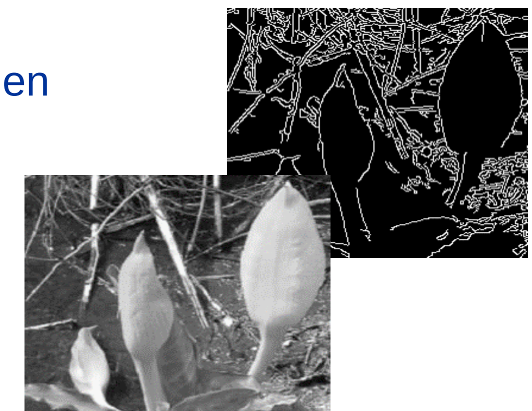
# „Bildverarbeitung“

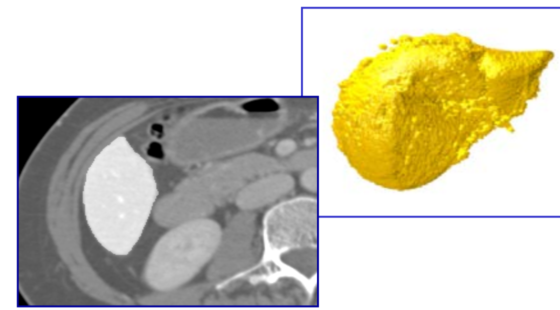
## Hochschule Niederrhein

## Fourier Transformation

# Roter Faden durch die Vorlesung

- Bildaufnahme
- Histogramme
- Grauwertmodifikation
- Glättungsfilter
- Kantenfilter
- Nichtlineare Filter
- Segmentierung
- Morphologische Operationen
- Fourier Transformation
- Anwendung der FFT
- Probeklausur

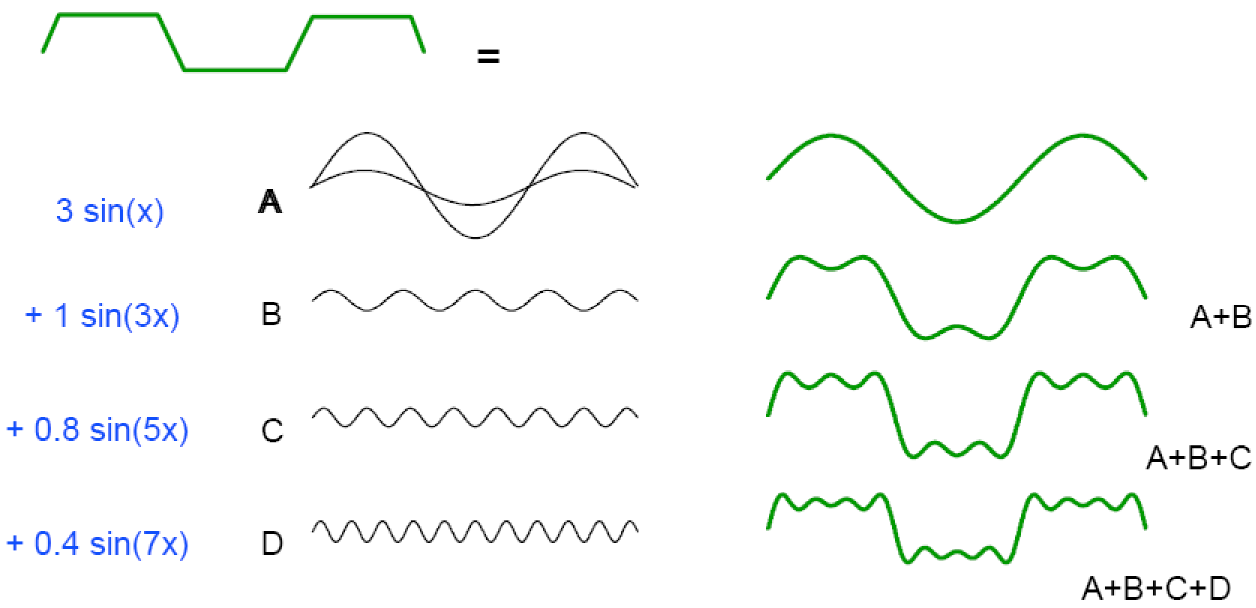




# 9 Fourier-Transformation

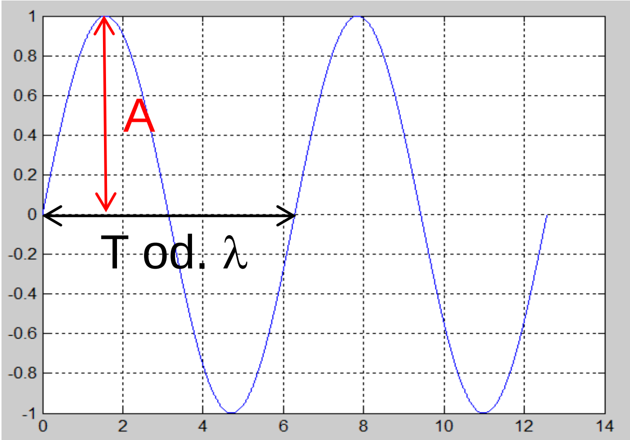
**Grundidee**

Beschreibe beliebige Funktion als gewichtete Summe periodischer Grundfunktionen (Basisfunktionen) mit untersch. Frequenz



# 9 Fourier-Transformation

Periodische Funktionen $f(x+p) = f(x)$




Parameter

A: Amplitude

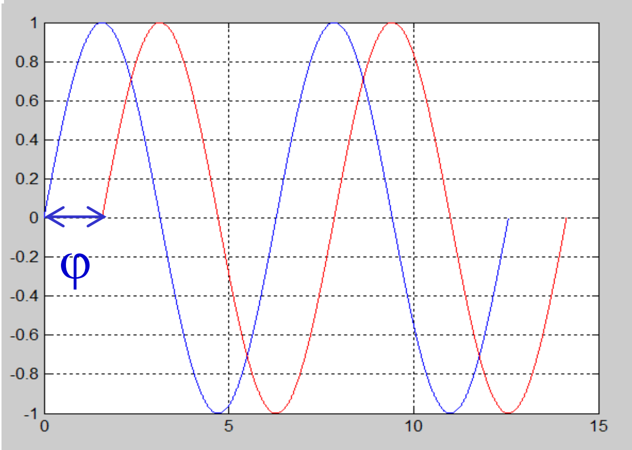
T: Periode (Periodendauer, λ: Wellenlänge)

f: Frequenz (f = 1 / T bzw. f = 1 / λ Wellenzahl)

ω bzw. k: Kreisfrequenz bzw. Kreiswellenzahl

$\omega = 2\pi f$ bzw. $k = 2\pi f$

φ: Phasenverschiebung (Phase, Verschiebung gegenüber der Ausgangslage)



# 9 Fourier-Transformation

Fouriers-Theorem: Jede beliebige periodische Funktion lässt sich als Summe von cos- und sin-Funktionen unterschiedlicher Frequenzen darstellen.

Nicht periodische Funktion (auf einen bestimmten Definitionsbereich beschränkt): Periodische Fortsetzung des Bereichs durch einfaches kopieren → Resultat ist eine periodische Funktion.

