

La derivada y sus aplicaciones

1. Objetivos

1.1. General

Aplicar el concepto de derivada con el fin de buscar el escenario óptimo (máximo o mínimo) de una situación dada.

1.2. Específicos

- Interiorizar el concepto de derivada como una herramienta aplicable a contextos reales.
- Desarrollar procesos intuitivos y operativos que permitan identificar los escenarios óptimos de una situación dada.
- Establecer situaciones de contexto empresarial en las cuales se puedan aplicar el concepto de derivación para calcular escenarios óptimos.

2. Introducción

La maximización del beneficio o la utilidad es uno de los pilares de múltiples modelos económicos. Esto sucede porque maximizar las utilidades es uno de los principales objetivos que siguen las empresas, con el fin de incrementar el valor de la empresa.

Así, los ingresos de una empresa están relacionados directamente con el precio de venta y la cantidad de productos que se venden. Es por ello que los ingresos pueden ser determinados por el producto entre el precio de venta del producto en el mercado y la cantidad de productos fabricados por la empresa, es decir

$$\text{Ingreso} = \text{precio} \times \text{cantidad}$$

Ahora, en el mundo empresarial, la utilidad que obtiene una empresa está determinado por el nivel de producción de bienes y servicios y los costes que conlleva producir estos bienes; de la siguiente manera

$$Utilidad = Ingresos - Costos$$

En este sentido, esta guía se divide en dos partes. En la primera parte se analizarán las características del producto de una empresa en particular, de acuerdo con las necesidades de un cliente. En la segunda parte se analizarán los ingresos, costos y utilidades de la empresa, en relación con el producto en mención, de cara a establecer los detalles administrativos del producto que fabrica la empresa. El objetivo será encontrar el número de productos que se deberían producir y comercializar para maximizar las utilidades que obtiene la empresa logrando cumplir los requerimientos del cliente y las metas de la empresa.

3. Materiales requeridos

- Papel.
- Lápiz.
- Calculadora.
- Excel.
- GeoGebra (este se puede trabajar en línea, sin necesidad de descargar alguna aplicación).

4. Desarrollo del laboratorio

El laboratorio se desarrollará con base en los siguientes ítems:

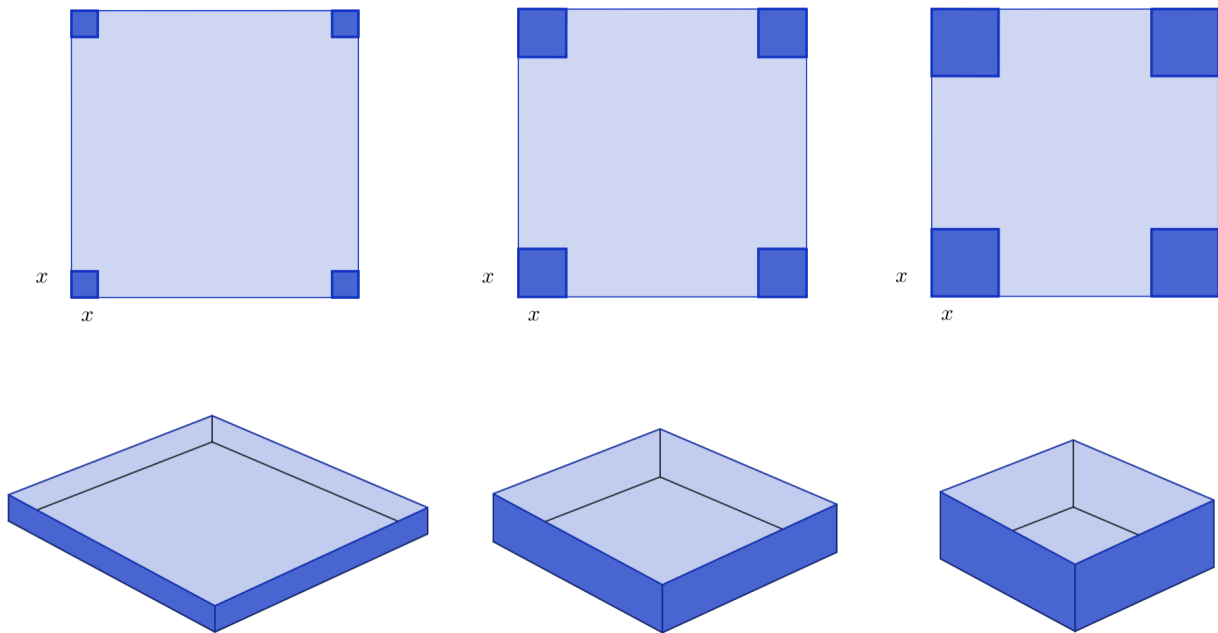
- Conforme un grupo de trabajo, con máximo 4 integrantes.
- Siga cada ítem de la actividad de manera ordenada.
- En particular, no se salte o dividan los ítems de la actividad.
- Desarrollen la actividad entre todos y cada uno de los compañeros que conforman el grupo colaborativo.

5. Actividad

Realice los siguientes procedimientos; los cuales le han de ser útiles al momento de realizar el respectivo informe de laboratorio:

1. La empresa multinacional “*Escoja el nombre de su empresa*” se encarga de la fabricación de diferentes tipos y tamaños de cajas de cartón. Uno de sus productos más vendidos es la caja de cartón que se fabrica con una lámina de cartón rectangular de a metros de largo y b metros de ancho. Estas cajas se fabrican a petición del cliente (sin tapa), cortando un cuadrado de lado x en cada una de

las cuatros esquinas de la lámina, doblando los lados restantes para formar las paredes de la caja; tal como se muestra a continuación:



Para mayor claridad, puede visualizar este enlace.

