(t)}.$$

2. Sea α un número complejo $\neq 0$. Demostrar que

$$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}.$$

3. Sea n un entero $\neq 0$. Encontrar

$$\int_0^1 e^{2\pi int}\,dt.$$

4. Sea F una función compleja derivable definida sobre un intervalo. Si $F' = 0$, demostrar que F es constante. Demostrar también en forma detallada la última afirmación de esta sección.

APENDICE 1

ϵ y δ

En este apéndice se intenta mostrar la forma en que las nociones referentes a límites y sus propiedades se pueden explicar y demostrar en términos de las nociones y de las propiedades de los números. Entonces damos por sentado lo último y realizamos las demostraciones a partir de allí.

Subsiste el problema de mostrar la forma en que los números reales pueden ser definidos en términos de los números racionales, y los números racionales en términos de los enteros. Esto es muy extenso como para ser incluido en este libro.

Aparte de las reglas ordinarias de adición, multiplicación, sustracción, división (por números diferentes de cero), ordenación, positividad y desigualdades, hay una propiedad básica adicional que se cumple para los números reales. Esta propiedad será formulada en el §1. Entonces en nuestras demostraciones se emplean solamente estas propiedades.

Advertencia. El nivel de abstracción y el uso del lenguaje necesario para dominar el contenido de este apéndice, es considerablemente más elevado que el usado en el resto del libro. Tratamos de «demostrar» ciertas propiedades que son intuitivamente muy claras. Por tanto, el lector no debe tomar demasiado en serio este apéndice, a menos que tenga inclinación hacia lo teórico, o que desee tener una introducción sobre algunas herramientas necesarias del análisis, o sea un primer conocimiento que le permita tener algunas ideas en la mente para su uso futuro en cursos de mayor nivel donde las técnicas aquí descritas resultan esenciales, porque se necesitan estimadores más complicados cuando se trabaja en análisis avanzado. Es útil haber visto este material previamente, aun cuando no se lo pueda dominar en la primera vez. Es parte de nuestra psicología el hecho de que aprendemos por aproximaciones. Además, el conocimiento en determinado nivel sólo es comprendido plenamente cuando se lo usa en un subsiguiente nivel de mayor profundidad. Por tanto, el estudiar algunas cosas más arduas, aun cuando sólo se obtenga una comprensión limitada de ellas, hace posible comprender plenamente las cosas más fáciles.

§1. La mínima cota superior

Nos encontramos nuevamente con el problema del lugar en que debemos adentrarnos en la teoría. Podría ser largo y tedioso hacerlo prematuramente. Por ello, damos por conocido el contenido del capítulo I, §1 y §2. Allí se incluyen las operaciones ordinarias de adición y multiplicación, y las nociones de orden, positividad, números negativos y desigualdades. Quienes estén interesados en el desarrollo lógico de estas nociones, deben consultar algunos libros de análisis.

A una colección de números la llamaremos simplemente **conjunto** de números. Esto es más breve y es la terminología usual. Decimos que un conjunto es **no vacío** si tiene por lo menos un número. Al conjunto S' se le llama **subconjunto** de S, si todo elemento de S' es un elemento de S. En otras palabras, si S' es parte de S.

Sea S un conjunto no vacío de números. Diremos que S es **acotado superiormente,** si existe un número B tal que

$$x \leqq B$$

para todo x perteneciente a S. En este caso decimos que B es una **cota superior** de S.

Una **mínima cota superior** de S es una cota superior L tal que cualquier cota superior B de S satisface la desigualdad $B \geqq L$. Si M es otra mínima cota superior, entonces tenemos $M \geqq L$ y $L \geqq M$, por lo que $L = M$. En consecuencia, la mínima cota superior es única.

Se definen análogamente las nociones de acotado inferiormente y de máxima cota inferior. (El lector deberá hacerlo.).)

Ahora daremos ejemplos, suponiendo que el lector tiene una noción intuitiva de los números reales. Estos ejemplos sirven para aclarar los conceptos, pero no daremos demostraciones. Aunque éste es el inverso del orden lógico, es el orden psicológico apropiado.

Ejemplo. El conjunto de los enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$ no es acotado superiormente. Es acotado inferiormente. El número 1 es la máxima cota inferior.

Ejemplo. Sea S el conjunto de los números x tales que $0 \leqq x$ y $x^2 < 2$. Este conjunto es acotado inferiormente, por ejemplo por 0; también es acotado superiormente y, por cierto, 2 es una cota superior. De hecho, $\sqrt{2}$ es la mínima cota superior. Nótese que la mínima cota superior no está en el conjunto S, es decir, no es un elemento de S.

Ejemplo. Sea T el conjunto de los números x tales que $0 \leqq x$ y $x^2 \leqq 2$. Nuevamente, $\sqrt{2}$ es la mínima cota superior de T y es un elemento de T. Queda intuitivamente claro que T se diferencia de S solamente en que posee el elemento adicional $\sqrt{2}$.

Ejemplo. Sea U el conjunto de todos los números $1/n$, donde n toma todos los valores enteros positivos. Así, U es el conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$. Entonces U es acotado. El número 1 es su mínima cota superior y pertenece a U. El número 0 es su máxima cota inferior y no pertenece a U.

Los números reales satisfacen una propiedad que no se cumple en el conjunto de los números racionales, a saber:

Propiedad fundamental. *Todo conjunto no vacío S de números que es acotado superiormente tiene una mínima cota superior. Todo conjunto no vacío S de números que es acotado inferiormente tiene una máxima cota inferior.*

Proposición 1. *Sea a un número tal que*

$$0 \leqq a < \frac{1}{n}$$

para todo entero positivo n. Entonces a = 0. No existe un número b tal que $b \geqq n$ para todo entero positivo n.

Demostración. Supóngase que existe un número $a \neq 0$ tal que $a < 1/n$ para todo entero positivo n. Entonces $n < 1/a$ para todo entero positivo n. Así, para demostrar nuestra afirmación, es suficiente demostrar la segunda.

Supóngase que existe un número b tal que $b \geqq n$ para todo entero positivo n. Sea S el conjunto de los enteros positivos. Entonces S es acotado y, por tanto, tiene una mínima cota superior. Sea C esta mínima cota superior. Ningún número estrictamente menor que C puede ser una cota superior. Puesto que $0 < 1$, tenemos que $C < C + 1$, de donde $C - 1 < C$. Así, existe un entero positivo n tal que

$$C - 1 < n.$$

Esto implica que $C < n + 1$ y $n + 1$ es un entero positivo. Hemos contradicho nuestra suposición de que C es una cota superior para el conjunto de los enteros positivos, de modo que tal cota superior no puede existir.

Obsérvese que la proposición 1 demuestra que el conjunto de los enteros positivos no es acotado superiormente. Es razonable preguntarse si este tipo de propiedades obvias requiere realmente del axioma de la mínima cota superior para su demostración; la respuesta es *sí*. Se pueden construir sistemas que satisfacen todas las reglas ordinarias de adición, multiplicación, división (por elementos diferentes de cero), desigualdades, etc., tales que no se satisface el axioma de la mínima cota superior y tales que existe un elemento t en el sistema con la propiedad de que $n < t$ para todos los enteros positivos n. No deseamos alargar demasiado este apéndice y por ello no entraremos en la construcción de tales sistemas; pero probablemente es esclarecedor para el lector confirmar que la propiedad de la mínima cota superior era necesaria para demostrar la proposición 1.

Ejercicios

Determinar en cada caso si el conjunto es acotado superior o inferiormente. Describir, si existen, la mínima cota superior y la máxima cota inferior, sin dar demostraciones, usando solamente la intuición respecto a los números.

1. (a) El conjunto de todos los enteros positivos pares.
   (b) El conjunto de todos los enteros positivos impares.
   (c) El conjunto de todos los números racionales.
2. (a) El conjunto de todos los números x tales que $0 \leqq x$ y $x^3 < 5$.
   (b) El conjunto de todos los números x tales que $0 \leqq x$ y $x^3 \leqq 5$.
   (c) El conjunto de todos los números x tales que $x^2 \leqq 4$.
   (d) El conjunto de todos los números x tales que $2x - 7 < 4$.

3. Demostrar que existe un entero positivo N tal que si n es un entero $\geqq N$ entonces $3n > 150$.
4. Sea B un número positivo. Demostrar que existe un entero positivo N tal que si n es un entero $\geqq N$ entonces $5n > B$.
5. Sea S el conjunto de números x tales que $0 \leqq x$ y $x^2 \leqq 2$. Demostrar que la mínima cota superior de S es un número b tal que $b^2 = 2$. [*Sugerencia:* Demostrar que $b^2 > 2$ y $b^2 < 2$ son imposibles.]

§2. Límites

Sea S un conjunto de números y sea f una función definida para todos los números pertenecientes a S. Sea x_0 un número. Supondremos que S es **arbitrariamente cercano a** x_0, o sea que dado $\epsilon > 0$, existe un elemento x de S tal que $|x - x_0| < \epsilon$. Sea L un número. Diremos que $f(x)$ **tiende al límite** L **cuando** x **tiende a** x_0, si se satisface la siguiente condición:

Dado un número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para todo x perteneciente a S que satisface la condición

$$|x - x_0| < \delta$$

se tiene

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Si éste es el caso, escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

También podríamos parafrasear lo anterior de la siguiente manera: Escribimos

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$$

y decimos que **el límite de** $f(x_0 + h)$ **es** L **cuando** h **tiende a** 0 si se satisface la siguiente condición:
Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que siempre que h sea un número con $|h| < \delta$ y $x_0 + h$ perteneciente a S, entonces

$$|f(x_0 + h) - L| < \epsilon.$$

Observamos que nuestra definición de límite depende del conjunto S en que f esté definida. Así, debemos decir «límite con respecto a S». La siguiente proposición muestra que realmente esto no es necesario.

Proposición 2. *Sea S un conjunto de números arbitrariamente cercano a x_0 y sea S' un subconjunto de S que también es arbitrariamente cercano a x_0. Sea f una* *función definida sobre S. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad (\textit{respecto a } S)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = M \qquad (\textit{respecto a } S')$$

entonces $L = M$. En particular, el límite es único.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que siempre que x pertenece a S' y $|x - x_0| < \delta_1$, tenemos

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2},$$

y existe $\delta_2 > 0$ tal que siempre que $|x - x_0| < \delta_2$, entonces

$$|f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\,(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|L - M| \leqq |L - f(x) + f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, $|L - M|$ es menor que cualquier $\epsilon > 0$ y, por la proposición 1 del §1, debemos tener que $|L - M| = 0$, de donde

$$L - M = 0$$

y

$$L = M.$$

En la práctica, desde ahora en adelante omitiremos decir que x es un elemento de S. El contexto aclarará la situación en cada caso.

Además, en muchas de las subsiguientes demostraciones necesitaremos que se satisfagan varias desigualdades simultáneas, tal como en la anterior demostración en la que tuvimos desigualdades con δ_1 y δ_2. En cada caso usaremos un artificio similar, llamando δ al mínimo de $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ que sea necesario para que se cumpla cada una de las desigualdades deseadas. Así, al escribir las demostraciones omitiremos los $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ intermedios.

Observación. Supóngase que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|f(x)| < |L| + 1.$$

y

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M,$$

entonces $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x)$ *existe y es igual a* $L + M$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ (y x pertenece a S), tenemos

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Observamos que

$$|f(x) + g(x) - L - M| \leqq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \epsilon.$$

Esto demuestra que $L + M$ es el límite de $(f + g)(x)$ cuando x tiende a x_0.

Teorema 2. *Sea S un conjunto de números y sean f, g dos funciones definidas para todos los números de S. Sea* x_0 *un número. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M,$$

entonces existe $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)$ *y es igual a* LM.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, siempre que $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{|M| + 1}$$

$$|g(x) - M| < \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{|L| + 1}$$

$$|f(x)| < |L| + 1.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &\leqq |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| \\ &\leqq |f(x)|\,|g(x) - M| + |f(x) - L|\,|M| \\ &< (|L| + 1)\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{|L| + 1} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{|M| + 1}|M| \\ &\leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leqq \epsilon. \end{aligned}$$

Corolario 1. *Sea C un número y consideremos las mismas suposiciones del teorema anterior. Entonces*

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = CL.$$

Demostración. Es evidente.

Colorario. 2. *Sea la notación como en el teorema 2. Entonces*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M.$$

Demostración. Es evidente.

Teorema 3. *Sea S un conjunto de números y sea f una función definida para todos los números de S. Sea x_0 un número. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y $L \neq 0$, entonces existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$$

y es igual a $1/L$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ se tiene

$$|f(x) - L| < \frac{|L|}{2}$$

y también

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon |L|^2}{2}.$$

De la primera desigualdad obtenemos

$$|f(x)| \geqq |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}.$$

En particular, $f(x) \neq 0$ cuando $|x - x_0| < \delta$. Para tal x tenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| &= \frac{|L - f(x)|}{|f(x)L|} \\ &\leqq \frac{2}{|L|} \frac{|L - f(x)|}{|L|} \\ &< \frac{2}{|L|^2} \frac{\epsilon |L|^2}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Corolario. *Sean las hipótesis como en el teorema 2 y supongamos que $L \neq 0$. Entonces*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

existe y es igual a M/L.

Demostración. Usar el teorema 2 y el teorema 3.

Teorema 4. *Sea S un conjunto de números y sea f una función sobre S. Sea x_0 un número. Sea g una función sobre S tal que $g(x) \leqq f(x)$ para todo x de S. Supongamos que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = M.$$

Entonces $M \leqq L$.

Demostración. Sea $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Entonces $\varphi(x) \geqq 0$ para todo x de S. También

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = L - M$$

por el corolario 2 del teorema 2. Sea K este límite. Debemos demostrar que $K \geqq 0$. Supongamos que $K < 0$. Entonces $-K > 0$ y $|K| = -K$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|\varphi(x) - K| < \epsilon,$$

de donde

$$|\varphi(x)| - K < \epsilon.$$

Como $\varphi(x) \geqq 0$, tenemos que $-K < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. En particular, para todo entero positivo n tenemos que $-K < 1/n$. Pero $-K > 0$. Esto contradice la preposición 1 del §1.

Teorema 5. *Sea la notación como en el teorema 4 y supongamos que $M = L$. Sea ψ una función sobre S tal que*

$$g(x) \leqq \psi(x) \leqq f(x)$$

para todo x de S. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x)$$

existe y es igual a L (o M).

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|g(x) - L| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{4}.$$

También tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - \psi(x)| &\leqq |f(x) - g(x)| \\ &\leqq |f(x) - L + L - g(x)| \\ &\leqq |f(x) - L| + |L - g(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} |L - \psi(x)| &\leqq |L - f(x)| + |f(x) - \psi(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Teorema 6. *Sean S, T dos conjuntos de números, y sean f, g dos funciones definidas sobre S y T, respectivamente. Sea x_0 un número arbitrariamente cercano a S. Supongamos que para todo x de S tenemos que $f(x)$ pertenece a T, de modo que $g \circ f$ está definida. Supongamos que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe y es igual a un número y_0 arbitrariamente cercano a T. Supongamos que

$$\lim_{y \to y_0} g(y)$$

existe y es igual a L. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = L.$$

Demostración. Dado ϵ, existe δ tal que si y pertenece a T y

$$|y - y_0| < \delta$$

tenemos

$$|g(y) - L| < \epsilon.$$

Estando dado el anterior δ, existe δ_1 tal que si x pertenece a S y $|x - x_0| < \delta_1$, tenemos $|f(x) - y_0| < \delta$. De aquí se deduce que

$$|g(f(x)) - L| < \epsilon$$

con lo cual queda demostrada nuestra afirmación.

[*Nota:* El teorema 6 justifica el procedimiento de límite usado para demostrar la regla de la cadena.]

Esto completa las demostraciones de todas las proposiciones referentes a límites, que se formularon en el capítulo III.

Ejercicios

1. Sea g una función acotada sobre un conjunto de números S. Sea f una función sobre S, tal que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Demostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

2. Para un número arbitrario x, sea

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + nx}.$$

Encontrar el límite explícitamente. Demostrar todas las afirmaciones que se hagan.