Bild: Zeilen und Spalten von nichtperiodischen Funktionen → Fourier-Transformation eines Bildes ist möglich

# 9 Fourier-Transformation

## Motivation

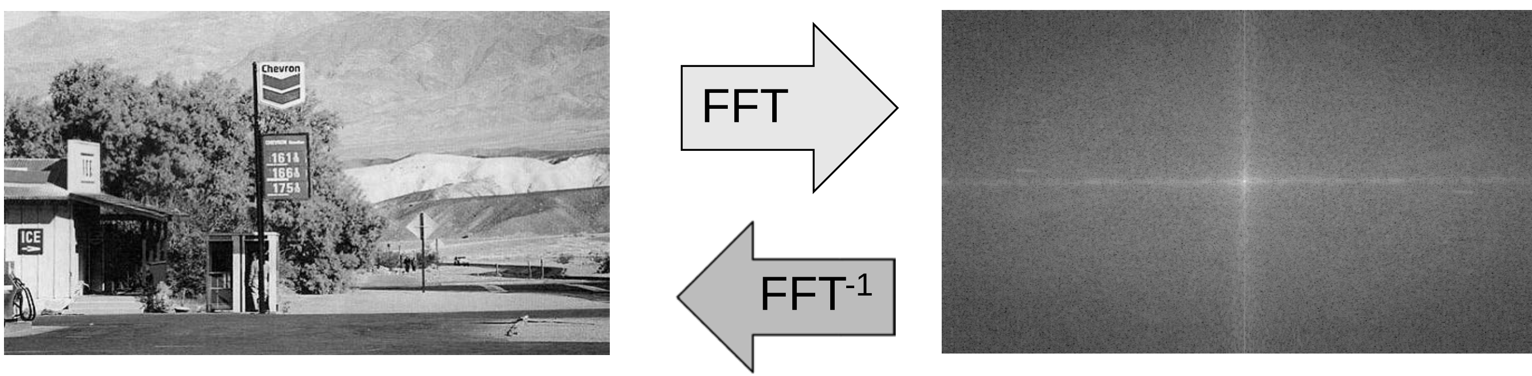
- Schwierigkeit, manche Operationen im Ortsraum (d.h. auf den Pixeln des Bildes) auszuführen
  - Herausfiltern bestimmter Frequenzen
  - Beseitigung störender Details
  - Konvolution, Korrelation
  - Rekonstruktion von Bildern aus Projektionen (z.B. CT)
- Ziel: Übertragung des Bildes in einen Raum, in dem diese Operationen einfacher sind
- Voraussetzung: Rückweg muss möglich sein!

# 9 Fourier-Transformation

Ortsraum (bisherige Sichtweise): Darstellung des Bildes durch den Grauwert an einem bestimmten Ort

Frequenzraum: Darstellung durch cos- und sin-Funktionen verschiedener Frequenzen

Ein Bild kann eindeutig und vollständig in beiden Räumen dargestellt werden.




[1]

# 9 Fourier-Transformation

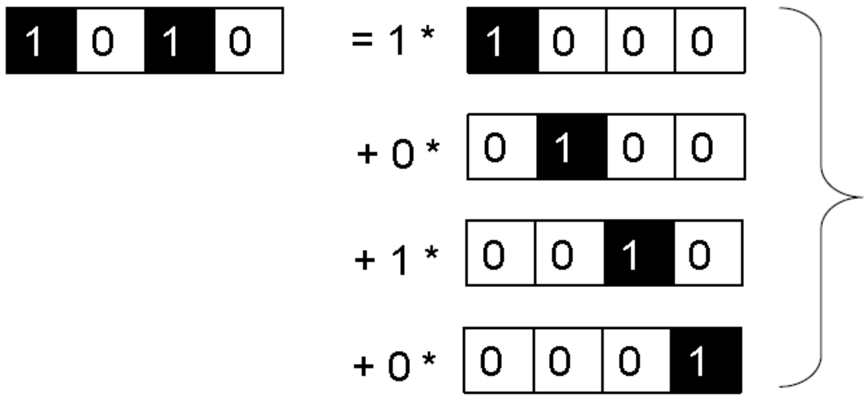
## Eigenschaften

- keine Veränderung einer Funktion durch Transformation, sondern nur andere Darstellung
- Transformation ist umkehrbar → inverse Fouriertransformation

- Transformation stellt einen Wechsel der Basis dar

# 9.1 Basisfunktionen

## Basisvektoren eines Bildes




bilden eine Basis des $R^4$,
sind paarweise orthogonal,
haben Länge 1

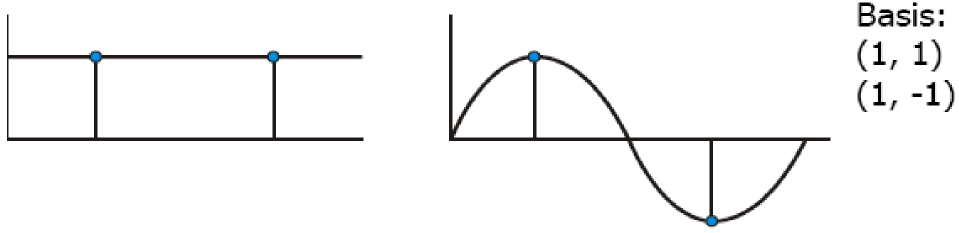
Wahl anderer Basisvektoren → Transformation mittels Basiswechsel
Basiswechselmatrix vom Rang der Pixelanzahl

# 9.1 Basisfunktionen

## Orthogonale Funktionen

- $f_1$und $f_2$ sind Funktionen, die an N Stellen abgetastet sind (also N-dim. Vektoren)
- $f_1$und $f_2$ sind orthogonal, falls das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist
- N paarweise orthogonale Funktionen $f_1 \ldots f_N$ bilden damit eine orthogonale Basis des N-dim. Raums
- Transformationen zwischen orthogonalen Basen sind immer umkehrbar

# 9.1 Basisfunktionen




Transformation

$$(30,211)\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=(241,-181)$$

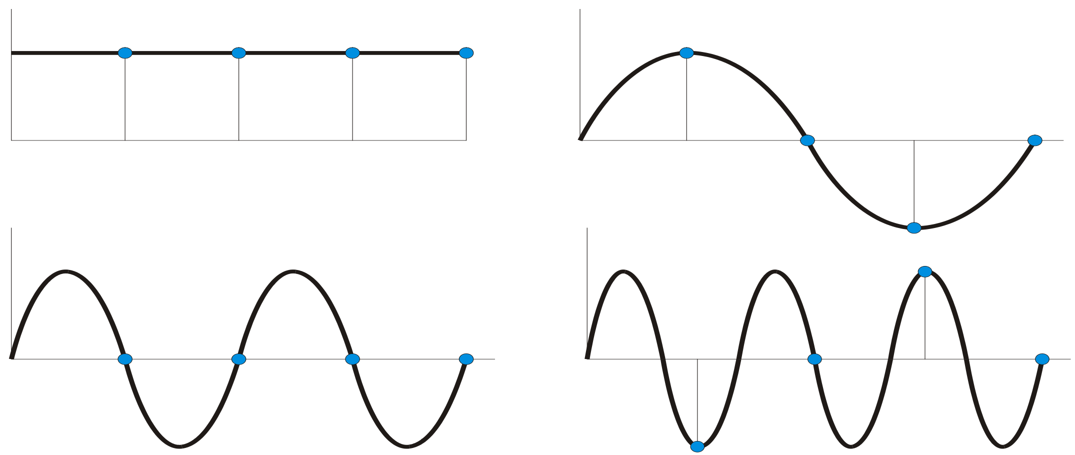
Rücktransformation

$$(241,\text{-}181)\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^T=(60,422)$$

Anmerkungen:

- Das Resultat der Rücktransformation muss skaliert werden, weil die Basis nicht normiert ist.
- Es gibt immer so viele Basisfunktionen, wie der Definitionsbereich der diskreten Funktion Werte hat.