Ante el contexto planteado surgen dos situaciones:

- El mejor cliente que tiene la empresa necesita por lo menos 1.000 cajas fabricadas con la lámina de medidas $a \times b$; sin embargo, exige que el volumen de la caja sea el más grande posible. Con esto en mente, se le asigna a su grupo de trabajo obtener el valor de corte x que maximiza el volumen de la caja, para cumplir el requerimiento del cliente.
- El objetivo de su empresa consiste en maximizar las utilidades obtenidas por la producción de las cajas para este cliente (teniendo en cuenta los pormenores de la fabricación y venta).

Para ello, es necesario entender que el precio de venta (en pesos colombianos) de este producto está determinado por la ecuación de demanda

$$p = 1000 V_{max} - 7,5q ,$$

donde V_{max} es el volumen máximo de las cajas (solicitado por el cliente) y q representa la cantidad de cajas producidas y vendidas. Así mismo, el costo total (en pesos colombianos) de producir q cajas está determinado por la función

$$C(q) = 2,5q^2 + 700q V_{max} + 2000 V_{max}.$$

Con base en la información dada, se tiene:

- a. A cada grupo (una vez tenga decidido el nombre de la empresa), el docente le asignará los valores correspondientes al largo y al ancho de la lámina (a y b , respectivamente).

- b. Consulte como se calcula el área de un cuadrado y el volumen de un paralelepípedo (caja).
- c. Determine el área de los cortes cuadrados (de la x) que se le quita a cada lámina y diligencie la siguiente tabla, para los valores que cobren sentido según los valores asignados. ¿Por qué tienen sentido?:

x	Área cortada	Área restante
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

- d. Haga uso de este enlace para acceder a un applet de GeoGebra en el que encontrará una construcción que puede utilizar para visualizar la situación particular de su empresa con los valores de las dimensiones de la lámina de cartón asignados a su grupo.
- e. Utilizando el applet de GeoGebra, complete la siguiente tabla con los valores respectivos.

x	Ancho	Largo	Volumen
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Determine los valores de corte x para los cuales el volumen de la caja tiene sentido. ¿Por qué tienen sentido?

- f. Utilizando los datos de los ítems anteriores, trace las gráficas (en Excel o GeoGebra) de:
- x versus $A(x)$
 - x versus a
 - x versus b
 - x versus $V(x)$
- g. Encuentre la función volumen $V(x)$ en términos de la cantidad de corte x .

- h. Utilice GeoGebra para hallar la gráfica de esta función y determine visualmente el valor máximo del volumen de la caja.
 - i. Encuentre el vértice de la parábola (resultante en la función) e interprete este valor. ¿Qué significa el vértice de una parábola para este problema?
 - j. Encuentre el valor máximo del volumen aplicando el criterio de la primera y segunda derivada. Compare este resultado con el encontrado en el ítem anterior.
2. Con el resultado hallado del volumen máximo de la caja creada a partir de una lámina (en el ítem anterior):
- a. Encuentre las siguientes funciones:
 - Ingreso total ($I(x)$)
 - Costo total ($C(x)$)
 - Utilidad total ($U(x)$)
 - b. Utilizando alguna herramienta de cálculo, complete la siguiente tabla e interprete cada uno de estos valores.

1	$I(q)$	$C(q)$	$U(q)$
0			
100			
500			
1.000			
2.000			
5.000			
10.000			

- c. Haciendo uso de GeoGebra realice las gráficas de las siguientes funciones:
 - Ingreso total ($I(x)$)
 - Costo total ($C(x)$)
 - Utilidad total ($U(x)$)
- d. Determine visualmente los niveles de producción para los cuales la empresa:
 - Obtiene ganancias.
 - No tiene utilidades.
 - Obtiene pérdidas.
- e. Determine visualmente los niveles de producción para los cuales la empresa obtiene:
 - El ingreso máximo.
 - El costo mínimo.
 - La utilidad máxima.

- f. Halle las derivadas de las funciones $I(q)$, $C(q)$ y $U(q)$. Luego complete la siguiente tabla y brinde una interpretación para cada valor.

1	$I'(q)$	$C'(q)$	$U'(q)$
0			
100			
500			
1.000			
2.000			
5.000			
10.000			

- g. Encuentre el valor de la cantidad q y de las respectivas funciones, correspondiente a:

- El ingreso máximo.
- El costo mínimo.
- La utilidad máxima.

aplicando el criterio de la primera y segunda derivada.

- h. Realice un análisis de los valores encontrados para la cantidad y las respectivas funciones. ¿Para qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima de la empresa?

6. Informe final

Para finalizar el laboratorio, cada grupo debe presentar un informe escrito (tipo artículo) en un documento (en formato .pdf) con las normas APA establecidas para este tipo de documentos académicos formales.

Dicho informe debe contener los siguientes ítems:

- Título del laboratorio.
- Presentación de los integrantes del grupo.
- Resumen del laboratorio trabajado.
- Introducción (donde se resalte contexto, objetivos y un comentario breve de lo hallado).
- Marco teórico breve (donde haga hincapié aspectos teóricos relevantes).
- Metodología (donde presenten los ítems desarrollados a lo largo del laboratorio).
- Resultados y discusión (donde analicen coherentemente los resultados obtenidos, con los argumentos de las justificaciones pedidas en el ítem Actividad).
- Conclusiones (cierre del informe con enunciados concluyentes alusivos al desarrollo del tema del laboratorio).

- Bibliografía.

Este informe debe ser entregado al docente y socializado al grupo completo del curso, en el próximo encuentro del curso, en las condiciones en que el docente indique.

Para su comodidad, se le brindará una plantilla con la que se podrá guiar para la realización del informe, así como una plantilla institucional para la realización de las diapositivas necesarias para la presentación y socialización del informe ante el curso (en caso de que así lo indique el docente).