3. (a) Sea $b > 1$ y escribamos $b = 1 + c$, con $c > 0$. Demostrar lo siguiente: Dado un número positivo B, existe un entero positivo N tal que si $n \geqslant N$, entonces $b^n > B$.
(b) Sea $0 < x < 1$. Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0.$$

(c) Si $-1 < x < 0$, ¿es también igual a 0 el límite indicado en (b)? En caso afirmativo, hacer una demostración. Observar lo que ocurre con un ejemplo, o sea, escribir los valores de x^n cuando $x = -1/2$ y $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

4. ¿Para qué números x existe el siguiente límite:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}\ ?$$

Dar explícitamente los valores $f(x)$ con los x para los cuales el límite existe.

5. Para $x \neq -1$, demostrar que existe el siguiente límite:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}.$$

(a) ¿Cuáles son los valores de $f(1)$, $f(1/2)$, $f(2)$?

(b) ¿Cuál es el $\lim_{x \to 1} f(x)$?

(c) ¿Cuál es el $\lim_{x \to 1} f(x)$?

6. Responder las mismas preguntas del ejercicio 5 si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^n - 1}{x^n + 1}\right)^2,$$

y $x \neq -1$.

7. Encontrar los siguientes límites, cuando $n \to \infty$:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\dfrac{3}{n^2}$ (c) $\dfrac{5}{n^{1/4}}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{n} + 1}$

8. Encontrar los siguientes límites:

(a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (b) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ (c) $\sqrt{n-5} - \sqrt{n}$

[*Sugerencia:* Racionalizar el «numerador».]

§3. Puntos de acumulación

Una **sucesión** es una función definida sobre un conjunto de enteros $\geqq 0$. Generalmente, este conjunto consta de todos los enteros positivos. En ese caso, la sucesión consta de números dados

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

para cada entero positivo, y denotamos la sucesión por $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Si el conjunto consta de todos los enteros $\geqq 0$, entonces denotamos la sucesión por $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión. Sea C un número. Decimos que C es un **punto de acumulación** de la sucesión, si dado $\epsilon > 0$ existen infinitos enteros n tales que

$$|a_n - C| < \epsilon.$$

Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión y sea L un número. Diremos que L es **un límite de la sucesión** si dado $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que para todo $n > N$ se cumple que

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

El límite es único. (La demostración es del mismo tipo que la empleada para límites de funciones.)

Diremos que la sucesión $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es **creciente** si $a_n \leqq a_{n+1}$ para todo entero positivo n.

Teorema 7. *Sea* $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *una sucesión creciente y supongamos que es acotada superiormente. Entonces la mínima cota superior L es un límite de la sucesión.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, el número $L - (\epsilon/2)$ no es una cota superior para la sucesión. Por tanto, existe algún número a_N tal que

$$L - (\epsilon/2) \leqq a_N.$$

Esta desigualdad también se satisface para todo $n > N$, porque la sucesión es creciente. Pero

$$a_n \leqq L$$

porque L es una cota superior. Así

$$|L - a_n| = L - a_n \leqq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

para todo $n > N$, con lo cual queda demostrada nuestra afirmación.

Corolario. *Sea* $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *una sucesión y sean A, B dos números tales que* $A \leqq a_n \leqq B$ *para todo entero positivo n. Entonces entre A y B existe un punto de acumulación C de la sucesión.*

Demostración. Para cada entero n, sea b_n la máxima cota inferior del conjunto de números $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Entonces $b_n \leqq b_{n+1} \leqq \ldots$, o sea que $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión creciente. Sea L su límite, como en el teorema 7. Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de que este límite es un punto de acumulación.

La noción límite de una sucesión se puede reducir al caso de los límites definidos previamente.

Sea S el conjunto de números

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

o sea el conjunto de los números que se pueden escribir en la forma $1/n$, donde n es un entero positivo.

Si $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión, llamemos f a una función definida sobre S por la regla

$$f(1/n) = a_n.$$

Entonces el lector podrá verificar inmediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

existe si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(h)$$

existe; en ese caso los dos límites son iguales. Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ **tiende hacia un número L cuando n se hace grande si**

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Así, las propiedades concernientes a los límites en el sentido del §2 dan lugar inmediatamente a las propiedades referentes a los límites de las sucesiones (por ejemplo, límites de sumas, productos, cocientes). Dejamos al lector la formulación correspondiente.

Ejercicios

1. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados, digamos $I_n = [a_n, b_n]$, donde $[a, b]$ representa al conjunto de los números x tales que $a \leqq x \leqq b$. Supóngase que los extremos izquierdos de los intervalos de la sucesión tienen valores crecientes, es decir

$$a_1 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots$$

y que los extremos derechos son decrecientes (o sea que $b_{n+1} \leqq b_n$ para todos los enteros positivos n). Sea $L(I_n)$ la longitud del intervalo I_n, o sea

$$L(I_n) = b_n - a_n.$$

Si

$$\lim_{n \to \infty} L(I_n) = 0,$$

demostrar que existe un punto c en cada intervalo I_n tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} a_n &= \lim_{n \to \infty} b_n \\ &= c. \end{aligned}$$

2. Sea c_n un elemento de I_n en el ejercicio 1. Bajo las mismas hipótesis del ejercicio 1, demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c.$$

§4. Funciones continuas

Sea f una función definida sobre un conjunto de números S. Sea x_0 un número perteneciente a S. Entonces S es arbitrariamente próximo a x_0. Decimos que f es

continua en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nótese que puede haber dos números a, b, con $a < x_0 < b$, tales que x_0 sea el único punto que pertenezca a la vez al intervalo y a S. (En este caso podemos decir que x_0 es un punto **aislado** de S.)

Se deduce inmediatamente de nuestra definición que si $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión de números de S, tales que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$

y f es continua en x_0, entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Es inmediato que la suma, el producto y el cociente de funciones continuas son también continuos. (En el cociente tenemos que suponer, por supuesto, que $f(x_0) \neq 0$.) Toda función constante es continua. La función $f(x) = x$ es continua para todo x. Esto se verifica en forma trivial. Por el teorema del cociente vemos que la función

$$f(x) = 1/x$$

(definida para $x \neq 0$) es continua.

Teorema 8. *Sean f, g dos funciones continuas tales que los valores de f están contenidos en el dominio de definición de g. Entonces $g \circ f$ es continua.*

Demostración. Sea x_0 un número en el cual f está definida y sea

$$y_0 = f(x_0).$$

Dado $\epsilon > 0$, como g es continua en y_0, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|y - y_0| < \delta_1$, entonces

$$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon.$$

Ahora bien, estando ya dado el anterior δ_1, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_1.$$

Por tanto,

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon,$$

quedando así demostrado el teorema.

Teorema 9. *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$.*

Entonces existe un punto c en el intervalo tal que $f(c)$ es un máximo y existe un punto d en el intervalo tal que $f(d)$ es un mínimo.

Demostración. Demostraremos primero que f es acotada, o sea que existe un número M tal que $|f(x)| \leqq M$ para todo x del intervalo.

Si f no es acotada, entonces para todo entero positivo n podemos encontrar un número x_n en el intervalo, tal que $|f(x_n)| > n$. La sucesión de estos x_n tiene un punto de acumulación C en el intervalo. Tenemos

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(C)| &\geqq |f(x_n)| - |f(C)| \\ &\geqq n - f(C). \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que siempre que se cumpla

$$|x_n - C| < \delta$$

tenemos $|f(x_n) - f(C)| < \epsilon$. Esto debe ocurrir para infinitos números n, puesto que C es un punto de acumulación. Así, nuestras proposiciones resultan contradictorias y, por tanto, llegamos a la conclusión de que la función es acotada.

Sea β la mínima cota superior del conjunto de valores $f(x)$ para todo x del intervalo. Entonces, dado un entero positivo n, podemos encontrar un número z_n en el intervalo, tal que

$$|f(z_n) - \beta| < \frac{1}{n}\cdot$$

Sea c un punto de acumulación de la sucesión de números $\{z_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Entonces $f(c) \leqq \beta$. Afirmamos que

$$f(c) = \beta$$

(esto demostrará nuestro teorema).

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que siempre que se cumpla $|z_n - c| < \delta$, tenemos

$$|f(z_n) - f(c)| < \epsilon.$$

Esto ocurre para infinitos n, porque c es un punto de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$. Pero

$$\begin{aligned} |f(c) - \beta| &\leqq |f(c) - f(z_n)| + |f(z_n) - \beta| \\ &< \epsilon + \frac{1}{n}\cdot \end{aligned}$$

Esto es verdad para todo ϵ y para un infinito número de enteros positivos n. Por tanto, $|f(c) - \beta| = 0$ y $f(c) = \beta$.

La demostración para el mínimo es similar y se deja como ejercicio.

Teorema 10. *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$. Sea $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$. Sea γ un número tal que $\alpha < \gamma < \beta$. Entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c) = \gamma$.*

Demostración. Sea S el conjunto de números x del intervalo tales que $f(x) \leqq \gamma$. Entonces S no es un conjunto vacío pues a le pertenece y b es una cota superior para S. Sea c su mínima cota superior. Entonces c pertenece al intervalo. Afirmamos que $f(c) = \gamma$. Si $f(c) < \gamma$, entonces $c \neq b$ y $f(x) < \gamma$ para todo $x > c$ suficientemente cercano a c, porque f es continua en c. Esto contradice el hecho de que c es una cota superior para S. Si $f(c) > \gamma$, entonces $c \neq a$ y $f(x) > \gamma$ para todo $x < c$ suficientemente cercano a c, nuevamente porque f es continua en c. Esto contradice el hecho de que c es una mínima cota superior para S. Concluimos que $f(c) = \gamma$, como se quería demostrar.

APENDICE 2

Inducción

En el desarrollo de varias demostraciones dimos un tipo de argumento «por pasos». Se puede formalizar este tipo de argumento que se llama **inducción.** Es una propiedad de los enteros que se da por sentada y que se formula de la siguiente manera:

Supóngase que deseamos demostrar cierta afirmación referente a los enteros positivos n. Sea $A(n)$ la afirmación concerniente al entero n. Para demostrar que dicha afirmación es válida para todo n, basta demostrar lo siguiente:

1. La afirmación $A(1)$ es verdadera (o sea que la afirmación referente al entero 1 es verdadera).

2. Suponiendo que la afirmación ha sido demostrada para todos los enteros positivos $\leqq n$, demostrarla para $n + 1$, o sea demostrar la veracidad de $A(n + 1)$.

El paso 2 es el procedimiento que nos permite pasar de un entero al siguiente y el paso 1 nos da un punto de partida. Ahora daremos ejemplos.

Ejemplo 1. Para todos los enteros $n \geqq 1$, tenemos

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Demostración. Por inducción. La afirmación $A(n)$ es la afirmación del teorema. Cuando $n = 1$, ella simplemente establece que

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2},$$

y es claramente verdadera. Supongamos ahora que la afirmación es verdadera para n. Entonces:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1).$$

Eliminando el factor $n + 1$, vemos que es igual a

$$(n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Entonces, dando por sentada la validez de $A(n)$, hemos demostrado que

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2},$$

lo cual no es otra cosa sino $A(n + 1)$. Esto demuestra nuestro teorema.

Ejemplo 2. Supongamos que existe una función f tal que

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Llamemos $f(1) = e$; deseamos demostrar que $f(n) = e^n$ para todo entero positivo n. Esto es verdad para $n = 1$. Por inducción, supongamos la validez del resultado para un entero $n \geqq 1$. Entonces

$$f(n + 1) = f(n)f(1) = e^n e = e^{n+1},$$

con lo cual queda demostrada nuestra afirmación.

Ejemplo. Usaremos la inducción para demostrar que

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

para todo entero $n \geqq 1$. Supongamos conocida la regla para la derivación de un producto, a saber $(fg)' = f'g + fg'$ y supongamos también que hemos demostrado el caso especial

$$\frac{dx}{dx} = 1.$$

Así, hemos supuesto la validez del resultado cuando $n = 1$. Por inducción, supongamos que el resultado ha sido demostrado para algún entero $n \geqq 1$. Sea $f(x) = x^n$ y sea $g(x) = x$. Entonces $(fg)(x) = x^{n+1}$. Por tanto

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\ &= nx^{n-1}x + x^n\\ &= nx^n + x^n\\ &= (n + 1)x^n,\end{aligned}$$

quedando así demostrado lo que deseábamos.

Ejercicios

1. Demostrar que para todos los enteros $n \geqq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

2. Demostrar que para todos los enteros $n \geqq 1$,

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$

3. Demostrar que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}(4n\text{t} - n).$$

4. Demostrar que $n(n^2+5)$ es divisible por 6 para todos los enteros $n \geqq 1$.

5. Demostrar que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2n}) - \frac{1-x^{2n+1}}{1-x}.$$

6. Si $f_1, \ldots, f_n$ son funciones derivables, demostrar por inducción que

$$(f_1 \ldots f_n)' = f_1'f_2 \ldots f_n + f_1f_2' \ldots f_n + \ldots + f_1 \ldots f_n - {}_1f_n'.$$

7. (a) Sea f una función tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$. Demostrar que

$$f(a^n) = nf(a)$$

para todos los enteros positivos n.

(b) Sea f una función tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Demostrar que $f(na) = nf(a)$ para todos los enteros positivos n.

(c) Sea f una función tal que $f(xy) = f(x)f(y)$. Demostrar que $f(a^n) = f(a)^n$ para todos los enteros positivos n.

8. Sea $\binom{n}{k}$ el coeficiente binomial, definido por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, donde n, k son enteros $\geqq 0$, $0 \leqq k \leqq n$ y $0! = 1$ (por definición). Demostrar las siguientes igualdades:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (para $k > 0$)

9. Demostrar por inducción que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

APENDICE 3

Seno y coseno

En nuestro curso de cálculo dimos definiciones geométricas para el seno y el coseno, y demostraciones geométricas para los teoremas referentes a sus derivadas. También vimos el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

en el cual se basaron estas demostraciones, empleando gráficas. Para las otras funciones mostramos la forma de dar las definiciones en términos que involucraban solamente las propiedades de los números (reales). Tales definiciones se llaman **analíticas.** Por supuesto, no hay nada malo en usar gráficas, y sería irracional tener inhibiciones acerca de ellas; pero es razonable preguntar si es posible desarrollar la teoría del seno y del coseno sin recurrir a la intuición geométrica, o sea dar para estas nociones definiciones puramente analíticas, y demostrar sus propiedades también en forma totalmente analítica.

De hecho, en el capítulo XV ya hemos demostrado que usando series adecuadas podemos obtener funciones f y g tales que

$$f' = g \quad \text{y} \quad g' = -f$$

y $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Usando solamente las propiedades que acabamos de establecer, desarrollaremos toda la teoría del seno y del coseno, basada únicamente en el uso del teorema del valor medio y sus aplicaciones (para las funciones crecientes y decrecientes) y en el teorema del valor intermedio que se demostró en el apéndice 1. Así, lo que sigue constituye una aplicación teórica interesante del teorema del valor medio.

Para comenzar, tenemos una relación general

$$f(x)^2 + g(x)^2 = 1$$

para todo x. Esto se demuestra derivando el lado izquierdo de la igualdad. Obtenemos

$$2ff' + 2gg' = 2fg - 2gf = 0.$$

Por tanto, el lado izquierdo es constante; substituyendo $x = 0$ vemos que esta constante es igual a 1, como se deseaba.

Proposición 1. *Existe un y solamente un par de funciones f, g que son derivables y que satisfacen*

$$f' = g \quad \text{y} \quad g' = -f,$$

y para las cuales $f(0) = 0$, $g(0) = 1$.