# 9.1 Basisfunktionen

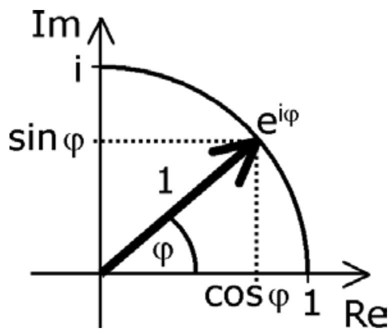


Größere Funktionen für größere Bilder

| Sinuskurven: | Cosinuskurven: |
| --- | --- |
| (1, 1, 1, 1) | (1, 1, 1, 1) |
| (1, 0, -1, 0) | (0, -1, 0, 1) |
| (0, 0, 0, 0) | (-1, 1, -1, 1) |
| (-1, 0, 1, 0) | (0, -1, 0, 1) |

- **Sinus-Funktionen bilden keine orthogonale Basis**
- **Cosinus-Funktionen sind in den Werten nicht zu unterscheiden.**

# 9.1 Basisfunktionen




Komplexe Basisfunktionen $e^{ix}=\cos(x)+i\cdot\sin(x)$ bilden eine brauchbare Basis!

(Anmerkung: Skalarprodukt für komplexe Vektoren $<\mathbf{a},\mathbf{b}> = \Sigma\, a_i \cdot b_i^*$)

Eindimensionale Fourier-Transformation : **F = f · B**

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot \exp(-2\pi i \frac{xu}{N})$$ , für alle u=0,.., N-1

Inverse Fourier-Transformation : **f = F·B**$^T$

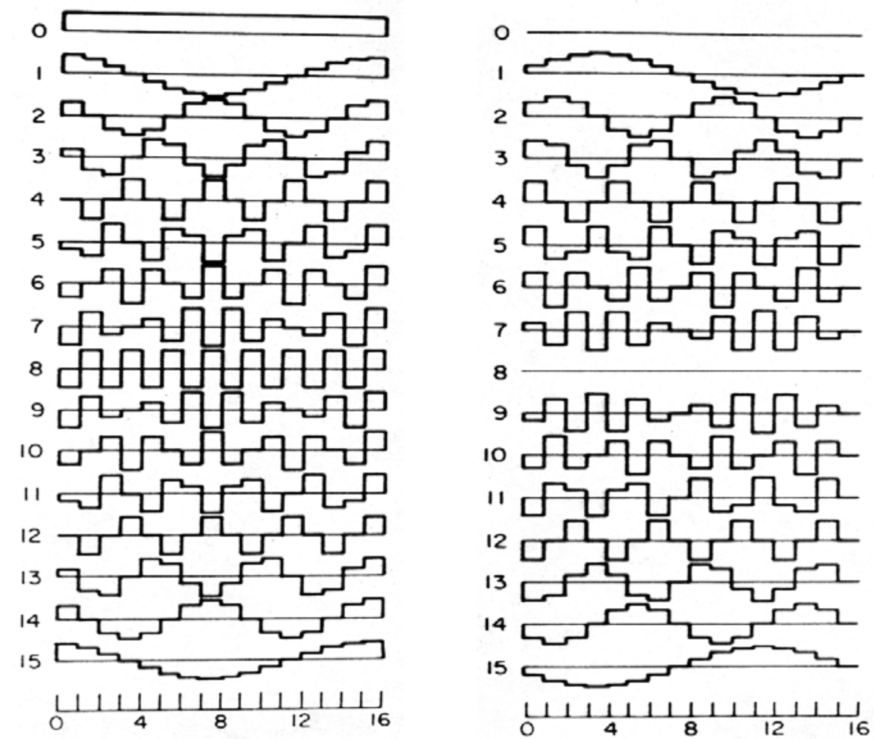
$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot \exp(2\pi i \frac{xu}{N})$$ , für alle x=0,.., N-1

Skalierungsfaktor, weil die Basisfunktionen nicht normiert sind.

# 9.1 Basisfunktionen

Fourier-Basisfunktionen
für die eindimensionale
Transformation für N=16

Wellenzahl




Cosinus -Komponenten Sinus -Komponenten

# 9.2 Orthogonale Funktionstransformation

- Betrachte abgetastete Funktionen wie Vektoren
- Finde neue geeignete orthogonalen Basis
- Üblicherweise Basisfunktionen, die eine Bedeutung bzgl. der betrachteten Eigenschaft haben
- Transformiere Bild in diese Basis
- Betrachte es dort (und verändere es entsprechend)
- Transformiere es zurück

# 9.2 Orthogonale Funktionstransformation

| $u$ | $g(u)$ Re | $g(u)$ Im |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 0.0000 |
| 1 | 3.0000 | 0.0000 |
| 2 | 5.0000 | 0.0000 |
| 3 | 7.0000 | 0.0000 |
| 4 | 9.0000 | 0.0000 |
| 5 | 8.0000 | 0.0000 |
| 6 | 6.0000 | 0.0000 |
| 7 | 4.0000 | 0.0000 |
| 8 | 2.0000 | 0.0000 |
| 9 | 0.0000 | 0.0000 |

DFT $\longrightarrow$

DFT$^{-1}$ $\longleftarrow$

| $G(x)$ Re | $G(x)$ Im | $x$ |
|---|---|---|
| 43.0000 | 0.0000 | 0 |
| -18.5623 | -11.1352 | 1 |
| 1.6180 | - 1.1756 | 2 |
| 1.5623 | - 1.0041 | 3 |
| -0.6180 | 1.9021 | 4 |
| -1.0000 | 0.0000 | 5 |
| -0.6180 | -1.9021 | 6 |
| 1.5623 | 1.0041 | 7 |
| 1.6180 | 1.1756 | 8 |
| -18.5623 | 11.1352 | 9 |

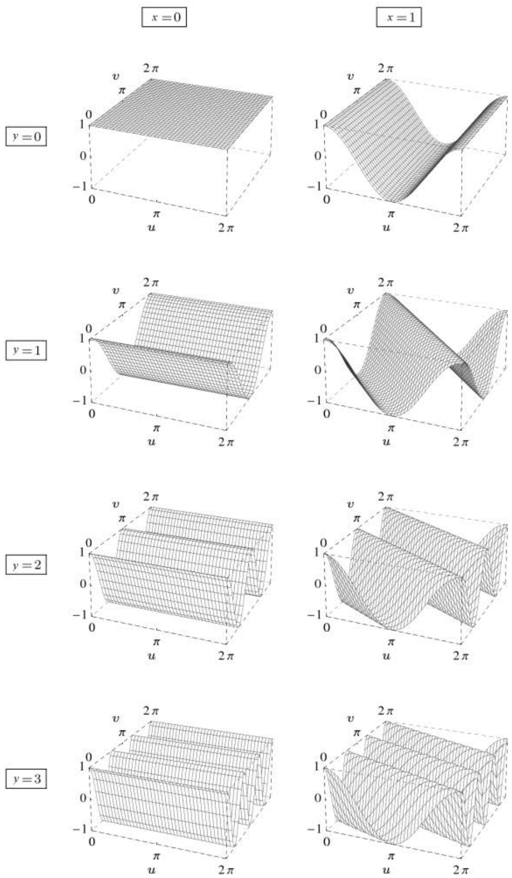
Ergebnis der Transformation ist eine komplexe Zahl