Demostración. Sean f_1, g_1 funciones tales que

$$f_1' = g_1 \quad \text{y} \quad g_1' = -f_1.$$

Derivando las funciones $fg_1 - f_1g$ y $ff_1 + gg_1$ obtenemos 0 en ambos casos. Por tanto, existen números a, b tales que

$$fg_1 - f_1g = a$$
$$ff_1 + gg_1 = b.$$

Multipliquemos la primera ecuación por f, la segunda por g y sumemos. Multipliquemos la segunda ecuación por f, la primera por g y restemos. Usando la relación $f^2 + g^2 = 1$, obtenemos

$$(*) \qquad \begin{aligned} g_1 &= af + bg \\ f_1 &= bf - ag. \end{aligned}$$

Si admitimos que $f_1(0) = 0$ y $g_1(0) = 1$, obtenemos los valores $a = 0$ y $b = 1$. Esto demuestra que $f_1 = f$ y que $g_1 = g$, como queríamos demostrar.

En vista de la proposición 1, definimos las funciones f y g de esa proposición como las funciones **seno** y **coseno**, respectivamente, y las denotamos por sen y cos.

Proposición 2. *Para todo par de números x, y tenemos:*

(1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$,
(2) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$,
(3) $\cos(-x) = \cos x$,
(4) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$,
(5) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

Demostración. La primera fórmula ya ha sido demostrada. Para demostrar cada par de las siguientes fórmulas hacemos una elección conveniente de las funciones f_1, g_1 y aplicamos las ecuaciones (*) de la demostración de unicidad. Por ejemplo, para demostrar (2) y (3), tomamos

$$f_1(x) = \cos\ -x) \quad \text{y} \quad g_1(x) = \operatorname{sen}(-x).$$

Entonces obtenemos números a, b como en la demostración de unicidad, tales que las ecuaciones (*) se satisfacen. Tomando los valores de estas funciones en 0, encontramos ahora que $b = 0$ y $a = -1$. Esto demuestra lo que deseábamos. Para demostrar (4) y (5) hacemos que y sea un número fijo y tomamos

$$f_1(x) = \operatorname{sen}(x + y) \quad \text{y} \quad g_1(x) = \cos(x + y).$$

Determinamos como antes las constantes a, b en las ecuaciones (*) y obtenemos $a = -\operatorname{sen} y$, $b = \cos y$. Con esto se obtienen las fórmulas (4) y (5).

Como las funciones sen y cos son derivables, y como sus derivadas se expresan en términos de cos y sen, se deduce que son funciones infinitamente derivables. En particular son funciones continuas.

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para todo x, se deduce que los valores de sen y cos están entre -1 y 1. Por supuesto, aún no sabemos si sen y cos toman todos esos valores. Esto será demostrado posteriormente.

Como la derivada de sen x en 0 es igual a 1, y como esta derivada es continua, se deduce que la derivada de sen x (que es $\cos x$) es > 0 para todos los números x en algún intervalo abierto al cual pertenece 0. Por tanto, sen es estrictamente creciente en ese intervalo y es estrictamente positivo para todo $x > 0$ en ese intervalo.

Ahora demostraremos que existe un número $x > 0$ *tal que* $\operatorname{sen} x = 1$. En vista de la relación entre sen y cos, esto equivale a demostrar que existe un número $x > 0$ tal que $\cos x = 0$.

Supongamos que no existe tal número. Como cos es continua, llegamos a la conclusión de que $\cos x$ no puede ser negativo para ningún valor de $x > 0$ (por el teorema del valor intermedio). Luego sen es estrictamente creciente para todo $x > 0$ y cos es estrictamente decreciente para todo $x > 0$. Sea $a > 0$. Entonces

$$0 < \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a < \cos^2 a.$$

Por inducción se ve que $\cos(2^n a) < (\cos a)^{2n}$ para todos los enteros $n > 0$. Entonces $\cos(2^n a)$ tiende a 0 cuando n se hace muy grande, porque $0 < \cos a < 1$. Puesto que cos es estrictamente decreciente para $x > 0$, se deduce que $\cos x$ tiende a 0 cuando x se hace muy grande y, por tanto, sen x tiende a 1. En particular, existe un número $b > 0$ tal que

$$\cos b < \tfrac{1}{4} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} b > \tfrac{1}{2}.$$

Entonces $\cos 2b = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b < (1/4)^2 - (1/2)^2 < 0$, lo cual es una contradicción que prueba que existe un número $x > 0$ tal que $\operatorname{sen} x = 1$, $\cos x = 0$.

El conjunto de los números $x > 0$ tales que $\cos x = 0$ (o equivalentemente, $\operatorname{sen} x = 1$) es no vacío y acotado inferiormente. Sea c su máxima cota inferior. Por continuidad, debemos tener que $\cos c = 0$. **Definimos** π como el número $2c$. Así $c = \pi/2$. (Seguimos los pasos de los griegos. Desafortunadamente, hubiera sido más práctico definir π como igual a $4c$. Esto hubiera eliminado el factor extraño 2 que aparece en casi todas las fórmulas matemáticas en que aparece π. Sin embargo, es ya muy tarde en la historia para cambiar la notación.) Es claro que $c > 0$ y, por la definición de máxima cota inferior, no existe un número x tal que

$$0 \leqq x < \pi/2$$

y tal que $\cos x = 0$ o $\operatorname{sen} x = 1$.

Por el teorema del valor intermedio, se deduce que para $0 \leqq x \leqq \pi/2$ se tiene que $0 \leqq \operatorname{sen} x < 1$ y $0 \leqq \cos x < 1$. Sin embargo, por definición,

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1.$$

Usando la fórmula de la adición podemos ahora encontrar

$$\operatorname{sen}\pi = 0, \qquad \cos\pi = -1, \qquad \operatorname{sen} 2\pi = 0, \qquad \cos 2\pi = 1.$$

Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Las otras se demuestran en forma similar.

Proposición 3. *Para todo x tenemos:*

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Demostración. Usar (4) y (5) en la proposición 2, conjuntamente con los valores que hemos encontrado anteriormente.

Ahora usaremos sistemáticamente estas relaciones para investigar el comportamiento de sen y cos entre 0 y 2π.

Proposición 4. *Las funciones sen y cos tienen el comportamiento descrito en la siguiente tabla. Usamos «e.c.» y «e.d.» para abreviar «estrictamente creciente» y «estrictamente decreciente», respectivamente.*

	$0 \leqq x \leqq \pi/2$	$\pi/2 \leqq x \leqq \pi$	$\pi \leqq x \leqq 3\pi/2$	$3\pi/2 \leqq x \leqq 2\pi$
sen	e.c. *de* 0 *a* 1	e.d. *de* 1 *a* 0	e.d. *de* 0 *a* −1	e.c. *de* −1 *a* 0
cos	e.d. *de* 1 *a* 0	e.d. *de* 0 *a* −1	e.c. *de* −1 *a* 0	e.c. *de* 0 *a* 1

Demostración. El comportamiento en la primera columna ya ha sido demostrado en el curso de nuestra discusión referente a la definición de $\pi/2$. Consideremos la segunda columna. El comportamiento de sen en el intervalo indicado proviene de la proposición 3 (es igual al comportamiento de cos en la columna precedente). En ese intervalo la derivada de cos es negativa y cos es estrictamente decreciente. Además, cos decrece de 0 a -1, puesto que siempre debemos tener $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Para determinar el comportamiento en la tercera y en la cuarta columnas, podemos usar las relaciones de la proposición 3, es decir

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x.$$

Vemos que las gráficas de las funciones sen y cos en la tercera y cuarta columnas son similares a las de la primera y segunda, excepto que están invertidas respecto al eje x.

Una función f se llama **periódica** y un número $s \neq 0$ se llama período, si $f(x+s) = f(x)$ para todo número x. Por la proposición 3, vemos que 2π es un período para sen y cos.

Proposición 5. *Las funciones sen y cos son periódicas. Los números $2n\pi$ (n igual a un entero) son períodos y todo período es igual a $2n\pi$ para algún entero n.*

Demostración. Sean s_1, s_2 períodos para la función f. Entonces

$$f(x + s_1 + s_2) = f(x + s_1) = f(x)$$

de modo que $s_1 + s_2$ es un período. Si s es un período, entonces

$$f(x) = f(x - s + s) = f(x - s),$$

de modo que $-s$ es también un período. Puesto que 2π es un período, se deduce por inducción que $2n\pi$ es también un período para todos los enteros $n \geqslant 1$; por tanto, también lo es para todos los enteros n.

Sea s un período para sen. Consideremos el conjunto de los enteros m tales que $2m\pi \leqslant s$. Tomando m negativo y suficientemente grande se encuentra que este conjunto no es vacío y que es acotado superiormente por $s/2\pi$. Sea n su mínima cota superior. Entonces n es un entero y $2n\pi \leqslant s$ pero $2(n + 1)\pi > s$. Sea $t = s - 2n\pi$. Entonces t es un período y $0 \leqslant t < 2\pi$. Debemos tener

$$\operatorname{sen}(0 + t) = \operatorname{sen} 0 = 0,$$
$$\cos(0 + t) = \cos 0 = 1.$$

En la tabla de la proposición 4 vemos que esto es posible solamente si $t = 0$, como queríamos demostrar.

Las anteriores proposiciones nos dan todas las propiedades usuales de sen y cos.

Recordemos que se dice que un punto (a, b) del espacio bidimensional está en la circunferencia unitaria, si $a^2 + b^2 = 1$. Vemos que para cualquier número x, el punto $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ está en la circunferencia unitaria.

Proposición 6. *Dado un punto (a, b) de la circunferencia unitaria del espacio bidimensional, existe un único número t tal que $0 \leqslant t < 2\pi$ y tal que $a = \cos t$, $b = \operatorname{sen} t$.*

Demostración. Consideremos cuatro casos diferentes según que a, b sean $\geqslant 0$ o que sean $\leqslant 0$. En cualquier caso tanto a como b están entre -1 y 1.

Consideremos, por ejemplo, el caso en que $-1 \leqslant a \leqslant 0$ y $0 \leqslant b \leqslant 1$. En la tabla de la proposición 4 vemos que hay solamente una columna posible en la que podríamos encontrar un valor de t que satisfaga nuestros requerimientos; esa columna es la segunda.

Por el teorema del valor intermedio sabemos que existe un número t tal que

$$\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$$

y $\operatorname{sen} t = b$. Puesto que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - b^2 = a^2$ y puesto que $\cos x$ y a son ambos $\leqslant 0$ en este intervalo, se deduce que también debemos tener $\cos t = a$. Esto demuestra lo que deseábamos.

Los otros casos se tratan en una forma completamente similar, y se pueden dejar para el lector.

Con esto concluye nuestra teoría del seno y del coseno. Nótese que hemos parametrizado la circunferencia en la forma usual, o sea que tenemos una asociación

$$t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

que a cada número t le hace corresponder un punto de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen del plano. En términos de números complejos, esta no es otra sino la asociación

$$t \longmapsto e^{it}$$

que se discutió en el texto.

En cuanto al límite de $(\operatorname{sen} h)/h$, nótese que no es otra cosa sino el límite del cociente de Newton

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h},$$

y puesto que el seno es derivable, sabemos que este límite es igual a

$$\operatorname{sen}'(0) = \cos 0 = 1.$$

Así obtenemos este límite en una forma particularmente fácil.

APENDICE 4

Física y matemática

La matemática consiste en el descubrimiento y la descripción de ciertos objetos y estructuras. Es esencialmente imposible dar una descripción que abarque a todos esos objetos y estructuras. Luego, en lugar de tal definición, diremos simplemente que los objetos que estudia la matemática, tal como la conocemos, son los que se encuentran en las revistas de matemática de los dos últimos siglos. Hay muchas razones para estudiar estos objetos, entre las cuales hay razones estéticas (a algunas personas les resultan agradables) y razones prácticas (algunos resultados son aplicables).

La física, por otro lado, consiste en la descripción del mundo empírico mediante las estructuras matemáticas. El mundo empírico es el mundo con el cual entramos en contacto a través de nuestros sentidos, mediante experimentos, mediciones, etc. Lo que caracteriza a un buen físico es su habilidad para elegir, entre muchas estructuras y objetos matemáticos, aquellos que se pueden usar para describir el mundo empírico. Por supuesto, las afirmaciones anteriores deben ser aclaradas en dos sentidos: primero, la descripción de situaciones físicas mediante estructuras matemáticas sólo puede hacerse dentro del grado de precisión que permitan los aparatos de experimentación. Segundo, la descripción deberá satisfacer ciertos criterios de tipo estético (simplicidad, elegancia). Después de todo, una lista completa de la totalidad de los resultados de los experimentos que han sido realizados sería una descripción del mundo físico; pero otra cosa muy distinta es enunciar un solo principio general que involucre simultáneamente todos los resultados de esos experimentos.

Por razones psicológicas, es imposible (para la mayoría de las personas) aprender ciertas teorías matemáticas sin ver primero una interpretación geométrica o física. Por eso en este libro antes de introducir una noción matemática hemos dado frecuentemente alguna de sus interpretaciones geométricas o físicas. Sin embargo, no deben confundirse estas dos cosas. Así, podemos hacer dos columnas, como se muestra en la siguiente página.

Por lo que concierne al desarrollo lógico de nuestro curso, podríamos omitir completamente la segunda columna. Sin embargo, la segunda columna se usa para muchos fines: para servir como motivación de los conceptos de la primera columna (porque nuestro cerebro es de tal naturaleza que necesita de la segunda columna para comprender la primera); para dar aplicaciones de la primera columna, aparte de la satisfacción puramente estética (que pueden sentir aquellos a quienes les agrada la materia).

Matemática	Física y geometría
números	puntos de una recta
derivada	pendiente de una recta razón de cambio
$df/dx = Kf(x)$	decreciente exponencial
integral	área trabajo momentos

De todos modos, es importante tener en mente que la derivada, como límite de

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

y la integral, como un número único entre la suma superior y la inferior, no deben ser confundidas con una pendiente o con un área, respectivamente. Es simplemente un hábito de nuestra mente el interpretar las nociones matemáticas en términos geométricos o físicos. Además, es frecuente que asignemos varias interpretaciones a la misma noción matemática. (Por ejemplo, la integral puede ser interpretada como un área o como el trabajo efectuado por una fuerza.)

Y, a propósito, las observaciones anteriores que se refieren a la física y a la matemática, no pertenecen en realidad ni al dominio de la física ni al de la matemática sino al de la filosofía.

Respuestas a los ejercicios

Estoy muy agradecido a Tony Petrello por las respuestas a los ejercicios.

Capítulo I, §2

1. $-3 < x < 3$ **2.** $-1 \leqq x \leqq 0$ **3.** $-\sqrt{3} \leqq x \leqq -1$ ó $1 \leqq x \leqq \sqrt{3}$
4. $x < 3$ ó $x > 7$ **5.** $-1 < x < 2$ **6.** $x < -1$ ó $x > 1$
7. $-5 < x < 5$ **8.** $-1 \leqq x \leqq 0$ **9.** $x \geqq 1$ ó $x = 0$ **10.** $x \leqq -10$ ó $x = 5$ **11.** $x \leqq -10$ ó $x = 5$ **12.** $x \geqq 1$ ó $x = -\frac{1}{2}$ **13.** $x < -4$
14. $-5 < x < -3$ **15.** $-3 < x < -2$ y $-2 < x < -1$
16. $-2 < x < 2$ **17.** $-2 < x < 8$ **18.** $2 < x < 4$ **19.** $-4 < x < 10$
20. $x < -4$ y $x > 10$ **21.** $x < -10$ y $x > 4$

Capítulo I, §3

1. $\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}$ **2.** $\dfrac{1}{(2x+1)}$ **3.** 0, 2, 108 **4.** $2z - z^2, 2w - w^2$
5. $x \neq \sqrt{2}$ ó $-\sqrt{2}$. $f(5) = \frac{1}{23}$ **6.** Todo x. $f(27) = 3$
7. (a) 1 (b) 1 (c) -1 (d) -1 **8.** (a) 1 (b) 4 (c) 0 (d) 0
9. (a) -2 (b) -6 (c) $x^2 + 4x - 2$ **10.** $x \geqq 0, 2$
11. (a) impar (b) par (c) impar (d) impar
13. Si $f(x)$ es cualquier función definida para todos los valores reales de x, $f(x)$ se puede escribir como $f(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} h(x)$ donde $g(x)$, $h(x)$ son como en el ejercicio 12.

Capítulo I, §4

1. 8 y 9 **2.** $\frac{1}{5}$ y -1 **3.** $\frac{1}{16}$ y 2 **4.** $\frac{1}{9}$ y $2^{1/3}$ **5.** $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{2}$
6. 9 y 8 **7.** $-\frac{1}{3}$ y -1 **8.** $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ **9.** 1 y $-\frac{1}{4}$ **10.** $-\frac{1}{512}$ y $\frac{1}{3}$

Capítulo II, §1

3. x negativo, y positivo **4.** x negativo, y negativo

Capítulo II, §3

5. $y = -\frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$ **6.** $y = -\frac{3}{2}x + 5$ **7.** $x = \sqrt{2}$
8. $y = \dfrac{9}{\sqrt{3}+3}x + 4 - \dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}$ **9.** $y = 4x - 3$ **10.** $y = -2x + 2$
11. $y = -\frac{1}{2}x + 3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **12.** $y = \sqrt{3}\,x + 5 + \sqrt{3}$ **19.** $-\frac{1}{4}$ **20.** -8
21. $2 + \sqrt{2}$ **22.** $\frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})$ **23.** $y = (x - \pi)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2} - \pi}\right) + 1$
24. $y = (x - \sqrt{2})\left(\dfrac{\pi - 2}{1 - \sqrt{2}}\right) + 2$ **25.** $y = -(x + 1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{2} + 1}\right) + 2$

26. $y = (x + 1)(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$ **29.** (a) $x = -4, y = -7$
(b) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}$ (c) $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{7}{3}$ (d) $x = -6, y = -5$

Capítulo II, §4

1. $\sqrt{97}$ **2.** $\sqrt{2}$ **3.** $\sqrt{52}$ **4.** $\sqrt{13}$ **5.** $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ **6.** $(4, -3)$ **7.** 5 y 5
8. $(-2, 5)$ **9.** 5 y 7

Capítulo II, §7

5. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ **6.** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$
7. $(x + 1)^2 + y^2 = 3$ **8.** $y + \frac{25}{8} = 2(x + \frac{1}{4})^2$ **9.** $y - 1 = (x + 2)^2$
10. $y + 4 = (x - 1)^2$ **11.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$
12. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$ **13.** $x + \frac{25}{8} = 2(y + \frac{1}{4})^2$
14. $x - 1 = (y + 2)^2$

Capítulo III, §1

1. 4 **2.** -2 **3.** 2 **4.** $\frac{3}{4}$ **5.** $-\frac{1}{4}$ **6.** 0 **7.** 4 **8.** 6 **9.** 3 **10.** 12 **11.** 2
12. 3 **13.** a

Capítulo III, §2

	Línea tangente en
1. $2x$	$y = 4x - 3$
2. $3x^2$	$y = 12x - 16$
3. $6x^2$	$y = 24x - 32$
4. $6x$	$y = 12x - 12$
5. $2x$	$y = 4x - 9$
6. $4x + 1$	$y = 9x - 8$
7. $4x - 3$	$y = 5x - 8$
8. $\frac{3x^2}{2} + 2$	$y = 8x - 8$
9. $-\frac{1}{(x + 1)^2}$	$y = -\frac{1}{9}x + \frac{5}{9}$
10. $-\frac{2}{(x + 1)^2}$	$y = -\frac{2}{9}x + \frac{10}{9}$

11. Las pendientes son 4, 12, 24, 12, 4, 9, 5, 8, $-\frac{1}{9}$, $-\frac{2}{9}$. Las líneas tangentes en el punto $x = 2$ se indican cerca del problema correspondiente.
12. -1. Derivada izquierda -1. No existe derivada derecha.
13. No. $f'(x)$ existe para todos los valores de x.
14. Derivada izquierda 0. No existe derivada derecha. $f'(x) = 0$ si $x < 0$ y $f'(x) = 1$ si $x > 1$.
15. 0, 0, 0

Capítulo III, §3

1. $4x + 3$ **2.** $-\frac{2}{(2x + 1)^2}$ **3.** $\frac{1}{(x + 1)^2}$ **4.** $2x + 1$ **5.** $-\frac{1}{(2x - 1)^2}$

6. $9x^2$ **7.** $4x^3$ **8.** $5x^4$ **9.** $6x^2$ **10.** $\frac{3x^2}{2} + 1$

Capítulo III, §4

1. $x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$ **2.** $4x^3$

3. (a) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ (b) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$ (c) $\frac{7}{6}x^{1/6}$ **4.** $y = 9x - 8$

5. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, pendiente $\frac{1}{3}$ **6.** $y = \frac{-3}{2^9}x + \frac{7}{32}$, pendiente $\frac{-3}{2^9}$

7. $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$, pendiente $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

8. (a) $\frac{1}{4}5^{-3/4}$ (b) $-\frac{1}{4}7^{-5/4}$ (c) $\sqrt{2}\,(10^{\sqrt{2}-1})$ (d) $\pi 7^{\pi-1}$

Capítulo III, §1

1. $\frac{2}{3}x^{-2/3}$ **2.** $55x^{10}$ **3.** $-\frac{3}{8}x^{-7/4}$ **4.** $21x^2 + 8x$ **5.** $-25x^{-2} + 6x^{-1/2}$

6. $\frac{6}{5}x - 16x^7$ **7.** $(x^3 + x) + (3x^2 + 1)(x - 1)$

8. $(2x^2 - 1)4x^3 + 4x(x^4 + 1)$ **9.** $(x + 1)(2x + \frac{15}{2}x^{1/2}) + (x^2 + 5x^{3/2})$

10. $(2x - 5)(12x^3 + 5) + 2(3x^4 + 5x + 2)$

11. $(x^{-2/3} + x^2)\left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + (-\frac{2}{3}x^{-5/3} + 2x)\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$

12. $(2x + 3)(-2x^{-3} - x^{-2}) + 2(x^{-2} + x^{-1})$

13. $\frac{9}{(x + 5)^2}$ **14.** $\frac{(-2x^2 + 2)}{(x^2 + 3x + 1)^2}$

15. $\frac{(t + 1)(t - 1)(2t + 2) - (t^2 + 2t - 1)2t}{(t^2 - 1)^2}$

16. $\frac{(t^2 + t - 1)(-5/4)t^{-9/4} - t^{-5/4}(2t + 1)}{(t^2 + t - 1)^2}$

17. $\frac{5}{49}$. $y = \frac{5}{49}t + \frac{4}{49}$ **18.** $\frac{1}{2}$. $y = \frac{1}{2}t$

Capítulo III, §6

1. $8(x + 1)^7$ **2.** $\frac{1}{2}(2x - 5)^{-1/2} \cdot 2$ **3.** $3(\operatorname{sen} x)^2 \cos x$ **4.** $5(\log x)^4 \left(\frac{1}{x}\right)$

5. $(\cos 2x)2$ **6.** $\frac{1}{x^2 + 1}(2x)$ **7.** $e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x)$ **8.** $\frac{1}{e^x + \operatorname{sen} x}(e^x + \cos x)$

9. $\cos\left(\log x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ **10.** $\frac{\operatorname{sen} 2x - (x + 1)(\cos 2x)2}{(\operatorname{sen} 2x)^2}$

11. $3(2x^2 + 3)^2(4x)$ **12.** $-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 5x)(\cos 5x)5$ **13.** $\frac{1}{\cos 2x}(-\operatorname{sen} 2x)2$

14. $\cos((2x + 5)^2)2(2x + 5)2$ **15.** $\cos(\cos(x + 1))(-\operatorname{sen}(x + 1))$

16. $(\cos e^x)e^x$ **17.** $-\frac{1}{(3x - 1)^8}[4(3x - 1)^3] \cdot 3$ **18.** $-\frac{1}{(4x)^6} \cdot 3(4x)^2 \cdot 4$

19. $-\frac{1}{(\operatorname{sen} 2x)^4}2(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x) \cdot 2$ **20.** $-\frac{1}{(\cos 2x)^4}2(\cos 2x)(-\operatorname{sen} 2x)2$

21. $-\dfrac{1}{(\operatorname{sen} 3x)^2}\cos 3x\cdot 3$ 22. $-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$ 23. $(x^2+1)e^x+2xe^x$

24. $(x^3+2x)\cos 3x\cdot 3+(3x^2+2)\operatorname{sen} 3x$

25. $-\dfrac{1}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}(\cos x-\operatorname{sen} x)$ 26. $\dfrac{2e^x\cos 2x-(\operatorname{sen} 2x)e^x}{e^{2x}}$

27. $\dfrac{(x^2+3)/x-(\log x)(2x)}{(x^2+3)^2}$ 28. $\dfrac{\cos 2x-(x+1)(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2}{\cos^2 2x}$

29. $(2x-3)(e^x+1)+2(e^x+x)$ 30. $(x^3-1)(e^{3x}\cdot 3+5)+3x^2(e^{3x}+5x)$

31. $\dfrac{(x-1)3x^2-(x^3+1)}{(x-1)^2}$ 32. $\dfrac{(2x+3)2x-(x^2-1)2}{(2x+3)^2}$

33. $2(x^{4/3}-e^x)+(\frac{4}{3}x^{1/3}-e^x)(2x+1)$

34. $(\operatorname{sen} 3x)\frac{1}{4}x^{-3/4}+3(\cos 3x)(x^{1/4}-1)$ 35. $[\cos(x^2+5x)](2x+5)$

36. $e^{3x^2+8}(6x)$ 37. $\dfrac{-1}{[\log(x^4+1)]^2}\cdot\dfrac{1}{x^4+1}\cdot 4x^3$

38. $\dfrac{-1}{[\log(x^{1/2}+2x)]^2}\,\dfrac{1}{(x^{1/2}+2x)}(\frac{1}{2}x^{-1/2}+2)$ 39. $\dfrac{2e^x-2xe^x}{e^{2x}}$

Capítulo III, §7

1. $18x$ 2. $5(x^2+1)^4\cdot 2+20(x^2+1)^3 4x^2$ 3. 0 4. 7! 5. 0 6. 6
7. $-\cos x$ 8. $\cos x$ 9. $-\operatorname{sen} x$ 10. $-\cos x$ 11. $\operatorname{sen} x$ 12. $\cos x$

Capítulo III, §8

1. (a) 1/6 (b) 0 (c) Indefinida 2. 0 3. 320 pie/seg^2 4. 0 5. 240 pulg^3/seg
6. 36π pulg^3/seg 7. $2\pi r, \dfrac{\pi d}{2}, \dfrac{c}{2\pi}$ 8. $-3/16$ unidades/seg
9. (a) $\frac{4}{3}$ pie/seg (b) 1 pie/seg 10. (a) $\frac{5}{3}$ pie/seg (b) 2 pie/seg

Ejercicios suplementarios

Capítulo III, Sumas, productos y cocientes

1. $9x^2-4$ 3. $2x+1$ 5. $\frac{5}{2}x^{3/2}-\frac{5}{2}x^{-7/2}$ 7. $x^2-1+(x+5)(2x)$
9. $(\frac{3}{2}x^{1/2}+2x)(x^4-99)+(x^{3/2}+x^2)(4x^3)$
11. $(4x)\left(\dfrac{1}{x^2}+4x+8\right)+(2x^2+1)\left(\dfrac{-2}{x^3}+4\right)$
13. $(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2)$
15. $3x^2(x^2+1)(x+1)+x^3(2x)(x+1)+(x^3)(x^2+1)$
17. $\dfrac{-2}{(2x+3)^2}$ 19. $\dfrac{5(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2)^2}$ 21. $\dfrac{-2(x+1)+2x}{(x+1)^2}$
23. $\dfrac{(x+1)(x-1)3(\frac{1}{2}x^{-1/2})-3x^{1/2}[(x-1)+(x+1)]}{(x+1)^2(x-1)^2}$

25. $\dfrac{(x^2+1)(x+7)(5x^4)-(x^5+1)((x^2+1)+(2x)(x+7))}{(x^2+1)^2(x+7)^2}$

27. $\dfrac{(1-x^2)(3x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}$ 29. $\dfrac{(x^2+1)(2x-1)-(x^2-x)(2x)}{(x^2+1)^2}$

31. $\dfrac{(x^2+x-4)(2)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-4)^2}$

33. $\dfrac{(x^2+2)(4-3x^2)-(4x-x^3)(2x)}{(x^2+2)^2}$ 35. $\dfrac{-5x-(1-5x)}{x^2}$

37. $\dfrac{(x+1)(x-2)(2x)-x^2((x-2)+(x+1))}{(x+1)^2(x-2)^2}$

39. $\dfrac{(4x^3-x^5+1)(12x^3+\frac{5}{4}x^{1/4})-(3x^4+x^{5/4})(12x^2-5x^4)}{(4x^3-x^5+1)^2}$

41. $32y=25x+176$ 43. $y=19x-12$ 45. $y=14x-4$

47. $27y=-4x+20$ 49. $9y=-4x+20$

51. Punto de tangencia: $(3,-3)$. Ambas curvas se intersectan aquí y tienen la misma pendiente.

53. Ambas curvas tienen la misma pendiente en este punto.

55. $(-1,-13)$, $y=16x+3$; $(0,7)$, $y=16x+7$; $(1,19)$, $y=16x+3$

Capítulo III, Regla de la cadena

1. $2(2x+1)2$ 3. $7(5x+3)^6 5$ 5. $3(2x^2+x-5)^2(4x+1)$

7. $\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}(3)$ 9. $-2(x^2+x-1)^{-3}(2x+1)$

11. $-\frac{5}{3}(x+5)^{-8/3}$ 13. $(x-1)3(x-5)^2+(x-5)^3$

15. $4(x^3+x^2-2x-1)^3(3x^2+2x-2)$

17. $\dfrac{(x-1)^{1/2}(\frac{3}{4})(x+1)^{-1/4}-(x+1)^{3/4}(\frac{1}{2})(x-1)^{-1/2}}{x-1}$

19. $\dfrac{(3x+2)^9(\frac{5}{2})(2x^2+x-1)^{3/2}(4x+1)-(2x^2+x-1)^{5/2}(9)(3x+2)^8(3)}{(3x+2)^{18}}$

21. $\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}(2)$ 23. $\frac{1}{2}(x^2+x+5)^{-1/2}(2x+1)$

25. $3x^2\cos(x^3+1)$ 27. $(e^{x^3+1})(3x^2)$ 29. $(\cos(\cos x))(-\operatorname{sen} x)$

31. $(e^{\operatorname{sen}(x^3+1)})(3x^2\cos(x^3+1))$

33. $[\cos((x+1)(x^2+2))][(x+1)(2x)+(x^2+2)]$

35. $(e^{(x+1)(x-3)})((x+1)+(x-3))$ 37. $2\cos(2x+5)$

39. $\dfrac{2}{2x+1}$ 41. $\left(\cos\dfrac{x-5}{2x+4}\right)\left(\dfrac{(2x+4)-(x-5)2}{(2x+4)^2}\right)$

43. $(e^{2x^2+3x+1})(4x+3)$ 45. $\dfrac{1}{2x+1}[\cos(\log 2x+1)]2$

47. $-(6x-2)\operatorname{sen}(3x^2-2x+1)$ 49. $80(2x+1)^{79}(2)$

51. $49(\log x)^{48}(x^{-1})$ 53. $5(e^{2x+1}-x)^4(2e^{2x+1}-1)$

55. $\frac{1}{2}(3\log(x^2+1)-x^3)^{-1/2}\left(\frac{3}{x^2+1}(2x)-3x^2\right)$

57. $\frac{2\cos(3x)\cos(2x)-3\operatorname{sen}2x(-\operatorname{sen}3x)}{(\cos 3x)^2}$

59. $\frac{(\operatorname{sen}x^3)(1/2x^2)4x-(\log 2x^2)(\cos x^3)3x^2}{(\operatorname{sen}x^3)^2}$