# 9.3 Zweidimensionale Fourier-Transformation

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp\left[-2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N}\right)\right]$$

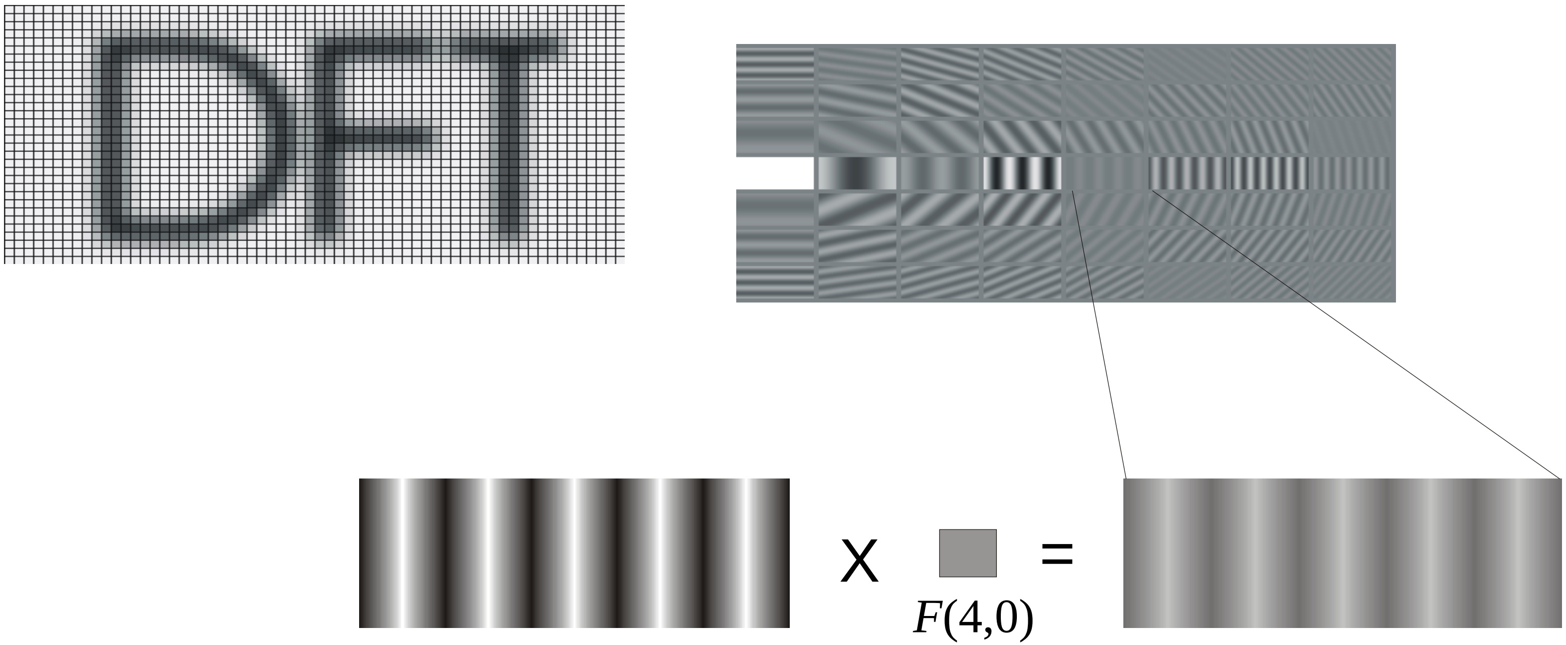
$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \exp\left[2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N}\right)\right]$$

für alle x, u = 0,.., M-1
für alle y, v = 0,.., N-1




[2]

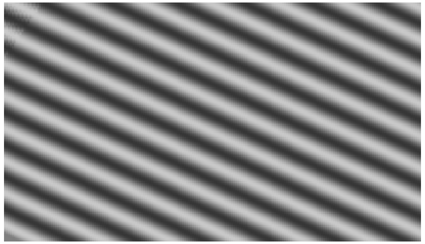
# 9.3 Zweidimensionale Fourier-Transformation




Beispiel einer Basisfunktion:

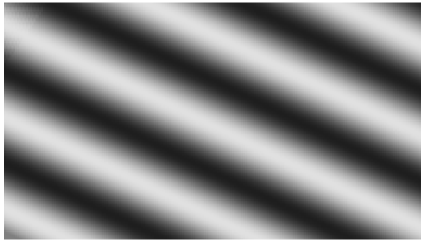
[3]

# 9.3 Zweidimensionale Fourier-Transformation



+

+

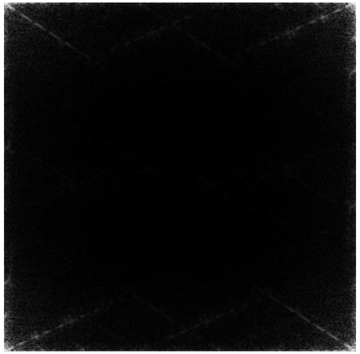


=

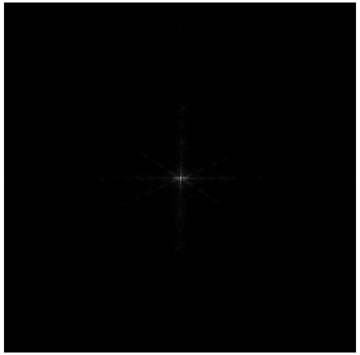

[1]

# 9.4 Amplitude

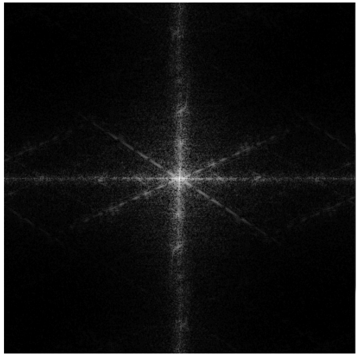
- Betrag eines Funktionswerts $|Amplitude| = \sqrt{\mathrm{Re}(u,v)^2 + \mathrm{Im}(u,v)^2}$
- Gewichtung der betreffenden Basisfunktion
- Nachverarbeitung der Darstellung: Logarithmische Skalierung und Zentrierung