61. $\frac{(\cos 2x)(4x^3)-2(x^4+x)(-\operatorname{sen}2x)}{(\cos 2x)^2}$

63. $\frac{(\cos x^3)(4)(2x^2+1)^3(4x)+(2x^2+1)^4(\operatorname{sen}x^3)(3x^2)}{\cos^2 x^3}$

65. $-3e^{-3x}$ 67. $e^{-4x^2+x}(-8x+1)$

69. $\frac{e^{-x}[2x/(x^2+2)]-[\log(x^2+2)](e^{-x})(-1)}{e^{-2x}}$

Capítulo III, Razón de cambio

1. $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$; $dx/dt=3$, $dy/dt=6$; $dx/dt=1$, $dy/dt=4$
3. 90 pulg^2/seg **5.** 0,015 pie/min **7.** $t=\frac{1}{4}$, acel. $=4$ **9.** $4/75\pi$ pie/min
11. $1/12\pi$ pie/min

Capítulo IV, §1

1. $\sqrt{2}/2$ **2.** $\sqrt{3}/2$ **3.** $\sqrt{3}/2$ **4.** $\frac{1}{2}$ **5.** $-\sqrt{3}/2$ **6.** $-\frac{1}{2}$ **7.** $\sqrt{3}/2$
8. $-\sqrt{2}/2$ **9.** 1 **10.** $\sqrt{3}$ **11.** 1 **12.** -1

Capítulo IV, §3

1. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ **2.** $\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ **3.** (a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$
(b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$
(e) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ (f) $\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (g) $\frac{1}{2}$ (h) $-\sqrt{3}/2$
5. $\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

Capítulo IV, §4

1. (a) $\sec^2 x$ (b) $-\csc^2 x$ **2.** $3\cos 3x$ **3.** $-5\operatorname{sen}5x$
4. $(8x+1)\cos(4x^2+x)$ **5.** $(3x^2)\sec^2(x^3-5)$
6. $(4x^3-3x^2)\sec^2(x^4-x^3)$ **7.** $\cos x\sec^2(\operatorname{sen}x)$
8. $\sec^2 x\cos(\tan x)$ **9.** $-\sec^2 x\operatorname{sen}(\tan x)$ **10.** -1 **11.** 0 **12.** $\sqrt{3}/2$
13. $-\sqrt{2}$ **14.** 2 **15.** $-2\sqrt{3}$ **16.** (a) $y=1$ (c) $y=1$ (e) $y=1$
(g) $2y=-4x+2+\pi$ (i) $12y=3\sqrt{3}x+6-\sqrt{3}\pi$ (k) $y=1$
17. (a) $-1{,}6$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $-\sqrt{3}/30$ **18.** $12{,}5\pi\sqrt{3}$ pie/min **19.** (a) 180 pie/seg
(b) 360 pie/seg (c) 2250 pie/seg (d) 9000/91 pie/seg (e) 1530 pie/seg

Capítulo IV, §5

1. 2 **2.** 3 **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** 1 **5.** 1 **6.** 0 **7.** 0 **8.** 1 **9.** 2 **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{2}{3}$
12. 1 **13.** 1 **14.** 1 **15.** 1 **16.** 1 **17.** 0 **18.** indefinido

Capítulo V, §1

1. 1 **2.** $\frac{3}{4}$ **3.** $\frac{1}{6}$ **4.** 1 **5.** $\frac{3}{4}$ **6.** 0 **7.** ± 1

8. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ y $\frac{5\pi}{4} + 2n\pi$, $n =$ entero. **9.** $n\pi$, $n =$ entero

10. $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n =$ entero **11.** Base $= \sqrt{C/3}$, altura $= \sqrt{C/12}$

12. Radio $= \sqrt{C/3\pi}$, altura $= \sqrt{C/3\pi}$

13. Base $= \sqrt{C/6}$, altura $= \sqrt{C/6}$; Radio $= \sqrt{C/6\pi}$, altura $= 2\sqrt{C/6\pi}$

Capítulo V §3

1. Creciente para todo x.
2. Creciente para $x \leqslant 2 - 1/\sqrt{3}$, y $x \geqslant 2 + 1/\sqrt{3}$. Decreciente para $2 - 1/\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2 + 1/\sqrt{3}$.
3. Decreciente para $x \leqslant \frac{1}{2}$, creciente para $x \geqslant \frac{1}{2}$.
4. Decreciente para $\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$, creciente para $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ y $5\pi/4 \leqslant x \leqslant 2\pi$. En general, agregar $2n\pi$ a estos intervalos.
5. Decreciente para $\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$ y $5\pi/4 \leqslant x \leqslant 7\pi/4$, creciente para $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ y $3\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$ y $7\pi/4 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
6. Decreciente $x \leqslant -\sqrt{3/2}$ y $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3/2}$. Creciente $-\sqrt{3/2} \leqslant x \leqslant 0$ y $\sqrt{3/2} \leqslant x$.
7. Creciente todo x.
8. Decreciente $x \leqslant -\sqrt{2/3}$ y $x \geqslant \sqrt{2/3}$. Creciente $-\sqrt{2/3} \leqslant x \leqslant \sqrt{2/3}$.
9. Creciente todo x.
10. Decreciente para $x \leqslant 0$. Creciente para $x \leqslant 0$ **11.** Toda creciente.
13. (a) no hay máximo; mínimo: 1 (b) mínimo: 1; máximo: 4
(c) $x < 1$ decreciente; $x > 1$ creciente
15. (a) máximo: -2; no hay mínimo (b) máximo: -1; mínimo: 4
(c) $x < -2$ creciente; $x > -2$ decreciente
17. (a) no hay máximo ni mínimo (b) mínimo: -1; máximo: -2, 1
(c) $x < -1$, $x > 1$ decreciente; $-1 < x < 1$ creciente
19. (a) no hay máximo; mínimos: ± 1 (b) máximo: -2; mínimos: ± 1
(c) $x < -1$, $0 < x < 1$ decreciente; $-1 < x < 0$, $x > 1$ creciente
21. (a) no hay máximo; mínimo: 0 (b) máximos: ± 1; mínimo: 0
(c) $x < 0$ decreciente; $x > 0$ creciente

Ejercicios suplementarios, capítulo V

1. $r\sqrt{2}$ por $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ donde r es el radio del semicírculo. **5.** $4\sqrt{2}$ por $8\sqrt{2}$
7. Mínimo: usar $24\pi/(4 + \pi)$ pulgadas para el círculo; $96/(4 + \pi)$ pulgadas para el cuadro. Máximo: usar todo el alambre para el círculo.

9. $(\sqrt{5}/2, \frac{1}{2}), (-\sqrt{5}/2, \frac{1}{2})$ **11.** $(5, 3), (-5, 3)$ **13.** $(-1, 0)$ **14.** $(1,2)$

15. $F = 2\sqrt{3}\,Q/9b^2$ **17.** $(2,0)$ **19.** $4\left[1 + \left(\frac{13,5}{4}\right)^{2/3}\right]^{3/2}$ **21.** $4(1 + \sqrt[3]{4})^{3/2}$

25. $3y = -2x + 12$ **27.** $12.5\sqrt{2}$ **29.** $\pi/3$

31. $\dfrac{c}{1 + \sqrt[3]{a/b}}$ lejos de b **33.** radio = 4 pies; ángulo = 2 radianes

35. $2(1 + \sqrt[3]{36})^{3/2}$ **37.** En t = 1, mín = 2

Capítulo VI, §1

1. 0, 0 **2.** 0, 0 **3.** 0, 0 **4.** $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}$ **5.** 0, 0 **6.** $\infty, -\infty$ **7.** $-\infty, \infty$

8. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ **9.** $-\infty, +\infty$ **10.** 0, 0 **11.** $\infty, -\infty$ **12.** $-\infty, \infty$

13. ∞, ∞ **14.** $-\infty, -\infty$ **15.** $\infty, -\infty$ **16.** $-\infty, \infty$ **17.** ∞, ∞

18. $-\infty, -\infty$

19.

$x \to \infty$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
n impar	∞	$-\infty$
n par	∞	$-\infty$

$x \to -\infty$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
n impar	$-\infty$	∞
n par	∞	$-\infty$

Capítulo VI, §2

	p.c.	Creciente	Decreciente
1.	$3 \pm \sqrt{11}$	$x \leqq 3 - \sqrt{11}$ y $x \geqq 3 + \sqrt{11}$	$3 - \sqrt{11} \leqq x < 3$ y $3 < x \leqq 3 + \sqrt{11}$
2.	$3 \pm \sqrt{10}$	$3 - \sqrt{10} \leqq x \leqq 3 + \sqrt{10}$	$3 + \sqrt{10} \leqq x$ y $x \leqq 3 - \sqrt{10}$
3.	$-1 \pm \sqrt{2}$	$-1 - \sqrt{2} \leqq x \leqq -1 + \sqrt{2}$	$x \leqq -1 - \sqrt{2}$ y $x \geqq -1 + \sqrt{2}$
4.	$n\pi/2$	$0 \leqq x \leqq \pi/2$ y agregar $n\pi$	$\pi/2 \leqq x \leqq \pi$ y agregar $n\pi$
5.	$n\pi/2$	$\pi/2 \leqq x \leqq \pi$ y agregar $n\pi$	$0 \leqq x \leqq \pi/2$ y agregar $n\pi$
6.	Ninguno	$x < 0$ y $x > 0$	Nunca
7.	$n\pi$	$0 \leqq x < \pi/2$ y agregar $n\pi$	$-\pi/2 < x \leqq 0$ y agregar $n\pi$
8.	$\frac{1}{2}$	$x \geqq \frac{1}{2}$	$x \leqq \frac{1}{2}$
9.	$0, \frac{3}{2}$	$x \geqq \frac{3}{2}$	$x \leqq \frac{3}{2}$
10.	0	$x \leqq 0$	$\sqrt{2} < x$ y $0 \leqq x < \sqrt{2}$
11.	Ninguno	$x < -\frac{1}{3}, x > -\frac{1}{3}$	
12.	-1	$x \geqq -1$	$x \leqq -1$
13.	Ninguno	Todo x	Nunca
14.	-1	$x \geqq -1$	$x \leqq -1$
15.	Ninguno	Todo x	Nunca
16.	$-(\frac{1}{8})^{1/7}$	$x \geqq -(\frac{1}{8})^{1/7}$	$x \leqq -(\frac{1}{8})^{1/7}$

17. (a), (e) **18.** (c)

	Máx. rel.	Mín. rel.	Creciente	Decreciente
21.	2	-2	$-2 < x < 2$	$x < -2, x > 2$
23.	Ninguno	-2	$x > -2$	$x < -2$
25.	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0, 0 < x < \sqrt{3}$
27.	$-1 - \sqrt{3}$	$-1 + \sqrt{3}$	$x < -1 - \sqrt{3}, x > \sqrt{3} - 1$	$-1 - \sqrt{3} < x < \sqrt{3} - 1$
29.	Ninguno	Ninguno	En ninguna parte	$x < 2, x > 2$
31.	Ninguno	Ninguno	En ninguna parte	$x < 5/3, x > 5/3$
33.	Ninguno	0	$x > 0$	$-1 < x < 0$
35.	Ninguno	Ninguno	En ninguna parte	$x < -\sqrt{5}, -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, x > \sqrt{5}$
37.	0	Ninguno	$x < -2, -2 < x < 0$	$0 < x < 2, x > 2$
39.	$\pm 3\sqrt{10}/5$	0	$-3 \leqq x < -3\sqrt{10}/5$, $0 \leqq x < 3\sqrt{10}/5$	$-3\sqrt{10}/5 < x \leqq 0$, $3\sqrt{10}/5 < x \leqq 3$
41.	Ninguno	-1	$-1 \leqq x \leqq 7$	$-2 \leqq x \leqq -1$
43.	$(\pi/4) + 2n\pi$	$(5\pi/4) + 2n\pi$	$5\pi/4 < x < 9\pi/4$ y agregar $2n\pi$	$\pi/4 < x < 5\pi/4$ y agregar $2n\pi$
45.	$(\pi/12) + n\pi$	$(7\pi/12) + n\pi$	$7\pi/12 < x < 13\pi/12$ y agregar $n\pi$	$\pi/12 < x < 7\pi/12$ y agregar $n\pi$
47.	$(\pi/3) + 2n\pi$	$(5\pi/3) + 2n\pi$	$5\pi/3 < x < 7\pi/3$ y agregar $2n\pi$	$\pi/3 < x < 5\pi/3$ y agregar $2n\pi$

49. Máximo relativo: $3\pi/2$, arcsen $(\sqrt{3}/3)$, π − arcsen $(\sqrt{3}/3)$ y agregar $2n\pi$. Mínimos relativos: $\pi/2$, π + arcsen $(\sqrt{3}/3)$, 2π − arcsen $(\sqrt{3}/3)$ y agregar $2n\pi$. Creciente y decreciente como se esperaba, es decir, entre cada máximo y el siguiente mínimo es decreciente y entre cada mínimo y el siguiente máximo es creciente.

Capítulo VI, §3

2. Para sen x: 0, π y agregar $2n\pi$ con cualquier entero n. Para cos x: $\pi/2$, $3\pi/2$ y agregar $2n\pi$.
4. (a) Convexa hacia arriba para $x > 0$. Convexa hacia abajo para $x < 0$.
(b) Convexa hacia arriba para $x > \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x \leqslant 0$. Hacia abajo para $x < -\sqrt{3}$, $0 \leqslant x < \sqrt{3}$. (c) Convexa hacia arriba para $x > 1$, $-1 < x \leqslant 0$. Hacia abajo para $x < -1$ y $0 \leqslant x < 1$. **8.** (a) $y = -4x + 4$

Capítulo VI, §4

3. (a) $(\sqrt{2}, \pi/4)$ (b) $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (c) $(6, \pi/3)$ (d) $(1, \pi)$
32. $y = x(\tan 2), x \leqq 0$ **34.** $(y-1)^2 + x^2 = 1$
36. $(x^2 + x + y^2)^2 = x^2 + y^2$ **38.** $x = 1$ **40.** $y^2 = 2x + 1$
42. $y = 0, x \leqq 0$ **43.** $y = x(\tan 3), x \leqq 0$ **46.** $y = x(\tan 0{,}3), x \geqq 0$

Capítulo VI, §5

13. $2x + 5y = 18$ **14.** $y = \frac{3}{4}x^2$ **15.** $x = \frac{2}{9}(y+1)^2$

16. (a) $xy = \frac{1}{2}$ (b) $xy = 3$ (c) $xy = 1, x \geqq 0$ **17.** $y = x^2, x \geqq 0$
18. $y = 1/x^2, x \geqq 0$

Capítulo VII, §1

1. Sí; todos los números reales **3.** Sí; todos los números reales **5.** Sí; para $y \neq 1$
7. Sí; para $y \geqslant 1$ **9.** Sí; para $y \leqslant -1$ **11.** Sí; para $y \geqslant 2$
13. Sí; para $-1 \leqslant y \leqslant 1$

Capítulo VII, §2 (Las respuestas alternas dependen de la escogencia de los intervalos.)

1. $\frac{1}{3}$ **2.** $\frac{1}{11}$ **3.** $\frac{1}{3}$ ó $-\frac{1}{3}$ **4.** -1 **5.** 1 ó -1

6. $-\frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{10}$, ó $\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **7.** $\frac{1}{4}$ **8.** -1 ó $\frac{1}{2} \pm \frac{3}{10}\sqrt{5}$ **9.** $\frac{1}{24}$

10. $\dfrac{1}{10\sqrt{2}}$ ó $\dfrac{-1}{10\sqrt{2}}$

Capítulo VII, §3

1. $[-1, 1]$ **2.** $-1\sqrt{1-x^2}$ **3.** (a) $2/\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\pi/6$ (d) $\pi/4$ (e) 2 (f) $\pi/3$ **4.** $-2/\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \pi/3, \pi/4$

5. Sea $y = \sec x$ en el intervalo $0 < x < \pi/2$. Entonces $x = \operatorname{arcsec} y$ es definida en $1 < y$ y $dx/dy = \dfrac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$

6. $-\pi/2$ **7.** 0 **8.** $\pi/2$ **9.** $\pi/2$ **10.** $-\pi/4$

11. $\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$ $(x \neq 0)$ **12.** $\dfrac{-1}{\sqrt{-(x^2+5x+6)}}$ **13.** $\dfrac{-1}{(\operatorname{arcsen} x)^2\sqrt{1-x^2}}$

14. $\dfrac{4}{\sqrt{1-4x^2}(\arccos 2x)^2}$

Capítulo VII, §4

1. $\pi/4, \pi/6, -\pi/4, \pi/3$ **2.** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ **3.** $1/(1+y^2)$

4. (a) $-\pi/4$ (b) 0 (c) $-\pi/6$ (d) $\pi/6$ **5.** $\dfrac{3}{1+9x^2}$ **7.** 0

9. $\dfrac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen}^2 2x}$ **11.** $\dfrac{(\cos x)(\operatorname{arcsen} x) - (\operatorname{sen} x)/\sqrt{1-x^2}}{(\operatorname{arcsen} x)^2}$

13. $\dfrac{-1}{1+x^2}$ **15.** $\dfrac{9}{\sqrt{1-9x^2}}(1+\operatorname{arcsen} 3x)^2$

17. $4y = 4\sqrt{2}\,x + \pi - 4$ **19.** $12y = 6x + 4\pi - 3\sqrt{3}$

21. $6y = 4\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3} - \pi$ **23.** 440 pie/seg **25.** 0,02 rad/seg

27. $\dfrac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}\operatorname{sen}\theta\tan\theta$ **29.** $\frac{1}{82}$ rad/seg **31.** (a) $\dfrac{1500}{(400)^2 + (\frac{225}{4})^2}$ rad/seg

(b) $\dfrac{1500}{(600)^2 + (\frac{375}{4})^2}$ rad/seg

Capítulo VIII, §1

1. (a) $y = \frac{1}{2}x + \log 2 - 1$ (b) $y = \frac{1}{5}x + \log 5 - 1$ (c) $y = 2x - \log 2 - 1$

2. (a) $y = -x + \log 2 - 1$ (b) $y = \frac{4}{5}x + \log 5 - \frac{8}{5}$ (c) $y = -\frac{3}{5}x + \log 10 - \frac{9}{5}$

3. (a) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (b) $\cos(\log(2x+3))\dfrac{1}{2x+3}\cdot 2$ (c) $\dfrac{1}{x^2+5}\cdot 2x$

(d) $\dfrac{(\operatorname{sen} x)/x-(\log 2x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

4. $y=\frac{1}{4}x+\log 4-\frac{3}{4}$ **5.** $y=\dfrac{2x}{3}+\log 3-\frac{8}{3}$

11. $\dfrac{2}{2x+5}$ **12.** $\dfrac{2x}{x^2+3}$ **13.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x}$ **14.** $\dfrac{-2}{(\arccos 2x)\sqrt{1-4x^2}}$

15. $\dfrac{-1}{x(\log x)^2}$ **16.** $\dfrac{\log x-1}{(\log x)^2}$ **17.** $\frac{1}{3}(\log x)^{-2/3}+(\log x)^{1/3}$ **18.** $\dfrac{-x}{1-x^2}$

Capítulo VIII, §2

1. (a) $y=2e^2x-e^2$ (b) $y=2e^{-4}x+5e^{-4}$ (c) $y=2x+1$

2. (a) $y=\frac{1}{2}e^{-2}x+3e^{-2}$ (b) $y=\frac{1}{2}e^{1/2}x+\frac{1}{2}e^{1/2}$ (c) $y=\frac{1}{2}x+1$

3. $y=3e^2x-4e^2$

4. (a) $e^{\operatorname{sen} 3x}(\cos 3x)3$ (b) $\dfrac{1}{e^x+\operatorname{sen} x}(e^x+\cos x)$ (c) $\cos(e^{x+2})e^{x+2}$

(d) $4\cos(e^{4x-5})e^{4x-5}$

5. (a) $\left(\dfrac{1}{1+(\log x)^2}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\dfrac{-3\operatorname{sen}(3x+5)}{\cos(3x+5)}$ (c) $2(\cos 2x)e^{\operatorname{sen} 2x}$

(d) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arccos x}$ (e) 1 (f) $(1-x)/e^x$ (g) $e^x e^{e^x}$

(h) $e^{-\operatorname{arcsen} x}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (i) $e^x\sec^2 e^x$ (j) $\dfrac{1}{1+e^{4x}}2e^{2x}$

(k) $\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 e^x}e^x(1)$ $\dfrac{1}{\sqrt{1-(e^x+x)^2}}(e^x+1)$

(m) $\sec^2 x e^{\tan x}$ (n) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

9. $y=\dfrac{x}{e}$ **10.** $y=2x-e$ **11.** $y=(1+\log 2)x-2$ **12.** $ey=3x$

13. $y=\dfrac{-1}{e}x+2$ **14.** $y=\dfrac{1}{(\log 2)^2}\left[1-\dfrac{x}{2}+\log 2\right]$ **15.** $y=2e^2x-e^2$

16. $y=e^2(3x-4)$ **17.** $y=6e^5x-25e^5$ **18.** $y=x$ **19.** $y=1-x$

20. $ey=x$ **27.** $0\leqslant x<1$; definida para $y\geqslant 0$.

31. f es creciente en el intervalo; cuando x tiende a 1, $f(x)$ tiende a ∞ y cuando x tiende a -1, $f(x)$ tiende a $-\infty$.

Capítulo VIII, §3

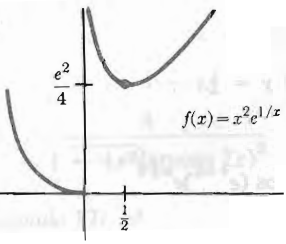
1. $10^x \log 10$, $7^x \log 7$ **2.** $3^x \log 3$, $\pi^x \log \pi$
3. (a) $e^{x \log x}[\log x + 1]$ (b) $x^{(x^x)}[x^{x-1} + (\log x)x^x(1 + \log x)]$
4. (a) $\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}[1 + \frac{1}{2}\log x]$ (b) $x^{-2/3}x^{\sqrt[3]{x}}[1 + \frac{1}{3}\log x]$ **8.** $y = x$
8. $y = x$ **9.** $y = (\log 10)x + 1$, $y = (\log 7)x + 1$
10. $y = (9 \log 3)x - 18 \log 3 + 9$ e $y = (\pi^2 \log \pi)x - 2\pi^2 \log \pi + \pi^2$

Capítulo VIII, §4

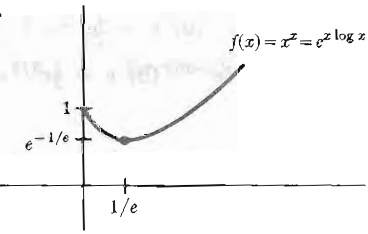
12. (b), (c) Todas las derivadas son 0 en 0. **13.** El límite es 0 en ambos casos.
22. (a) 1 (b) 1 (c) $1/e$ (d) 1

Soluciones adicionales

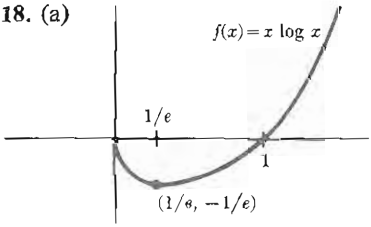
10.



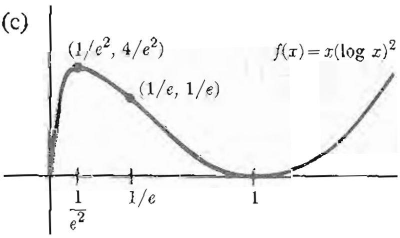
15.



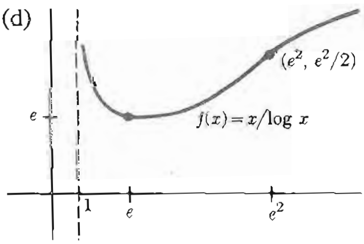
18. (a)



(c)



(d)



Capítulo VIII, §5

1. $-\log 25$ **2.** $5e^{-4}$ **3.** $e^{-(\log 10)10^{-6}t}$ **4.** $20/e$ **5.** $-(\log 2)/K$
6. $(\log 3)/4$ **7.** $12 \log 10/\log 2$ **8.** $\dfrac{-3 \log 2}{\log 9 - \log 10}$
10. 1984: (50.000) $2^{84/50}$; 2000: 2×10^5 **11.** $30[\frac{4}{5}]^{5/3}$ **12.** $4\left[\dfrac{\log \frac{1}{20}}{\log \frac{1}{3}}\right]$

13. $2\left[\dfrac{\log \frac{5}{8}}{\log \frac{1}{2}}\right]$ **14.** (a) $40\left[\dfrac{\log \frac{7}{10}}{\log \frac{2}{5}}\right]$ (b) $40\left[\dfrac{\log \frac{4}{25}}{\log \frac{2}{5}}\right]$ (c) $100[\frac{2}{5}]^{1/2}$ **15.** $\log 2$

Capítulo IX, §1

1. $-(\cos 2x)/2$ **2.** $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3}$ **3.** $\log (x + 1), x > -1$

4. $\log (x + 2), x > -2$

Capítulo IX, §3

1. 156 **2.** 2 **3.** 2 **4.** $\log 2$ **5.** $\log 3$ **6.** $\frac{2}{5}$ **7.** $e - 1$

Capítulo IX, §5

1. (a) $U_1^2 = \frac{9}{4}(\frac{3}{2} - 1) + 4(2 - \frac{3}{2})$

$L_1^2 = 1(\frac{3}{2} - 1) + \frac{9}{4}(2 - \frac{3}{2})$

(b) $U_1^2 = \frac{16}{9}(\frac{4}{3} - 1) + \frac{25}{9}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + 4(2 - \frac{5}{3})$

$L_1^2 = 1(\frac{4}{3} - 1) + \frac{16}{9}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + \frac{25}{9}(2 - \frac{5}{3})$

(c) $U_1^2 = \frac{25}{16}(\frac{5}{4} - 1) + \frac{9}{4}(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) + \frac{49}{16}(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) + 4(2 - \frac{7}{4})$

$L_1^2 = 1(\frac{5}{4} - 1) + \frac{25}{16}(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) + \frac{9}{4}(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) + \frac{49}{16}(2 - \frac{7}{4})$

(d) $$U_1^2 = \frac{1}{n}\cdot\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$L_1^2 = \frac{1}{n}\left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

2. (a) $U_1^3 = 1(\frac{3}{2} - 1) + \frac{3}{2}(2 - \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{5}{2} - 2) + \frac{2}{5}(3 - \frac{5}{2})$

$L_1^3 = \frac{2}{3}(\frac{3}{2} - 1) + \frac{1}{2}(2 - \frac{3}{2}) + \frac{2}{5}(\frac{5}{2} - 2) + \frac{1}{3}(3 - \frac{5}{2})$

(b) $U_1^3 = 1(\frac{4}{3} - 1) + \frac{3}{4}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + \frac{3}{5}(\frac{6}{3} - \frac{5}{3}) + \frac{3}{6}(\frac{7}{3} - \frac{6}{3}) + \frac{3}{7}(\frac{8}{3} - \frac{7}{3})$
$+ \frac{3}{8}(\frac{9}{3} - \frac{8}{3})$

$L_1^3 = \frac{3}{4}(\frac{4}{3} - 1) + \frac{3}{5}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + \frac{3}{6}(\frac{6}{3} - \frac{5}{3}) + \frac{3}{7}(\frac{7}{3} - \frac{6}{3}) + \frac{3}{8}(\frac{8}{3} - \frac{7}{3})$
$+ \frac{3}{9}(\frac{9}{3} - \frac{8}{3})$

(c) $U_1^3 = 1(\frac{5}{4} - \frac{4}{4}) + \frac{4}{5}(\frac{6}{4} - \frac{5}{4}) + \frac{4}{6}(\frac{7}{4} - \frac{6}{4}) + \frac{4}{7}(\frac{8}{4} - \frac{7}{4})$
$+ \frac{4}{8}(\frac{9}{4} - \frac{8}{4}) + \frac{4}{9}(\frac{10}{4} - \frac{9}{4}) + \frac{4}{10}(\frac{11}{4} - \frac{10}{4}) + \frac{4}{11}(\frac{12}{4} - \frac{11}{4})$

$L_1^3 = \frac{4}{5}(\frac{5}{4} - \frac{4}{4}) + \frac{4}{6}(\frac{6}{4} - \frac{5}{4}) + \frac{4}{7}(\frac{7}{4} - \frac{6}{4}) + \frac{4}{8}(\frac{8}{4} - \frac{7}{4})$
$+ \frac{4}{9}(\frac{9}{4} - \frac{8}{4}) + \frac{4}{10}(\frac{10}{4} - \frac{9}{4}) + \frac{4}{11}(\frac{11}{4} - \frac{10}{4}) + \frac{4}{12}(\frac{12}{4} - \frac{11}{4})$

(d) $$U_1^3 = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \qquad \frac{1}{\left(1 + \frac{2n-1}{n}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-1}\right]$$

$$L_1^3 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \cdots + \frac{1}{\left(1 + \frac{2n}{n}\right)}\right] = \left[\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}\right]$$

3. (a) $U_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 0) + 1(1 - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1) + 2(2 - \frac{3}{2})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{2} - 0) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) + 1(\frac{3}{2} - 1) + \frac{3}{2}(2 - \frac{3}{2})$

(b) $U_0^2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 0) + \frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + 1(\frac{3}{3} - \frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(\frac{4}{3} - 1) + \frac{5}{3}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + 2(\frac{6}{3} - \frac{5}{3})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{3} - 0) + \frac{1}{3}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + \frac{2}{3}(\frac{3}{3} - \frac{2}{3}) + 1(\frac{4}{3} - 1) + \frac{4}{3}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + \frac{5}{3}(\frac{6}{3} - \frac{5}{3})$

(c) $U_0^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{4} - 0) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) + 1(1 - \frac{3}{4}) + \frac{5}{4}(\frac{5}{4} - 1) + \frac{3}{2}(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) + \frac{7}{4}(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) + 2(2 - \frac{7}{4})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{4} - 0) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}(1 - \frac{3}{4}) + 1(\frac{5}{4} - 1) + \frac{5}{4}(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) + \frac{3}{2}(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) + \frac{7}{4}(2 - \frac{7}{4})$

(d) $U_0^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{2n}{n}\right] \quad L_0^2 = \frac{1}{n}\left[0 + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{2n-1}{n}\right]$

4. (a) $U_0^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - 0) + 1(1 - \frac{1}{2}) + \frac{9}{4}(\frac{3}{2} - 1) + 4(2 - \frac{3}{2})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{2} - 0) + \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}) + 1(\frac{3}{2} - 1) + \frac{9}{4}(2 - \frac{3}{2})$

(b) $U_0^2 = \frac{1}{9}(\frac{1}{3} - 0) + \frac{4}{9}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + 1(1 - \frac{2}{3}) + \frac{16}{9}(\frac{4}{3} - 1) + \frac{25}{9}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + 4(2 - \frac{5}{3})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{3} - 0) + \frac{1}{9}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + \frac{4}{9}(1 - \frac{2}{3}) + 1(\frac{4}{3} - 1) + \frac{16}{9}(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}) + \frac{25}{9}(2 - \frac{5}{3})$

(c) $U_0^2 = \frac{1}{16}(\frac{1}{4} - 0) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{9}{16}(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) + 1(1 - \frac{3}{4}) + \frac{25}{16}(\frac{5}{4} - 1) + \frac{9}{4}(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) + \frac{49}{16}(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) + 4(2 - \frac{7}{4})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{4} - 0) + \frac{1}{16}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) + \frac{9}{16}(1 - \frac{3}{4}) + 1(\frac{5}{4} - 1) + \frac{25}{16}(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) + \frac{9}{4}(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) + \frac{49}{16}(2 - \frac{7}{4})$