log. Skaliert

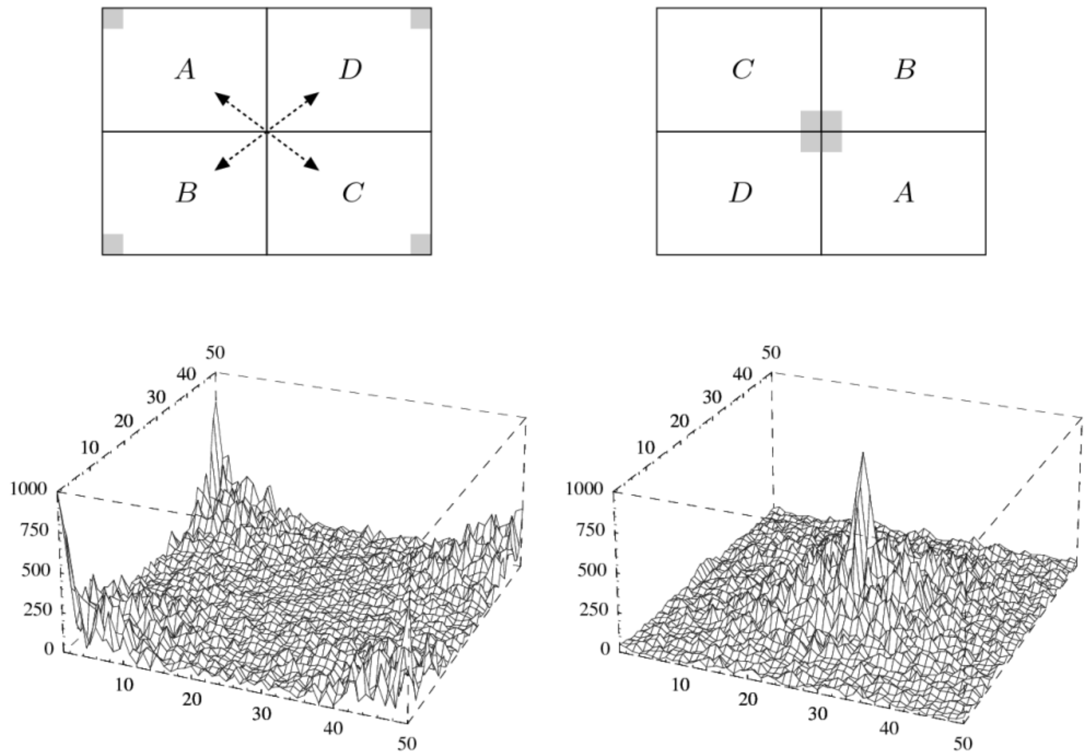


Zentriert



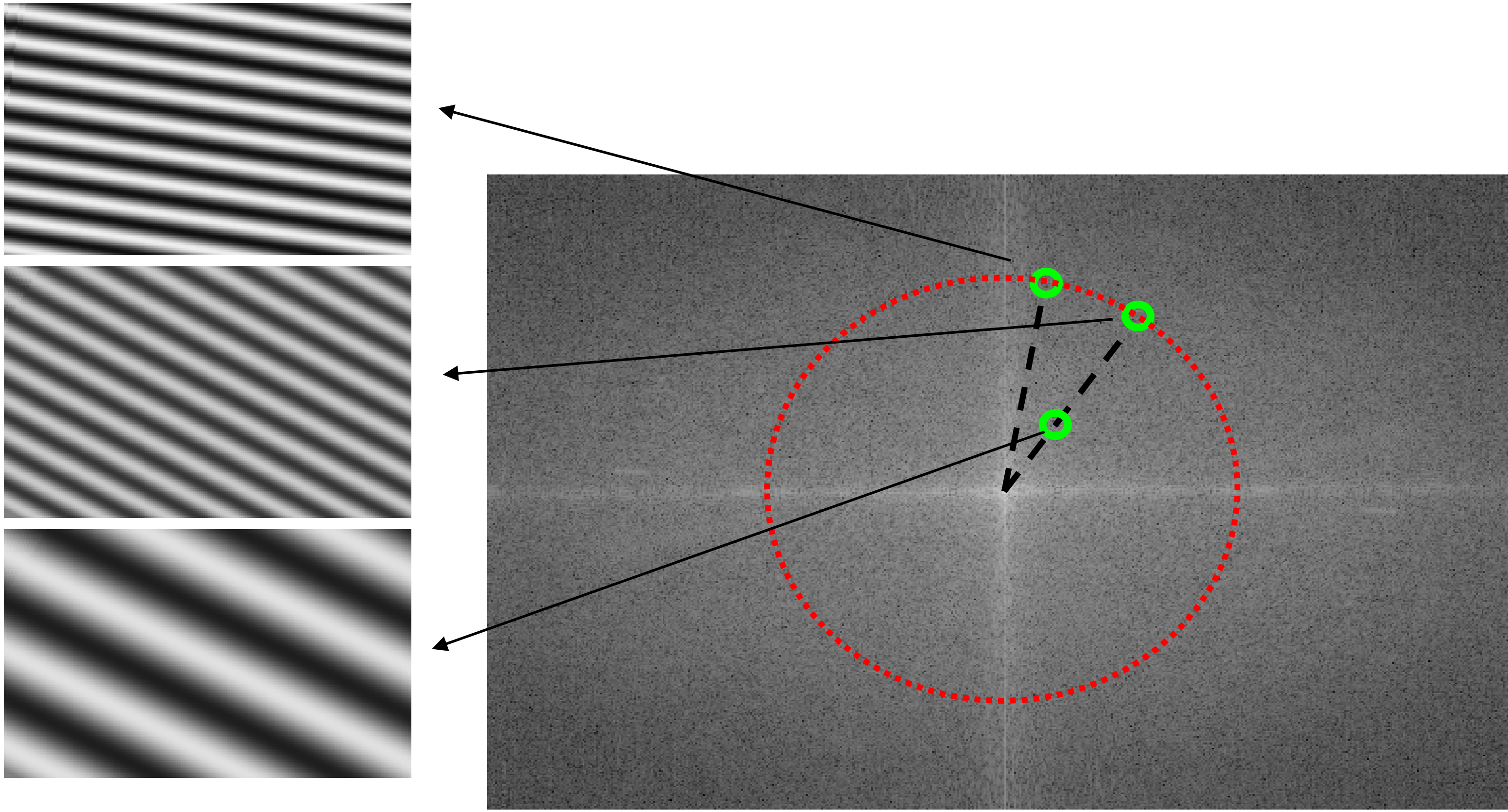
Zentriert, log. skaliert

# 9.4 Amplitude




[2]

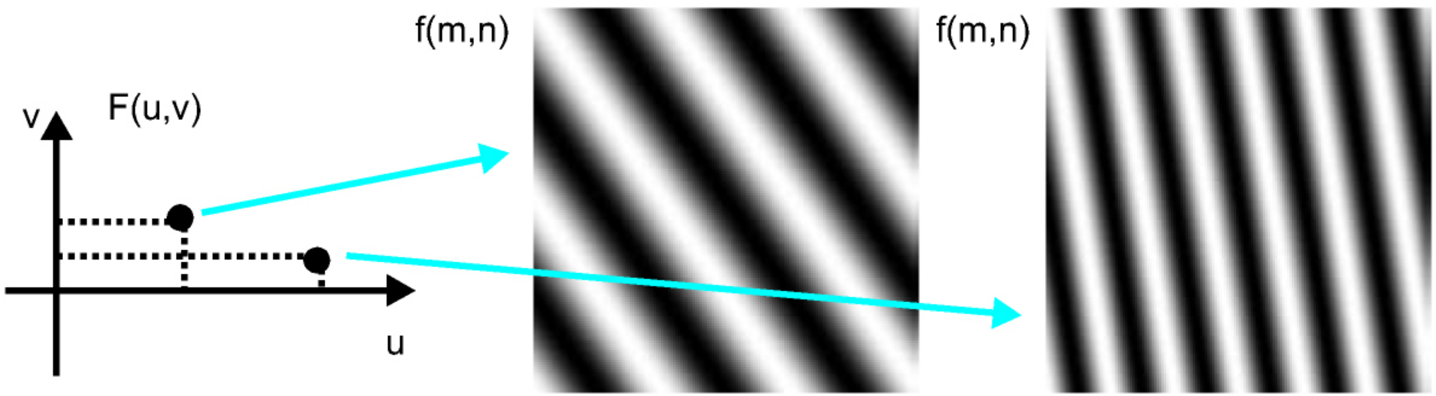
# 9.4 Amplitude



[1]

# 9.4 Amplitude

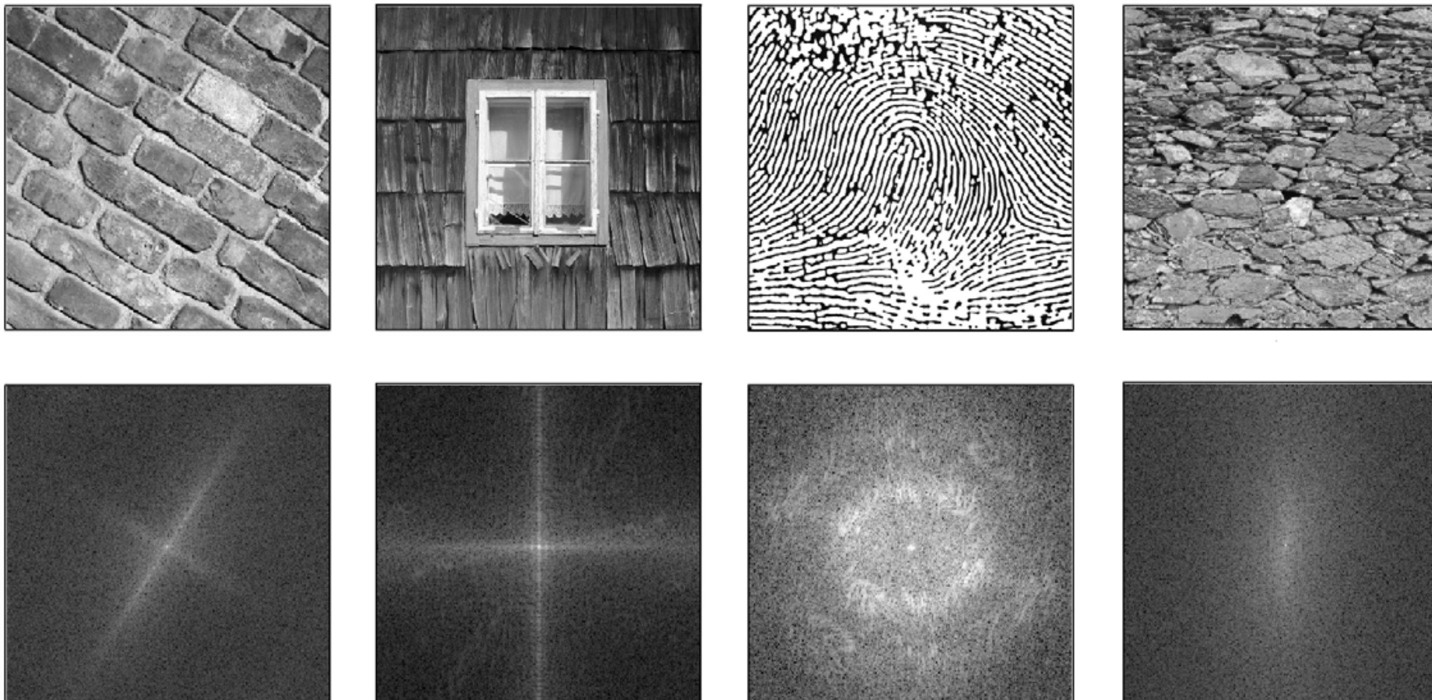
Wellenrichtung und Frequenz




[1]

Die Richtung einer Welle *F*(*u*,v) ist die Richtung des Vektors (*u*,v).
Die Frequenz ergibt sich aus dem Abstand von (*u*,v) zum Ursprung

# 9.4 Amplitude

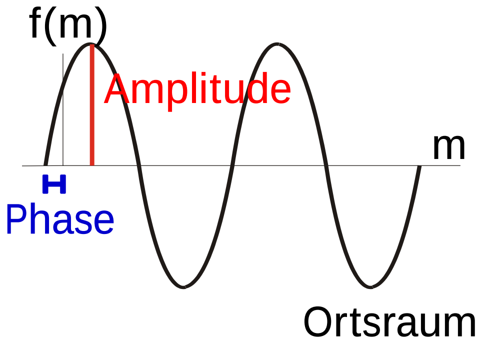


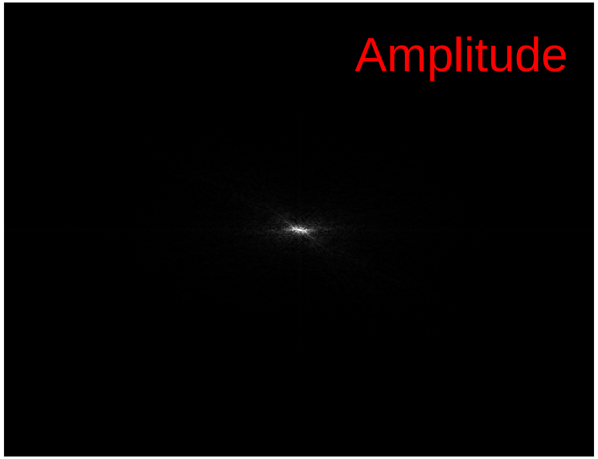
[2]

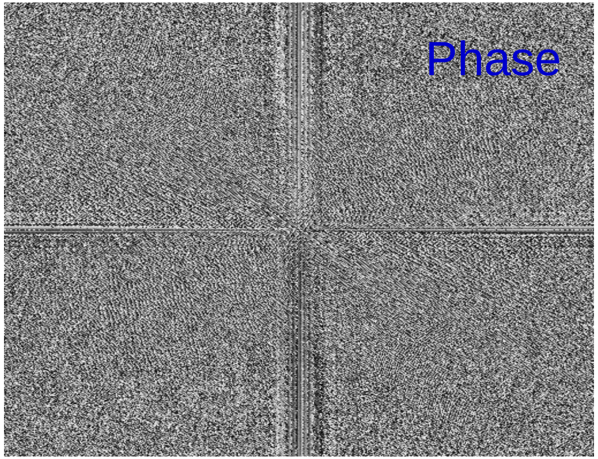
# 9.5 Phase

- Winkel zur reellen Achse
- trägt großen Anteil an der Bildinformation

$$Phasenwinkel = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(u,v)}{\mathrm{Re}(u,v)}\right)$$