(d) $U_0^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n}{n}\right)^2\right]$

$$L_0^2 = \frac{1}{n}\left[0 + \frac{1}{n^2} + \cdots + \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2\right]$$

5. $U_1^2 = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \cdots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)}\right]$

$$= \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right]$$

$$L_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)} + \cdots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

7. $U_1^n = [\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n]$ **8.** $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{7}{3}$

$L_1^n = [\log 1 + \log 2 + \cdots + \log (n-1)]$

Capítulo X, §1

1. $\frac{63}{6}$ **2.** 0 **3.** 0 **4.** 0 **8.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) ∞ (d) $\frac{1}{5}$ (e) $1/(k+1)$

Capítulo X, §2

1. x^4 **2.** $3x^5/5 - x^6/6$ **3.** $-2\cos x + 3 \operatorname{sen} x$ **4.** $\frac{9}{5}x^{5/3} + 5 \operatorname{sen} x$
5. $5e^x + \log x$ **6.** 0 **7.** 0 **8.** $e^2 - e^{-1}$ **9.** $4 \cdot 28/3$ **11.** $\frac{1}{2}$ **12.** $\frac{1}{12}$

13. $70 - \frac{139}{2}$ **14.** $\frac{8}{3} + \frac{5}{12}$ **15.** $\sqrt{2} - 1$ **16.** $9/2$ **17.** $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ **18.** 0
19. $\pi^2/2 - 2$ **20.** 4 **21.** 4 **22.** 1 **23.** 4 **24.** $-\pi^2$ **25.** 4

Capítulo X, §4

1 Sí **2.** No **3.** Sí **4.** No **5.** No **6.** Sí
7. $-\frac{1}{2}e^{-2B} + \frac{1}{2}e^{-4}$. Sí, $\frac{1}{2}e^{-4}$. **8.** 2

Capítulo XI, §1

1. $e^{x^2}/2$ **2.** $-\frac{1}{4}e^{-x^4}$ **3.** $\frac{1}{6}(1 + x^3)^2$ **4.** $(\log x)^2/2$

5. $\dfrac{(\log x)^{-n+1}}{1 - n}$ si $n \neq 1$, y $\log(\log x)$ si $n = 1$. **6.** $\log(x^2 + x + 1)$

7. $x - \log(x + 1)$ **8.** $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$ **9.** $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}$ **10.** 0 **11.** $\frac{2}{5}$

12. $-\arctan(\cos x)$ **13.** $\frac{1}{2}(\arctan x)^2$ **14.** $2/15$ **15.** $-\frac{1}{4}\cos(\pi^2/2) + \frac{1}{4}$

16. $-\frac{1}{2}e^{-B^2} + \frac{1}{2}$. Sí, $\frac{1}{2}$ **17.** $-\frac{1}{3}e^{-B^3} + \frac{1}{3}$. Sí, $\frac{1}{3}$

18. $2\sqrt{1 + e^x} - \log(\sqrt{1 + e^x} + 1) + \log(\sqrt{1 + e^x} - 1)$

19. $x - \log(1 + e^x)$ **20.** $\arctan(e^x)$

21. $-\log(\sqrt{1 + e^x} + 1) + \log(\sqrt{1 + e^x} - 1)$

Capítulo XI, §2

1. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ **2.** $x \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2 + 1)$

3. $\dfrac{e^{2x}}{13}(2 \operatorname{sen} 3x - 3\cos 3x)$ **4.** $\frac{1}{10}e^{-4x}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{5}e^{-4x}\cos 2x$

5. $x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x$ **6.** $(\log x)^3 x - 3\int(\log x)^2\,dx$
7. $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$ **8.** $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$ **9.** $-x\cos x + \operatorname{sen} x$
10. $x \operatorname{sen} x + \cos x$ **11.** $-x^2\cos x + 2\int x \cos x\,dx$
12. $x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\,dx$ **13.** $\frac{1}{2}[x^2 \operatorname{sen} x^2 + \cos x^2]$

14. $-\frac{1}{3}x^4(1 - x^2)^{3/2} - \dfrac{4}{3 \cdot 5}x^2(1 - x^2)^{5/2} - \dfrac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7}(1 - x^2)^{7/2}$

15. $\frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3$ **16.** $(\log x)\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^4}{16}$ **17.** $(\log x)^2\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}\displaystyle\int x^2 \log x\,dx$

18. $-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$ **19.** $\frac{1}{4}x^4\left(\dfrac{1}{1 - x^4}\right) + \frac{1}{4}\log(1 - x^4)$ **20.** -4π

21. $-Be^{-B} - e^{-B} + 1$. Sí, 1 **22.** Sí **23.** Sí

24. $-\dfrac{1}{\log B} + \dfrac{1}{\log 2}$. Sí, $1/\log 2$. **25.** Sí, $1/3(\log 3)^3$

Capítulo XI, §3

1. $+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x \cos x - \frac{5}{8}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{3}{8}x$ **2.** $\frac{1}{3}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$

3. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$ **4.** 3π **5.** 8π **6.** πab (Si $a, b > 0$). **7.** πr^2

13. $-\log \cos x$ **14.** $\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{3}$ **15.** $\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ **16.** $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} (\sqrt{2}\, x)$

17. $\dfrac{1}{b} \operatorname{arcsen} \dfrac{bx}{a}$

18. (a) $c_0 = a_n = 0$ todo n, $b_n = -2/n \cos n\pi$
(b) $c_0 = \pi^2/3$, $a_n = -4/n^2 \cos n\pi$, $b_n = 0$ todo n
(c) $c_0 = \pi/2$, $a_n = 2(\cos n\pi - 1)/\pi n^2$, $b_n = 0$

19. (b) todo a_n y $c_0 = 0$ **20.** (a) $-2\sqrt{2} \cos \theta/2$ (b) $2\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta/2$

Capítulo XI, §4

1. $C_1 = -\frac{33}{100}$, $C_2 = -\frac{11}{100}$, $C_3 = -\frac{130}{100}$, $C_4 = -\frac{110}{100}$, $C_5 = \frac{11}{100}$

2. $\dfrac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x$

3. (a) $\frac{1}{5}[\log (x-3) - \log (x+2)]$ (b) $\log (x+1) - \log (x+2)$

4. $-\frac{1}{2} \log (x+1) + 2 \log (x+2) - \frac{3}{2} \log (x+3)$

5. $2 \log x - \log (x+1)$ **6.** $\log (x+1) + \dfrac{1}{x+1}$

7. $\dfrac{1}{2} \dfrac{-1}{x^2+9} + \dfrac{1}{18} \dfrac{x}{x^2+9} + \dfrac{1}{54} \arctan \dfrac{x}{3}$ **8.** $\dfrac{1}{8} \dfrac{x}{x^2+16} + \dfrac{1}{32} \arctan \dfrac{x}{4}$

9. $-\log (x+1) + \log (x+2) - \dfrac{2}{x+2}$

10. $\dfrac{1}{4} \dfrac{x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{3}{8} \dfrac{x}{(x^2+1)} + \dfrac{3}{8} \arctan x$

11. $-\frac{1}{8} \log (x-1) + \frac{17}{8} \log (x+7)$

12. $\frac{1}{2} \log \dfrac{x^2}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **13.** $\frac{1}{4} \log \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} + \dfrac{1}{2} \arctan x$

14. $\dfrac{1}{2}\left(\arctan x + \dfrac{x}{x^2+1}\right)$ **15.** $\log (x-1) + \log (x-2)$

16. $\frac{1}{4} [\log (x^2 - 1) - \log (x^2 + 1)]$ **17.** $-\frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{4} \log \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

17. $-\frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{4} \log \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

18. $\frac{1}{3} \log [(x^2+x+1)(x-1)] - 4/\sqrt{3} \tan^{-1} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **19.** $\dfrac{-1}{2(x^2-3)}$

Ejercicios suplementarios

Capítulo XI, Substitución

1. $\frac{1}{4} \log (x^4 + 2)$ **3.** $\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$ **5.** $\sqrt{x^2 - 1}$ **7.** $\dfrac{-1}{6(3x^2+5)}$ **9.** $\dfrac{-1}{2 \operatorname{sen}^2 x}$

11. $\frac{5}{51}(x^3+1)^{12/5}(x^3-\frac{5}{12})$ **13.** $\frac{-\cos 3x}{3}$ **15.** $-\cos e^x$ **17.** $\log(\log x)$

19. $\log(e^x+1)$ **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}$

25. $\frac{\pi}{4}$ **27.** $\frac{\pi^2}{72}$ **29.** $e-\frac{1}{e}$ **31.** $-2e^{-\sqrt{x}}(x^{3/2}+3x+6x^{1/2}+6)$

Capítulo XI, Por partes

1. $\frac{1}{2}(x^2 \arctan x + \arctan x - x)$

3. $\frac{1}{4}(2x^2 \arccos x - \arccos x - x\sqrt{1-x^2})$

5. $1-\frac{\pi}{2}$ **7.** $\frac{\pi}{32}$ **9.** $\frac{2}{e}$

Capítulo XI, Integrales trigonométricas

1. $\log \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$ **3.** $-\cos e^x$ **5.** $\frac{\pi}{4}$ **7.** $\frac{\pi}{4}$ **9.** $\frac{\pi}{16}$

11. $\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$ **13.** $\frac{\pi}{2}$ **15.** $\frac{-1}{3}(x^2+32)(16-x^2)^{1/2}$

17. $\frac{-1}{a}\log\left[\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right]$ **19.** $\frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}-\frac{1}{2a^3}\log\left[\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right]$

21. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **23.** $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$ **25.** $\frac{\pi+2}{512}$

Ejercicios varios

3. -1 **4.** $n!$ **5.** $1/2$

Capítulo XII, §1

2. (a) $4/e^2$ (b) $2^2 5^5 e^{-4}/3^3$

Capítulo XIII, §1

2. $2\pi r$ **3.** $\sqrt{2}(e^2-e)$ **4.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) 3

5. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}-\log\left(\frac{1+\sqrt{1+e^2}}{e}\right)+\log(1+\sqrt{2})$

6. $\frac{1}{27}(31^{3/2}-13^{3/2})$ **7.** $e-\frac{1}{e}$ **8.** 8

9. π **10.** $2\sqrt{3}$ **11.** 2π

13. $\sqrt{2}(e^2-e)$ **14.** $\sqrt{2}(e^{\theta_2}-e^{\theta_1})$

Capítulo XIII, §2

1. 6π **2.** a^2 (usando la simetría y los valores de θ tales que sen $2\theta \geqslant 0$, el problema se reduce a $\int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$)

3. πa^2 **4.** $\frac{\pi}{12}$ **5.** $3\pi/2$ **6.** $3\pi/2$ **7.** $9\pi/2$ **8.** $\pi/3$

Capítulo XIII, §3

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$ **2.** π **3.** $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$ **4.** $\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}$ **5.** $\frac{2 \cdot 5^4 \pi}{3}$ **6.** $\pi(e - 2)$

7. πe^2 **8.** $\pi[2(\log 2)^2 - 4 \log 2 + 2]$

9. 16π **10.** (a) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^{2B}}\right)$; sí $\frac{\pi}{2e^2}$

(b) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e^4} - \frac{1}{e^{4B}}\right)$; sí $\frac{\pi}{4e^4}$ (c) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^{2B^2}}\right)$; sí $\frac{\pi}{4e^2}$

11. $\frac{\pi r^2 h}{3}$ **12.** $2\pi(1 - \sqrt{a})2\pi$ **13.** $\frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{3B^3}$; sí $\frac{\pi}{24}$

14. Para todo $c > 1/2, \pi/2c - 1$ **15.** Para todo $c > 1/2, \pi/1 - 2c$

Capítulo XIII, §4

1. 5 lb/pulg; 80 pulg/lb **2.** $\frac{10}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}}$ lb/pulg; $\frac{180}{\pi}\left[\cot\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{9}\right]$ pulg/lb

3. $c\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right]$ **4.** sí; $\frac{c}{r_1}$

5. $\frac{99c}{200}$ donde c es la constante de proporcionalidad

6. $\frac{c}{8000}$ donde c es la constante de proporcionalidad

7. 1944 pie/lb **8.** $\frac{E}{6}$ pulg/lb

Capítulo XIII, §6

1. $c = 1$; x; $\frac{1}{2}$ **2.** $c = 2$; x^2; $\frac{1}{4}$ **3.** $c = 5$; x^5; $\frac{1}{32}$

4. $c = \frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{2}(1 - \cos \pi x)$; $\frac{1}{2}$ **5.** $c = 2$; $x - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi x$; $\frac{1}{2}$

6. $c = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}(3x - x^2)$; $\frac{5}{8}$

7. $c = 1$; $ex - e^x + 1$; $\frac{e}{2} - e^{1/2} + 1$

8. $c = \frac{1}{4}$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}|\operatorname{sen} x|, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{4}(2 + \operatorname{sen} x), & \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{4}(4 - \operatorname{sen} x), & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

9. $c = \frac{1}{4}$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{3}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \cos x), & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{1}{4}(3 - \cos x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

10. $c = \frac{1}{\pi}$; $F(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen} 2x$, $-\pi \leq x \leq \pi$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{4}$

11. $c = \frac{1}{\pi}$; $F(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen} 2x,\ -\pi \leq x \leq \pi$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{4}$

12. $c = \frac{1}{\pi}$; $F(x) = 0,\ -\pi \leq x \leq 0$ $F(x) = \frac{x}{\pi} - \frac{\operatorname{sen} x}{\pi} 0 \leq x \leq \pi$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$

Ejercicios suplementarios

Capítulo XIII, Longitud de curvas

1. $\frac{8}{27}(10^{3/2} - 1)$ **2.** $\frac{\sqrt{5}}{2} + \log\left(\frac{4 + 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)$

3. $\sqrt{e^4 + 1} + 2 - \sqrt{2} + \log\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{e^4 + 1}}\right)$

4. $2\sqrt{17} + \log\left(\frac{\sqrt{17} + 4}{\sqrt{17} - 4}\right)^{1/4}$ **5.** $2\sqrt{5} + \log(\sqrt{5} + 2)$

6. $2\sqrt{8} + 2\log\left(\frac{\sqrt{8} + 2}{\sqrt{8} - 2}\right)$ **7.** $2\sqrt{3}$ **9.** $\log 7 + \frac{3}{4}$ **10.** $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

11. $\log(2 + \sqrt{3})$ **12.** 4 **13.** $4a$ **14.** $(8^{3/2} - 5^{3/2})$ **15.** $\frac{\sqrt{17}}{4}(e^{-4} - e^{-8})$

16. $\frac{3\pi}{4}$ **17.** $\sqrt{5} - \frac{\sqrt{17}}{4} + \log\left[\frac{8 + 2\sqrt{17}}{1 + \sqrt{5}}\right]$

18. $4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ **19.** 2 **20.** 2

Capítulo XIII, Area

1. 25π **2.** $\frac{3\pi}{2}$ **3.** π **4.** $\frac{9\pi}{2}$ **5.** $\frac{3\pi}{8}$ **6.** $\frac{3\pi}{2}$ **7.** $2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **8.** $\frac{3\pi}{2}$

9. $\frac{\pi}{4}$ **10.** $\frac{9\pi}{2}$ **11.** $10\frac{2}{3}$ **12.** $10\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{4}{3}$ **14.** $\frac{4}{3}$ **15.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ **16.** 10

Capítulo XIII, Volúmenes de revolución

1. $\frac{\pi r^2 h}{3}$ **2.** $\frac{32\pi}{5}$ **3.** 12π **4.** 2π **5.** $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $\frac{5\pi}{14}$ **7.** $\frac{\pi}{3}$ **8.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$

9. $\frac{\pi}{2}(e^{-2} - e^{-10})$ **10.** $\pi[2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2]$ **11.** $\pi\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$

12. $\pi\left(1 - \frac{1}{B}\right)$ **13.** $\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{B^3}\right)$ **14.** $\pi \log B$

15. $\pi \log\frac{1}{a}$. No existe límite cuando $a \to 0$. El volumen aumenta sin limitación.