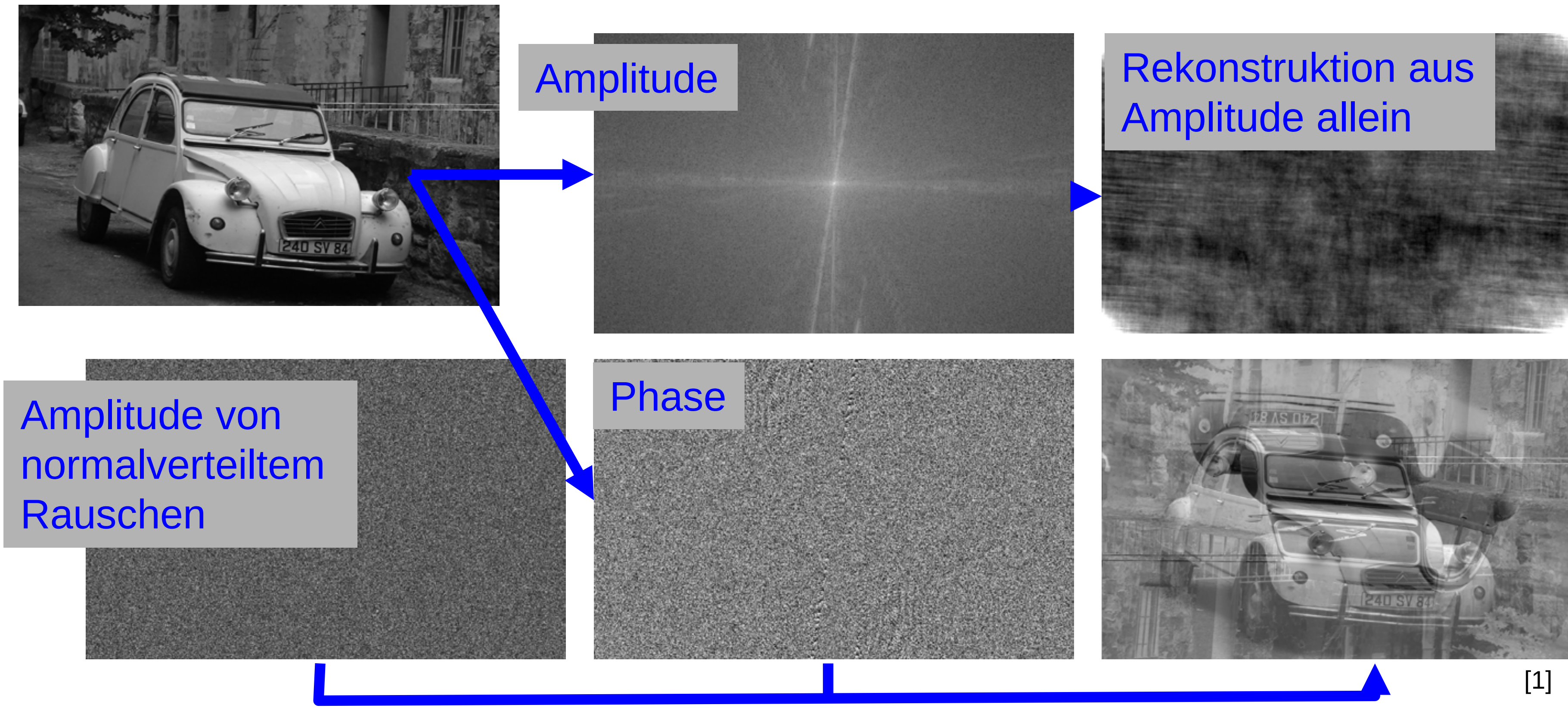



[1]

# 9.5 Phase



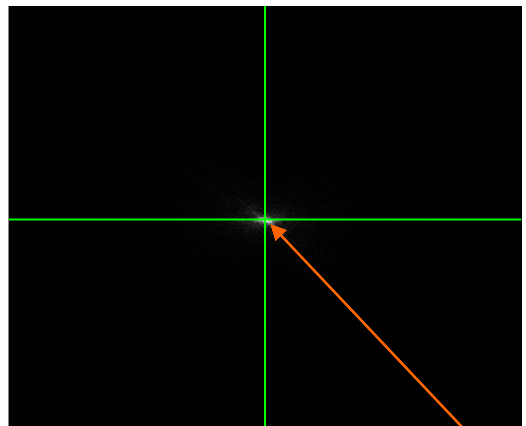
Amplitude
Rekonstruktion aus Amplitude allein
Amplitude von normalverteiltem Rauschen
Phase


[1]

# 9.6 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Mittelwert des Bildes: F(0,0) / Anzahl der Pixel

Amplitude

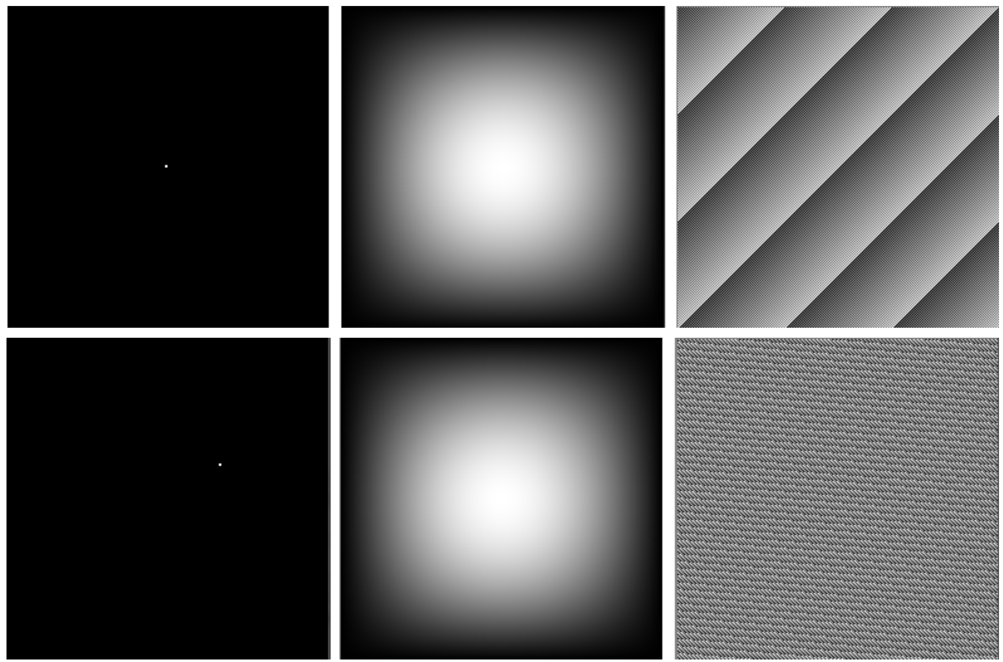


$\xrightarrow{F^{-1}}$

F(0,0) = (123.5 , 0.0)

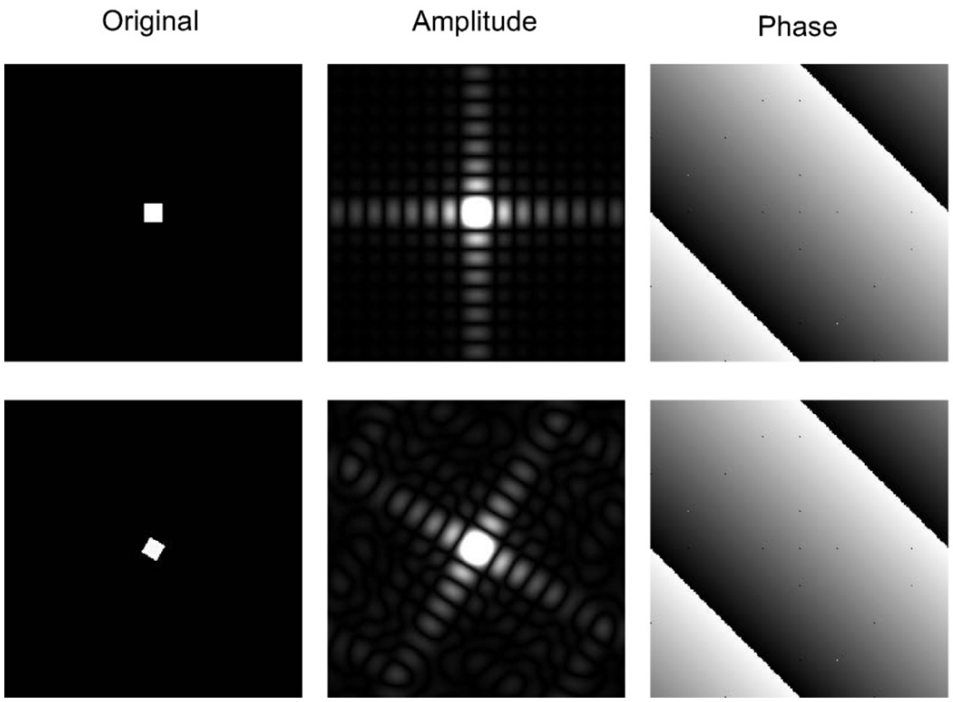
# 9.6 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Translation verursacht die Verschiebung der Phase, aber keine Änderung des Aplitudenspektrums.



# 9.6 Eigenschaften der Fourier-Transformation

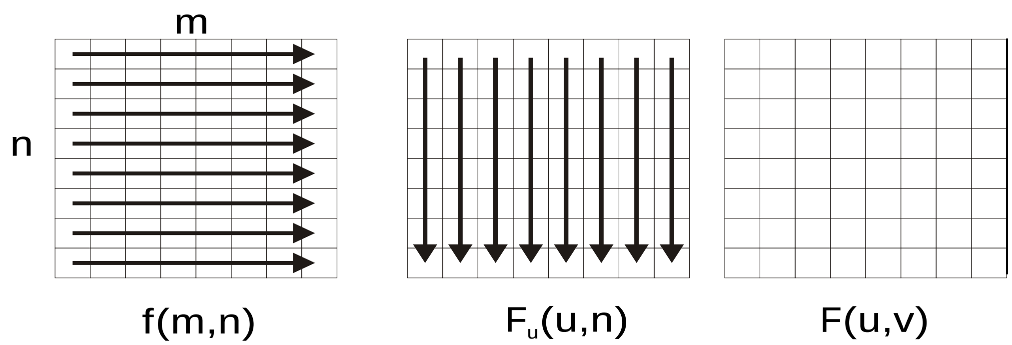
Amplitude wird in gleicher Weise rotiert wie das Bild, die Phase bleibt unverändert.




[1]

# 9.6 Eigenschaften der Fourier-Transformation

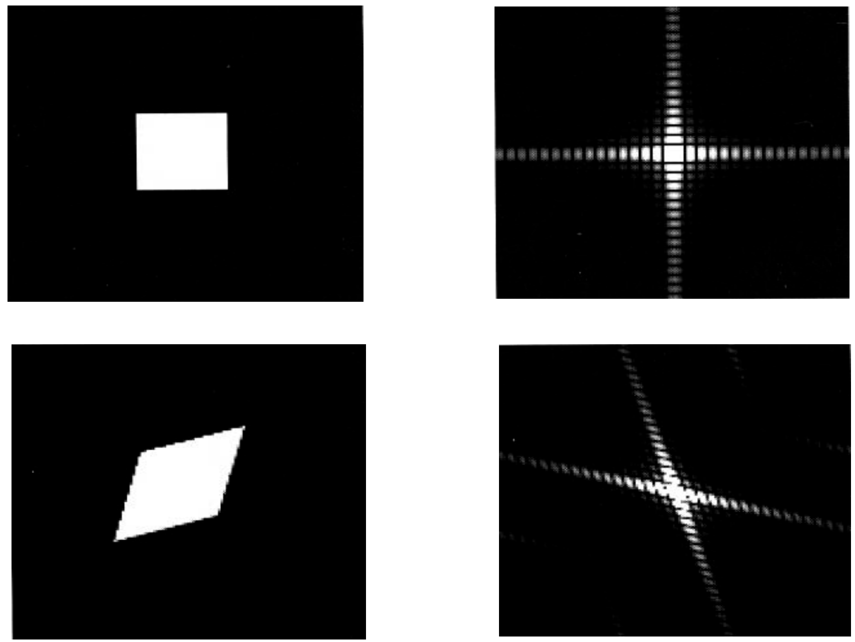
Die Fouriertransformation ist separabel, d.h., sie kann zunächst in x-Richtung und anschließend auf diesen Zwischenergebnissen in y-Richtung ausgeführt werden.




Reduziert den Berechnungsaufwand von $O(N^4)$ auf $O(N^3)$

# 9.6 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Ähnlichkeit



# 9.6 Eigenschaften der Fourier-Transformation

| | Ortsraum | Frequenzraum |
|---|---|---|
| Verschiebung | $f(x - x_0)$ | $F(u)e^{-iux_0}$ |
| Überlagerung | $f_1(x) + f_2(x)$ | $F_1(u) + F_2(u)$ |
| Invertierung | $f(-x)$ | $F^*(u)$ |
| Faltung | $f_1(x) * f_2(x)$ | $F_1(u) \cdot F_2(u)$ |
| Korrelation | $f_1(x) \otimes f_2(x)$ | $F_1(u) \cdot F_2^*(u)$ |
| Multiplikation | $f_1(u) \cdot f_2(u)$ | $F_1(u) * F_2(u)$ |
| Skalierung | $f(\alpha x)$ | $\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{u}{\alpha}\right)$ |

# 9.7 Anwendung der Fourier-Transformation

## Zusammenhang zwischen Ortsbereich und Frequenzbereich

Originalbild
S(x,y)

$\xrightarrow{FT}$

Fourier-transformiertes Bild
F(u,v)

Faltung mit der Maske
S(x,y)*M(x,y)

$M \xrightarrow{FT} H$

$M \xleftarrow{FT^{-1}} H$

Multiplikation mit der Filterfunktion
F(u,v)·H(u,v)

Gefilterte Fourier-transformierte
G(u,v)

$\xleftarrow{FT^{-1}}$

Ergebnis der Filterung
S‘(x,y)

# 9.8 Zusammenfassung

- Transformation zwischen Basen
- Invertierbarkeit von Transformationen
- Bedeutung von Frequenz, Amplitude und Phase
- Darstellung der Fourier-Transformierten
- Nutzung der Eigenschaften der Fourier-Transformation im Bereich der Merkmalsermittlung

# Bildquellen


[1] K. D. Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005

[2] W. Burger, M.J. Burge: Digitale Bildverarbeitung, Springer Verlag, 2005

[3] B. Jähne: Digitale Bildverarbeitung, Springer Verlag, 2005