16. $\pi\left(\frac{1}{a} - 1\right)$. No existe límite cuando $a \to 0$. El volumen aumenta sin limitación.

17. $\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos a + \log(\sqrt{2} - 1) - \log(\csc a - \cot a)\right]$

No existe límite cuando $a \to 0$. El volumen aumenta sin limitación.

Capitulo XIV, §3

1. $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ **2.** $|R_n| \leqq \dfrac{|x|^n}{n!}$ **3.** $1 - \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}995$ **4.** $|R_3| \leq \dfrac{(0{,}1)^3}{3!}$

5. $|R_4| \leqq \frac{2}{3}10^{-4}$ **6.** $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3}$

7. $|R_4| \leqq 10^{-4}$ por estimaciones amplias

8. (a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = 0{,}515$

(b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = 0{,}857$

(c) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{180}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\pi}{180}\right) = 0{,}731$

(d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{180}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\pi}{180}\right) = 0{,}683$

(e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{180}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{2\pi}{180}\right) = 0{,}529$

(f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{180}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{180}\right) = 0{,}849$

9. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = 0{,}857$

10. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = 0{,}875$

11. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = 0{,}485$

12. (a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{R_5(x)}{x}$ luego

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + E \quad \text{donde} \quad |E| \leqq \frac{1}{5 \cdot 5!}$$

(b) $-\dfrac{(0{,}1)^2}{2} + E$ donde $|E| \leqq \dfrac{10^{-4}}{4 \cdot 4!}$

(c) Escribir $\operatorname{sen} u = u - \dfrac{u^3}{3!} + R_5(u)$, de modo que para $u = x^2$ obtenemos

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + R_5(x^2).$$

Tenemos para $u \geqq 0$,

$$|R_5(u)| \leqq \frac{u^5}{5!} = \frac{x^{10}}{5!}.$$

Por consiguiente

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + E,$$

donde

$$|E| \leqq \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}\,dx = \frac{1}{11 \cdot 5!} \leqq 10^{-3}$$

(d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 3!} + E$, y $|E| \leqq \frac{1}{10 \cdot 5!}$

(e) $1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} + E$, y $|E| \leqq \frac{1}{13 \cdot 6!}$

(f) $1 - \frac{1}{5 \cdot 3!} + E$, y $|E| \leqq \frac{1}{9 \cdot 5!}$

Capítulo XIV, §4

1. $e^{-x_2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ **2.** $|R_3| \leqq e^{1/2} \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} \leqq \frac{2(\frac{1}{8})}{6} = \frac{1}{24}$

3. $|R_4| \leqq e^{10-2} \frac{(10^{-2})^4}{4!} \leqq \frac{2(10^{-8})}{4!} = \frac{10^{-8}}{12}$

4. $|R_3| \leqq e^{10-2} \frac{(10^{-2})^3}{3!} \leqq \frac{2(10^{-6})}{6} = \frac{10^{-6}}{3}$

5. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}$ **6.** $|R_7| \leqq e^{-1} \frac{|-1|^7}{7!} \leqq \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$

7. (a) $|R_4| \leqq e^{-2} \frac{|2|^4}{4!} \leqq \frac{32}{3}$ (b) $|R_4| \leqq e^3 \frac{|3|^4}{4!} \leqq 214$

8. (a) $|R_5| \leqq e^2 \frac{|2|^5}{5!} \leqq \frac{64}{15}$ (b) $|R_5| \leqq e^3 \frac{|3|^5}{5!} \leqq \frac{648}{5}$

9. (a) $|R_{13}| \leqq \frac{16{,}2^{12}}{12!}$ usando $e < 4$ (b) $|R_{16}| \leqq \frac{16{,}2^{16}}{16!}$ usando $e < 4$

11. (a) $1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1}{7 \cdot 7!} + E$, donde $|E| \leqq \frac{e}{8 \cdot 8!}$

(b) Escribir $e^u = 1 + u + \cdots + \frac{u^4}{4!} + R_5(u)$. Para $u \leqq 0$ tenemos $e^u \leqq 1$,

y, por consiguiente, $|R_5(u)| \leqq \frac{|u|^5}{5!}$.

Hacer ahora $u = -x^2$. Entonces

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{8!} + R_5(-x^2).$$

Integrar la primera parte, formada por potencias de x, término a término. Obtenemos

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} + E,$$

y

$$|E| \leqq \int_0^1 |R_5(-x^2)|\, dx \leqq \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}\, dx = \frac{1}{10 \cdot 5!} \leqq 10^{-2}.$$

(c) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} + E$,

donde $|E| \leqq \frac{e}{13 \cdot 6!}$

(d) $e^u = 1 + R_2(u)$, y hacemos $u = x^2$. Para $0 \leqq x \leqq 0{,}1$ encontramos $e^u \leqq 2$ (estimación amplia). Por consiguiente,

$$|R_2(u)| \leqq \frac{2u^2}{2!} = u^2.$$

Tenemos $ex^2 = 1 + R_2(x^2)$, y $|R_2(x^2)| \leqq x^4$. Por consiguiente,

$$\int_0^{0,1} e^{x^2}\, dx = 0,1 + E, \qquad \text{donde} \qquad |E| \leqq \int_0^{0,1} x^4\, dx \leqq \frac{10^{-5}}{5}.$$

(e) $0,1 - 1/3(10^{-3}) + \mathrm{E}$, donde $|\mathrm{E}| \leqq 10^{-6}$.

Capítulo XIV, §5

1. (a) $\log 1,2 = 0,2 - \dfrac{(0,2)^2}{2} + \dfrac{(0,2)^3}{3}\ |R_4| \leqslant 4 \cdot 10^{-4}$

(b) $\log 0,9 = 0,1 - \dfrac{(0,1)^2}{2}\ |R_3| \leqslant 10^{-3}/2,7$

(c) $\log 1,05 = 0,05 - \dfrac{(0,05)^2}{2}\ |R_3| \leqslant \dfrac{5^3}{3} \cdot 10^{-6}$

(d) $\log 0,9 = -0,1 - \dfrac{(0,1)^2}{2}\ |R_3| \leqslant 10^{-3}/2,7$

(e) $\log \frac{24}{25} = -0,04\ |R_2| \leqslant \frac{16}{1,92} \cdot 10^{-4}$

(f) $\log \frac{26}{25} = 0,04\ |R_2| \leqslant 0,0008$

Capítulo XIV, §6

5. 1 **6.** 1 **7.** 1 **8.** 1 **9.** 1 **10.** 2 **11.** $\frac{1}{2}$ **12.** 0 **13.** $-\frac{1}{2}$ **14.** 1 **15.** 1 **16.** 1

Capítulo XIV, §7

1. $5 + \frac{1}{75}$ **2.** $10 - \frac{3}{20} - \frac{9}{8000}$

3. $|R_2| \leqq \dfrac{1}{9} \cdot 10^{-2} \cdot \dfrac{1}{(0,9)^{5/3}} \leqq \dfrac{1}{9} \cdot 10^{-2} \cdot \dfrac{1}{(0,9)^2} = \dfrac{1}{-129}$

4. (a) $|R_2| \leqq \frac{1}{2} \cdot (0,8)^{-3/2} \cdot 10^{-2} \leqq \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(0,8)^2} \cdot 10^{-2} \leqq 10^{-2}$

(b) $|R_2| \leqq 0,0005$

5. (a) $|R_2| \dfrac{3}{32} \cdot 10^{-5}$ (b) $|R_2| \leqq \dfrac{3}{8} \cdot 10^{-2}$ (c) $|R_2| \leqq \dfrac{3}{32} \cdot 10^{-2}$

6. (a) $|R_3|\, 5 \cdot 10^{-4}$ (b) $|R_3| \leqq \dfrac{1}{16} (0,8)^{-5/2} (0,2)^3 \leqq \dfrac{1}{2 \cdot 8^3} \leqq 10^{-3}$

(c) $|R_3| \dfrac{1}{16} \cdot 10^{-4}$

Capítulo XIV, §8

8. $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{3} + O(x^6)$ **9.** $x^2 + \dfrac{x^4}{3} + O(x^6)$

10. $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + O(x^6)$

11. $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + O(x^6)$ **12.** $x^3 + \dfrac{x^5}{3} + O(x^7)$

Ejercicios suplementarios

Capítulo XIV

1. $1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3$ **2.** $1 - x^2$ **3.** $1 + x^2$ **4.** $x - \frac{2}{3}x^3$
5. $x + \frac{1}{3}x^3$ **6.** x^2 **7.** $-1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ **8.** $1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$
9. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ **10.** $1 + x - \frac{1}{3}x^3$ **11.** $2 + x^2$ **12.** $2x + \frac{1}{3}x^3$
13. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2$ **14.** $1 + \pi x + 3x^2 + 2x^3$
15. (a) $x - \frac{2}{3}x^3$ (b) $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ (c) $1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{24}x^4$
(d) $x^2 - \frac{1}{2}x^4$ (e) $x - \frac{5}{6}x^3$ (f) $1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{24}$
(g) $x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4$
16. $e = 1 + \sum_{n=0}^{13} \frac{1}{n!}$ **17.** $e^{-2} = 1 - 2 + 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} - \frac{2^7}{7!}$
18. $2x + \frac{2x^3}{3}\ |R| \leqq \frac{2}{5}$
19. 2 **20.** $\frac{1}{2}$ **21.** 1 **22.** 1 **23.** -1 **24.** 1 **25.** 1 **26.** 0 **27.** $-\frac{1}{6}$ **28.** 0
29. $\frac{1}{2}$ **30.** 1 **31.** $-\frac{1}{8}$ **32.** $-\frac{1}{9}$ **33.** (a) 0 (b) 0 (c) 0 **34.** 1 **35.** $-\frac{1}{2}$
36. 0 **37.** $\frac{1}{5!}$ **38.** 0 **39.** -1 **40.** 0 **41.** $\frac{1}{4!}$ **42.** 2 **43.** 0 **44.** $-\frac{1}{2}$
45. -1

Capítulo XV, §2

3. No **4.** Sí **5.** No **6.** No **7.** No **8.** Sí **9.** Sí

Capítulo XV, §3

1. Sí **2.** Sí **3.** No **4.** Sí **5.** No **6.** Sí **7.** No **8.** Sí **9.** No **10.** Sí **11.** No **12.** Sí
13. No **14.** Sí **15.** Sí **16.** Sí **17.** Sí **18.** Sí

Capítulo XV, §4

3. Sí **4.** Sí **5.** Sí **6.** Sí **7.** Sí **8.** Sí **9.** Sí **10.** Sí

Capítulo XV, §5

1. Sí **2.** Sí **3.** Sí **4.** Sí **5.** Sí **6.** Converge, pero no absolutamente **7.** Sí **8.** No
9. Converge, pero no absolutamente **11.** Converge, pero no absolutamente **12.** Converge, pero no absolutamente **13.** No converge; no converge absolutamente **14.** No converge
15. Converge, pero no absolutamente **17.** Converge, pero no absolutamente **18.** Sí
19. Converge, pero no absolutamente **20.** Converge, pero no absolutamente

Capítulo XV, §6

1. 0 **2.** ∞ **3.** 1 **4.** 1 **5.** 1 **6.** 1 **7.** 1 **8.** $\frac{1}{2}$ **9.** 2 **10.** 0 **11.** 1
12. 1 **13.** $\frac{1}{2}$ **14.** $\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{1}{4}$ **16.** $\frac{1}{e}$ **17.** 27 **18.** $\frac{4}{e^2}$ **19.** 0 **20.** ∞ **21.** 2
22. 3 **23.** 1 **24.** ∞ **25.** 1 **26.** ∞ **27.** 1 **28.** ∞ **29.** e **30.** ∞

Capítulo XVI, §1

1. (a) $-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$ (b) 2 (c) $-1+3i$ (d) $-1+3i$

(e) $6\pi+(7+\pi^2)i$ (f) $-2\pi+\pi i$ (g) $-3\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\pi i$

(h) $-8-6i$

2. (a) $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ (b) $\frac{3}{10}-\frac{i}{10}$ (c) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ (d) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

(e) $1-i$ (f) $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ (g) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ (h) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

3. $1, \alpha$

Capítulo XVI, §2

1. (a) $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ (b) $\sqrt{3}\,e^{i(\arctan\sqrt{2})}$ (c) $3e^{i\pi}$ (d) $4e^{i\pi/2}$

(e) $\sqrt{3}\,e^{-i(\arctan\sqrt{2})}$ (f) $5e^{-i\pi/2}$ (g) $7e^{i\pi}$ (h) $\sqrt{2}\,e^{i5\pi/4}$

2. (a) -1 (b) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ (d) $\frac{\pi}{2}-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(e) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (f) $-i$ (g) -1 (h) $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

4. Si $\alpha = r^{i\theta}$, entonces las raíces n-ésimas son

$$r^{1/n}e^{i(\theta+2\pi k)/n}, \qquad 0 \leqq k \leqq n-1$$

6. $x = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad y = \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

7. Todos los u tales que $u = z + 2n\pi i$, n entero **8.** Todo $z = 2n\pi i$, n un entero.

8. Todo $z = 2n\pi i$, n un entero.

Capítulo XVI, §3

3. 0

Apéndice 1, §1

1. (a) La máx-co-inf es 2; la mín-co-sup no existe.
(b) La máx-co-inf es 1; la mín-co-sup no existe.
(c) La máx-co-inf no existe;
la mín-co-sup no existe

2. (a) La máx-co-inf es 0; la mín-co-sup es $\sqrt[3]{5}$.
(b) La máx-co-inf es 0; la mín-co-sup es $\sqrt[3]{5}$.
(c) La máx-co-inf es -2; la mín-co-sup es 2.
(d) La máx-co-inf no existe; la mín-co-sup es $\frac{11}{2}$

Apéndice 1, §2

4. $f(x)$ existe para todo x; $f(x) = 1$, $|x| \geqq 1$; $f(x) = 0$, $|x| < 1$

5. (a) $f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = -1$, $f(2) = 1$
(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe
(c) $\lim_{x\to -1} f(x)$ does no existe

6. (a) $f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(2) = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

(c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

7. (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 0

8. (a) 0 (b) 0 (c) 0

Indice de materias

Cuando acontece que un gran matemático tiene preocupaciones pedagógicas, es raro que encuentre el tiempo necesario para escribir una serie de obras que abarquen casi en su totalidad las bases de la formación matemática; es decir, que lleven al estudiante desde el inicio de sus estudios formales hasta el umbral de la investigación. No obstante, esto es lo que ha hecho Serge Lang. *Cálculo I* ha sido escrito por Lang para el estudiante, con el fin de proporcionar a éste un acceso inmediato y agradable al tema. En el prólogo, el autor dice: "Tengo la esperanza de haber conseguido un equilibrio apropiado entre el dedicar un tiempo excesivo a los detalles y la falta de suficientes ejercicios técnicos, necesarios para alcanzar la deseada familiaridad con el tema. En cualquier caso, ciertos hábitos rutinarios de los matemáticos sofisticados no son adecuados para un primer curso".

Sumario de *Cálculo I*: Números y funciones. Gráficas y curvas. La derivada. Seno y coseno. El teorema del valor medio. Trazado de curvas. Funciones inversas. Exponentes y logaritmos. Integración. Propiedades de la integral. Técnicas de integración. Algunos ejercicios importantes. Aplicaciones de la integración. La fórmula de Taylor. Series. Números complejos. Apéndice 1: ϵ y δ. Apéndice 2: Inducción. Apéndice 3: Seno y coseno. Apéndice 4: Física y matemática. Respuestas a los ejercicios.

Serge Lang recibió su doctorado de Princeton University y es actualmente profesor de Matemática en Yale University.

FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO

Apartado Postal 22-456. México 14060, D.F., México
Apartado Aéreo 29696. Bogotá, Colombia
Apartado Postal 62361. Caracas 106, Venezuela
Casilla 70060. Santiago 7, Chile
Apartado Postal 29853. Río Piedras, Puerto Rico 00929

ISBN 968-6630-05-8

04340